La Biblia de las Matemáticas



ARITMÉTICA

ÁLGEBRA

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

CÁLCULO DIFERENCIAL

CÁLCULO INTEGRAL

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PRESENTACIÓN

Debido a la necesidad del hombre de conocer, dominar y sobrevivir en el mundo que le rodea, han surgido las ciencias, y entre ellas, la matemática. Los innumerables problemas relacionados con los números, han hecho que la ciencia Matemática abarque un campo muy amplio de estudio, por ello se ha dividido en diversas ramas, y dentro de las más importantes están la Aritmética, el Álgebra y la Geometría.

El origen de la Aritmética es de época muy remota; algunos autores creen que nació en la India; esta rama de la matemática estudia la cantidad representada por los números, se ocupa del cálculo por medio de los números y expone las propiedades comunes a todos los ellos.

La Aritmética consta de dos partes: la primera son las construcciones o formas de combinar los números; la otra parte se refiere a las comparaciones o manera de establecer sus relaciones.

El Álgebra es la parte de las Matemáticas que trata de la cantidad considerada en general, sirviéndose para representarla de letras u otros signos especiales. Esta rama de la Matemática no es de fácil definición. Históricamente, el Álgebra aparece vinculada con problemas numéricos cuya solución sólo se logra mediante determinadas combinaciones de las operaciones aritméticas.

La fisonomía actual del Álgebra se adquiere cuando los problemas que resuelve cobran la más amplia generalización mediante la introducción de los símbolos operatorios y de las letras. En este sentido el Álgebra ha recorrido tres etapas: Álgebra retórica, en la que las cuestiones se resuelven con palabras, sin símbolos; Álgebra sincopada, en donde aparecen los primeros símbolos, en especial mediante abreviaturas de las palabras comunes; y Álgebra simbólica, cuando se introducen los símbolos y las letras.

Precisamente con el uso sistemático de las letras, las cuestiones algebraicas se generalizan y la aritmética se universaliza.

Se atribuye el origen de la Geometría a la necesidad de medir las tierras de labranza después de la crecida del Nilo. Pero sin duda, no fue solamente la medida de la tierra el origen de los conocimientos geométricos: la necesidad de comparar las áreas y volúmenes de figuras simples, la construcción de canales y edificios; las figuras decorativas; los movimientos de los astros, han contribuido al nacimiento de esas reglas y propiedades geométricas.

Se considera que Pitágoras fue quien transformó el estudio de la Geometría en una enseñanza liberal, remontándose a los principios generales y estudiando los teoremas abstractamente y con inteligencia pura. Desde entonces se acumularon los teoremas y las propiedades, se crearon métodos, se analizaron los fundamentos, se plantearon problemas, logrando que la geometría griega abarcara un vasto conjunto de conocimientos.

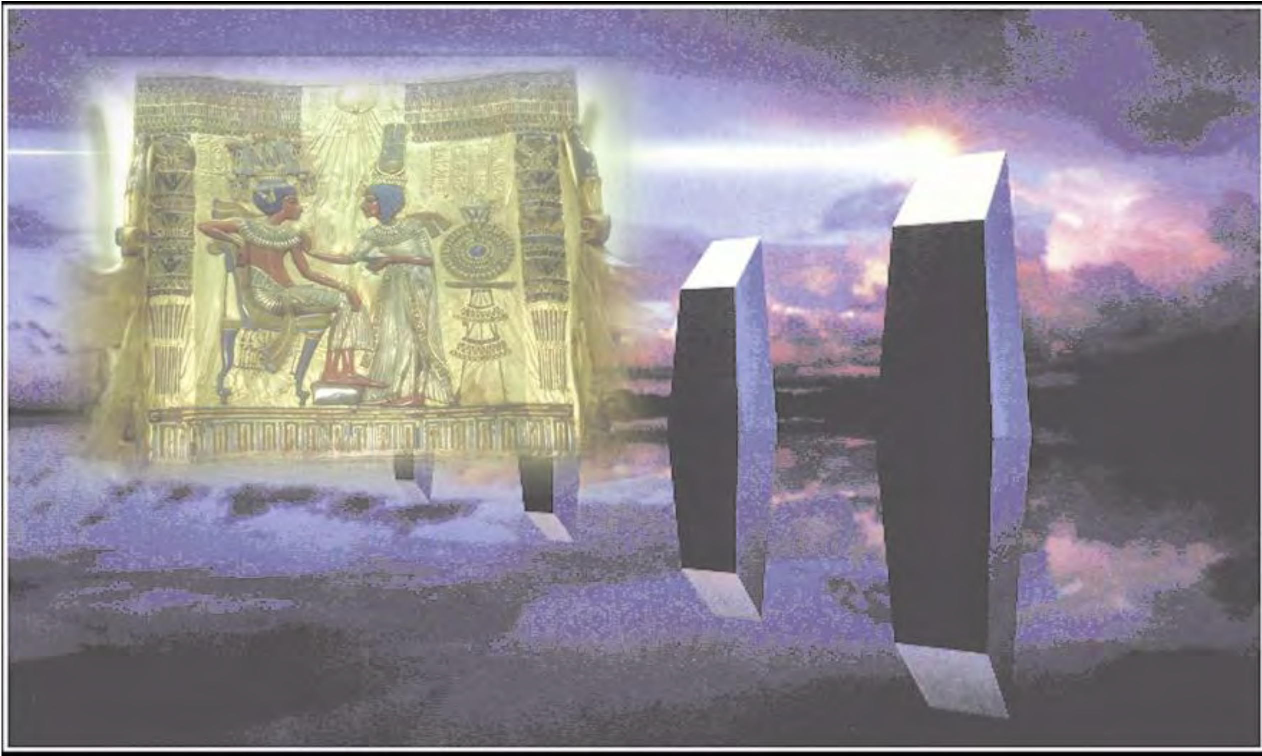
El contenido de la presente obra ha sido desarrollado de forma didáctica, buscando que los temas analizados y el lenguaje empleado en las explicaciones sean de fácil comprensión para los alumnos.

La estructura pedagógica de este libro es secuencial; los procedimientos de problemas y ejemplos se han desarrollado paso a paso. La inclusión de ejercicios y preguntas tiene como objetivo que los alumnos practiquen no sólo lo aprendido, sino que desarrollen su lógica basándose en los conocimientos presentados en el texto.

Aritmética



PÁGINA
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO



La fantasía y la magia egipcia empezaron a desaparecer al surgir los primeros conocimientos de las matemáticas. Uno de los documentos matemáticos más antiguos que existen es el papiro que se conoce con el nombre de Rhind o Ahmes y que data de 1650 antes de Cristo.

CAPÍTULO I

NATURALEZA: CUERPOS Y FENÓMENOS NATURALES

Por **naturaleza** se entiende el conjunto de **todo lo que existe** en el Universo. Un **cuerpo** es todo aquello que ocupa un lugar en el espacio: los seres humanos, los animales, las plantas, el agua, el aire, un libro, una silla, etcétera.

Los **fenómenos naturales** representan los cambios o transformaciones que sufren los cuerpos: el crecimiento de los animales y las plantas, la evaporación del agua, la caída de los cuerpos por atracción de la gravedad, la combustión de un pedazo de madera, etcétera.

SUPERFICIE

Lanzando al aire una pelota de plástico, imaginemos una onda esférica que parte de su centro, irradiando hasta rebasar el límite de la pelota. La **superficie** sería el límite donde termina la pelota y comienza el aire, pero sin incluir ni la pelota ni el aire, o bien la superficie sería el aire en contacto con la pelota. Así, la superficie es el límite que separa unos cuerpos de otros.

Si observamos los cuerpos en la naturaleza y separamos mentalmente sus otras características para fijarnos exclusivamente en sus superficies, llegaremos al concepto de superficie, el cual es general, pues no se refiere a la superficie de ningún cuerpo determinado, sino al atributo común que tienen todos los cuerpos, de contar con un límite que los separa de los demás.

VOLUMEN

El volumen de un cuerpo se determina por el lugar que ocupa en el espacio en un momento específico. Si observamos los cuerpos en la naturaleza y separamos mentalmente sus cualidades, a excepción de las que se refieren a sus volúmenes, podremos llegar a un concepto de volumen que es general, ya que no se refiere a ningún cuerpo determinado, sino al atributo común de todos los cuerpos para ocupar un lugar en el espacio.

PESO

Aunque no es posible determinar directamente la cantidad de materia que contiene un cuerpo, se sabe que mientras mayor es la masa material, mayor será la atracción que ejerce la gravedad sobre él, es decir, su peso es mayor. Esta relación entre la masa material y el peso es constante y proporcional.

Si observamos los cuerpos en la naturaleza y separamos mentalmente sus otras cualidades, para fijarnos exclusivamente en la atracción que ejerce la gravedad sobre ellos, llegaremos al concepto de peso.

TRAYECTO ENTRE DOS PUNTOS: LONGITUD Y DISTANCIA

Imaginemos dos puntos[1] cualesquiera en el espacio, por ejemplo A y B, y pensemos en varios trayectos que podría seguir uno de ellos, si fuese móvil, para llegar al otro. Cada uno de esos trayectos tiene una longitud determinada.

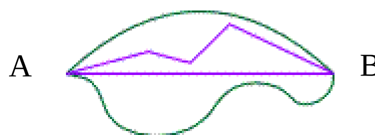


Figura 1

Si consideramos los trayectos que podrían recorrerse entre dos puntos, o entre muchos pares de puntos, y nos fijamos exclusivamente en que cada uno representa una longitud, separando mentalmente cualquier otra característica o cualidad, podremos llegar al concepto de longitud.

De todos los trayectos que se pueden recorrer entre dos puntos, el más corto tiene una especial significación y suele llamarse el menor trayecto, la menor distancia, o sencillamente la distancia entre dos puntos. En el caso de la figura 2 se lee como distancia AB.

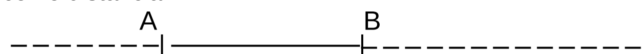


Figura 2

Si prolongáramos indefinidamente esta distancia sobre su misma dirección y en ambos sentidos, tendríamos una idea de lo que en Geometría se conoce como línea recta o simplemente recta. En este caso, la primitiva distancia entre dos puntos sería un segmento de esta recta (segmento AB, figura 2).

Si la distancia se prolongase en un solo sentido indefinidamente, tendríamos lo que se conoce como semirrecta (figura 3). Se dice que A es el origen de la semirrecta.



Figura 3

[1] Un punto es una simple posición en el espacio, por lo que carece de volumen.

DIMENSIONES

Tomemos un cuerpo de forma regular, como un ladrillo (figura 4) y determinemos tres pares de puntos: A y B; B y C; C y D.

Las distancias AB, BC y CD representan las dimensiones de ese cuerpo. La distancia AB representa la primera dimensión (largo); BC la segunda dimensión (ancho), y CD la tercera dimensión (profundidad).

En otros cuerpos similares también pueden considerarse tres pares de puntos tales que sus respectivas distancias sean perpendiculares entre sí en el espacio, y éstas representarán las dimensiones de esos cuerpos.

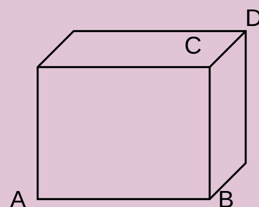


Figura 4

Todos los cuerpos poseen tres dimensiones, aunque en muchos esto no sea tan fácil de determinar como en el caso del ladrillo; en los cuerpos esféricos, como una bola de billar, o de forma irregular, como una planta de lechuga (figura 5) resulta un poco más difícil determinar estas tres dimensiones.



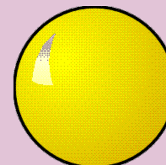


Figura 5

CANTIDAD DE MATERIA

MASA MATERIAL

Los cuerpos suelen definirse también como porciones limitadas de materia[2], y esto no contradice, en modo alguno la definición de los cuerpos que se dio antes.

A la cantidad de materia que tiene un cuerpo se le llama **masa material**.

Tomemos dos pedazos de hierro con el mismo volumen a temperatura ambiente. Ambos tienen la misma cantidad de materia (la misma masa material), dado que es igual la sustancia que los forma (hierro). Si aplicamos calor a uno de ellos, por ejemplo el B, aumentará de volumen al producirse el fenómeno físico llamado **dilatación de los cuerpos por el calor**. Tenemos entonces dos cuerpos, A y B', con la misma cantidad de materia y distinto volumen.

Si lográramos disminuir en el cuerpo caliente B' la porción aumentada hasta igualar su volumen con el cuerpo A, tendríamos dos cuerpos con el mismo volumen y distinta cantidad de materia (figura 6).

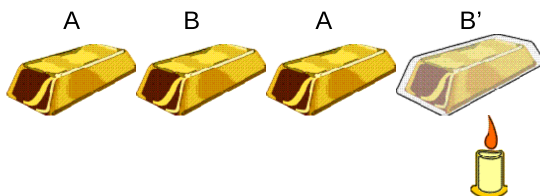


Figura 6

Si observamos los cuerpos en la naturaleza y separamos mentalmente sus otras cualidades, para fijarnos exclusivamente en el atributo común a todos los cuerpos de que están formados por materia, llegaremos al concepto de **masa material**.

[2] La noción de materia es también un concepto intuitivo. Sin embargo, debe pensarse en la sustancia de que están hechas todas las cosas.

PLURALIDAD

Varios cuerpos que se encuentran en una misma habitación en un momento dado constituyen lo que se llama un **conjunto de cuerpos**.

Imaginemos conjuntos de cuerpos, como los libros que están sobre una mesa o las frutas que hay en una canasta. Podemos imaginar también conjuntos de entes inmateriales, como las ideas de un razonamiento.

Si observamos los conjuntos de cuerpos o entes inmateriales en la naturaleza y separamos mentalmente sus características particulares para fijarnos exclusivamente en su condición como un conjunto de cosas, llegaremos al concepto de **pluralidad**. El concepto de pluralidad es intuitivo y coincide con el concepto genérico de conjunto, por lo que reservaremos el término específico **conjunto** para designar los conjuntos de cosas y el de pluralidad para su acepción genérica.

Así, pluralidad es un concepto general que no se refiere a la pluralidad de ningún conjunto determinado, sino al atributo común de estar integrados por entes materiales o inmateriales.

Podemos pensar en ciertos **cuerpos** como pluralidades de naranjas, pluralidades de lápices, pluralidades de puntos, que siguen siendo generales, pues no se refieren a ningún conjunto determinado de naranjas, ni de lápices, ni de puntos; pero su generalidad es menor que la del concepto de pluralidad, porque excluye de su connotación todos los conjuntos que no sean de naranjas, lápices o puntos.

CONCEPTOS ABSTRACTOS

La **abstracción** es el proceso intelectual mediante el cual separamos mentalmente las cualidades particulares de varios objetos para fijarnos exclusivamente en uno o varios atributos comunes[3].

Volumen, superficie, longitud, masa material, peso y pluralidad de cosas, son conceptos abstractos, debido a que son el resultado de abstracciones. Otro concepto abstracto muy importante es el de número.

[3] En rigor, la operación mental que nos conduce a este concepto se llama generalización simple. La abstracción es sólo el instrumento mental con el cual aislamos los atributos que queremos recoger en ese concepto.

MAGNITUDES Y CANTIDADES

Los conceptos abstractos volumen, superficie, longitud, masa material, peso, pluralidad de cosas, tiempo, temperatura, velocidad, fuerza y amplitud angular reciben el nombre de **magnitudes**.

Y los casos específicos o concretos, a los que hemos llegado por observación y abstracción, se llaman **cantidades**. Así se consideran cantidades: el volumen **de este libro**, la superficie **de mi pelota**, la longitud **de aquel camino**, los alumnos **de esa aula**, el tiempo que ha pasado desde que **nació Newton**, la velocidad de **ese automóvil**, etcétera.

Nótese que dos o más casos particulares correspondientes a la misma magnitud pueden compararse, lo que permite determinar si son iguales. Se pueden comparar, por ejemplo, la longitud de un lápiz con la longitud de una regla, y determinar si esas longitudes son iguales o desiguales.



Figura 7

Así pues, **magnitudes** son los conceptos abstractos en cuyos estados particulares (cantidades) puede establecerse la igualdad y la des-igualdad, y **cantidades** son los estados particulares de las magnitudes, y ambos son a su vez conceptos abstractos.

TIPOS DE MAGNITUDES

Según su naturaleza, las magnitudes pueden ser **continuas** o **discontinuas.**

Las continuas son aquellas que, como la longitud y el volumen, dan idea de totalidad, sin partes o elementos naturales identificables. Otras magnitudes continuas son: la superficie, la masa material, el tiempo, la presión, la fuerza electromotriz, el peso, la temperatura y la velocidad.

Las discontinuas son las pluralidades de cosas, como las pluralidades de los libros, mesas, rectas, etc., y también se les llama magnitudes discretas.

Por otra parte, las magnitudes también se dividen en escalares y vectoriales.
Las escalares son las que no poseen dirección, como la longitud, el peso, el área, el volumen o el tiempo, y quedan completamente definidas por un **número** que expresa su medida. De este modo, la longitud es una magnitud escalar, porque al decir que una regla, por ejemplo tiene 20 cm queda perfectamente determinada su longitud.

Las vectoriales son las que poseen dirección y sentido, como la fuerza y la velocidad. Para que estas magnitudes queden definidas no basta conocer su valor, representado por un número, sino que es necesario, además conocer su dirección y sentido. Si decimos, por ejemplo, que la velocidad de un objeto móvil es de 4 cm por segundo (lo cual quiere decir que recorre 4 cm en cada segundo), con esto, no queda definida la velocidad, pues se debe especificar la **dirección** que sigue el objeto en su movimiento (por ejemplo vertical) y en qué **sentido** se mueve, (por ejemplo, de abajo hacia arriba).

TIPOS DE CANTIDADES

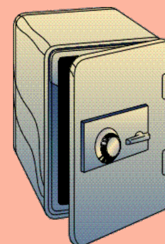
Dependiendo de los estados particulares de una u otra clase de magnitud, las cantidades también pueden ser continuas, discontinuas, escalares o vectoriales.



Las **continuas** son los estados particulares de magnitudes continuas, como el volumen de una naranja, la longitud de una carretera, la temperatura del cuerpo o la velocidad de un cohete.



Las **discontinuas** o **discretas** son los estados particulares de magnitudes discontinuas, como los alumnos de un colegio, las hojas de un libro o las pelotas que hay en una caja.
Las **escalares** son los estados particulares de las magnitudes escalares, como la longitud de un lápiz, el área de una sala o el volumen de un cuerpo.



Las **vectoriales** son los estados particulares de las magnitudes vectoriales, como la velocidad de un corredor o la velocidad de un automóvil.

Por último, se conoce también las cantidades homogéneas, de una misma magnitud, como el volumen de una piedra y el volumen de una caja y las cantidades heterogéneas, de distintas magnitudes, como la longitud de un terreno y el peso de una persona.

Figura 8

CIENCIA MATEMÁTICA

Al considerar las cantidades, es decir, los estados particulares de las magnitudes, podemos apreciar no sólo que pueden ser objeto de **comparación** y determinar una **igualdad** o **desigualdad** entre esos estados, sino también las **variaciones** que puede sufrir un mismo estado para adoptar otros, en virtud de los fenómenos (distancia entre dos objetos móviles que aumenta o disminuye: volumen de un objeto sólido que crece por la acción de calor; presión de un gas encerrado que se altera al variar su volumen, etcétera).

La **ciencia matemática** estudia tanto las magnitudes como las cantidades, que son las variaciones de aquélla en el tiempo y el espacio (estados particulares).

EJERCICIOS

1. Menciona cuatro ejemplos de cuerpos animados, cuatro de cuerpos inanimados y tres de cuerpos extraterrestres.

2. ¿Pueden considerarse cuerpos una piedra y una gota de agua? ¿Qué diferencia hay entre ellos?

3. ¿Existe en la naturaleza algún cuerpo que carezca de volumen?

4. ¿Qué diferencia hay entre la superficie de un cuerpo sólido y la de uno líquido?

5. ¿Qué se quiere decir con que el concepto de superficie es general?

CONCEPTOS INTUITIVOS

En toda consideración sobre el carácter de una ciencia, hay que distinguir entre los objetos y sus relaciones, y entre las propiedades de los objetos y sus relaciones.

El objeto, para la ciencia, no debe ser necesariamente una cosa material. Un objeto es un libro, pero también lo es el espacio, un razonamiento o un punto geométrico. Es decir, se consideran objetos aquellos datos o sistemas de datos que se presentan a nuestra experiencia con cierta perdurabilidad o identidad a través del tiempo.

La inteligencia humana conoce los objetos de diversas maneras. Hay conocimientos puramente intuitivos, es decir, aquellos que logramos por intuición sensible, por contacto directo con los objetos sin que medien otros conocimientos anteriores. La mente los capta sin razonamiento alguno, como es el caso del conocimiento de espacio, materia, unidad, pluralidad, ordenación y correspondencia, entre otros.
Estos conocimientos se conocen como **conceptos primitivos** o **intuitivos** y también como **nociones intuitivas**, y son muy importantes como fundamento de la ciencia matemática.

CÓMO SE CONSTITUYE LA CIENCIA MATEMÁTICA CLASIFICACIÓN DE LA CIENCIA MATEMÁTICA

Los criterios que generalmente se fijan para clasificar la ciencia matemática en los niveles elemental y superior son un tanto arbitrarios.

Las tres ramas más comunes de la ciencia matemática son la Aritmética, el Álgebra y la Geometría. Sin embargo, siguiendo un criterio cuantitativo (suma total de temas estudiados) y otro cualitativo (complejidad de los temas objeto de estudio), cualquiera de estas tres ramas presenta una serie de niveles que pueden orientarse hacia lo elemental o hacia lo superior.

DEFINICIONES

Las definiciones expresan una noción compleja mediante la enumeración de otras nociones más simples que la integran. Por ello se dice que los objetos representados por las nociones intuitivas no son definibles, ya que no existen nociones previas que las integren. Veamos como ejemplo estas definiciones: **Cantidad es el estado de una magnitud y Triángulo es el polígono de tres lados.**

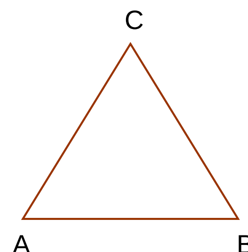


Figura 9

PROPIEDADES

Las propiedades de los conceptos primitivos y de los conceptos definibles forman, por decirlo así, toda la armazón teórica de la ciencia matemática y se enuncian como proposiciones lógicas, evidentes o no. Estas propiedades son los postulados y los teoremas.

POSTULADOS

Así como existen los conceptos primitivos, hay ciertas propiedades fundamentales de carácter también intuitivo y, por lo tanto, de captación espontánea, que son los postulados.

El **postulado** es una verdad intuitiva con suficiente evidencia para ser aceptada como tal. Veamos estos ejemplos de postulados: **Todo objeto es igual a sí mismo y La suma de dos números es única.**

COROLARIO

El corolario es una verdad derivada como consecuencia de un teorema.

LEMA

El lema es un teorema que debe anteponerse a otro para su demostración.

RECÍPROCO

El recíproco de un teorema es otro teorema cuya hipótesis es la tesis del primero (llamado teorema directo) y cuya tesis es la hipótesis del teorema directo. Veamos estos ejemplos:

Teorema **directo:** Si un número termina en cero o en cinco **(hipótesis)**, será divisible por cinco **(tesis)**.

Teorema recíproco: Si un número es divisible por cinco (**hipótesis**), tiene que terminar en cero o en cinco (tesis).

Pero no siempre los recíprocos son ciertos, pues para ello deben cumplir determinadas condiciones.

ESCOLIO

Es una advertencia u observación sobre alguna cuestión matemática.

TEOREMA

Otras propiedades han surgido a partir de un corto número de propiedades intuitivas y tienen un carácter eminentemente deductivo; se requiere de este tipo de razonamiento lógico (demostración) para ser aceptados con el carácter de verdades absolutas. Estos son los teoremas.

Teorema es, pues, una verdad no evidente pero sí demostrable. Veamos estos ejemplos de teoremas: **Si un número termina en cero o en cinco es divisible por cinco** y **Si un número divide a varios otros también divide su suma**.

Tanto el teorema como el postulado tienen una parte condicional (hipótesis) y una conclusión (tesis) que se supone debe cumplirse en caso de que la hipótesis tenga validez. En el postulado esto se acepta tácitamente, pero en el teorema es necesaria la demostración que consiste en una serie de razonamientos eslabonados que se apoyan ya sea en propiedades intuitivas (postulados), en otros teoremas ya demostrados o en ambos.

PROBLEMA

Un problema es una cuestión práctica en la que se deben determinar **cantidades desconocidas llamadas incógnitas**, por medio de sus relaciones con **cantidades conocidas, llamadas datos del problema.**

	Conceptos	**Propiedades**
Captación Espontánea	Conceptos intuitivos	**Postulados**
Elaboración racional	**Definiciones**	**Teoremas**



En la región mesopotámica, la escritura utilizada era la cuneiforme. En la ilustración se muestran dos figuras protectoras del palacio y una tablilla realizada en arcilla con escritura de esa época.

CAPÍTULO II

LA ARITMÉTICA Y SU OBJETO

El concepto de **número natural** ha sufrido una serie de ampliaciones a través del desarrollo de la ciencia matemática, una de las cuales consiste en considerar al cero como un número que representaría la única propiedad común a todos los conjuntos nulos o carentes de elementos. Otras ampliaciones se refieren a los números fraccionarios y a los números irracionales.

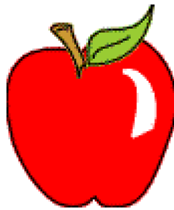
Una nueva ampliación nos lleva al concepto de número negativo, concepto que transforma todo el sistema de los números naturales, fraccionarios e irracionales y que constituyen uno de los fundamentos del cálculo algebraico. Los números naturales, así como los fraccionarios e irracionales, reciben el nombre de **números reales**. Una considerable e importantísima ampliación del campo numérico tiene lugar con la introducción de los números no reales (complejos).

Suele llamarse número entero (positivo o negativo) al número real que no es fraccionario ni irracional, de modo que los números naturales son los números enteros positivos. La Aritmética General tiene por objeto el estudio de los números (naturales o no), y la Aritmética Elemental como la ciencia matemática que tiene por objeto el estudio de los números reales positivos. $\mathbb{R}$:

$\mathbb{N}$ enteros +; $\mathbb{Q}$ racionales $\frac{x}{y}$; $\mathbb{I}$ irracionales. Complejos no reales.

NOCIONES SOBRE CONJUNTOS

UNIDADES



La unidad es **un sólo** ser u objeto, considerado aislada mente, como una persona, una silla, un pizarrón o un libro, los cuales son de muy diversa naturaleza y propiedades Figura 10 , pero todos tienen en común que son una sola cosa de su especie. Aquí efectuamos también una abstracción.

RELATIVIDAD DE CONJUNTO Y ELEMENTO

Los términos **conjunto** y **elemento** son relativos. Lo que es conjunto con relación a unidades inferiores, puede ser considerado como unidad con relación a un conjunto superior. Así, una **docena** es un conjunto con relación a las doce cosas que la integran; pero con relación a una **gruesa**, que consta de doce docenas, la docena es un elemento.

CLASE DE CONJUNTOS

Los conjuntos considerados aisladamente, pueden ser homogéneos o heterogéneos; ordenables o no ordenables; finitos o infinitos; de elementos naturales o de elementos convencionales, y al compararlos puede suceder que sean iguales o no iguales; coordinables o no coordinables.

CONJUNTOS ORDENABLES Y NO ORDENABLES

Siempre que en un conjunto se pueda fijar un criterio de ordenación tal que permita determinar la posición de un elemento con respecto a los demás, se dice que es **ordenable**. Los alumnos de un aula constituyen un conjunto ordenable con respecto a su estatura, edad o aprovechamiento en matemática.
Por otra parte, el conjunto **no ordenable** es aquél en el cual no se puede fijar tal criterio. Las moléculas de un gas constituyen un conjunto no ordenable, debido a que el movimiento constante que realizan no permiten establecer una ordenación entre ellas.

PLURALIDAD, CONJUNTO Y ELEMENTO

Pluralidad es un concepto genérico y conjunto, es un concepto específico.

Se pueden considerar las **pluralidades** (genéricamente hablando) como magnitudes discontinuas y los **conjuntos** como las cantidades correspondientes a esas magnitudes. Así, se puede hablar en general de la **pluralidad de libros** (magnitud) y del **conjunto** que forman los libros de una biblioteca (cantidad).

Los entes que integran un conjunto pueden ser materiales o inmateriales. Los alumnos de una clase, los libros de una biblioteca, las naciones de América o los miembros de una familia son conjuntos formados por entes materiales; mientras que los puntos de una recta, las rectas de un plano, los vértices de un polígono o las ideas de un razonamiento son conjuntos formados por entes inmateriales.

Cada uno de los seres u objetos que integran un conjunto es un **elemento** de ese conjunto. Así, cada uno de los alumnos de una clase es un elemento del conjunto formado por los alumnos de esta clase; cada uno de los vértices de un polígono es un elemento del conjunto formado por todos los vértices de dicho polígono. Como puede verse, la noción de elemento coincide con la de unidad.

Unidad, conjunto y pluralidad son todos conceptos intuitivos.

Para ulteriores desarrollos es de suma importancia tener en mente el siguiente **Postulado Fundamental de la Aritmética**:

A todo conjunto se le puede añadir o quitar uno de sus elementos.

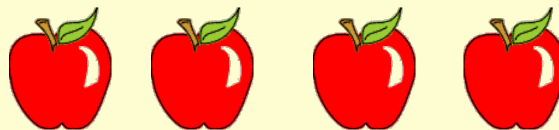


Figura 11

CONJUNTOS HOMOGÉNEOS O HETEROGÉNEOS

Se dice que un conjunto es **homogéneo** cuando los elementos que lo integran son de la misma especie, y **heterogéneo** cuando no son de la misma especie. Sin embargo, **el concepto de especie** está sujeto al criterio de homogeneidad que se considere, mismo que debe fijarse claramente.



Figura 12

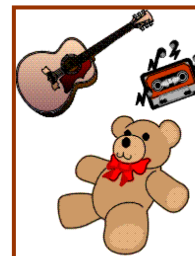


Figura 13

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Cuando todos los elementos de un conjunto ordenable, sean o no entes materiales, pueden ser considerados uno por uno, real o imaginariamente en determinado tiempo, se dice que el conjunto es **finito**. Por ejemplo, el conjunto de las naciones de América es finito, porque podemos enunciarlas a todas, una por una, en un tiempo determinado; también el conjunto de los alumnos de un aula es finito, porque se puede designar a cada uno por su nombre en un tiempo determinado.

Por su parte, son **infinitos** los conjuntos en los que no se cumplen las condiciones anteriores, es decir, aquellos en los cuales si se intentase considerar uno por uno sus elementos, real o imaginariamente, esta operación no tendría fin en el tiempo. Son infinitos los puntos de una recta; las rectas que pueden pasar por un punto; los diámetros de una circunferencia, etcétera.

CONJUNTOS DE ELEMENTOS NATURALES Y DE ELEMENTOS CONVENCIONALES

Son **conjuntos de elementos naturales** las cantidades discontinuas, como los lápices de una caja o los empleados de una oficina, donde los elementos son perfectamente identificables de un modo natural.
Cuando una cantidad continua ha sido real o imaginariamente **seccionada** en elementos artificiales iguales, el conjunto de estos elementos se comporta de un modo similar a las cantidades discontinuas, por lo que forman un **conjunto de elementos convencionales**.

CONJUNTOS IGUALES, CONJUNTOS PARCIALES Y CONJUNTOS NO IGUALES

Al comparar dos conjuntos **K** y **L** puede suceder:

1° Que todo elemento del conjunto **K** esté en el conjunto **L** y viceversa.

2° Que **K** y **L** tengan alguno o algunos elementos comunes.

3° Que **K** y **L** no tengan ningún elemento común.

En el primer caso puede decirse que los conjuntos son **iguales**. El conjunto formado por las letras A, B, C y D es igual al conjunto formado por las letras D, C, B y A.

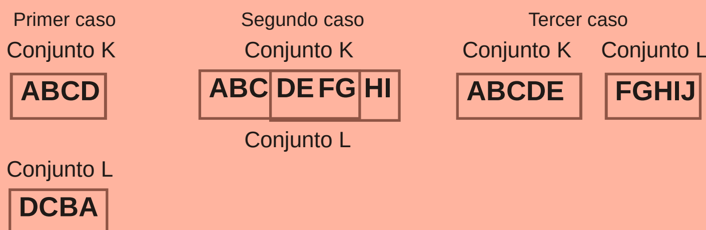


Figura 14

En el segundo caso puede decirse que el conjunto formado por los elementos comunes es **parcial** con respecto a **K** y **parcial** con respecto a **L**. Así, el conjunto formado por las letras D, E, F y G es parcial con respecto al conjunto formado por las letras A, B, C, D, E, F y G, y también es parcial con respecto al conjunto formado por las letras D, E, F, G, H e I.

En el tercer caso, el conjunto **K** y el conjunto **L** son **no iguales**. El conjunto formado por las letras A, B, C, D y E, es un conjunto **no igual** al formado por las letras F, G, H, I y J.

EJERCICIOS

1. Menciona cuatro conjuntos que conozcas.
2. Menciona tres ejemplos de unidades materiales.
3. Menciona dos ejemplos de unidades inmateriales.
4. Menciona cinco ejemplos de conjuntos iguales.

CORRESPONDENCIA ENTRE ELEMENTOS: CONJUNTOS COORDINABLES

Este ejemplo ilustra el concepto de correspondencia:

En la sala de una casa hay un conjunto de personas integrado por Luis, Juan, Pedro y Jorge, y en la percha un conjunto de abrigos. Al marcharse, cada persona toma un abrigo, de este modo:

Luis....	abrigo	negro
Juan.......	abrigo	carmelita
Pedro.....	abrigo	gris
Jorge....	abrigo	azul

Cada persona ha tomado un abrigo y cada abrigo pertenece a una persona distinta, sin que quede ninguna persona sin abrigo ni ningún abrigo sin dueño. En este caso decimos que entre el conjunto de las personas y el conjunto de los abrigos existe una **correspondencia perfecta** o **biunívoca**, también llamada **coordinación**.

Al establecer una coordinación se califica como **elementos homólogos** a los que se corresponden. En el ejemplo son elementos homólogos: Luis y abrigo negro; Juan y abrigo carmelita; Pedro y abrigo gris; Jorge y abrigo azul.

Generalizando la noción ilustrada con el ejemplo anterior, podemos decir lo siguiente:

Dos conjuntos son coordinables cuando entre sus elementos puede establecerse una correspondencia biunívoca o perfecta, de modo que a cada elemento del primer conjunto corresponda uno y sólo un elemento del segundo conjunto, y a cada elemento del segundo conjunto corresponda uno y sólo un elemento del primer conjunto.

Los conjuntos coordinables también son conocidos como **equivalentes**.

POSTULADOS SOBRE COORDINACIÓN DE CONJUNTOS

1) Si a cada uno de dos conjuntos coordinables se le añade o suprime un elemento, resultan conjuntos coordinables.

Conjuntos	+ 1er. Caso	- 2do. Caso
A B C D	A B C D E	A B C
| | | |	| | | | |	| | |
A B C D	A B C D E	A B C

2) Dados dos conjuntos finitos, o son coordinables o uno de ellos es coordinable con parte del otro.

Consideremos un conjunto de frascos y un conjunto de tapas. Si intentamos colocar una tapa a cada frasco, puede suceder lo siguiente:

a) Cada frasco tendrá su tapa.
b) Algunos frascos quedarán sin tapa.
c) Después de tapar todos los frascos sobrarán algunas tapas.

1er. Caso **2do. Caso** **3er. Caso**

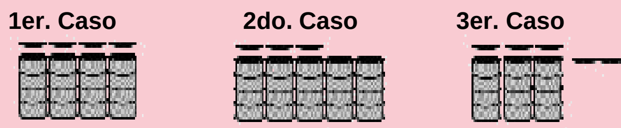


Figura 15

En el primer caso los dos conjuntos son coordinables.

En el segundo caso una parte del conjunto de frascos es coordinable con el conjunto de tapas.

En el 3er. caso una parte del conjunto de tapas es coordinable con el de frascos.

3) Si dos conjuntos finitos están coordinados de cierta manera, la coordinación siempre será posible de cualquier otro modo que se intente.

A continuación exponemos tres modos (de los muchos que hay) de coordinar los conjuntos ABCDE y MNOPQ:

1	2	3
A B C D E	A B C D E	C D A B E
| | | | |	| | | | |	| | | | |
M N O P Q	M O N P Q	O P N M Q

Conclusión: Si dos conjuntos finitos no son coordinables de alguna forma, la coordinación nunca será posible, sin importar el modo en que se intente.

Repartimos un conjunto de lápices dando uno a cada alumno y al final quedan varios alumnos sin lápices, lo cual indica que el conjunto de lápices no es coordinable con el conjunto de alumnos.

Si recogemos todos los lápices y los distribuimos de otro modo, dando siempre uno a cada alumno, es evidente que al final seguirá quedando el mismo número de alumnos sin lápices.

CONJUNTOS NO COORDINABLES

Cuando no puede establecerse una correspondencia perfecta entre dos conjuntos porque **sobran** elementos de uno de ellos, se les llama **no coordinables**. Si en una clase entra un conjunto de alumnos y después de ocupar todas las sillas del aula quedan algunos de pie, el conjunto de alumnos no es coordinable con el conjunto de sillas que hay en el aula.

EJERCICIOS

1. Explica cuándo no son coordinables un conjunto de alumnos y un conjunto de sobresalientes; un conjunto de soldados y un conjunto de rifles; un conjunto de automóviles y un conjunto de choferes.

2. Coordina de todas las formas posibles conjuntos formados por las letras de las palabras casa y mesa; rosal y plato.

3. ¿Son coordinables los conjuntos de las letras cama y mesa; Adán y nada; tabla y bala; toca y tacón?

4. Explica cuando serán coordinables un conjunto de sombreros y un conjunto de personas; un conjunto de sillas y un conjunto de personas.

CARÁCTERES DE COORDINACIÓN DE CONJUNTOS

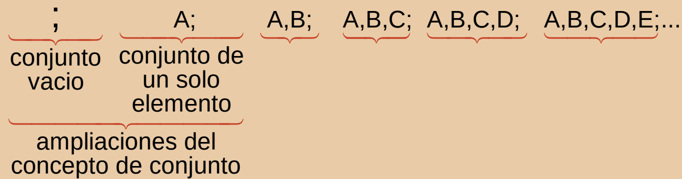
Carácter idéntico: Todo conjunto es coordinable consigo mismo.

Carácter recíproco: Si un conjunto es coordinable con otro, ese otro conjunto es coordinable con el primero.

Carácter transitivo: Si un conjunto es coordinable con otro y éste es coordinable con un tercero, el primero es coordinable con el tercero.

SUCESIÓN FUNDAMENTAL DE CONJUNTO

La serie o sucesión de conjuntos finitos



en el cual cada conjunto tiene un elemento más que el conjunto anterior y en la que puede suponerse que **A** es **un conjunto de un solo elemento**, que tiene un elemento más que el conjunto nulo anterior o **conjunto que carece de elementos**, representa la **sucesión fundamental de los conjuntos finitos**.

Si añadimos un elemento a un conjunto cualquiera de la sucesión fundamental, que eventualmente quisiera considerarse como el último, obtenemos uno mayor (siguiente). Y al añadir a éste un elemento más, obtenemos el que le sigue, y así sucesivamente.
En esta sucesión no hay dos conjuntos coordinables entre sí, por lo que todo conjunto finito es coordinable con uno y sólo uno de la sucesión fundamental.

Para representar la sucesión fundamental de conjuntos finitos se utilizan normalmente las letras mayúsculas del alfabeto.

OPERACIÓN PARA MEDIR

Si una cantidad continua ha sido real o imaginariamente **seccionada** en elementos artificiales iguales, el conjunto de estos elementos se comporta de una manera similar a las cantidades discretas y pueda, por tanto, ser objeto de conteo.

El agua contenida en un recipiente (cantidad discreta) puede vaciarse en una serie de frascos iguales y luego se cuentan los frascos llenos, es decir, las porciones de agua contenidas en ellos.

La distancia entre dos puntos (cantidad continua) también puede ser seccionada en partes iguales por varios puntos, para luego contar las distancias entre cada dos puntos consecutivos.

Medir significa comparar dos cantidades homogéneas. Consideremos la longitud de una mesa y la longitud de una regla (cantidades homogéneas). Llevemos la longitud de la regla sobre la longitud de la mesa, y supongamos que cabe exactamente doce veces. Hemos medido la longitud de la mesa con la longitud de la regla. Una de las cantidades, en este caso la longitud de la regla, se llama unidad de medida. La otra es la cantidad que se mide. Puede medirse en forma similar la superficie de un pizarrón con la superficie de una hoja de papel; el peso de un libro con el peso de otro libro.

A diferencia de las cantidades discretas, las unidades de medida no son naturales, sino convencionales.

NÚMERO NATURAL

En la figura 16 se representa un conjunto de computadoras y un conjunto de libros, coordinable con el conjunto A, B, de la sucesión fundamental y, por lo tanto, coordinables entre sí.

La figura 17 muestra varios conjuntos coordinables a la vez con el conjunto A, B, C, de la sucesión fundamental y, por lo tanto, coordinables entre sí.

La figura 18 representa varios conjuntos coordinables con el conjunto A, B, C, D, de la sucesión fundamental y, por lo tanto, coordinables entre sí.

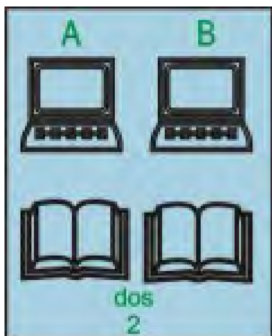


Figura 16

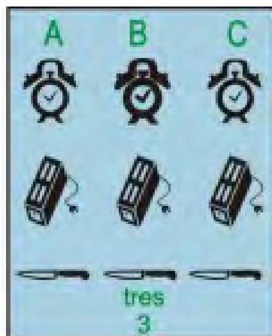


Figura 17



Figura 18

La coordinación de los conjuntos representados en la figura 16 hace surgir en nuestra mente la idea del **dos**, en la figura 17 la idea del **tres** y en la figura 18 la idea del **cuatro**.

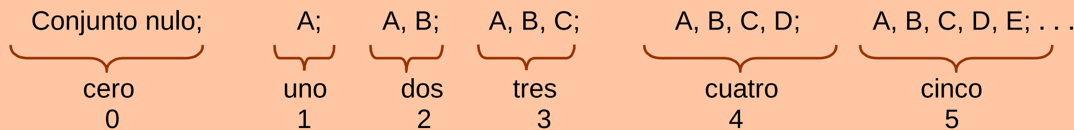
De manera similar, con otros ejemplos, podemos hacer surgir en nuestra mente la idea del **cinco**, del **seis**..., así como del **uno** y del **cero**.

El cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis..., etc., son conceptos abstractos que representan, respectivamente, la propiedad común a todos los conjuntos coordinables entre sí. Los conceptos cero, uno, dos, tres, etc., son **números naturales**, un concepto abstracto que simboliza cierta propiedad común a todos los conjuntos coordinables entre sí.

SERIE DE NÚMEROS NATURALES

Cada conjunto de la sucesión fundamental representa un número que llamamos cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, etc., y lo representamos como 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc., de la siguiente forma:

Conjunto nulo; A; A, B; A, B, C; A, B, C, D; A, B, C, D, E; . . .



Conjunto nulo;	A;	A, B;	A, B, C;	A, B, C, D;	A, B, C, D, E; . . .
cero	uno	dos	tres	cuatro	cinco
0	1	2	3	4	5

y esta sucesión o serie infinita es lo que se llama **serie de los números naturales** o **serie natural de los números**.

ESCOLIO

Debido a la complejidad del concepto, muchas veces se incurre en el error de creer que **las palabras** cero, uno, dos, tres, cuatro, etc., y **los signos** 0, 1, 2, 3, 4, etc., **son** los números naturales, pero esto no es cierto. Esas palabras y signos no son los números naturales, sino sólo el medio para **expresar** y **representar** los números naturales (del mismo modo que un caballo representado en un cuadro **no es un caballo**, sino **la representación** o **imagen** de un caballo).

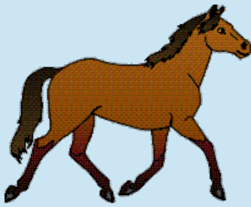


Figura 19

¿Qué es **tres**? Una **palabra** con la cual expresamos la pluralidad común a toda la serie de conjuntos coordinables entre sí y con el conjunto *A, B, C, D, E, F* de la sucesión fundamental.

¿Qué es **6**? Un **signo** con el que representamos en la escritura la pluralidad común a toda la serie de conjuntos coordinables entre sí y con el conjunto *A, B, C, D, E, F* de la sucesión fundamental.

OPERACIÓN PARA CONTAR

Una operación que se hace con frecuencia es la coordinación de conjuntos. Por ejemplo: el administrador de un teatro pretende que cada uno de los espectadores que asistan a una función tengan su asiento, de modo que no queden espectadores de pie ni tampoco asientos vacíos; entonces debe coordinar el conjunto de los espectadores con el conjunto de los asientos. Para ello, manda a imprimir tantos boletos como asientos hay en el teatro y entrega uno a cada espectador que lo compra en la taquilla. Una vez entregada la última entrada a un espectador, ya estarán ocupados todos los asientos, o sea que el conjunto de los espectadores y el conjunto de los asientos estarán coordinados.

En este caso, el administrador del teatro coordinó el conjunto de los espectadores con el conjunto de los boletos que a su vez era coordinable con el conjunto de los asientos del teatro; es decir, contó tantos espectadores como asientos hay en el teatro, utilizando como **conjunto de referencia** o tipo de comparación el conjunto de los boletos.

Para **contar** los objetos y coordinar los conjuntos se utiliza como referencia un **conjunto fijo** que es el **conjunto de los números naturales**.

Contar un conjunto significa coordinar sus elementos con una parte de la serie de los números naturales, comenzando por el número 1.

Para contar las letras de la palabra latino, se procede así

l	a	t	i	n	o
|	|	|	|	|	|
1	2	3	4	5	6

Así coordinamos el conjunto de letras con el conjunto de números naturales, del 1 al 6

NÚMEROS ABSTRACTOS Y CONCRETOS

El **número abstracto** es el número propiamente dicho: 1 (uno), 5 (cinco), 18 (dieciocho) representan números abstractos.

Al coordinar los elementos de un conjunto homogéneo de cosas (cantidad discontinua), por ejemplo los limones que hay en una caja, con una parte de la serie de número naturales (abstractos), comenzando por el uno (es decir, al contar los elementos de un conjunto homogéneo de cosas), el resultado es un **número concreto**.

Si coordinamos los elementos iguales determinados artificialmente en una cantidad continua por medio de una medición, digamos la longitud de un pedazo de soga, que al medirse con la longitud de un metro ha quedado seccionado imaginariamente en cuatro partes iguales en longitud, con una parte de los números naturales, comenzando por el uno, en cierta forma estamos contando, sólo que en es-te caso las unidades no son naturales (como sucede con las cantidades discontinuas) sino convencionales y la coordinación se efectúa al mismo tiempo que la medición, es decir, al mismo tiempo que la comparación de la unidad de medida (convencional) con la cantidad que se mide.

En este caso el resultado también es un **número concreto**, que se representa también por el cardinal abstracto correspondiente a la parte de los números naturales empleada para la coordinación y el nombre de la unidad convencional utilizada para medir la cantidad continua. Si en esta medición se llegó al número cuatro, se dice cuatro metros y se escribe 4 metros. Este es un número concreto, al igual que 25 sillas, 32 vacas, 150 kilómetros, 16 kilogramos, etcétera.

SERIES DE NÚMEROS CONCRETOS

Son **homogéneos** los números concretos que representan estados de la misma magnitud. Por ejemplo:

5 metros, 8 metros
2 lápices, 12 lápices, 17 lápices

Son **heterogéneos** los números concretos que representan estados de distinta magnitud. Por ejemplo:

25 libros, 8 vacas
5 metros, 19 kilogramos, 4 litros

Por otra parte, podemos definir los números complejos o denominados como las series de números concretos homogéneos que representan estados de la misma magnitud continua, expresados en distintas unidades concretas pertenecientes a un mismo sistema de medida: 6 metros, 8 decímetros y 4 centímetros es un número complejo o denominado.

NÚMERO CARDINAL

Al contar los elementos de un conjunto, el número que corresponde al último elemento se llama número cardinal que representa al conjunto.

El número cardinal del conjunto MNPQRSTUV es 9 porque →

M N P Q R S T U V
| | | | | | | | |
1 2 3 4 5 6 7 8 9

CARÁCTERES DEL NÚMERO CARDINAL

1) El número cardinal de un conjunto siempre es el mismo, cualquiera que sea el orden en que se cuenten los elementos.
Si contamos, de tres modos distintos las letras de la palabra libreta tendremos:

L I B R E T A — L I B R E T A — L I B R E T A
1 2 3 4 5 6 7 — 7 6 5 4 3 2 1 — 5 4 2 6 3 7 1
7 — 7 — 7

En el primer caso contamos de izquierda a derecha; en el segundo, de derecha a izquierda, y en el tercero, en orden alfabético, y en todos ellos el número correspondiente al último elemento ha sido el 7, que es el número cardinal del conjunto.

2) Todos los conjuntos coordinables entre sí tienen el mismo número cardinal, cualquiera que sea la naturaleza de sus elementos.

Aquí vemos tres conjuntos: uno de personas, otro de letras y otro de plumas, coordinables entre sí: →

Jorge..........	L..........	pluma verde.......	1
Laura..........	U..........	pluma roja..........	2
Adriana..........	N..........	pluma negra.......	3
Luis..........	A..........	pluma azul.........	4

El conjunto de personas, Jorge-Laura-Adriana-Luis está coordinado con el conjunto de letras LUNA y con el conjunto de plumas, y cada uno a su vez está coordinado con el conjunto de números naturales del 1 al 4, luego el **4 es el número cardinal** de estos tres conjuntos coordinables entre sí. El número cardinal representa todos los conjuntos coordinables entre sí, sin importar la naturaleza y el orden de sus elementos.

NÚMERO ORDINAL

Al contar los elementos de un conjunto, el número natural que corresponde a cada elemento se llama número ordinal.

Contando las letras de la palabra CERDOS, tenemos:

C E R D O S
| | | | | |
1 2 3 4 5 6

Si contamos de izquierda a derecha, el número ordinal de la letra C es el 1, o sea que la **C** es el **primer** elemento; el número ordinal de la **E** es el 2, o sea que la **E** es el **segundo** elemento; el número ordinal de la **O** es el 5, o sea que la **O** es el **quinto** elemento, etcétera.

Sin embargo, al variar el **orden**, varía el número ordinal de cada elemento. Si contamos en orden alfabético, tenemos:

C E R D O S
| | | | | |
1 2 3 4 5 6

El número ordinal representa el elemento de un conjunto teniendo en cuenta el orden de los elementos.

Los números ordinales, en rigor, se representan como 1°, 2°, 3°, 4°, etc., pero en la práctica suelen emplearse los números 1, 2, 3, 4, etc., porque se sobrentiende que el elemento al que corresponde el 1 al contar en un orden dado es el 1°, el elemento al que corresponde el 2 es el 2°, etcétera.

Resumiendo, tenemos que el número cardinal representa un conjunto y el número ordinal representa un elemento teniendo en cuenta el orden.



El pueblo hindú fue el primero en desarrollar un sistema de representación numeral, éste incluía el cero y también posicionaba las cifras para dar diferentes valores a los números, con esto lograron grandes progresos en el cálculo matemático. En el siglo VIII, los árabes dieron a conocer este sistema numeral en Europa.

CAPÍTULO III

NUMERACIÓN

La Numeración es la parte de la Aritmética que nos enseña a expresar y escribir los números, y puede ser **hablada** o **escrita**. La **hablada** enseña a **expresar** los números, y la **escrita** enseña a **escribir** los números.

SISTEMA DECIMAL

Los números se forman por agregación de unidades, es decir, si a una unidad o número uno le agregamos otra unidad, resulta el número dos; si agregamos otra unidad más resulta el número tres, así sucesivamente, de lo que se deduce que la **serie natural de los números no tiene fin**, pues por grande que sea un número siempre podremos formar otro mayor agregándole otra unidad.

Cifras o Guarismo son los signos que representan los números. Las cifras que nosotros empleamos, llamadas **arábigas** porque fueron introducidas por los árabes en España son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, donde el cero es la cifra **no significativa** o cifra **auxiliar** y los demás se llaman **cifras significativas.**

El **0** representa los conjuntos **nulos** o carentes de elementos, por lo tanto el cero carece de valor absoluto y se escribe en el lugar correspondiente a un orden cuando en el número escrito no hay unidades de ese orden. La palabra cero proviene del árabe **ziffero**, que significa **lugar vacío**.

El **Número Dígito** consta de una sola cifra (2, 3, 7, 8, etc.) y el **Número Polidígito** consta de dos o más cifras (28, 526, etc.).

Un **Sistema de Numeración** es un conjunto de reglas que sirven para expresar y escribir los números, y la **base** de un sistema de numeración es el número de unidades de un orden que forman una unidad del orden inmediato superior. De este modo, en el **sistema decimal** que usamos nosotros **la base es 10** porque 10 unidades de primer orden forman una decena; diez decenas forman una centena, etc.

Por otra parte, en el **sistema duodecimal**, que también usamos con frecuencia en la práctica, **la base es 12**, porque 12 unidades forman una **docena** y 12 docenas forman una **gruesa**.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Dentro de los **sistemas de numeración** rigen algunos principios fundamentales, y son los siguientes:

1) Un **número de unidades** de un orden cualquiera, igual a la base, forma una unidad del orden inmediato superior.

Esto significa que en el **sistema binario**, de base 2, dos unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior; en el **sistema duodecimal**, 12 unidades de cualquier orden forman una unidad del orden inmediato superior, y así sucesivamente.

2) Toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades tantas veces mayores a las que representa la anterior como unidades tenga la **base**. A esto se le conoce como el principio del valor relativo.

Esto significa que en el número 123_5 escrito como lo indica el **subíndice**, en el **sistema quinario**, el 2, escrito a la izquierda del 3, representa unidades cinco veces mayores a las que representa el 3; y el 1, escrito a la izquierda del 2, representa unidades cinco veces mayores a las que representa el 2, o sea veinticinco veces mayores a las que representa el 3.

El número 6543_9, el 4 que está escrito a la izquierda del 3 representa unidades nueve veces mayores a las que representa el 3; el 5 representa unidades nueve veces mayores a las que representa el 4, o sea ochenta y un veces mayores a las que representa el 3; y el 6, escrito a la izquierda del 5, representa

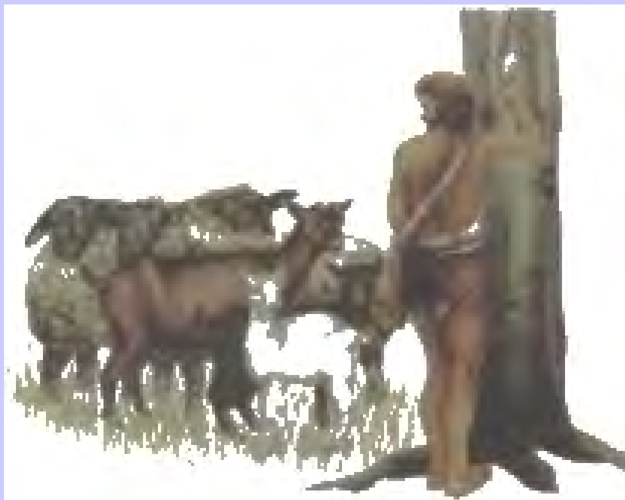


Figura 19

unidades nueve veces mayores a las que representa el 5, o sea, ochenta y un veces mayores a las que representa el 4 y setecientas veintinueve veces mayores a las que representa el 3.

3) En todo sistema con tantas cifras como unidades tenga la base, contando el cero se pueden escribir todos los números.

Esto significa que en el sistema binario o de base 2, con dos cifras que son el 0 y el 1, se pueden escribir todos los números; en el sistema ternario o de base 3, como la base tiene tres unidades, con tres cifras que son el 0, 1 y el 2, se pueden escribir todos los números; en el sistema septenario o de base 7, como la base tiene siete unidades, con siete cifras, que son el 0, el 1, el 2, el 3, el 4, el 5, y el 6, se pueden escribir todos los números, etc.

SISTEMA DECIMAL O DÉCUPLO

El **sistema decimal o décuplo** que usamos nosotros tiene como base el número 10, lo que significa que diez unidades de un orden cualquiera constituyen una unidad del orden inmediato superior y viceversa (una unidad de un orden cualquiera está formada por diez unidades del orden inmediato inferior).

El principio fundamental o convenio de la numeración decimal hablada dice que diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior.

La numeración decimal consta de órdenes y subórdenes, como veremos a continuación.

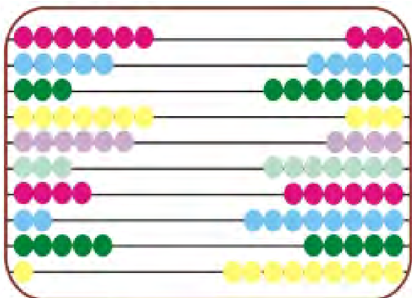


Figura 20

CLASES Y PERIODOS

La reunión de tres órdenes, comenzando por las unidades simples, constituye una clase; de este modo, las unidades, decenas y centenas forman la **clase de las unidades**; las unidades de millar, decenas de millar y centenas de millar forman la **clase de los millares**; las unidades de millón, decenas de millón y centenas de millón forman la **clase de los millones**; las unidades de millar de millón, decenas de millar de millón y centenas de millar de millón forman la **clase de los millares de millón**; las unidades de billón, decenas de billón y centenas de billón forman la **clase de los billones**, y así sucesivamente.

Por otro lado, la **reunión de dos clases forma un periodo**: la clase de las unidades y la clase de los millares forman el **periodo de las unidades**; la clase de los millones y la de los millares de millón forman el **periodo de los millones**; la clase de los billones y la de los millares de billón forman el **periodo de los billones**, y así sucesivamente.

ÓRDENES

Si al número 1, que es la **unidad de primer orden**, le añadimos unidades (una a una) sucesivamente, formaremos los números **dos, tres, cuatro, cinco**, etc., hasta llegar a **diez** unidades, que forman una decena o una unidad del orden superior inmediato.

Así, **decena** es la **unidad de segundo orden** y representa la reunión de diez unidades. Si a una decena le añadimos los nombres de los nueve primeros números obtendremos el **once**, **doce, trece**, etc., hasta llegar a **veinte**, o dos decenas; si a éste le añadimos nuevamente los nombres de los nueve primeros números formamos el **veintiuno, veintidós, veintitrés**, etc., hasta llegar a **treinta**, o tres decenas, y procediendo de modo semejante obtendremos el **cuarenta** o cuatro decenas, **cincuenta** o cinco decenas, etc., hasta llegar a **cien** o diez decenas, que forman una unidad del orden superior inmediato.

Con esto, la centena es la **unidad de tercer orden** y representa la reunión de diez decenas o cien unidades. Si a la centena le añadimos los nombres de los noventa y nueve primeros números, iremos formando los números **ciento uno, ciento dos, ciento tres,** etc., hasta llegar a **doscientos** o dos centenas; de modo semejante obtendremos **trescientos** o tres centenas, **cuatrocientos** o cuatro centenas, etc. hasta llegar a **mil** o **diez centenas**, que forman una unidad del orden superior inmediato.

El **millar** es la **unidad del cuarto orden** y representa la reunión de diez centenas o mil unidades. Si al millar le añadimos los nombres de los novecientos noventa y nueve primeros números, iremos obteniendo los números sucesivos hasta llegar a **dos mil** o dos millares; **tres mil** o tres millares, etc., hasta **diez mil** o diez millares, que forman una unidad del orden superior inmediato.

La **decena de millar** es la **unidad de quinto orden** y representa la reunión de **diez millares** o **diez mil unidades**. Añadiendo a una decena de millar los nombres de los nueve mil novecientos noventa y nueve primeros números, formaremos el **veinte mil** o dos decenas de millar, **treinta mil** o tres decenas de millar, etc., hasta llegar a diez decenas de millar, o **cien mil**, que constituyen una unidad del orden superior inmediato.

La **centena de millar** es la **unidad de sexto orden** y representa la reunión de diez decenas de millar. De modo semejante llegaremos al **millón** o **unidad de séptimo orden**, que consta de diez centenas de millar o mil millares; **decena de millón** o **unidad de octavo orden**, que consta de diez millones; **centena de millón** o **unidad de noveno orden**; **unidad de millar de millón** o **unidad de décimo orden**; **decena de millar de millón** o **unidad de undécimo orden**; **centena de millar de millón** o **unidad de duodécimo orden**; **billón** o **unidad de décimotercer orden** y que representan la reunión de un millón de millones; **trillón** o **unidad de décimo noveno orden**, que representa la reunión de un millón de billones; **cuatrillón** o **unidad de vigésimo quinto orden** que representa la reunión de un millón de trillones; **quinquillón** o **unidad de trigésimo primer orden**, y así sucesivamente.

Cabe señalar que en algunos países como Estados Unidos de América, Francia y Alemania existe un criterio distinto al nuestro, pues **llaman billón al millar de millones** o unidad de décimo orden; **trillón a nuestro billón; cuatrillón a nuestro millar de billones,** etc.

SUBÓRDENES

Así como la decena consta de diez unidades y la centena de diez decenas, podemos suponer que la unidad simple o de primer orden está dividida en diez partes iguales que reciben el nombre de **décimas** y constituyen el **primer suborden**; cada décima se divide en otras diez partes iguales llamadas **centésimas**, formando el **segundo suborden**; cada centésima se divide en otras diez partes iguales llamadas **milésimas**, que forman el **tercer suborden**, y así sucesivamente (**diezmilésimas** o **cuarto suborden**; **cienmilésimas** o **quinto suborden**; **millonésimas** o **sexto suborden**, etc.).


10 unidades = 1 decena

Figura 21

EJERCICIOS

1. ¿Cuántas unidades tiene una unidad de tercer orden; de cuarto orden; de quinto orden?

2. ¿Cuántas décimas hay en una unidad; en una decena; en un millar?

3. ¿Qué forman diez decenas; diez centenas de millar; diez millones?

4. ¿Cuántas centésimas hay en una decena; cuántas milésimas en una centena; cuántas diezmilésimas en un millar?

5. ¿Cuántos guarismos tiene un número cuya cifra de mayor orden representa decenas de centena; centenas de millar; millares de millón; billones?

6. ¿Cuáles son las decenas de decenas; las centenas de las decenas; los millares de centena; los millones de millón?

7. ¿Cuántos millares tiene un millón; cuántas decenas de millar tiene una decena de millar de millón; cuantos millones tiene un billón?

8. ¿Qué orden representa la primera cifra de la izquierda de un número de 2 cifras; de 5 cifras; de 7 cifras?

9. ¿Qué forman cien decenas de millar; mil centenas de millar; diez mil millones, un millón de millones?

VALOR ABSOLUTO Y VALOR RELATIVO

Toda cifra tiene dos valores: uno **absoluto** y otro **relativo**.

El valor absoluto es aquel que considera el número por su figura, y el valor relativo es el que considera el número por el lugar que ocupa.

En el número 4344 el valor absoluto de los tres números 4 es de cuatro unidades, pero el valor relativo del 4 de la derecha es 4 unidades del primer orden; el valor relativo del 4 de las decenas es 4 × 10 = 40 unidades del primer orden; el valor relativo del 4 de los millares es 4 × 10 × 10 × 10 = 4000 unidades del primer orden.

El valor relativo del 3 es 3 × 10 × 10 = 300 unidades del primer orden.

Ejemplos

A) Señala el valor relativo de cada una de las cifras siguientes:

16 364 13000 1432057
50 1963 72576 25437056
105 2184 890654 103470543

B) ¿En cuántas unidades disminuyen los números:

176 cambiando el 7 por 0?
294 cambiando el 2 y 9 por 0?
1362 cambiando el 1, el 3 y 6 por 0?
23140 cambiando el 1 por 0 y el 4 por 3?
186754 cambiando el 6 por 4 y el 5 por 2?

C) ¿En cuántas unidades aumentan los números?

76 cambiando el 7 por 9?
123 cambiando el 1 por 2 y el 2 por 3?
354 cambiando el 4 y el 5 por 6?
2615 cambiando el 2 por 4, el 6 por 8 y el 5 por 6?

D) ¿Aumentan o disminuyen, y cuánto en cada caso, los números:

1234 cambiando el 2 por 3, el 3 por 2 y el 4 por 6?
8634 cambiando el 8 por 6, el 6 por 7 y el 3 por 5?
19643 cambiando el 1 por 2, el 9 por 0, el 6 por 9 y 4 por 5?

EJERCICIOS

1. Escribe los siguientes números: catorce mil treinta y dos; ciento cuarenta y nueve mil ocho; trescientos cuatro mil seis; ochocientos mil ocho; novecientos nueve mil noventa; dos millones, dos mil doscientos dos; quince millones, dieciséis mil catorce; ciento cuarenta y cuatro millones, ciento cuarenta y cuatro; ciento dieciséis millones, trescientos ochenta y seis mil, quinientos catorce; doscientos catorce mil millones, seiscientos quince; dos billones, dos millones, dos unidades; tres mil tres billones, trescientos treinta mil trescientos treinta; seis trillones, seis billones, seiscientos sesenta millones, seiscientos mil, seiscientos seis.

2. Escribe los números que constan de 7 unidades de tercer orden, cuatro del primer suborden y tres del tercer suborden; 5 unidades del cuarto orden y cinco del cuarto suborden; seis unidades del quinto orden, cuatro del segundo, ocho del cuarto suborden y seis del quinto suborden.

3. Escribe el menor y el mayor número de dos cifras; de cuatro cifras; de cinco cifras; de siete cifras.

4. Escribe el menor y el mayor número de la 1ª clase; de la 2ª clase; de la 3ª clase.

5. Escribe el número superior e inferior inmediato a 2100, 3200 y 4500.

REGLA PARA ESCRIBIR UN NÚMERO

Para escribir un número se anotan las unidades correspondientes a cada orden, comenzando por las superiores, poniendo un cero en el lugar correspondiente al orden del cual no haya unidades y separando con un punto los órdenes de los subórdenes.

Ejemplo

El número cinco mil treinta y cuatro unidades y ocho décimas se escribe de este modo: 5034.8, donde cada cifra ocupa el lugar correspondiente al orden que representa: 5 millares, 3 decenas, 4 unidades y 8 décimas y como no hay centenas en este número colocamos el cero en el lugar correspondiente a las centenas.

NUMERACIÓN DECIMAL ESCRITA

El principio fundamental o convenio de la numeración decimal escrita dice que toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades diez veces mayores a las que representa la anterior y viceversa (toda cifra escrita a la derecha de otra representa unidades diez veces menores a las que representa la anterior).

De este modo, si a la izquierda de la cifra 4 ponemos el 5, formamos el 54, donde el 4 representa unidades y el 5, por estar escrito a la izquierda del 4, representa unidades diez veces mayores (decenas). Si a la izquierda del 54 escribimos un 8, formaremos el número 854, donde el 5 representa decenas y el 8, por estar escrito a su izquierda, representa unidades diez veces mayores (centenas).

LECTURA DE NÚMEROS

Para leer un número hay que dividirlo en grupos de seis cifras, empezando por la derecha; se coloca entre el primero y el segundo grupo y abajo el número 1; entre el segundo y el tercero el número 2; entre el tercero y el cuarto el número 3, y así sucesivamente. A su vez, cada grupo de seis cifras debe dividirse con una coma en dos grupos de tres cada uno. Entonces se empieza a leer el número por la izquierda, poniendo la palabra trillón donde hay un tres, billón donde hay un dos, millón donde haya un uno y mil donde se encuentre una coma. Si el número tiene una parte decimal, ésta se lee a continuación de la parte entera, dándole la denominación del último suborden.

Ejemplo

Para leer el número 82784321903423456.602 hay que escribirlo así: $82,784_2 321,903_1 423,456.602$ y se leerá: 82 mil 784 billones, 321 mil 903 millones, 423 mil 456 unidades y 602 milésimas.

EJERCICIOS

1. Leer los siguientes números:

964	12545	84103725	2005724568903
1032	589330	463107105	40725032543108
14265	7813811	9432675321	724056431250172
132404	17778922	96723416543	2000002002002002
1030543	123369998	100001001001	30000003030000030

2. Leer los siguientes números:

0.4	0.123	0.00074	0.472003056
0.18	0.2587	0.130046	0.0725631235
0.415	0.36988	0.00107254	0.432003561003
0.0016	0.364788	0.100000003	0.0000000000500

3. Leer los siguientes números:

6.4	14.368	86.00325	1444.4444444
84.25	25.6875	151234.76	6995.0072545
9.003	36.321475	84.000356	72567854.70325
16.0564	16.3669777	184.7256321	9465432161.00007

EJERCICIOS

1. ¿Qué relación hay entre los números 12345, 1234.5 y 123.45?

2. Reducir 9 a décimas; 14 a centésimas; 19 a milésimas.

3. ¿Qué relación hay entre los números 0.54, 54 y 540?

4. De los números 16, 016 y 0016, ¿cuál es el mayor?

5. ¿Cuántas veces el número 34 es menor que 340; que 3400; que 34000? ¿Por qué?

6. Haz el número 456.89, diez, cien, mil y diez mil veces mayor y menor. Explica la razón.

7. Haz los números 8, 25 y 326, diez, cien y mil veces mayores.

CONCLUSIONES

1) Un número no varía porque se añadan ceros a su izquierda, ya que el valor absoluto y el valor relativo de cada cifra permanece idéntico.

2) Cuando añadimos a la derecha de un número 1, 2, 3 o más ceros, se hará diez, cien, mil o más veces mayor, por que el valor relativo de cada cifra se hace diez, cien, mil o más veces mayor.

3) Cuando a la derecha de un número entero se separan con un punto decimal una, dos, tres o más cifras, el número se hará diez, cien, mil o más veces menor, porque el valor relativo de cada cifra se hace diez, cien, mil o más veces menor.

4) Cuando en un número decimal se corre el punto decimal uno, dos, tres o más lugares a la derecha, el número se hará diez, cien, mil o más veces mayor, porque el valor relativo de cada cifra se hace diez, cien, mil o más veces mayor.

5) Cuando en un número decimal corremos el punto decimal uno, dos, tres o más, lugares a la izquierda, el número se hará diez, cien, mil o más veces menor, porque el valor relativo de cada cifra se hace diez, cien, mil o más veces menor.



Los pueblos dominantes de la antigüedad tenían distintas formas para representar los números; no obstante, el sistema que se utilizaba principalmente era el decimal. Los mayas, en el continente americano desarrollaron un sistema vigesimal. Posteriormente Leibnitz desarrolló un sistema binario.

CAPÍTULO IV

OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Como ya lo estudiamos, en el sistema decimal la base es el 10. Pero si en lugar de 10 tomamos como base el número 2,3,4,5,6, etc., tendremos otros sistemas de numeración en los que se cumplirán principios semejantes a los establecidos para el sistema decimal.

De tal forma, en el sistema de base 2 se comprobará que: **1)** Dos unidades de un orden forman una del orden superior inmediato. **2)** Toda cifra escrita a la izquierda de otra representa unidades dos veces mayores a las que representa ésta**. 3)** Con dos cifras se pueden escribir todos los números.

Lo mismo aplica para los sistemas cuya base sea 3, 4, 5, 6, etc., con lo que se concluye que los sistemas de numeración **se diferencian unos de otros por su base**, y dado que podemos tomar como base cualquier número, la cantidad de sistemas resulta **ilimitada**.

NOMENCLATURA

Atendiendo a su base, los sistemas se denominan de la manera siguiente: el de base 2, **binario**; el de base 3**, ternario**; el de base 4, **cuaternario**; el de base 5, **quinario**; el de base 6; **senario**; el de base 7, **septenario**; el de base 8, **octonario**; el de base 9, **nonario**; el de base 10, **decimal o décuplo**; el de base 11, **undecimal**; el de base 12, **duodecimal**; etc.

NOTACIÓN

Para indicar el sistema en que está escrito un número, se escribe abajo y a su derecha un número pequeño que indica la **base**, el cual recibe el nombre de **subíndice**. Así, 11_2 indica que este número está escrito en el sistema binario; 432_5 indica que esta escrito en el sistema quinario y 8956_{12} en el sistema duodecimal.

Sin un número no lleva subíndice, significa que está escrito en el **sistema decimal.**



Figura 22

CIFRAS Y BASES COMUNES

Las **cifras comunes** a todos los sistemas **son el 0 y el 1,** y la **base común** de todos los sistemas se escribe del mismo modo; 10, lo que quizá parezca una contradicción ya que antes dijimos que los sistemas se diferencian unos de otros por su base; pero sucede que el 10 no siempre representa diez unidades, sino una unidad del segundo orden, que tendrá distinto valor en cada sistema. Así, en el sistema binario el 10 representa 2 unidades, o sea la base, porque en ese sistema cada unidad del segundo orden tiene dos unidades del primero; en el ternario, 10 representa 3 unidades, o sea la base, porque en este sistema cada unidad del segundo orden representa tres unidades del primero; en el de base 9, 10 representará 9 unidades, o sea la base, porque en este sistema cada unidad del segundo orden tiene 9 unidades del primero, y así sucesivamente.

NÚMERO DE CIFRAS DE UN SISTEMA

Todo sistema emplea tantas cifras (contando el cero) como unidades tiene la base.

En el sistema binario, cuya base es el 2, se emplean dos cifras, que son el 0 y el 1. El 2 no puede emplearse, porque en este sistema dos unidades de un orden cualquiera forman una del orden inmediato superior y el 2 se escribirá 10, lo que significa: cero unidades del primer orden y una del segundo.

En el sistema ternario, cuya base es 3, se emplean tres cifras que son el 0, el 1 y el 2. El 3 ya no puede escribirse en este sistema, porque tres unidades de un orden cualquiera forman una del orden inmediato superior y el 3 se escribirá 10, lo que significa: cero unidades del primer orden y una del segundo.

En el sistema cuaternario, cuya base es el 4, se emplean cuatro cifras que son: el 0, el 1, el 2 y el 3. El 4 no puede escribirse, porque siendo la base del sistema, forma ya una unidad del orden inmediato superior y se escribirá 10, lo que significa: cero unidades del primer orden y una del segundo. Por esta misma razón, las cifras del sistema quinario son: el 0, 1, 2, 3 y 4; en el sistema senario el 0, 1, 2, 3, 4 y 5; en el septenario el 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, etc.

Cuando la base del sistema es mayor que 10, las cifras que pasan de 10 suelen representarse por medio de letras: la **a** representa el 10, la **b** el 11, la **c** el 12, la **d** el 13, la **e** el 14, la **f** el 15, y así sucesivamente.

Por lo tanto, las cifras del sistema undecimal son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y **a;** las del sistema duodecimal son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **a** y **b**; las del sistema de base 13 son las anteriores y además **c**; las de base 14 son las de base 13 y además **d**, etc.

EJERCICIOS

1. ¿Cómo se escribe la base en el sistema quinario; en el octonario; en el de base 15? ¿Cuántas unidades representa en cada uno?

2. ¿Cuántos sistemas de numeración se conocen?

3. ¿En qué sistema no se emplea el subíndice?

4. ¿Existe la cifra 7 en el sistema de base 6; el 9 en el de base 8; el 7 en el de base 5?

5. ¿Cómo puedes saber en qué sistema está escrito un número?

6. ¿Qué cifras se emplean en el sistema quinario, nonario, undecimal, duodecimal, el de base 13, el de base 15 y el vigesimal?

7. ¿En qué se diferencian unos sistemas decimales de otros?

8. ¿Por qué no se utiliza la cifra 5 en el sistema ternario; en el cuaternario?

VALOR RELATIVO DE LAS CIFRAS DE UN NÚMERO ESCRITO EN UN SISTEMA CUALQUIERA

Una vez que se conoce el lugar que ocupa una cifra y la base del sistema en que está escrito el número, hallaremos su valor relativo.

1) Valor relativo de las cifras del número 123_4

La cifra 1 representa unidades de tercer orden, pero como la base es 4, cada unidad de tercer orden contiene 4 del segundo, y como cada unidad del segundo orden contiene 4 del primero, el valor relativo de la cifra 1 es $1 \times 4 \times 4 = 16$ unidades del primer orden.

La cifra 2, que representa unidades del segundo orden, contiene $2 \times 4 = 8$ unidades del primer orden, luego su valor relativo es 8.

El valor relativo de la cifra 3 es 3 unidades del primer orden.

2) Valor relativo de las cifras del número 2340_6

Valor relativo de la cifra 2: $2 \times 6 \times 6 \times 6 = 432$ unidades del primer orden
Valor relativo de la cifra 3: $3 \times 6 \times 6 = 108$ unidades del primer orden
Valor relativo de la cifra 4: $4 \times 6 = 24$ unidades del primer orden

EJERCICIOS

1. Encuentra el valor relativo de las siguientes cifras:

11_2 223_4 312_5 564 879_{11} 7245_{20} 12566_{23}

21_3 2342_5 436_7 703_9 ab_{15} 10023_{30} 1112543_{40}

2. Señala cuántas unidades del primer orden contiene cada uno de los siguientes números:

20_3 312_5 2134_7 7012_{11} $7ab_{15}$
112_4 2002_6 7010_9 20314_{12} $4cd\,63_{20}$

3. Escribe el número que representa: 2 unidades del primer orden en el sistema binario; 3 en el ternario; 9 en el nonario.

4. Escribe el número que representa: 8 unidades del primer orden en sistema cuaternario; 10 en el quinario; 12 en el senario; 18 en el nonario.

5. Escribe el número que representa: 15 unidades del primer orden en el sistema quinario; 18 en el senario; 21 en el septenario: 45 en el de base 15.

6. Escriba el número que representa 9 unidades del primer orden en el sistema senario.

CONVERSIÓN DE UN NÚMERO ESCRITO EN UN SISTEMA A OTRO DISTINTO

Para convertir un número escrito en el sistema decimal a otro sistema distinto, se divide el número y los sucesivos cocientes por la base del nuevo sistema, hasta llegar a un cociente menor que el divisor. El nuevo número se forma escribiendo de izquierda a derecha el último cociente y todos los residuos colocados a su derecha, de uno en uno, aunque sean ceros.

Ejemplos

1) Convertir 85 al sistema ternario

85 | 3
25 (1) | 28 | 3
(1) 9 | 3
(0) 3 | 3
(0) (1)

```
85    3
25    28   3
(1)   (1)  9    3
           (0)  3    3
                (0)  (1)
```

R. $3898 = 230a_{12}$

2) Convertir 3898 al sistema duodecimal.

```
3898   12
29     324   12
58      84   27    12
(10)   (0)   (3)   2
```

R. $85 = 10011_3$

Si el último cociente o alguno de los residuos es mayor que 9, se pone en su lugar la letra correspondiente.

EJERCICIOS

Convertir los siguientes números a los sistemas indicados.

1. 123 al sistema binario **R.** 1111011_2
2. 871 al sistema ternario **R.** 1012021_3
3. 3476 al sistema quinario **R.** 102401_5
4. 10087 al sistema de base 7 **R.** 41260_7
5. 1007 al sistema de base 8 **R.** 1757_8
6. 78564 al sistema nonario **R.** 128683_9
7. 87256 al sistema duodecimal **R.** $425b\,4_{12}$
8. 120022 al sistema de base 20 **R.** $f\,012_{20}$
9. 14325 al sistema de base 30 **R.** fqf_{30}
10. 86543 al sistema de base 32 **R.** $2kgf_{32}$

EJERCICIOS

Convertir al sistema decimal:

1. 1101_2 **R.** 13

2. 32012_4 **R.** 902

3. 5431_6 **R.** 1243

4. 76321_8 **R.** 31953

5. 20078_9 **R.** 13193

6. $7ab5_{12}$ **R.** 13673

7. $cda6_{15}$ **R.** 43581

8. $8efa_{18}$ **R.** 51472

9. $heg34_{20}$ **R.** 2838464

10. $abcd_{30}$ **R.** 280273

Convertir al sistema indicado.

1. 1002_3 al cuaternario **R.** 1314_4

2. 432_7 al ternario **R.** 22010_3

3. $b56_{12}$ al quinario **R.** 23100_5

4. $54cd_{15}$ al duodecimal **R.** $a494_{12}$

5. $c00b_{18}$ al de base 23 **R.** $5h76_{23}$

6. $5ab4_{14}$ al de base 7 **R.** 64114_7

7. $abcd_{20}$ al de base 9 **R.** 138108_9

8. $ef4c_{21}$ al de base 22 **R.** $chg9_{22}$

9. $hf00c_{25}$ al de base 30 **R.** $8eiq2_{30}$

10. $8a0d_{24}$ al de base 15 **R.** $2472a_{15}$

Problemas

1. De un lugar donde se emplea el sistema binario nos remiten 1101 bultos postales. ¿Cómo escribiremos este número? **R.** 9.



Figura 23

2. De México enviamos a un comerciante que utiliza el sistema duodecimal 5678 barriles de aceite. ¿Cómo escribirá ese número dicho comerciante? **R.** 3352_{12}

CONVERSION AL SISTEMA DECIMAL DE OTRO SISTEMA DIFERENTE

Para convertir un número de un sistema distinto del decimal al sistema decimal se multiplica la primera cifra de la izquierda del número dado por la base y con este producto se suma la cifra siguiente. El resultado se multiplica por la base y al producto se le suma la tercera cifra, y así sucesivamente hasta sumar la última cifra del número dado.

Ejemplos

1) Convertir el número 11101_2 al sistema decimal.

$1 \times 2 = 2$ $\quad 2 + 1 = 3$
$3 \times 2 = 6$ $\quad 6 + 1 = 7$
$7 \times 2 = 14$ $\quad 14 + 0 = 14$
$14 \times 2 = 28$ $\quad 28 + 1 = 29$

R. $11101_2 = 29$

2) Convertir el número $89ab3_{12}$ al sistema decimal.

$8 \times 12 = 96$ $\quad 96 + 9 = 105$
$105 \times 12 = 1260$ $\quad 1260 + 10 = 1270$
$1270 \times 12 = 15240$ $\quad 15240 + 11 = 15251$
$15251 \times 12 = 183012$ $\quad 183012 + 3 = 183015$

R. $89ab3_{12} = 183015$

Para convertir un número escrito en un sistema distinto del decimal a otro sistema que no sea el decimal, se reduce el número dado primero al sistema decimal y luego al que se quiere convertir.

Ejemplo

1) Convertir el número 2211_3 al sistema de base 7.
2211_3 al decimal:

$2 \times 3 = 6$ $\quad 6 + 2 = 8$
$8 \times 3 = 24$ $\quad 24 + 1 = 25$
$25 \times 3 = 75$ $\quad 75 + 1 = 76$

76 al de base 7:

```
76  |_7___
(6)  10  |_7___
     (3)   (1)
```

$2211_3 = 136_7$

3. Pedimos 18 automóviles a un empresario que usa el sistema de base 18. ¿Cómo escribe el número de automóviles que nos envía? **R.** 10_{18}

4. Un comerciante que emplea el sistema quinario pide 4320 sombreros a otro que emplea el sistema de base 13. ¿Cómo escribirá este comerciante el número de sombreros que envía? **R.** 360_{13}



Figura 24

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE NÚMEROS NATURALES

Los números naturales se representan geométricamente por medio de segmentos de recta, eligiendo un segmento cualquiera, por ejemplo: *OA* (figura 25), que representan el 1; *OA* es el **segmento unidad**.

Cada número natural se representa por un segmento que contiene el segmento unidad tantas veces como elementos tiene el conjunto que representa el número.

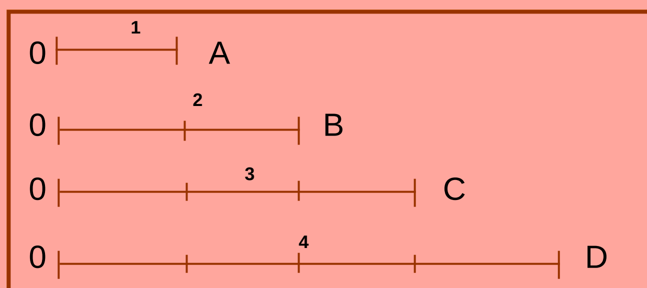


Figura 25

Así, el 2 se representa por un segmento *OB* que contiene dos veces el segmento unidad; el 3 se representa por un segmento *OC* que contiene tres veces el segmento unidad; el 4 se representa por el segmento *OD*, etc.

Para representar sobre una semirrecta la serie de números naturales, se procede de este modo:

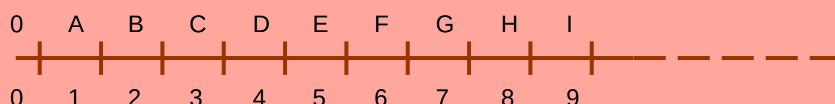


Figura 26

A partir del origen *O* (figura 26) se toman sucesivamente segmentos iguales al escogido como unidad y tendremos que el segmento *OA* representa el 1; el segmento *OB* el 2; el segmento *OC* el 3; el segmento *OD* el 4 y así sucesivamente. El 0, que es el conjunto nulo, se representa por un **segmento nulo**: el punto *O* (origen).

Los puntos *O, A, B, C, D...* son los extremos de los segmentos *OO* = 0, *OA* = 1, *OB* = 2, *OC* = 3, *OD* = 4, todos de origen *O.* En la práctica se dice que el **extremo** de cada segmento representa un número natural. Así, el punto *A* representa el 1; el punto *B* el 2; el punto *C* el 3; el punto *F* el 6; el punto *I* el 9, etc.

A la **distancia** de cada uno de los puntos *O, A, B, C, D...* hacia el origen *O* se le llama **abscisa**, de modo que *OA* es la abscisa del punto *A*, *OB* la abscisa del punto *B*, *OE* la abscisa del punto *E*, etc., y esas abscisas se expresan con el número que corresponde al punto. Así, la abscisa del punto *A* es 1, *B* es 2, *D* es 4, *H* es 8, etc.

La **escala** de una cinta métrica, de un nonio, de una regla, de un termómetro no son más que semirrectas que tienen marcadas las abscisas de cada uno de esos puntos.

NOTACIÓN LITERAL

En Matemáticas, cuando se quieren generalizar las cuestiones, las propiedades de los números o los razonamientos, las cantidades se representan con **letras**. Cuando pruebo que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, la propiedad que he demostrado es **general** y diré que el cuadrado de la suma de dos números cualesquiera es igual al cuadrado del **primero**, más el duplo del **primero** por el **segundo** más el cuadrado del **segundo**. Si en una cuestión cualquiera asignamos a una letra un valor determinado, dicha letra no puede representar, en la misma cuestión, otro valor distinto del que le hemos asignado.

Para que una misma letra pueda representar distintos valores hay que diferenciarlos por medio de comillas.

Por ejemplo *a', a", a'"* , que se leen a prima, a segunda, a tercera; o por medio de subíndices, por ejemplo a_1, a_2, a_3, que se leen a subuno, a subdós, a subtrés.



El interés del imperio romano de aplicar la ciencia matemática se enfocaba básica y principalmente en la agrimensura, que era la medición y fijación del inmenso territorio que poseía. Por tal motivo, hoy en día el uso de los números romanos se utiliza limitadamente; por ejemplo, en las inscripciones históricas, en la enumeración de capítulos, etc.

CAPÍTULO V

NÚMEROS ROMANOS

La **numeración romana** es el sistema de representación numérica empleado por los romanos y no utiliza el principio de valor relativo, pues el valor de los símbolos siempre es el mismo, sin que influya el **lugar** que ocupan. La numeración romana parece ser el resto de un sistema de numeración de base 5. En la actualidad sólo se usa para escribir fechas, numerar capítulos de una obra, en algunos relojes, etc.

SÍMBOLOS Y VALORES EN LA NUMERACIÓN ROMANA

La numeración romana utiliza los siguientes símbolos:

I vale 1; V vale 5; X vale 10; L vale 50; C vale 100; D vale 500 y M vale 1000. Adicionalmente, **una rayita** colocada encima de estas letras indica tantos millares como unidades tenga ese símbolo; **dos rayitas** encima indica tantos millones como unidades tenga el símbolo; **cuatro rayitas**, tantos billones como unidades indique el símbolo y **seis rayitas**, tantos trillones como unidades tenga el símbolo.

NORMAS PARA REPRESENTAR NÚMEROS ROMANOS

Existen tres reglas para representar los números romanos:

1) Colocando a la **derecha** de una cifra otra **igual** o **menor**, el valor de la primera será aumentando con el de la segunda.

LV equivale a L + V = 55

2) Colocando a la **izquierda** de una cifra otra **menor**, su valor se resta de la anterior.

IV equivale a V - I = 4

3) En ningún caso se pueden usar **más de tres símbolos iguales** seguidos a la derecha de otra cifra mayor, ni aislados **ni más de uno** a la izquierda de otra mayor. El 40 no se escribe XXXX, sino XL; el 9 no se escribe VIIII, sino IX; el 70 no se escribe XXXC, sino LXX.

Números arábigos	Números romanos
1	I
2	II
3	III
4	IV
5	V
6	VI
7	VII
8	VIII
9	IX
10	X
13	XIII
18	XVIII
20	XX
30	XXX
40	XL
65	LXV
105	CV
234	CCXXXIV
580	DLXXX
1,000	M
2,000	MM
2,349	MMCCCXLIX
3,000	MMM
4,000	$\overline{IV}$
5,609	$\overline{V}DCIX$
50,190	$\overline{L}CXC$
$1_1000,000$	$\overline{\overline{M}}$
$2_1000,000$	$\overline{\overline{MM}}$
$20_1000,000$	$\overline{\overline{XX}}$
Billón	$\overline{\overline{\overline{M}}}$
Trillón	$\overline{\overline{\overline{\overline{M}}}}$
41132,208	$\overline{\overline{IV}CXXXII}CCVIII$

EJERCICIOS

Leer los siguientes números:

1. XXXII

2. CCXXIV

3. DCCII

4. DCCXXI

5. CXLIX

6. MCIV

7. DC

8. DLX

9. MXIXCXV

10. DCVI

11. CCIX

12. MXVI

13. MMXXV

14. MMVIII

15. III

EJERCICIOS

Escribe los siguientes números en el sistema romano:

1. 523

2. 963

3. 2,123

4. 5,213

5. 52,010

6. 110,200

7. 365,741

8. 401,111

9. 511,222

10. $5_1222,410$

11. $8_1200,200$

12. $65_1001,228$

13. $50,000_1000,000$

14. 6 billones

15. Doce trillones

EJERCICIOS

Escribe con números arábigos los romanos:

1. La poetisa mexicana Sor Juana Inés de la Cruz nació en el año de MDCLI.

2. El autor de *El Zarco* y Clemencia, Ignacio Manuel Altamirano nació en MDCCCXXXIV.

3. Juan Rulfo, autor de *Pédro* Páramo, nació en MCMXVIII.

4. Octavio Paz fue un escritor mexicano, ganador del Premio Nobel de Literatura en el año MCMXC.

5. La Revolución Mexicana (MCMXX) fue un movimiento muy importante para el desarrollo del México moderno.

6. El imperio azteca cayó en manos españolas en MDXXI.

7. La Independencia de México fue en el año MDCCCX.

8. Juan Ruiz de Alarcón murió en MDCXXXIX.



El primero que definió las igualdades fue R. Recorde; más tarde Harriot y Bouguer fueron quienes usaron los signos de mayor que > y menor que <, que se usan hasta la fecha.

CAPÍTULO VI

RELACIONES DE IGUALDAD Y DESIGUALDAD

En la antigüedad, no se tenía un concepto muy claro de las igualdades, a pesar de que la aritmética era utilizada para las actividades cotidianas.

En 1542, Roberto Recorde en su obra "The Ground of Arts" fue el primero que utilizó el signo igual (=) y expuso algunas cuestiones teóricas sobre las igualdades.

En el siglo XVII, el inglés Harriot y el francés Bouguer establecieron el uso de los signos mayor que (>) y menor que (<).

IGUALDAD ENTRE NÚMEROS NATURALES

Todos los conjuntos coordinables entre sí tienen el mismo número cardinal por tanto, podemos decir que **números iguales son los que representan conjuntos coordinables**.

Ejemplo

Si en un tranvía cada persona ocupa un asiento de modo que no queda ningún asiento vacío ni ninguna persona de pie, ambos conjuntos están coordinados; luego, si *a* es el número que representa el conjunto de personas y *b* el número que representa el conjunto de asientos, tendremos que los números *a* y *b* son iguales (o son del mismo número), lo cual se expresa por la *notación*.

$a = b$ y se lee *a* igual a *b*

La expresión $a = b$ es una *igualdad* en la cual *a* que está a la izquierda del signo = es el *primer miembro* y *b* que está a la derecha del signo = es el *segundo miembro*.

DESIGUALDAD ENTRE NÚMEROS NATURALES

Cuando dos conjuntos no son coordinables entre sí quiere decir que tienen **desigual número**, por tanto, podemos decir que **números desiguales son los que representan conjuntos no coordinables**.

Figura 27



Si en un tranvía no es posible lograr que cada pasajero ocupe un asiento y cada asiento esté ocupado por una sola persona, ambos conjuntos no son coordinables y ello obedecerá a que hay *más* personas que asientos o *más* asientos que personas. Entonces, si *a* es el número que representa el conjunto de personas y *b* el conjunto de asientos, diremos que *a* es desigual a *b*. Si hay *más personas que asientos* después que cada asiento esté ocupado por una persona, quedarán personas de pie; entonces el conjunto de los asientos está coordinado con *una parte* del conjunto de personas y en este caso diremos que el número de personas *a* es *mayor* que el número de asientos *b* o que el número de asientos es menor que el número de personas, lo cual se expresa con la siguiente notación:

$$a > b \text{ o } b < a$$

Un número *a* es *mayor* que otro número *b* cuando el conjunto que representa *b* es coordinable con *una parte* del conjunto que representa *a*.

Si hay *más* asientos que personas o menos personas que asientos, después que cada persona ocupe un asiento quedarán asientos vacíos; entonces el conjunto de personas estará coordinado con una parte del conjunto de asientos y en este caso diremos que el número de personas *a* es menor que el número de asientos *b* o que el número de asientos es *mayor* que el número de personas, lo que expresa con la notación:

$$a < b \text{ o } b > a$$

Un número *a* es *menor* que otro número *b* cuando el conjunto que representa *a* es coordinable con *una* parte del conjunto que representa *b.*

Al escribir una desigualdad hay que poner el número *menor* junto al vértice del signo < y el número *mayor* junto a la abertura.

$$5 < 8$$
$$10 > 6$$

El *primer* miembro de una desigualdad es el número que está a la izquierda del signo < ó > y el segundo el que está a la derecha. 5 < 8, 5 es el primer miembro y 8 el segundo.

POSTULADO DE RELACIÓN

Sea *a* el número de elementos del conjunto A y *b* el número de elementos del conjunto B. Necesariamente, tiene que ocurrir una de dos cosas: **A es coordinable con B, o no lo es**.

Si *A* es coordinable con *B*, $a = b$

Si A no es coordinable con *B*, podría ser que A tiene más elementos que B y entonces $a > b$, o A tiene menos elementos que B y entonces $a < b$.

Dados dos números *a* y *b*, necesariamente tiene que verificarse una y sólo una de estas tres posibilidades:

$$a = b,\ a > b \text{ o } a < b$$

Efectivamente, es imposible que un número *a* no sea igual ni menor ni mayor que otro número *b*. En otras palabras, es imposible que la edad de una persona no sea ni 20 años, ni menos de 20 años, ni más de 20 años.

Por otro lado, estas posibilidades se **excluyen** mutuamente, es decir, si se verifica una de ellas las otras dos no pueden verificarse. Así

Si $a = b$, no es $a > b$ ni $a < b$

Si $a > b$, no es $a = b$ ni $a < b$

Si $a < b$, no es $a = b$ ni $a > b$

En términos simples, si una persona tiene 20 años, no tiene ni más ni menos de 20 años; si tiene menos de 20 años, no tiene ni 20 años ni más de 20 años; si tiene más de 20 años, no tiene 20 años ni menos de 20 años.

EJERCICIOS

1. *a* es un número de jóvenes y *b* un número de muchachas. ¿Qué relaciones se podrán escribir si al formar parejas sobran jóvenes; si sobran muchachas; si no sobran jóvenes ni muchachas? **R.** $a > b$; $a < b$; $a = b$.

2. En un colegio hay *x dormitorios* por *y* pupilos. ¿Cuándo será $x = y$, cuando $x > y$ y cuando $x < y$ de acuerdo con la coordinación de los conjuntos que representan? **R.** Cuando el conjunto de pupilos sea coordinable con el conjunto de dormitorios; cuando el conjunto de pupilos sea coordinable con una parte del conjunto de dormitorios; cuando el conjunto de dormitorios sea coordinable con una parte del conjunto de pupilos.

3. ¿Qué significa que el número *m* es igual a *n* ; que $m > n$; que $m < n$?
R. Que el conjunto que representa *m* es coordinable con el que representa *n* ; que el conjunto que representa *n* es coordinable con la parte del conjunto que representa *m*; que el conjunto que representa *m* es coordinable con una parte del conjunto que representa *n*.

SIGNOS DOBLES EN LA DESIGUALDAD

Cuando una de las tres posibilidades no se verifica, necesariamente deberá verificarse una de las otras dos.

Si a no es igual a b, necesariamente $a > b$ o $a < b$. (1)
Si a no es mayor que b, necesariamente $a =$ o $a < b$. (2)
Si a no es menor que b, necesariamente $a = b$ o $a > b$. (3)

Si queremos expresar que un número no es igual a otro usamos el signo $\neq$ (el signo = cruzado por una raya); para indicar que **no es mayor** que otro, se emplea el signo $\ngtr$, y para indicar que **no es menor** que otro se usa el signo $\nless$.

Utilizando los signos $\neq$, $\nless$ y $\ngtr$, las relaciones (1), (2) y (3) pueden escribirse:

Si $a \neq b$, necesariamente $a \lessgtr b$

Si $a \ngtr b$, necesariamente $a \leqq b$

Si $a \nless b$, necesariamente $a \geqq b$

Aquí vemos que el signo $\neq$ (no igual equivale al signo doble $\lessgtr$ (mayor o menor que); el signo $\ngtr$ (no mayor) equivale al signo doble $\leqq$ (igual o menor que) y el signo $\nless$ (no menor) equivale al signo doble $\geqq$ (igual o mayor que).

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE IGUALDAD Y DESIGUALDAD

Como ya vimos, cada número natural se representa gráficamente por un segmento que contiene al **segmento unidad** tantas veces como elementos tiene el conjunto que representa el número.

Dos números son iguales cuando representan dos conjuntos coordinables, o sea, dos conjuntos que tienen **igual número de elementos**, luego dos números iguales se representarán por dos segmentos que contengan **igual número de veces** al segmento unidad, o sea, por dos segmentos **iguales**. Así: 4 = 4 se representa:

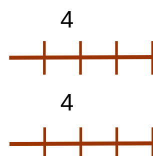


Figura 28

Si un número es **mayor** que otro, el conjunto que representa el número mayor tiene **más elementos** que el que representa el número menor, luego el segmento que representa el número mayor contendrá al segmento unidad más veces que el segmento que representa el número menor, o sea que ambos segmentos serán **desiguales**. Así: 7 > 4 se representa:

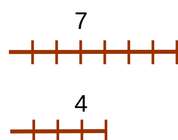


Figura 29

Si un número es **menor que otro**, el segmento que representa el número menor contiene **menos veces** al segmento unidad que el que representa el número mayor. Así 5 < 6 se representa:

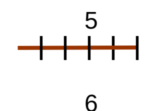


Figura 30

EJERCICIOS

Representar gráficamente:

1. 3 ≠ 5 **2.** 3 > 2 **3.** 8 < 10 **4.** 15 = 15 **5.** 5 < 8 **6.** 6 > 4 **7.** 9 > 5 **8.** 7 < 12

LEYES O CARACTERES DE LA IGUALDAD

1) Carácter idéntico. Todo número es igual a sí mismo.

$$a = a$$

2) Carácter recíproco. Si un número es igual a otro, éste es igual al primero.

$$a = b,\ b = a$$

Si la edad de Luis es igual a la de Lupe, la de Lupe es igual a la de Luis.

El carácter recíproco de las igualdades nos *permite invertir los dos miembros de una igualdad sin que la igualdad varíe.*

3) Carácter transitivo. Si un número es igual a otro y éste es igual a un tercero, el primero es igual al tercero.

$$a = b \text{ y } b = c,\ a = c$$

Si la edad de Luis es igual a la de Iván y la de Iván es igual a la de Jorge, Luis y Jorge tienen la misma edad.

El carácter transitivo de las igualdades se suele enunciar diciendo que dos *cosas iguales a una tercera son iguales entre sí,* o también que *si dos igualdades tienen un miembro común con los otros dos miembros se puede formar una igualdad.*

LEYES DE LA DESIGUALDAD

En la desigualdad no existe el carácter idéntico, pues es imposible que un número sea mayor o menor que él mismo:

$m \ngtr m$ o que $m \nless m$

Tampoco existe el carácter recíproco, pues si un número es mayor que otro, este último no puede ser mayor que el primero, sino menor: siendo $a > b$ no se verifica que $b > a$, sino que $b < a$.

Con lo anterior podemos ver que si se invierten los miembros de una desigualdad, cambia el signo de la desigualdad: para invertir los miembros de la desigualdad 5 < 7 hay que escribir 7 > 5.

En conclusión, las desigualdades sólo tienen **carácter transitivo**.

CARACTER TRANSITIVO DE LAS RELACIONES MAYOR Y MENOR

1) Si un número es mayor que otro y éste es mayor que un tercero, el primero es mayor que el tercero.

$a > b$ y $b > c$, $a > c$

Si el aula 1 tiene mayor número de alumnos que el aula 2 y ésta tiene mayor número de alumnos que años su profesor, el aula 1 tiene más alumnos que años del profesor.

2) Si un número es menor que otro y éste es menor que un tercero, el primero es menor que el tercero.

$a < b$ y $b < c$, $a < c$

Si Pedro tiene más pesos que yo años y Enrique tiene más primos que pesos tiene Pedro, mis años son menos que los primos de Enrique.

Las propiedades anteriores: 1) y 2) se pueden enunciar de este modo: *Si se tienen dos desigualdades del mismo sentido (es decir, ambas con > o ambas con <) tales que el segundo miembro de la primera sea igual al primer miembro de la segunda, de ellas resulta otra desigualdad del mismo sentido, cuyo primer miembro es el primer miembro de la primer desigualdad y cuyo segundo miembro es el segundo miembro de la segunda desigualdad.*

Así:	$7 > 5$ y $5 > 3$	luego $7 > 3$
	$3 < 8$ y $8 < 11$	luego $3 < 11$
	$9 > 7$ y $11 > 9$	luego $11 > 7$
	$7 < 8$ y $4 < 7$	luego $4 < 8$

Si dos desigualdades como las anteriores fueran de *distinto sentido*, el primer miembro de la primera puede ser igual, menor o mayor que el segundo miembro de la segunda.

Así:	$3 < 5$	y	$5 > 2$ y $3 > 2$
	$8 > 6$	y	$6 < 9$ y $8 < 9$
	$7 > 4$	y	$4 < 7$ y $7 = 7$

EJERCICIOS

1. Aplicar el carácter recíproco de las igualdades en: $x = y$; $a + b = c$; $p = q + r$.
R. $y = x$; $c = a + b$; $q + r = p$.

2. Mis x años son tantos como los y hermanos de Enrique. ¿Qué puedes escribir de acuerdo con el carácter recíproco de las igualdades? **R.** $y = x$.

3. Aplica el carácter transitivo a las siguientes igualdades:

$m = n$	y	$n = p$	**R.** $m = p$
$p = q$	y	$r = p$	**R.** $q = r$
$x = y$	y	$n = y$	**R.** $x = n$
$a + b = c$	y	$x = a + b$	**R.** $c = x$

4. Mi aula tiene tantos alumnos como años tengo yo y María tiene tantos primos como alumnos tiene mi aula, luego . . . ¿Qué carácter aplica para ello? **R.** Transitivo.

5. $m = n + p$ y $n + p = c + d$ luego... **R.** $m = c + d$

6. Si $m > n$ resulta que n ? m. **R.** $n < m$

7. Siendo $x >$ y resulta que y ? x **R.** $y < x$

8. ¿Qué se deriva de cada una de las siguientes parejas de desigualdades, de acuerdo con el carácter transitivo?:

$7 > 5$	y	$5 > 2$	**R.** $7 > 2$
$9 > 3$	y	$3 > 2$	**R.** $9 > 2$
$a < b$	y	$b < c$	**R.** $a < c$
$m < n$	y	$n < p$	**R.** $m < p$

ORDENAMIENTO DE NÚMEROS NATURALES

Ya vimos que los números naturales sólo son símbolos que representan la sucesión fundamental de conjuntos finitos, y como en esta sucesión cada conjunto tiene **un elemento menos** que el siguiente, cada conjunto de la sucesión fundamental es **parcial** con relación al siguiente, luego cada número natural que representa un conjunto dado es **menor** que el número que representa el conjunto siguiente. Por tanto,

$0 < 1$, $1 < 2$, $2 < 3$, $3 < 4$, $4 < 5$, etc.

y combinando estas desigualdades, resulta:

$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7$ . . . . . .

Aquí los elementos de la serie natural de los números están en orden ascendente.

COMBINACIÓN DE IGUALDADES Y DESIGUALDADES

1. Combinación de igualdades y desigualdades, todas con el signo >.

1) Combinar: $a = b$, $b > c$, $c > d$ y $d > e$ — Tendremos: $a = b > c > d > e$ y de aquí $a > e$

2) Combinar: $m > n$, $p > r$, $q = m$ y $n > p$ — Tendremos: $q = m > n > p > r$ y de aquí $q > r$

Aquí vemos que cuando todos los signos de desigualdad son > se deduce la relación de *mayor* entre el primer miembro y el último.

2. Combinación de igualdades con desigualdades, todas con el signo <.

1) Combinar: $a = b$, $b < c$, $c < d$ y $d < e$ — Tendremos: $a = b < c < d < e$ y de aquí $a < e$

2) Combinar: $p < q$, $r < s$, $r = q$, $s = m$ y $n > m$ — Tendremos: $p < q = r < s = m < n$ y de aquí $p < n$

Aquí vemos que cuando todos los signos de desigualdad son < se deduce la relación de *menor* entre el primer miembro y el último.

3. Combinación de igualdades y desigualdades en la que no todas son del mismo sentido.

Combinar: $a = b$, $b > c$, $c > m$ y $m < p$ — Tendremos: $a = b > c > m < p$

De aquí no se puede deducir relación alguna entre a y p, pues puede ser

$$a = p,\ a > p \text{ o } a < p$$

EJERCICIOS

1. A es mayor que B, D es mayor que F y B es igual a D. ¿Cuál es mayor, A o F? **R.** A.

2. Combinar $m = n$, $p < q$, $q > r$, $n > p$. ¿Hay relación final?
R. $m = n > p < q > r$; no.

3. Combinar $a = m$, $m < n$, $n < p$ y encuentra la relación final. **R.** $a = m < n < p$; $a < p$.

4. Reunir en una sola expresión $b = c$, $c < d$ y $a > b$. ¿Puede hallar la relación entre a y d? **R.** $a > b = c < d$; no.

5. M es menor que N, P es igual a Q, P es mayor que N y Q es menor que S. ¿Cómo es M con relación a S? **R.** $M < S$.

6. Reúne en una sola expresión $a = b$, $b > c$, $c > d$ y encuentra la relación entre a y d. **R.** $a = b > c > d$; $a > d$.

7. Combinar $7 > 5$, $3 = 3$, $5 > 3$, $3 > 2$ y encuentra la relación final. **R.** $7 > 5 > 3 = 3 > 2$; $7 > 2$.

8. Combinar $x < y$, $z > y$, $p > z$, $a = x$. ¿Hay relación final? **R.** $a = x < y < z < p$: si, $a < p$.

9. M es mayor que N, J es mayor que K y N es igual a J. ¿Cuál es mayor, M o K? **R.** M

10. En un examen Luisa obtuvo menos puntos que Susana, Ana menos que Norma, Norma igual que Diana, Luisa más que Paola, Ana igual que Susana y Graciela más que Norma. ¿Quien obtuvo más puntos de todas y quien menos? **R.** Más puntos Diana y Graciela; menos puntos Paola.



Figura 31

11. Hugo es más alto que Arturo, Damián más bajo que Salvador, Damián más alto que Raúl y Salvador más bajo que Arturo. ¿Quién es el más alto? **R.** Hugo.



Figura 32



La suma o adición es considerada la primera operación matemática que se conoció. La suma se realizaba utilizando elementos concretos. La cultura Inca utilizó cuerdas de colores vistosos con las que hacían nudos para realizar esta operación matemática.

CAPÍTULO VII

OPERACIONES ARITMÉTICAS

Conocemos un total de siete operaciones aritméticas: suma o adición, resta o substracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación, mismas que se clasifican en operaciones de **composición** o **directas** y operaciones de **descomposición** o **inversas.**

Suma, multiplicación y potenciación son operaciones directas porque al conocer ciertos **datos** se encuentra un **resultado**.

Resta, división, radicación y logaritmación son operaciones inversas. La resta es inversa a la suma; la división es inversa a la multiplicación; la radicación y la logaritmación son inversas a la potenciación, y se les llama **inversas** porque al conocer el **resultado** de la operación directa correspondiente y **uno de sus datos**, se encuentra el **otro dato**.

SUMA DE CONJUNTOS

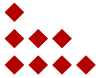
Sumar dos o más conjuntos (suman-dos), que no tienen elementos comunes, significa reunir en un solo conjunto (suma) todos los elementos que integran los conjuntos dados y sólo ellos.

Por ejemplo, al sumar los conjuntos:

AB, MNP, QRS

se forma el conjunto ABMNPQRS, que con-tiene todos los elementos de los conjuntos dados y sólo ellos.

Al sumar los conjuntos



se forma el conjunto ◆◆◆◆◆◆◆

De este modo se puede decir que un conjunto resultado de la suma de varios conjuntos dados (sumandos) que no tienen elementos comunes, es el que contiene todos los elementos de los conjuntos suman-dos y sólo ellos. Por ejemplo, el conjunto alumnos de bachillerato de un colegio es el conjunto suma de los conjuntos alumnos de 1o., 2o., 3o., 4o. y 5o.

SUMA DE NÚMEROS NATURALES

La suma de varios números naturales es el número cardinal del conjunto suma de los conjuntos cuyos números cardinales son los números dados.

Así, al sumar los conjuntos



cuyo número cardinal es 4



cuyo número cardinal es 5

y 

cuyo número cardinal es 6,

obtenemos el conjunto



cuyo número cardinal es 15 (que se obtiene contando sus elementos). Por tanto, 15 es la suma de 4, 5 y 6, ex-presado así:

$$4 + 5 + 6 = 15$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA SUMA

1) Representar gráficamente la suma 2 + 4 = 6.

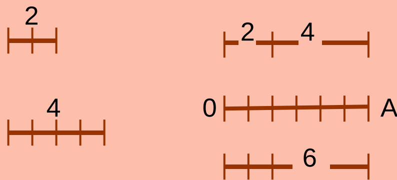


Figura 33

Se representan los sumandos (fig. 33) por segmentos y se transportan los segmentos sumandos consecutivamente sobre una semirrecta a partir de su origen O. El segmento total OA = 6 es la representación gráfica de la suma 2 + 4 = 6.

2) Representar gráficamente la suma 1 + 3 + 5 = 9

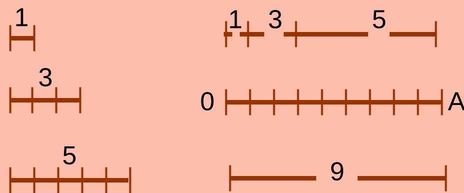


Figura 34

El segmento total OA = 9 (fig. 34) es la representación gráfica de la suma 1 + 3 + 5 = 9

EJERCICIOS

1. Forma el conjunto suma de los conjuntos de letras *el, muy, con*. **R.** Elmuycon.

2. ¿Cuál es el conjunto suma de los conjuntos *niños* y *niñas* de un jardín de niños? **R.** El conjunto formado por todos los alumnos del kinder.

3. Representar con números la suma de los conjuntos de letras *luna, con, yo.* **R.** 9.

4. Forma el conjunto suma de los conjuntos de letras siguientes y hallar el número cardinal de la suma:

a) *goma, pin*

b) *banco, luna, sofá*

c) *cuaderno, lápiz*

R. gomapin, 7; bancolunasofá, 13; cuadernolapiz, 13.

5. Representa gráficamente las sumas:

a) 1 + 6 c) 4 + 7 + 8

b) 5 + 9 d) 1 + 1 + 9 + 9

6. ¿Por dónde se empieza la adición y por qué?

7. ¿Cuándo se puede empezar la suma por cualquier columna?

8. Cuenta:

De 3 en 3 desde el 9 al 36, del 5 al 65, del 11 al 101.

De 12 en 12 desde el 24 al 240, del 480 al 780.

9. Escribe y suma las cantidades siguientes: 3 unidades del tercer orden, 2 del segundo, 1 del primero; 4 del cuarto orden, 15 del primero; 14 del cuarto orden, 132 del primero.

10. Escribe y suma las cantidades: 2 decenas de decenas, 6 unidades; 3 centenas, 8 decenas de centenas, 4 décimas de centenas; 5 millares de centenas, 6 decenas de décimas, 1 millar de centenas.

CASOS PARTICULARES DE LA SUMA

1) Sumando unidad. Como ya vimos, el 1 representa los conjuntos de un solo elemento. Al sumar conjuntos de un solo elemento, tenemos:



1 silla + 1 silla + 1 silla = 3 sillas



1 pera + 1 pera + 1 pera = 3 peras

Figura 34

Aquí, el número 3 es la suma de **tres** sumandos 1.

$a = 1 + 1 + 1 \ldots$ (a sumandos 1)

Cuando todos los sumandos son 1, la suma es igual al número de sumandos.

2) Sumando nulo. Módulo de la adición. Sabemos que el 0 representa los conjuntos nulos o que carecen de elementos.

Si a un conjunto cualquiera, por ejemplo de n sillas, le sumamos un conjunto nulo, la suma será el mismo conjunto de n sillas:

$$n + 0 = n$$

El **0** es el único número que sumado con otro no lo altera. El **0** es el módulo de la suma.

LEYES DE LA SUMA

Existen cinco leyes de la suma: ley de uniformidad, ley conmutativa, ley asociativa, ley disociativa y ley de monotonía.

I. LEY DE UNIFORMIDAD

Esta ley puede enunciarse de tres modos equivalentes:

1) La suma de varios números dados tiene un valor único o siempre igual:

4 rosas + 5 rosas = 9 rosas
4 tablas + 5 tablas = 9 tablas
4 lunas + 5 lunas = 9 lunas

Aquí la suma de 4 y 5, cualquiera que sea la naturaleza de los conjuntos representados siempre es 9.

2) Las sumas de números respectivamente iguales son iguales.

Si en cada aula de un colegio cada asiento está ocupado por un alumno de modo que no queda ningún alumno sin asiento ni ningún asiento vacío, tenemos que el número de alumnos de cada aula es igual al número de asientos del aula.

Si sumamos los números que representan los alumnos de cada una de las aulas, el resultado será igual a la suma de los números que representan los asientos de cada una de las aulas.

3) Suma de igualdades. Sumando miembro por miembro varias igualdades, resulta una igualdad.

$$a = b$$
$$c = d$$
$$m = n$$

resulta $a + c + m = b + d + n$

II. LEY CONMUTATIVA

Esta ley indica que el orden de los sumandos no altera la suma.

Si en la suma

2 osos + 3 osos + 4 osos = 9 osos

cambiamos el orden de los conjuntos sumandos, el conjunto suma no varía, porque contiene el mismo número de elementos:

3 patos + 2 patos + 4 patos = 9 patos
4 patos + 3 patos + 2 patos = 9 patos

Del mismo modo podemos escribir:

2 + 3 + 4 =
3 + 2 + 4 =
4 + 3 + 2 =
2 + 4 + 3, etcétera.

III. LEY ASOCIATIVA

Señala que la suma de varios números no varía sustituyendo varios sumandos por su suma.

1) Si A tiene 5 años, B 6 años y C 8 años, sumando las edades tendremos:

5 años + 6 años + 8 años = 19 años

El mismo resultado se obtiene si sumamos primero las edades de A y B, la cual se indica incluyendo estas cantidades en un paréntesis, y a esta suma le añadimos la edad de C :

$$\underbrace{(5 \text{ años} + 6 \text{ años})}_{11 \text{ años}} + 8 \text{ años} = 19 \text{ años}$$

porque en ambos casos el conjunto suma contendrá el mismo número de años. Luego, tenemos que 5 + 6 + 8 = (5 + 6) + 8.

2) Igualmente se tendrá:

3 + 4 + 5 + 6 =
(3 + 4) + (5 + 6) =
3 + (4 + 5 + 6) =
3 + (15) = 18

IV. LEY DISOCIATIVA

Esta ley señala que la suma de varios números no se altera descomponiendo uno o varios sumandos en dos o más sumandos, y es recíproca de la ley asociativa.

1) En la suma 10 + 3, puesto que 10 = 8 + 2, tendremos que:

10 + 3 = 8 + 2 + 3

2) En la suma 12 + 15, puesto que 12 = 9 + 3 y 15 = 7 + 6 + 2, tendremos:

12 + 15 = 9 + 3 + 7 + 6 + 2

V. LEY DE MONOTONÍA

Esta ley consta de dos partes:

1) Sumando miembro por miembro desigualdades del mismo sentido con igualdades, resulta una desigualdad del mismo sentido.

1. 8 > 3
5 = 5
resulta 8 + 5 > 3 + 5
13 > 8

2. $a > b$
$c = d$
$e > f$
$g = h$
resulta
$a + c + e + g > b + d + f + h$

2) Sumando miembro por miembro varias desigualdades del mismo sentido, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

1. Siendo
5 > 3
4 > 2

resulta
5 + 4 > 3 + 2
9 > 5

2. Siendo
$a < b$
$c < d$
$e < f$

resulta
$a + c + e < b + d + f$

ESCOLIO

Cuando sumamos desigualdades de sentido contrario, el resultado no puede anticiparse, ya que puede ser una desigualdad o una igualdad.

1) 8 > 3	**2)** 5 < 7	**3)** 5 < 9
5 < 12	8 > 2	6 > 2
8 + 5 < 3 + 12	5 + 8 > 7 + 2	5 + 6 = 9 + 2
13 < 5	13 > 9	11 = 11

USOS DE LOS PARÉNTESIS

Se conocen paréntesis o signos de agrupación de cuatro formas que son los siguientes:

( ) paréntesis ordinarios

[ ] corchetes o paréntesis angulares

{} llaves

__ vínculo o barra

Estos paréntesis asocian o agrupan los números indicando una operación de modo que cuando una operación se encierra entre paréntesis, significa que dicha operación tiene que efectuarse primero, y con su resultado se verifica la otra operación indicada.

1) En la expresión (3 + 4) + 6 el paréntesis indica que primero se efectúa la suma (3 + 4) = 7 y este resultado se suma con 6:

(3 + 4) + 6 = 7 + 6 = 13

2) En (2 + 5) + (6 + 4) primero se efectúan las sumas

(2 + 5) = 7 y (6 + 4) = 10

y luego se suman ambas:

(2 + 5) + (6 + 4) = 7 + 10 = 17

3) 100 - [18 + (6 - 4)] primero se efectúa (6 - 4) = 2, este resultado se suma con 18; 18 + 2 = 20 y 20 se resta de 100:

100 - 20 = 80

EJERCICIOS

1. Aplica la ley... a la suma 15 + 10 + 8 para transformarla en una suma de 9 sumandos. **R.** Disociativa: 2 + 4 + 9 + 1 + 7 + 2 + 4 + 3 + 1.

2. La suma 2 + 3 + 5 + 6 se puede escribir de 24 modos distintos aplicando la ley .... Escríbela de 12 modos distintos. **R.** Conmutativa; 2 + 3 + 5 + 6, 2 + 3 + 6 + 5, 2 + 6 + 5 + 3, 2 + 6 + 3 + 5, 2 + 5 + 3 + 6, 2 + 5 + 6 + 3, etc.

3. ¿Cuál es el módulo de la adición? Explica por qué. **R.** El 0, porque sumado con otro número no lo altera.

4. $m + n + p + q = p + q + m + n = m + q + p + n$ por la ley... **R.** Conmutativa.

5. ¿Cuándo es igual la suma a un sumando? **R.** Cuando todos los sumandos menos uno son 0.

6. 2 + 3 + 4 = 5 + 4 por la ley ... **R.** Asociativa.

7. ¿Cuándo es igual la suma al número de su-mandos? **R.** Cuando todos los sumandos son 1.

8. Si P es la suma de P sumandos, ¿cuáles son los sumandos? **R.** Todos son 1.

9. Si $a + b + c = S$, ¿cuál será la suma de $b + c + a$? **R.** S, por la ley conmutativa.

10. Aplica la ley conmutativa a la suma $a + b +$ c escribiéndola de 6 modos distintos. **R.** $a + b + c$, $a + c + b$, $b + a + c$, $b + c + a$, $c + a + b$, $c + b + a$.

11. Siendo $m + n + p = q$ podremos escribir que $(m + n) + p = q$ por la ley... **R.** Asociativa.

12. Siendo $m + n + p = q$ y $(m + n) = a$ podremos escribir por la ley asociativa que... **R.** $a + p = q$.

COMO COMPROBAR LA SUMA

La prueba de la suma puede verificarse de tres modos distintos:

1) Por la ley conmutativa. Dado que según esta ley el orden de los sumandos no altera la suma, se suman los sumandos de abajo hacia arriba y el resultado tiene que ser igual al obtenido sumando de arriba hacia abajo, si la operación está correcta.

Ejemplo

```
 164780  prueba
 ------
   1234
 + 5659
  84325
  73562
 ------
 164780
```

2) Por la ley asociativa. Dado que según esta ley la suma no se altera sustituyendo varios sumandos por su suma, se verifican sumas parciales con los sumandos y el resultado de estas sumas parciales tiene que ser igual a la suma total.

Ejemplo

```
 3184 }
  215 }  3399

+ 729 }
 6134 }  16181
 9318 }
 ----------------
19580  19850
```

3) Por la prueba del 9. Se encuentra el residuo entre 9 de cada sumando; el residuo entre 9 de la suma de estos residuos tiene que ser igual, si la operación está correcta, al residuo entre 9 de la suma total.

Ejemplo

Operación Prueba

Operación	Prueba
2345	Residuo entre 9 de 5
+ 7286	Residuo entre 9 de 5
38797	Residuo entre 9 de 8
148428	Suma de estos residuos..18
	Residuo de esta suma entre 9 0
	Residuo de la suma 148428 entre 9 0

ALTERACIONES DE SUMANDOS

1) Cuando un sumando aumenta o disminuye un número cualquiera, la suma aumenta o disminuye el mismo número.

El conjunto suma es la **reunión** de los elementos de los conjuntos sumandos, por lo que si los elementos de uno de los conjuntos sumandos aumentan o disminuyen y el conjunto suma no aumenta o disminuye en el mismo número de elementos, la suma no sería la reunión de los elementos de los sumandos, es decir, no sería una suma.

Ejemplo

8 + 3 = 11
(8 + 2) + 3 = 11 + 2 = 13
(8 - 2) + 3 = 6 + 3 = 9

2) Cuando un sumando aumenta un número cualquiera y otro sumando disminuye el mismo número, la suma no varía.

Al aumentar un conjunto sumando en un número cualquiera de elementos, la suma aumenta en el mismo número de elementos, pero al disminuir otro conjunto sumando en el mismo número de elementos, la suma disminuye el mismo número de elementos que había aumentado, por lo tanto, no varía.

EJERCICIOS

1. El menor de 4 hermanos tiene 21 años y cada uno le lleva 2 años al que le sigue. ¿Cuál es la suma de las edades? **R.** 96 años.

2. Un sumando aumenta 56 unidades y hay tres sumandos que disminuyen 6 cada uno. ¿Qué le sucede a la suma? **R.** Aumenta 38 unidades.

3. ¿Qué alteración sufre una suma si un sumando aumenta 6 unidades y otro aumenta 8? **R.** Aumenta 14 unidades.

4. $a + b + c = 10$. ¿Cuál sería la suma si a aumenta 3, b aumenta 5 y c aumenta 10? **R.** 28.

5. $m + n = 52$. ¿Cuál será la suma si m disminuye 4 y n disminuye 6? **R.** 42.

6. $a + b + c = 104$. ¿Cuál será la suma $(a + 5) + (b - 8) + (c + 9)$? **R.** 110.

7. $x + a = 59$. ¿Cuál será la suma si x aumenta 8 y a disminuye 8) **R.** 59.

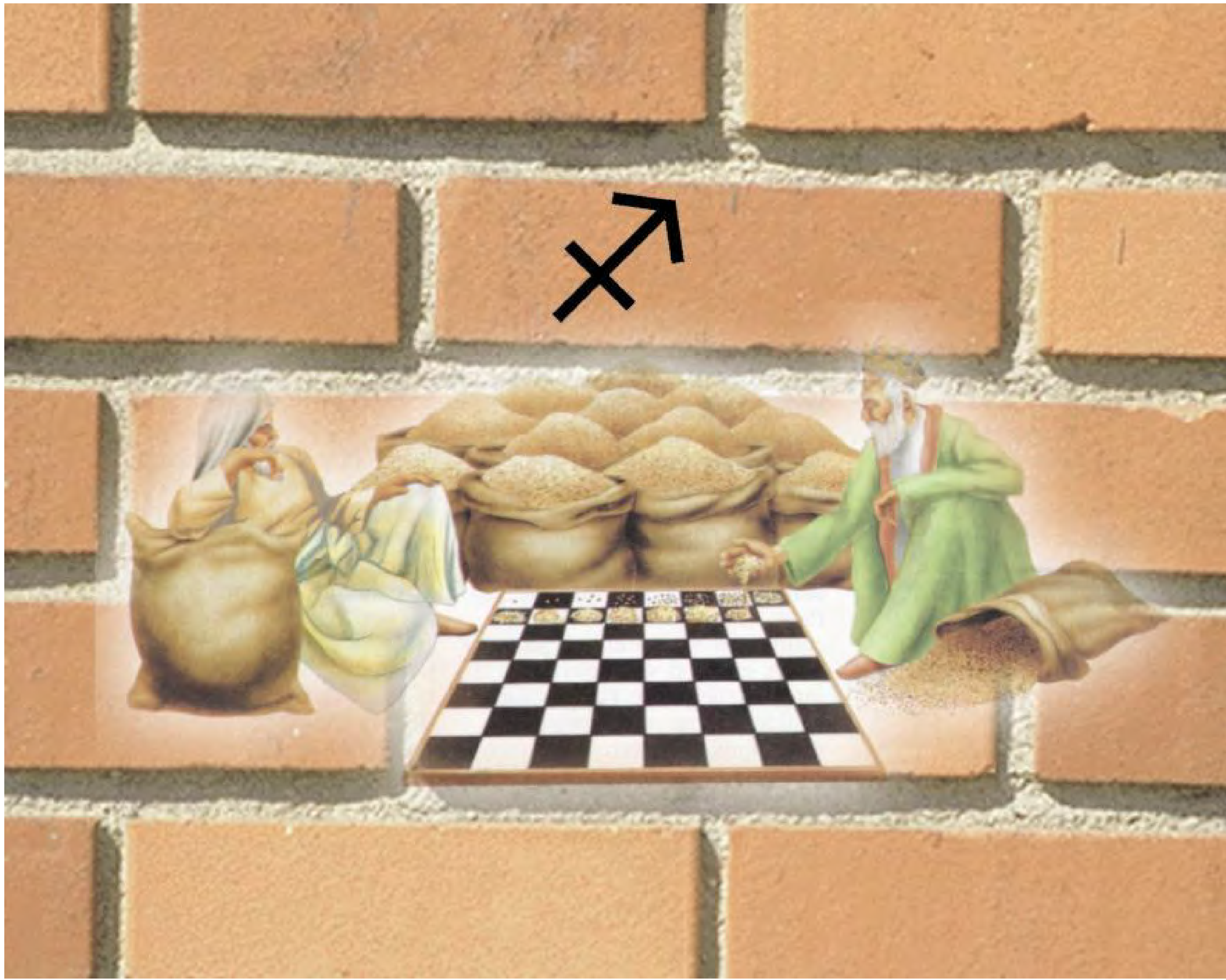
8. Compré un libro que me costó $16; un traje que me costó $35; una cámara fotográfica que me costó $42 más que el libro y el traje juntos; un anillo que me costó $13 más que el libro, el traje y la cámara; y un auto que me costó $1,235 más que todo lo anterior. Si me sobran $211, ¿cuánto dinero tenía? **R.** 2,048.



Figura 35

9. $x + b = 1516$. ¿Cuál será la suma $(a + 5) + (b - 8)$? **R.** 1513

10. Un sumando disminuye 6, otro 4, otro 7 y otros tres aumentan 5 cada uno. ¿Qué sucede a la suma? **R.** Disminuye 2 unidades.



Al igual que el signo de la suma o adición, el de la resta o sustracción se encuentra en el antiguo papiro Rhind. Ambos signos [suma (+), resta (-)] eran utilizados por los antiguos comerciantes en sus diversas operaciones mercantiles; hoy en día se siguen utilizando los mismos signos.

CAPÍTULO VIII

RESTA O SUSTRACCIÓN

La resta es una operación inversa a la suma que tiene por objeto, dada la suma de dos sumandos (minuendo) y uno de ellos (sustraendo), hallar el otro sumando (resta, exceso o diferencia).

El signo de la resta es - y se coloca entre el sustraendo y el minuendo. Siendo *a* el minuendo, *b* el sustraendo y *d* la diferencia; literalmente se escribe así:

$$a - b = d$$

DEFINICIÓN DE LA RESTA

Según la definición de la resta, la diferencia sumada con el sustraendo tiene que dar el minuendo.

Así, en la resta 9 - 4 = 5 se tiene que 5 + 4 = 9
y en 8 - 2 = 6 se tiene que 6 + 2 = 8
En general, siendo $a - b = d$ se tendrá que $b + d = a$

La resta es inversa a la suma porque en ésta última, dados los sumandos, hay que encontrar su suma, mientras que en la resta, dada la suma de dos sumandos y uno de ellos, se encuentra el otro sumando.

La **prueba de la resta** puede verificarse de tres modos distintos:

1) Sumando el sustraendo con **la diferencia**, lo que debe dar el minuendo.

Ejemplo

93254	Prueba:	58076 s
- 58076		+ 35178 d
35178		93254 m

2) Restando la diferencia del minuendo, lo que debe dar el sustraendo.

Ejemplo

15200	Prueba:	15200 m
- 13896		- 1304 d
1304		13896 s

3) Por la prueba del 9. Se encuentra el residuo entre 9 del sustraendo y de la diferencia; el residuo entre 9 de la suma de estos residuos tiene que ser igual, si la operación está correcta, al residuo entre 9 del minuendo.

Ejemplo

Operación	**Prueba**	
75462	Residuo entre 9 de 61034	5
- 61034	Residuo entre 9 de 14428	1
14428	Suma de estos residuos	6
	Residuo entre 9 de 6	6
	Residuo entre 9 de 75462	6



Figura 36

EJERCICIOS

1. Si se suma el minuendo con el sustraendo y la diferencia se obtiene . . . **R.** El doble del minuendo.

2. Si la diferencia de dos números es 14,560 y el duplo del mayor 60,000, ¿en cuánto excede el número 76,543 a la diferencia de los dos números? **R.** En 76,543

3. ¿Por qué la resta se empieza por la derecha?

4. Siendo $m + n = p$, se tendrá que m es . . . de n y p y que n es . . . entre p y m. **R.** La diferencia.

5. El mayor de dos números es 9,876 y la diferencia entre ambos es 3,456. Encuentra el menor. **R.** 6,420.

6. Al restar del minuendo la suma del sustraendo y la diferencia se obtiene. **R.** 0.

7. El menor de dos números es 12,304 y la diferencia entre ambos es 1,897. Encuentra el mayor. **R.** 14,201.

8. ¿En qué caso es indiferente empezar la resta por cualquier columna?

9. Si se resta la diferencia del minuendo se obtiene . . . **R.** El sustraendo.

10. Si del minuendo se resta la diferencia y de esta resta se quita el sustraendo se obtiene . . . **R.** 0.

11. Si el sustraendo se suma con la diferencia se obtiene . . . **R.** El minuendo.

12. Siendo $m - n = p$ se verifica que n = . . . y m = ... **R.** $n = m - p$, $m = p + n$.

13. Si el sustraendo es 36,815 y el resto 9,815, ¿cuál es el minuendo? **R.** 46,630.

14. Si $a + b = c$ se verifica que b = . . . y a = . . . **R.** $b = c - a$, $a = c - b$.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA RESTA

Representar gráficamente la diferencia 7 - 4

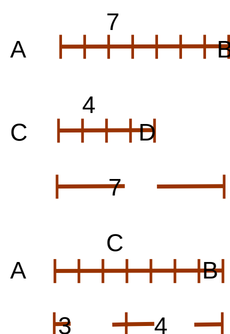


Figura 37

Se representa el minuendo (fig. 37) por un segmento *AB* = 7 y el sustraendo por un segmento *CD* = 4. Se transporta el segmento sustraendo *CD* sobre el segmento minuendo *AB* de modo que coincidan dos de sus extremos; en esta figura se hizo coincidir *D* con *B* .

El segmento *CA* = 3 representa la diferencia 7 - 4.

I. LEY DE UNIFORMIDAD

Puede enunciarse de dos modos equivalentes:

1) La diferencia de dos números tiene un valor único o siempre es igual. Así, la diferencia 7 - 2 tiene un valor único 7 - 2 = 5, porque 5 es el único número que sumado con 2 da 7.

11 - 3 = 8 porque 8 es el único número que sumado con 3 da 11.

2) Dado que dos números iguales son el mismo número, restando miembro por miembro dos igualdades resulta otra igualdad.

Así, siendo

$a = 3$

$5 = b$

resulta $a - 5 = 3 - b$

EJERCICIOS

Efectúa gráficamente:

1. 6 - 4	**2.** 5 - 1	**3.** 6 - 4	**4.** 10 - 3
5. 16 - 7	**6.** 8 - 3	**7.** 12 – 7	**8.** 10 - 10
9. 4 - 3	**10.** 9 - 2	**11.** 11 - 9	**12.** 8 - 5

LEYES DE LA RESTA

Existen dos leyes de la resta: ley de uniformidad y ley de monotonía.

II. LEY DE MONOTONÍA

Esta ley consta de tres partes:

1) Si de una desigualdad (minuendo) se resta una igualdad (sustraendo), siempre que la resta se pueda efectuar, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad minuendo.

8 > 5	6 > 7	*a* > *b*
2 = 2	4 = 4	*c* = *d*
8 - 2 > 5 - 2	6 - 4 < 7 - 4	*a* - *c* > *b* - *d*
6 > 3	2 < 3	

2) Si de una igualdad (minuendo) se resta una desigualdad (sustraendo), siempre que la resta se pueda efectuar, resulta una desigualdad de sentido contrario que la desigualdad sustraendo.

9 = 9	8 = 8	a = b
5 > 3	2 < 7	c > d
9 - 5 < 9 - 3	8 - 2 > 8 - 7	a - < - d
4 < 6	6 > 1	

3) Si de una desigualdad se resta otra desigualdad de sentido contrario, siempre que la resta sea posible, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad minuendo.

7 > 4	3 < 8	a < b
2 < 3	2 > 1	c > d
7 - 2 > 4 - 3	3 - 2 < 8 - 1	a - c < b - d
5 > 1	1 < 7	

ESCOLIO

Cuando restamos miembro por miembro dos desigualdades del mismo sentido, el resultado no puede anticiparse, pues puede ser una desigualdad del mismo sentido que las dadas, o bien de sentido contrario o una igualdad.

9 > 4	8 > 5	5 < 8
7 > 3	7 > 2	4 < 7
9 - 7 > 4 - 3	8 - 7 < 5 - 2	5 - 4 = 8 - 7
2 > 1	1 < 3	

ALTERACIONES DE MINUENDO Y SUSTRAENDO

1) Cuando el minuendo aumenta o disminuye un número cualquiera y el sustraendo no varía, la diferencia queda aumentada o disminuida en el mismo número.

Sabemos que el minuendo es la suma de dos sumandos, que son el sustraendo y la diferencia. Si el minuendo, que es la suma, aumenta o disminuye un número cualquiera, y uno de los sumandos (el sustraendo) no varía, el otro sumando (la diferencia) necesariamente tiene que aumentar o disminuir el mismo número, porque de otro modo el minuendo no sería la suma del sustraendo y la diferencia.

Ejemplo

9 - 7 = 2	8 - 5 = 3
(9 + 3) - 7 = 2 + 3	(8 - 2) - 5 = 3 - 2
12 - 7 = 5	6 - 5 = 1

2) Cuando el sustraendo aumenta o disminuye un número cualquiera y el minuendo no varía, la diferencia disminuye en el primer caso y aumenta en el segundo el mismo número.

Si el sustraendo, que es uno de los sumandos, aumenta o disminuye un número cualquiera y el minuendo, que es la suma, no varía, el otro sumando (la diferencia) tiene que disminuir en el primer caso y aumentar en el segundo el mismo número, porque de otro modo la suma o minuendo variaría.

Ejemplos

10 - 3 = 7	15 - 9 = 6
10 - (3 + 5) = 7 - 5	15 - (9 - 4) = 6 + 4
10 - 8 = 2	5 - 5 = 10

3) Cuando el minuendo y el sustraendo aumentan o disminuyen a la vez un mismo número, la diferencia no varía.

Al aumentar el minuendo cualquier número de unidades la diferencia aumenta el mismo número; pero aumentar el sustraendo el mismo número, la diferencia disminuye el mismo número, por lo tanto no varía.

Del mismo modo, al disminuir el minuendo un número cualquiera de unidades, la diferencia disminuye en el mismo número; pero al disminuir el sustraendo el mismo número de unidades, la diferencia aumenta el mismo número, por lo tanto no varía.

Ejemplo

15 - 6 = 9	17 - 11 = 6
(15 + 2) - (6 + 2) = 9	(17 - 3) - (11 - 3) = 6
17 - 8 = 9	14 - 8 = 6

EJERCICIOS

1. Si $a - m = p$ y $b = a$ y $c = m$, ¿qué se verifica, según la ley de uniformidad? **R.** $b - c = p$

2. Siendo 79 - b = 50, remplaza la palabra **minuendo** por un número:
minuendo - b = 54
minuendo - b = 42 **R.** a) 83 b) 71

3. Siendo x - 35 = 90, remplaza la palabra **sustraendo** por un número:
x - sustraendo = 81
x - sustraendo = 106
R. a) 44 b) 19

4. Carlos es el hermano menor de Roberto ¿quién era mayor Carlos hace 4 años o Roberto hace 9 años? **R.** No se puede saber.

5. Siendo $a - b = 11$, indica cuatro alteraciones que puedan realizarse en a, en b o en ambos a la vez, para que la diferencia sea 13. **R.** Pueden hacerse muchas combinaciones.

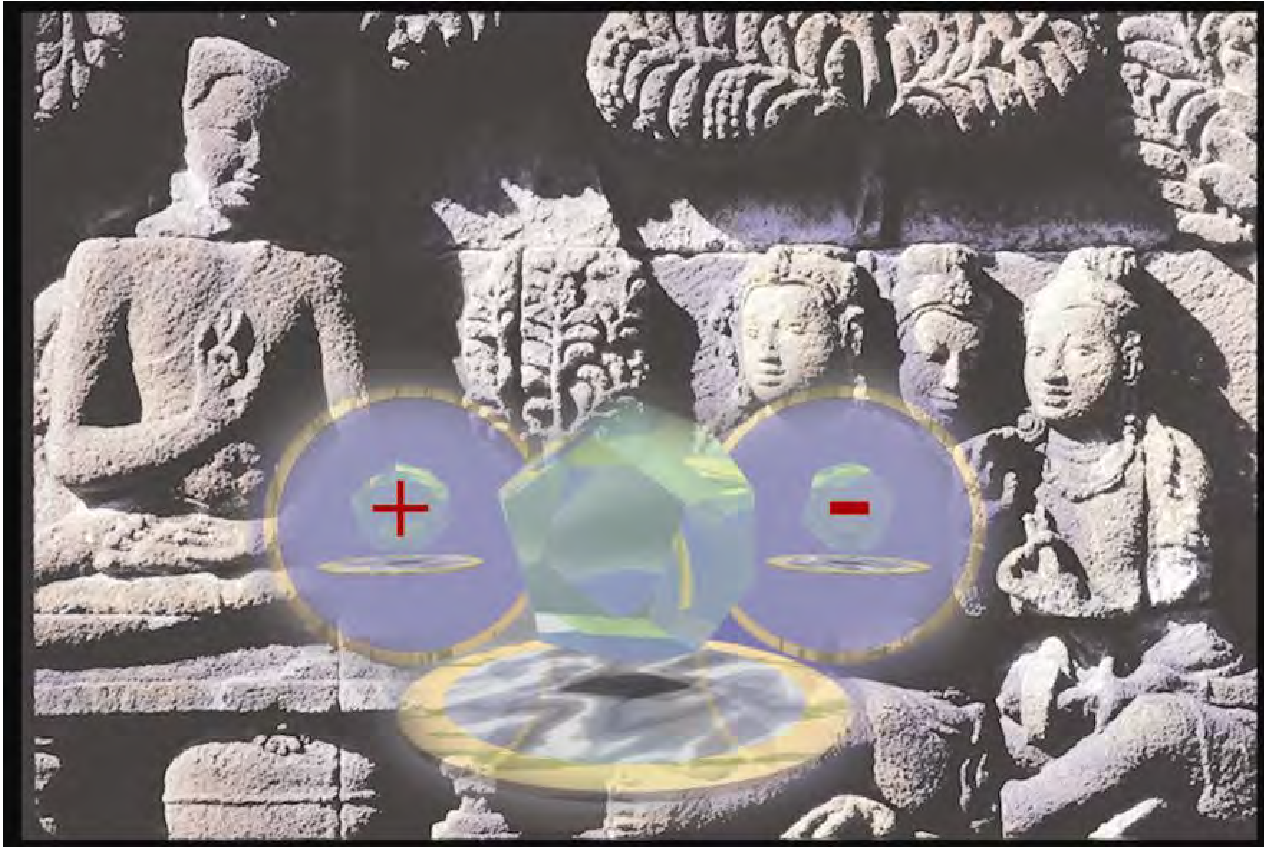
6. Siendo $m = n$ y $p = q$, ¿qué se puede escribir según la ley de uniformidad? **R.** $m - p = n - q$

7. Pedro es dos años mayor que su hermano. Hace 5 años, ¿quién era el mayor? ¿Qué ley se aplica? **R.** Pedro. La ley de monotonía.

8. ¿Qué alteración sufre una resta si el minuendo aumenta 8 unidades? ¿Si disminuye con el número 14 unidades? **R.** Aumenta ocho unidades. Disminuye catorce unidades.

9. ¿Qué alteración sufre una resta si el sustraendo aumenta 4 unidades? ¿Si disminuye 5? **R.** Disminuye 4 unidades. Aumenta 5 unidades.

10. ¿Qué alteración sufre una resta si el minuendo disminuye 40 unidades y el sustraendo aumenta 8? **R.** Disminuye 18 unidades



Los hindúes desarrollaron con mayor eficacia las operaciones de suma y resta como consta en el manuscrito de Bakhshall, en éste se plasma el avance de esta cultura en el área matemática alrededor del siglo VII d. C.

CAPÍTULO IX

OPERACIONES INDICADAS DE SUMA Y RESTA

Las operaciones suma y resta, son, dentro de la aritmética una de las partes básicas; la realización de ambas con números enteros, sin la utilización de símbolos de agrupación es una práctica cotidiana de millones de personas en todo el mundo.

Por ello, el conocimiento y empleo de estas operaciones es esencial en la vida del ser humano.

OPERACIONES DE SUMA Y RESTA SIN SIGNOS DE AGRUPACIÓN

1) Efectuar 5 + 4 - 3 + 2

Diremos:

5 + 4 = 9; 9 - 3 = 6;
6 + 2 = 8,
luego: 5 + 4 - 3 + 2 = 8

2) Efectuar 8 - 3 + 4 - 1 + 9 - 7

Diremos:

8 - 3 = 5; 5 + 4 = 9;
9 - 1 = 8; 8 + 9 = 17;
17 - 7 = 10,
luego:
8 - 3 + 4 - 1 + 9 - 7 = 10

EJERCICIOS

Efectúa las siguientes operaciones:

1. 1 + 1 + 7 - 3	**R.** 6
2. 7 - 3 + 6 - 2 + 7	**R.** 15
3. 10 - 3 + 10 - 1 - 5 + 2	**R.** 13
4. 1 + 17 - 18 + 10 + 4 - 3 + 9	**R.** 20
5. 32 - 19 + 43 - 18 + 35 - 53	**R.** 20
6. 59 - 42 + 108 - 104 + 315 - 136 - 48	**R.** 152
7. 300 - 41 - 63 - 56 - 31 + 89 - 114 + 1056	**R.** 1140
8. 915 + 316 - 518 - 654 + 673 - 185 + 114 + 2396	**R.** 3057

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes operaciones:

1. (4 + 5 + 3) + 8	**R.** 20
2. 150 - (14 - 6)	**R.** 142
3. (9 - 6) + 4	**R.** 7
4. (8 - 6) + (7 - 4)	**R.** 5
5. (9 + 5) + (7 - 2)	**R.** 19
6. 89 - (56 - 41)	**R.** 74
7. (11 - 5) - (9 - 3)	**R.** 0
8. (7 + 6) - (9 - 8)	**R.** 12
9. (11 - 5) - 4	**R.** 2.
10. (9 - 4) + (3 + 2 + 5)	**R.** 15
11. (85 - 40) - (95 - 80)	**R.** 30
12. (7 - 5) + (13 - 4) - (17 + 3) + (18 - 9)	**R.** 0
13. (15 - 7) + (6 - 1) + (9 - 6) + (19 + 8) - (3 - 1) + (4 + 5)	**R.** 50
14. 350 - 2 - 125 + 4 - (31 - 30) - (7 - 1) - (5 - 4 + 1)	**R.** 218
15. (8 - 1) - (16 - 9) + 4 - 1 + 9 - 6 + (11 - 6) - (9 - 4)	**R.** 6
16. 40 + [25 - (3 + 2)]	**R.** 60
17. 60 + [(4 + 2) - 5]	**R.** 61
18. 150 - [(5 - 1) - (4 - 3)]	**R.** 147
19. 250 + [(7 - 2) + (4 - 1) + (3 - 2)]	**R.** 259
20. 450 - [6 + {4 - 2 (3 - 1)}]	**R.** 444
21. 520 + [8 - 3 + {9 - (4 + 2 - 1)}]	**R.** 529
22. (150 - 5) - {14 + (9 - 6 + 3)}	**R.** 125
23. 500 - {6 + [(14 - 6) - (7 - 2) + (4 - 1)]}	**R.** 488
24. 500 - {14 - [7 - (6 - 5 + 4)]}	**R.** 488
25. 856 + {19 - 3 - [6 + (5 - 3) - (2 + 1) + (5 - 3)]}	**R.** 865

OPERACIONES INDICADAS CON SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Primero se efectúan las operaciones encerradas dentro de los paréntesis, hasta convertirlas en un solo número, y luego las que queden indicadas, como en los casos anteriores.

1) Efectuar (7 - 2) + (5 + 4) - (3 - 2)

Hacemos primero las operaciones encerradas entre paréntesis:

7 - 2 = 5, 5 + 4 = 9, 3 - 2 = 1

y tendremos:

(7 - 2) + (5 + 4) - (3 - 2) =
5 + 9 - 1 = 13

2) Efectuar 350 - (7 - 2 + 5) - (6 + 3) + (9 + 8 - 2).

Tendremos:

350 - (7 - 2 + 5) -
(6 + 3) + (9 + 8 - 2) =
350 - 10 - 9 + 15 = 346

3) Efectuar 30 + [84 - (7 - 2)].

Cuando hay un signo de agrupación encerrado dentro de otro, primero se hace la operación encerrada en el más interior. En este caso primero es la operación (7 - 2) = 5, y tendremos:

30 + [84 - (7 - 2)] =
30 + [84 - 5] =
30 + 79 = 109

4) Efectuar
800 - [45 + {(8 - 4) + (7 - 2)}]
Hacemos primero

8 - 4 = 4 y 7 - 2 = 5

y tendremos:

800 - [45 + {(8 - 4) + (7 - 2)}] =
800 - [45 + {4 + 5}] =
800 - [45 - 9] = 800 - 54 = 746

TEORÍA

Ahora veremos cómo efectuar las operaciones indicadas con base en las **propiedades** de la suma y la resta. Es necesario conocer este método, porque si las cantidades están representadas con letras no podremos efectuar las operaciones encerradas en los paréntesis y por tanto tampoco podremos aplicar el método anterior.

SUMA INDICADA Y DE UN NÚMERO

Para sumar un número con una suma indicada se suma el número con uno cualquiera de los sumandos de la suma.

Siendo la operación (2 + 3 + 4) + 5, decimos que:

(2 + 3 + 4) + 5 = 2 + (3 + 5) + 4 = 14

Al sumar el número 5 con el sumando 3, la suma (2 + 3 + 4) queda aumentada en 5 unidades, porque si un sumando se aumenta en un número cualquiera, la suma queda aumentada en dicho número.

En general: $(a + b + c) + d = a + (b + d) + c$

DOS SUMAS INDICADAS

Para sumar dos sumas indicadas se suman todos los sumandos que la forman.

Siendo la operación (5 + 6) + (7 + 8), decimos que:

(5 + 6) + (7 + 8) = (5 + 6 + 7 + 8) = 26

Al añadir suma 7 + 8 al sumando 6 de la primera suma, ésta queda aumentada en 7 + 8 unidades, por la misma razón del caso anterior.

En general: $(a + b) + (c + d + e) = a + b + c + d + e$

NÚMEROS Y DIFERENCIA INDICADA

Para sumar un número con una diferencia indicada, se suma el número con el minuendo y se resta el sustraendo.

Siendo la operación (7 - 5) + 4, decimos que:

(7 - 5) + 4 = (7 + 4) - 5 = 11 - 5 = 6

Al sumar el número 4 al minuendo, la diferencia 7 - 5 queda aumentada en 4, porque, como vimos, si el minuendo se aumenta en un número cualquiera, la diferencia queda aumentada en ese número.

En general: $(a - b) + c = (a + c) - b$

DIFERENCIAS INDICADAS

Para sumar dos o más diferencias indicadas, se suman los minuendos y de aquí se resta la suma de los sustraendos.

Siendo la operación (8 - 5) + (6 - 4), decimos que:

(8 - 5) + (6 - 4) = (8 + 6) - (5 + 4) = 14 - 9 = 5

Al sumar el minuendo 8 al minuendo 6, la diferencia (8 - 5) queda aumentada en 6 unidades; pero al sumar al sustraendo 5 el sustraendo 4, la diferencia (8 - 5) queda disminuida en 4; luego, si (8 - 5) aumenta 6 y disminuye 4, queda aumentada en 2 unidades, que es la diferencia de 6 - 4.

En general: $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$

Para sumar una suma con una diferencia indicada, se suma el minuendo con uno de los sumandos de la suma y de aquí se resta el sustraendo.

Siendo la operación (4 + 5) + (8 - 6), decimos que:

(4 + 5) + (8 - 6) = (4 + 5 + 8) - 6 = 17 - 6 = 11

Al añadir el minuendo 8 al sumando 5, la suma 4 + 5 queda aumentada en 8 unidades; pero al restar el sustraendo 6 queda disminuida en 6 unidades; luego, si la suma (4 + 5) aumenta 8 y disminuye 6, aumenta 2, que es la diferencia de 8 - 6.

En general: $(a + b) + (c - d) = (a + b + c) - d$

RESTA

Para restar una suma indicada de un número se restan del número, uno por uno, todos los sumandos de la suma.

Siendo la operación 25 - (2 + 3 + 4), decimos que:

25 - (2 + 3 + 4) = 25 - 2 - 3 - 4 = 16

Si 25 se disminuye primero en 2, después en 3 y luego en 4, queda disminuido en 9 unidades, que es la suma de 2 + 3 + 4.

En general: $a - (b + c + d) = a - b - c - d$

RESTA DE UNA SUMA INDICADA Y UN NÚMERO

Para restar de una suma indicada un número, se resta el número de cualquier sumando de la suma.

Siendo la operación (4 + 5 + 6) - 3, probar que:

(4 + 5 + 6) - 3 = (4 - 3) + 5 + 6 = 12

Al restar el 3 de uno de los sumandos de la suma, ésta queda disminuida en 3 unidades.

En general:

$(a + b + c) - d = (a - d) + b + c$

SUSTRACCIÓN DE UNA DIFERENCIA Y UN NÚMERO

Para restar una diferencia indicada de un número, se suma el sustraendo con el número y de aquí se resta el minuendo.

Siendo la operación 50 - (8 - 5), decimos que:

50 - (8 - 5) = (50 + 5) - 8 = 47

Sabemos que si al minuendo y al sustraendo de una diferencia se le suma un mismo número, la diferencia no varía. Añadiendo 5 al minuendo y al sustraendo de la diferencia 50 - (8 - 5), tenemos:

50 - (8 - 5) = (50 + 5) - (8 - 5 + 5) = (50 + 5) - 8

porque si a 8 le restamos 5 y le sumamos 5, queda 8.

En general:

$a - (b - c) = (a + c) - b$

Para restar de una diferencia indicada un número, se resta del minuendo la suma del sustraendo y el número.

Siendo la operación (15 - 7) - 6, decimos que:

(15 - 7) - 6 = 15 - (7 + 6) = 15 - 13 = 2

Al sumar 6 con el sustraendo 7, la diferencia 15 - 7 queda disminuida en 6 unidades, porque si al sustraendo se le suma un número cualquiera, la diferencia queda disminuida en este número.

En general:

$(a - b) - c = a - (b + c)$

RESTA DE DOS SUMAS INDICADAS

Para restar dos sumas indicadas se restan de la primera suma, uno por uno, todos los sumandos de la segunda suma.

Siendo la operación (4 + 5) - (2 + 3), decimos que:

(4 + 5) - (2 + 3) = 4 + 5 - 2 - 3 = 4

Si de la suma (4 + 5) restamos primero 2 y después 3, ésta queda disminuida en 5 unidades, que es la suma de 2 + 3.

En general:

$(a + b) - (c + d) = a + b - c - d$

RESTA DE DIFERENCIAS INDICADAS

Para restar dos diferencias indicadas, se suma el minuendo de la primera con el sustraendo de la segunda y de aquí se resta la suma del sustraendo de la primera con el minuendo de la segunda.

Siendo la operación (8 - 1) - (5 - 3), decimos que:

(8 - 1) - (5 - 3) = (8 + 3) - (5 + 1) = 11 - 6 = 5

Al sumar el sustraendo 3 con el minuendo 8, la diferencia (8 - 1) queda aumentada en 3 unidades; pero al sumar el minuendo 5 con el sustraendo 1, la diferencia (8 - 1) queda disminuida en 5 unidades; luego, si (8 - 1) aumenta 3 y disminuye 5, en definitiva disminuye 2, que es la diferencia 5 - 3.

En general:

$(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$

RESTA DE UNA SUMA Y UNA DIFERENCIA

Para restar de una suma una diferencia indicada, se suma el sustraendo con la unidad indicada y de aquí se resta el minuendo.

Siendo la operación (8 + 4) - (3 - 2), probar que:

(8 + 4) - (3 - 2) = (8 + 4 + 2) - 3 = 14 - 3 = 11

Al sumar el sustraendo 2 con la suma (8 + 4), esta queda aumentada en 2 unidades, pero al restar el minuendo 3 disminuye 3 unidades; luego, si aumenta 2 y disminuye 3, disminuye 1 unidad que es la diferencia de (3 - 2).

En general:

$(a + b) - (c - d) = (a + b + d) - c$

EJERCICIOS

Aplicando las reglas estudiadas, efectúa las siguientes operaciones:

1. (9 - 5) + (7 - 2) + (4 - 1) **R.** 12
2. (7 + 8) + 9 **R.** 24
3. a - (b - 7) **R.** a - b + 7
4. (m + n) + p **R.** m + n + p
5. (c + d) - (m + n) **R.** c + d - m - n
6. (7 + 6) + (4 + 5 + 1) **R.** 23
7. (x + y) + (2 + a) **R.** x + y + 2 + a
8. (9 - 3) + 4 **R.** 10
9. (a - m) + n **R.** a - m + n
10. (4 - 3) + (5 - 2) **R.** - 4
11. (7 + 5) + (6 - 3) **R.** 15
12. (4 + 3 + 9) - (3 - 2) **R.** 15
13. (b + c) + (m - n) **R.** b + c + m -n
14. 19 - (4 + 5 + 1) **R.** 9
15. (m + n + p) - x **R.** m + n + p - x
16. (8 - 3) - 5 - 4 **R.** 4
17. 53 - (23 - 15) **R.** 45
18. x - (m - x) **R.** (2x - m)
19. (8 - x) + 4 **R.** 12 - x
20. (7 - 6) - 1 **R.** 0
21. (11 - 2) - 6 **R.** 3.
22. (a - x) – y **R.** a - x - y
23. (6 + 5) - (7 + 3) **R.** 1
24. (9 + 8 + 7) - 14 **R.** 10
25. (9 - 3) - (8 - 2) **R.** 0
26. (11 - 2) - (7 - 5) **R.** 7
27. (9 + 8) + (5 - 3) **R.** 19
28. (a + x) - (x - 2) **R.** a + 2
29. (a - x) - (m - n) **R.** a - x - m + n
30. (a - x) + (m - n) **R.** a - x + m - n
31. (7 + 2) + (7 - 2) **R.** 14
32. (8 + 3) + (8 - 3) **R.** 16
33. (9 + 4) - (9 - 4) **R.** 8
34. (7 + 1) - (7 - 1) **R.** 2
35. (6 - 5) + (6 + 5) **R.** 12
36. (4 + 7) + (7 - 4) **R.** 14
37. (9 - 4) - (9 + 4) **R.** - 8
38. (a + x) + (a - x) **R.** 2a
39. (n - m) + (n + m) **R.** 2n
40. (a + 5) + (5 - a) **R.** 10
41. (3 + a) + (a - 3) **R.** 2a
42. (m - 8) + (8 + m) **R.** 2m
43. (10 + 30) - (30 - 10) **R.** 20

CASOS PARTICULARES

La suma **de dos números más su diferencia** es igual al **duplo del mayor.**

Siendo los números 8 y 5, decimos que:

(8 + 5) + (8 - 5) = 2 × 8 = 16

Como ya vimos, para sumar una suma con una diferencia, se suma el minuendo de la diferencia con uno de los sumandos de la suma y de aquí se resta el sustraendo; luego:

(8 + 5) + (8 - 5) = 8 + 5 + 8 - 5 = 8 + 8 + 5 - 5 =
8 + 8 = 2 × 8

En general:

$$(a + b) + (a - b) = 2a$$

La suma **de dos números menos su diferencia** es igual al **duplo del menor.**

Siendo los números 8 y 5, decimos que:

(8 + 5) - (8 - 5) = 2 × 5 = 10

Como ya vimos también para restar de una suma una diferencia se suma el sustraendo con la suma y de aquí se resta el minuendo; luego:

(8 + 5) - (8 - 5) = 8 + 5 + 5 - 8 = 5 + 5 + 8 - 8 =
5 + 5 = 2 × 5

En general:

$$(a + b) - (a - b) = 2b$$



Figura 38



En la resolución de operaciones básicas de suma y resta, se ha utilizado un complemento auxiliar matemático, el cual es producto de una consecuencia del carácter decimal del sistema de numeración. En la actualidad se usa muy poco.

CAPÍTULO X

COMPLEMENTO ARITMÉTICO

El **complemento aritmético** de un número es la diferencia entre ese número y una unidad de orden superior a su cifra de mayor orden.

Ejemplos

El complemento aritmético de 78: es 100 - 78 = 22

El complemento aritmético de 402: es 1000 - 402 = 598

El complemento aritmético de 2,650: es 10,000 - 2,650 = 7,350

El complemento aritmético de 15,500: es 100,000 - 15,500 = 84,500

REGLA PARA ENCONTRAR UN COMPLEMENTO

Una regla práctica para encontrar el complemento de un número consiste en restar de 9 todas las cifras del número, empezando por la izquierda, menos la última cifra significativa, que se resta de 10. Si el número termina en ceros, a la derecha de la última resta se escriben esos ceros.

Ejemplos

1) Para encontrar el complemento aritmético de 346.
Diremos:

De 3 a 9, 6; de 4 a 9; de 6 a 10, 4; luego el complemento aritmético de 346 es 654.

2) Hallar el complemento aritmético de 578,900
Diremos:

De 5 a 9, 4; de 7 a 9, 2; de 8 a 9, 1; de 9 a 10, 1; luego el complemento aritmético es 421,100.

EJERCICIOS

Encuentra el complemento aritmético de los siguientes números:

1. 22	**R.** 78
2. 54	**R.** 46
3. 300	**R.** 700
4. 489	**R.** 511
5. 561	**R.** 439
6. 4,258	**R.** 5,742
7. 23,582	**R.** 76,418
8. 222,142	**R.** 777,858
9. 141,473	**R.** 858,527
10. 692,123	**R.** 407,877
11. 258,874	**R.** 741,126
12. 16,522,001	**R.** 83,477,999

COMPLEMENTO ARITMÉTICO EN LA RESTA

Para efectuar la resta por medio del complemento aritmético se suma el minuendo con el complemento aritmético del sustraendo, colocando adelante de éste una unidad con signo menos, misma que se debe tomar en cuenta al efectuar la suma.

Ejemplo

1) Efectuar 1034 - 615 por medio del complemento aritmético.

El complemento aritmético de 615 es 385. Ahora sumamos el minuendo 1,034 con 1385, que es el complemento aritmético con una unidad con signo menos delante, y tendremos

```
   1034
 + 1385
   0419
```

La diferencia entre 1034 y 615 es 419, misma que se puede comprobar efectuando la resta:

```
   1034
  - 615
   0419
```

2) Efectuar por medio del complemento aritmético 7289 - 5400

El complemento aritmético de 5400 es 4600. Ahora sumamos 7289 con 14600 y tendremos:

```
    7289
 + 14600
   01889
```

```
Prueba: 7289
      - 5400
        1889
```

EJERCICIOS

Por medio del complemento aritmético, realiza las siguientes operaciones:

1. 95 - 54
2. 165 - 15
3. 365 - 52
4. 563 - 450
5. 2115 - 852
6. 2207 - 4000
7. 12251 - 5555
8. 6539 - 12005
9. 162360 - 30000
10. 15346 - 41400
11. 87789541 - 24475
12. 456822369 - 25896
13. 1258963699 - 12345678

OPERACIONES COMBINADAS Y COMPLEMENTO ARITMÉTICO

Para efectuar sumas y restas combinadas por medio del complemento aritmético se suman todos los sumandos con los complementos aritméticos de los sustraendos, colocando delante de cada complemento una unidad con signo menos, misma que se tomará en cuenta al efectuar la suma.

Ejemplo

1) Efectuar por los complementos 56 - 41 + 83 - 12

```
                                     56
Complemento aritmético de 41....... 159
                                   + 83
Complemento aritmético de 12....... 188
                                    086
```

2) Efectuar por los complementos

14208 - 3104 + 8132 - 1245 - 723 + 2140

```
                                     14208
Complemento aritmético de 3104.........16896
                                    + 8132
Complemento aritmético de 1245........ 18755
Complemento aritmético de 723........... 1277
                                      2140
                                     19408
```

EJERCICIOS

Efectúa por los complementos:

1. 10 - 8 + 6	**R.** 8
2. 30 - 11 - 6 + 2	**R.** 15
3. 100 - 50 + 200 - 150	**R.** 100
4. 500 - 700 + 560 - 40	**R.** 320
5. 25 - 14 - 50 + 85 - 41 + 658 - 53	**R.** 610
6. 2589 - 471 - 9 - 4 + 6582 - 85	**R.** 8602
7. 25861 + 12358 - 32581 + 58932 - 6521	**R.** 58049
8. 62588 + 53512 - 23000 - 2050 - 5820	**R.** 85230



Para los pueblos antiguos, la multiplicación era una operación difícil de realizar; se auxiliaban de tablas para poder obtener los resultados correctos. En 1647 se comenzó a emplear el signo × (la cruz de San Andrés) para indicar esta operación matemática.

CAPÍTULO XI

MULTIPLICACIÓN

La **multiplicación** es una operación de composición cuyo objeto, dados los números llamados **multiplicando** y **multiplicador**, es hallar un número llamado **producto** que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad.

De tal modo, para multiplicar 4 (multiplicando) por 3 (multiplicador) se debe encontrar un número que sea respecto de 4 lo que 3 es respecto de 1, pero como 3 es tres veces 1, luego el producto será tres veces 4, o sea 12. En general, multiplicar a por b es hallar un número que sea respecto de a lo que b es respecto de 1.

NOTACIÓN

El producto de dos números se indica con el signo × o con un punto entre los **factores**, que es el nombre que se da al multiplicando y al multiplicador. El producto de 6 por 5 se indica:

$$6 \times 5 \text{ ó } 6 \cdot 5$$

Si los factores son literales, o un número y una letra, suele omitirse el signo de multiplicación: el producto de a por b se indica:

$$a \times b \text{ ó } a \cdot b$$

o simplemente ab. El producto de 7 por n se indica:

$$7 \times n \text{ ó } 7 \cdot n$$

o mejor $7n$.

RELACIÓN ENTRE MULTIPLICANDO Y PRODUCTO

Consideremos cuatro casos para explicar la **relación entre el producto y el multiplicando**:

1) Si el multiplicador es cero, el producto es cero:

3 × 0 = 0

porque el multiplicador 0 indica la ausencia de la unidad, por tanto el producto indica la ausencia del multiplicando.

2) Si el multiplicador es 1, el producto es igual al multiplicando:

8 × 1 = 8

porque siendo el multiplicador igual a la unidad, el producto tiene que ser igual al multiplicando. El 1 es el único número que multiplicado por otro da un producto igual y por ello se dice que 1 es el **módulo** de la multiplicación.

3) Si el multiplicador es > 1, el producto es > el multiplicando:

7 × 6 = 42 > 7

porque siendo 6 > 1, el producto tiene que ser > el multiplicando.

4) Si el multiplicador es < 1, el producto es < el multiplicando:

8 × 0.5 = 4

porque siendo 0.5 la mitad de la unidad, el producto tiene que ser la mitad del multiplicando.

De lo que se deduce que **multiplicar no siempre significa aumentar**.

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES Y CERO

Cuando el multiplicador es un número natural, la multiplicación es una **suma abreviada** que consta de tantos **sumandos iguales** al multiplicando como **unidades** tenga el multiplicador.

Ejemplos

4 × 3 = 4 + 4 + 4 = 12
5 × 6 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30
$ac = a + a + a + a \dots c$ veces

Para multiplicar un entero por la unidad seguida de ceros se añaden al entero tantos ceros como los que acompañan a la unidad.

Ejemplos

1) 54 × 100 = 5400, porque el valor relativo de cada cifra se ha hecho 100 veces mayor.

2) 1789 × 100 = 178900, porque el valor relativo de cada cifra se ha hecho 100 veces mayor.

Para la multiplicación de dos números terminados en ceros, se multiplican los números como si no tuvieran ceros y a la derecha de este producto se añaden tantos ceros como los que haya en el multiplicando y el multiplicador.

Ejemplo

4300 × 2500 = 10750000

El producto siempre tiene tantas cifras como las que haya en el multiplicando y el multiplicador juntos, o una menos. Por ejemplo, el producto 345 × 23 tendrá cuatro ó cinco cifras.

En efecto: 345 × 23 > 345 × 10, y como este último producto 345 × 10 = 3450 tiene cuatro cifras, el producto 345 × 23, que es mayor no puede tener menos de cuatro cifras.

Por otra parte, 345 × 23 < 345 × 100, pero este producto 345 × 100 = 34500 tiene cinco cifras, luego el producto 345 × 23, que es menor, no puede tener más de cinco cifras.

PRODUCTO CONTINUADO

Para llegar al producto de más de dos números, por ejemplo 2 × 3 × 4 × 5, se busca primero el producto de dos de ellos y éste se multiplica por el tercer factor; luego este segundo producto por el factor siguiente, y así hasta el último factor.

En el caso mencionado tendremos: 2 × 3 = 6; 6 × 4 = 24; 24 × 5 = 120.

Luego 2 × 3 × 4 × 5 = 120

La **prueba de la multiplicación** puede verificarse de tres modos distintos:

1) Cambiando el orden de los factores, lo que debe darnos el mismo producto si la operación está correcta, según la ley conmutativa de la multiplicación.

2) Dividiendo el producto por uno de los factores, lo que debe darnos el otro factor.

3) Por la prueba del 9. En esta se encuentra el residuo entre 9 del multiplicando y del multiplicador; si la operación es correcta, el residuo entre 9 del producto de ambos tiene que ser igual al residuo entre 9 del producto total.

Ejemplo

Operación	**Prueba**
186	Residuo de 186 entre 9 6
× 354	Residuo de 354 entre 9 3
744	Producto de estos residuos 18
930	Residuo entre 9 de 18 0
558	Residuo entre 9 del producto 65,844 0
65844	

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PRODUCTO

Ejemplos

1) Representar gráficamente 3 × 2

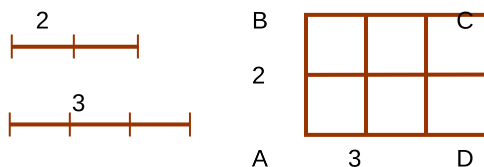


Figura 39

Se representan gráficamente (fig. 39) el multiplicando 3 y el multiplicador 2 por medio de segmentos y se construye un rectángulo cuya base sea el segmento que representa el 3 y cuya altura sea el segmento que representa el 2. El rectángulo ABCD, que consta de dos filas horizontales de 3 cuadrados cada una es la representación gráfica del producto 3 × 2 = 6, porque el desarrollo de este producto es: 3 × 2 = 3 + 3 = 6.

2) Representar gráficamente el producto 4 × 5

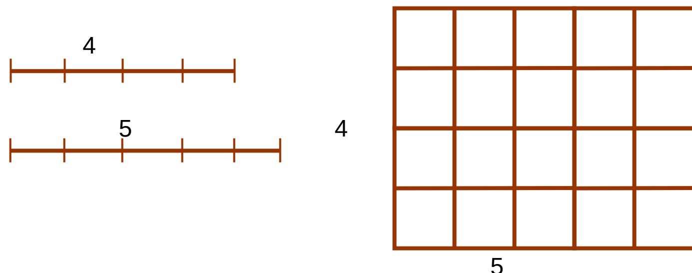


Figura 40

El rectángulo de la figura 40 formado por 4 filas horizontales de 5 cuadrados cada una, o sea de 5 + 5 + 5 + 5 = 20 cuadrados, es la representación gráfica del producto 5 × 4, porque el desarrollo de este producto es: 5 × 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20.

EJERCICIOS

1. Siendo *a* • 5 = *b*, ¿qué valor tiene *b* con relación a *a* ?

2. ¿Cuál es el módulo de la multiplicación? ¿Por qué?

3. Efectúa las operaciones siguientes:

154 × 26
25811 × 1222
8612 × 3257
2525 × 36747
54235 × 368441

4. Si el multiplicando es 5, ¿cuál será el multiplicador si el producto es 25; si es 5; si es cero?

5. Siendo *mn* = *m*, ¿qué número es *n* ?

6. Expresar en forma de suma los productos 3 × 4; 5 × 7; 6 × 8.

7. Un auto sale de la ciudad de México hacia Monterrey a 60 km por hora y otro de la ciudad de México hacia Acapulco a 70 km por hora. Si parten a las 10 de la mañana, ¿a qué distancia estarán a la una de la tarde?
R. 390 km.

8. Expresar en forma de suma los productos *ab, mn, cd*.

9. Siendo el multiplicando el 48, ¿cuál debe ser el multiplicador para que el producto sea 48; el doble de 48; su tercera parte; 5 veces mayor que 48; cero?

10. Representa gráficamente los productos:

3 × 3   2 × 5   8 × 9
3 × 6   6 × 6   4 × 14

11. Efectuar las operaciones siguientes:

258 por una decena
125 por una decena de millar
2 centenas de millar por 14 decenas
14 décimas de centenas por 205 centenas de decenas
4 centenas por 9 centenas de millar

12. Efectuar las operaciones siguientes:

321 × 1000
425 × 100440
539654 × 1000000
1476534 × 10000000
125000 × 12000

13. ¿Cuántas cifras tendrán los productos:

15 × 10   451 × 222
216 × 77   3698 × 149

14. Pedro tiene Z65, Patricio el doble de lo que tiene Pedro menos Z16 y Juan tanto como ellos dos juntos más $18. Si entre todos gastan $124, ¿cuál es el capital común que queda?
R. $252.



Figura 41

15. Encuentra el resultado de:

2 × 6 × 8
5 × 2 × 6 × 10
3 × 11 × 12 × 17

LEYES DE LA MULTIPLICACIÓN

Existen seis leyes de la multiplicación: ley de uniformidad, ley conmutativa, ley asociativa, ley disociativa, ley de monotonía y ley distributiva.

I. LEY DE UNIFORMIDAD

Esta ley puede enunciarse de tres modos equivalentes:

1) El producto de dos números tiene un valor único o siempre igual.

5 tijeras × 2 = 10 tijeras

5 reglas × 2 = 10 reglas

5 engrapadoras × 2 = 10 engrapadoras

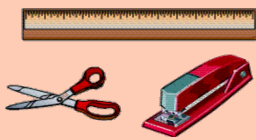


Figura 42

Aquí el producto 5 × 2, cualquiera que sea la naturaleza de los conjuntos, siempre es 10 por lo que podemos escribir:

5 × 2 = 10, siempre

2) Los productos de números respectivamente iguales son iguales.

Si en un aula cada asiento está ocupado por un alumno de modo que no quedan asientos vacíos ni alumnos de pie, ambos conjuntos están coordinados, por tanto el número de alumnos a es igual al número de sillas b. Para sentar al triple número de alumnos (a × 3 alumnos) faltaría el triple número de sillas (b × 3 sillas) y tendríamos $a \times 3 = b \times 3$.

3) Multiplicando miembro por miembro varias igualdades resulta otra igualdad producto de dos igualdades.

1. Siendo $a = b$
$c = d$
resulta $ac = bd$

2. Siendo $6 = 2.3$
$a = c$
$mn = p$
resulta $6amn = 6cp$

II. LEY CONMUTATIVA

Esta ley dice que el orden de los factores no altera el producto, ya sea que se trate de dos factores o más de dos factores.

1) En el caso de dos factores:

Siendo el producto 6 × 4, demostraremos que 6 × 4 = 4 × 6.

$$6 \times 4 = 6 + 6 + 6 + 6 = 24$$

$$4 \times 6 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24$$

y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, tendremos:

$$6 \times 4 = 4 \times 6$$

En general: $ab = ba$

2) En el caso de más de dos factores:

Siendo el producto 5 × 4 × 3 × 2, demostraremos que al invertir el orden de los factores no se altera el producto.

El producto 5 × 4 × 3 × 2 se puede considerar descompuesto en estos dos factores: 5 • 4 y 3 • 2, y como para dos factores ya está demostrado que el orden de los mismos no altera el producto, tendremos:

$$5 \cdot 4 \times 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \times 5 \cdot 4$$

Este mismo producto 5 × 4 × 3 × 2 se puede considerar descompuesto con otros dos factores: 5 • 4 • 3 y 2, y como el orden de los mismo no altera el producto, tendremos 5 • 4 • 3 × 2 = 2 × 5 • 4 • 3.

Aplicando estas descomposiciones es posible realizar todas las combinaciones posibles de factores, y en cada caso se demuestra que el orden de los mismos no altera el producto; por tanto queda demostrado lo que nos proponíamos.

En general: $abcd = bacd = cabd$, etc.

III. LEY DE MONOTONÍA

Esta ley consta de dos partes:

1) Multiplicando miembro por miembro desigualdades del mismo sentido e igualdades, resulta una desigualdad del mismo sentido que las dadas.

1. Siendo $8 > 3$
$4 = 4$
resulta $8 \times 4 > 3 \times 4$
$32 > 12$

2. Siendo $5 = 5$
$3 < 6$
$2 < 4$
resulta $5 \times 3 \times 2 < 5 \times 6 \times 4$
$30 < 120$

3. Siendo $a > b$
$c = d$
$e > f$
$g = h$
resulta $aceg > bdfh$

2) Multiplicando miembro por miembro varias desigualdades del mismo sentido resulta una desigualdad del mismo sentido que las dadas.

1. Siendo $5 > 3$
$6 > 4$
resulta $5 \times 6 > 3 \times 4$
$30 > 12$

2. Siendo
$a < b$
$c > d$
$e < f$
resulta $ace < bdf$

IV. LEY ASOCIATIVA

Esta ley indica que el producto de varios números no cambia al sustituir dos o más factores por su producto.

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$
$$\underbrace{(2 \times 3)}_{6} \times 4 \times 5 = 120$$

$$\underbrace{(2 \times 3)}_{6} \times \underbrace{(4 \times 5)}_{20} = 120$$

En general:

$$abcd = (ab)\,cd = a\,(bcd)$$

Primero deben obtenerse los productos encerrados entre paréntesis y luego las otras operaciones indicadas.

V. LEY DISOCIATIVA

Según esta ley el producto de varios números no cambia al descomponer uno o más factores en dos o más factores.

1) Siendo el producto 8×15. Puesto que $8 = 4 \times 2$, tendremos:

$$8 \times 5 = 4 \times 2 \times 5$$

2) Siendo el producto 10×12. Puesto que $10 = 5 \times 2$ y $12 = 3 \times 4$, tendremos:

$$10 \times 12 = 5 \times 2 \times 3 \times 4$$

ESCOLIO

Cuando multiplicamos miembro por miembro desigualdades de **sentido contrario**, el resultado no puede anticiparse, pues puede ser una desigualdad de cualquier sentido o una igualdad.

1) Multiplicando

$6 > 3$
$4 < 15$
resulta $6 \times 4 < 3 \times 15$
$24 < 45$, desigualdad

2) Multiplicando

$3 < 4$
$8 > 6$
resulta $3 \times 8 = 4 \times 6$
$24 = 24$, igualdad

VI. LEY DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar una suma indicada por un número se multiplica cada sumando por este número y se suman los productos parciales.

1) Efectuar $(5 + 4)\,2$

Decimos que:

$(5 + 4)\,2 = 5 \times 2 + 4 \times 2 =$
$10 + 8 = 18$

En efecto:

$(5 + 4)2 = (5 + 4) + (5 + 4) =$
$5 + 4 + 5 + 4 = 5 + 5 + 4 + 4 =$
$(5 + 5) + (4 + 4) = 5 \times 2 + 4 \times 2$

2) Efectuar $(3 + 6 + 9)\,5$

$(3 + 6 + 9)\,5 =$
$3 \times 5 + 6 \times 5 + 9 \times 5 =$
$15 + 30 + 45 = 90$

En general:

$$(a + b + c)\,n = an + bn + cn$$

La propiedad aplicada en estos ejemplos constituye la *ley distributiva* de la multiplicación respecto de la suma.

EJERCICIOS

1. ¿Dónde habrá más lápices, en 8 cajas de 10 lápices cada una o en 10 cajas de 8 lápices cada una? ¿Qué ley aplica? **R.** Igual en las dos, por la ley conmutativa.

2. Encuentra el resultado de multiplicar miembro por miembro en los casos siguientes:

a) $\begin{cases} 5 > 4 \\ a < b \end{cases}$ b) $\begin{cases} m < p \\ n > q \end{cases}$

R. a) No se sabe b) No se sabe

3. Escribe el producto 6×9 de tres modos distintos aplicando la ley disociativa. **R.** $2 \times 3 \times 9$, $6 \times 3 \times 3$, $2 \times 3 \times 3 \times 3$.

4. Aplica la ley disociativa al producto $10 \times 18 \times 12$ transformándolo en un producto equivalente de 8 factores. **R.** $2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3$.

5. El producto *abcd* se puede escribir de 24 modos distintos aplicando la ley conmutativa. Escríbelo de nueve formas diferentes. **R.** Por ejemplo: *abdc, acdb, acbd, adbc, adcb, bacd, bcad*, *dbca*, *dbac*.

6. Siendo $abc = 30$, $bac = \ldots$, $cba = \ldots$ ¿Por qué? **R.** $bac = 30$; $cba = 30$. Por la ley conmutativa.

7. ¿Qué producto es mayor entre 8.7.6.5 y 7.5.6.8? **R.** Son iguales.

8. Dado que $20 = 5 \times 4$ por la ley disociativa tendremos que $20 \times 3 = \ldots$ **R.** $20 \times 3 = 5 \times 4 \times 3$.

9. Escribe el producto 2.3.4 de 6 modos distintos, aplicando la ley conmutativa. **R.** 2.3.4, 2.4.3, 3.2.4, 3.4.2, 4.2.3.

10. Siendo $3ab = 90$ y $a = 5$, ¿qué puedes escribir aplicando la ley asociativa? **R.** $15b = 90$.

11. Transforma el producto 8×6 en un producto equivalente de 4 factores. ¿Qué ley aplica? **R.** $6 \times 4 \times 2 \times 1$. Ley disociativa.

ALTERACIÓN DE FACTORES

I. Cuando el multiplicando se multiplica o divide por un número, el producto queda multiplicado o dividido por ese mismo número.

1) Para que el multiplicando se multiplique por un número, siendo el producto 57 × 6. Por definición sabemos que:

$$57 \times 6 = 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57$$

Ahora multipliquemos el multiplicando 57 por un número, el 2 por ejemplo, y tendremos:

$$(57 \times 2)6 = 57 \times 2 + 57 \times 2 + 57 \times 2 + 57 \times 2 + 57 \times 2 + 57 \times 2$$

Esta segunda suma contiene el mismo número de sumandos que la primera, pero cada sumando de la segunda representa el doble de cada sumando de la primera, por tanto la segunda suma, o sea el segundo producto, será el doble de la primera suma o primer producto; luego, al multiplicar el multiplicando por 2, el producto queda multiplicado por 2.

2) Para que el multiplicando se divida por un número, siendo el producto 57 × 6. Por definición sabemos que:

$$57 \times 6 = 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57$$

Al dividir el multiplicando por un número, el 3 por ejemplo, tendremos:

$$(57 \div 3) \times 6 = 57 \div 3 + 57 \div 3 + 57 \div 3 + 57 \div 3 + 57 \div 3 + 57 \div 3$$

Esta segunda suma contiene el mismo número de sumandos que la anterior, pero cada sumando de ésta es la tercera parte de cada sumando de la anterior, por tanto la segunda suma, o sea el segundo producto, será la tercera parte de la primera suma o producto anterior; luego, al dividir el multiplicando por 3, el producto queda dividido por 3.

II. Cuando el multiplicador se multiplica o divide por un número, el producto queda multiplicado o dividido por ese número.

Siendo el producto 57 × 6, multipliquemos o dividamos el multiplicador por un número, el 2 por ejemplo, y tendremos:

$$57 \times (6 \overset{\div}{\times} 2)$$

y como el orden de los factores no altera el producto, resulta:

$$57 \times (6 \overset{\div}{\times} 2) = (6 \overset{\div}{\times} 2) \times 57$$

con lo que este caso queda comprendido dentro del anterior.

III. Cuando el multiplicando se multiplica por un número y el multiplicador se divide por el mismo número o viceversa, el producto no varía.

Al multiplicar uno de los factores por un número, el producto queda multiplicado por dicho número, pero al dividir el otro factor por el mismo número, el producto queda dividido por ese mismo número, y por lo tanto no varía.

EJERCICIOS

1. ¿Qué alteración sufre el producto de 88 × 5 si el 88 se multiplica por 4? ¿Y si se divide por 11? **R.** Queda multiplicado por 4. Queda dividido por 11.

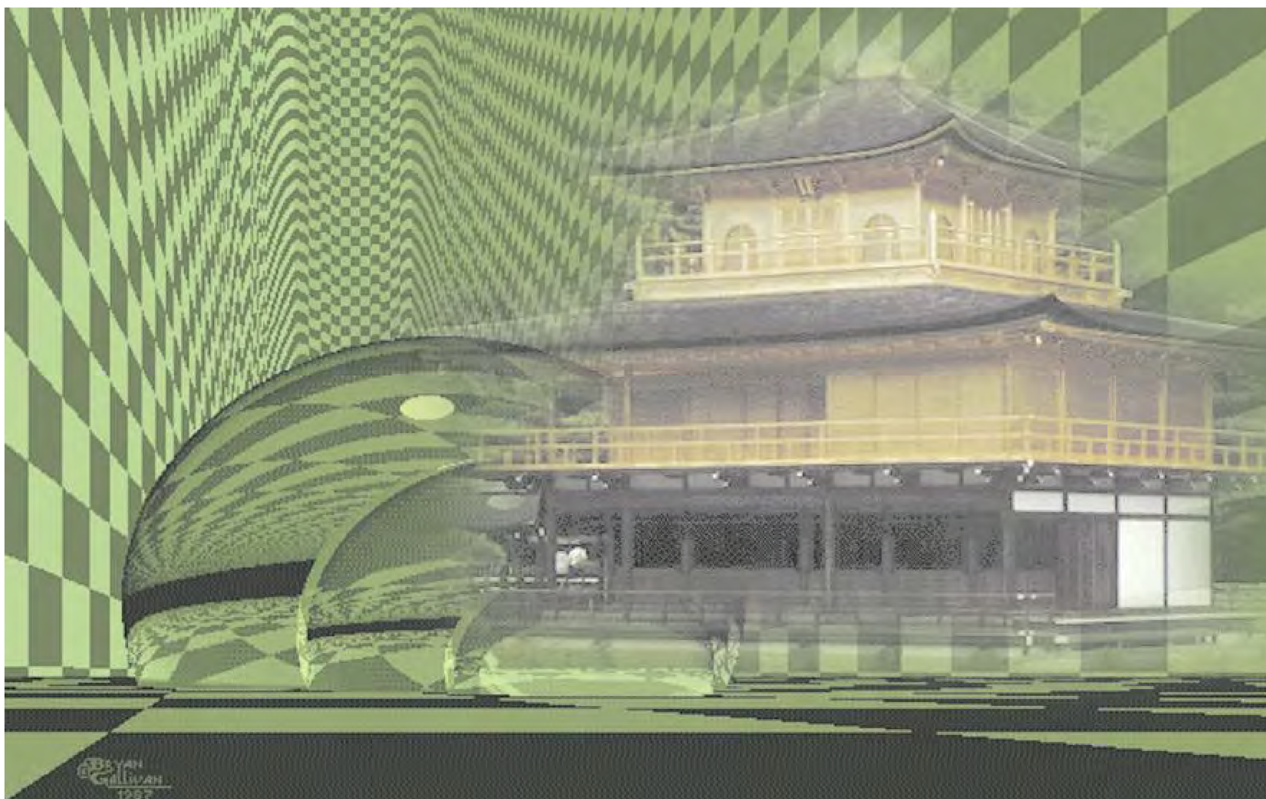
2. El 72 es el producto de dos factores. ¿Qué variación experimentará si multiplicamos el multiplicando por 3 y el multiplicador por 4? **R.** Es 864.

3. ¿Qué alteración sufrirá el producto de 150 × 21 si multiplicamos 150 por 3 y el 21 lo dividimos por 3? **R.** Ninguna.

4. Siendo $ab = 60$, escribe los productos siguientes:

a) $(3a)b$ = ... b) $a(2b)$ c) $(2a)(4b)$ = ... d) $(a \div 5)b$ = ... e) $a(b \div 5)$ = ... f) $(a \div 2)(b \div 2)$ = ...

R. a) 180 b) 120 c) 480 d) 12 e) 12 f) 15



La obra más antigua del pueblo chino respecto a la aritmética es el Chiu-Chang que data del siglo I a. C. Estos representaban los números empleando varillas a las que nombraban sangi.

CAPÍTULO XII

OPERACIONES DE MULTIPLICACIÓN

La multiplicación consiste en hallar el producto de dos factores tomando uno de ellos, que se llama multiplicando, tantas veces como unidades contiene el otro, llamado multiplicador.

Al igual que la suma y la resta, en la multiplicación también existen reglas de agrupación y leyes que deben seguirse para llegar a la solución correcta.

MULTIPLICACIÓN SIN SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Primero se buscan los productos indicados y luego las sumas o restas.

1) Efectuar 5 + 3 × 4 - 2 × 7

Primero encontramos los productos 3 × 4 = 12 y 2 × 7 = 14, y tendremos:
5 + 3 × 4 - 2 × 7 = 5 + 12 - 14 = 3

2) Efectuar 8 - 2 × 3 + 4 × 5 - 6 × 3
8 - $\underline{2 \times 3}$ + $\underline{4 \times 5}$ - $\underline{6 \times 3}$ = 8 - 6 + 20 - 18 = 4

EJERCICIOS

Efectuar las operaciones siguientes:

1. 8 + 4 × 4	**R**. 48
2. 4 × 9 - 3	**R**. 33
3. 62 - 21 × 2	**R**. 82
4. 6 × 3 + 7 × 8	**R**. 200
5. 9 × 2 - 4 × 2	**R**. 28

MULTIPLICACIÓN CON SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Primero se efectúan las operaciones encerradas en los paréntesis y luego que queden indicadas.

1) Efectuar (5 + 3) 2 + 3 (6 - 1)

En la práctica se suele suprimir el signo × entre un número y un paréntesis o entre dos paréntesis. Así, en este ejemplo, (5 + 3)2 equivale a (5 + 3) × 2 y 3(6 - 1) equivale a 3 × (6 - 1)

Efectuamos primero los paréntesis: (5 + 3) = 8 y (6 - 1) = 5, y tendremos:

(5 + 3) 2 + 3 (6 - 1) = 8 × 2 + 3 × 5 = 16 + 15 = 31

2) Efectuar (8 - 2) 5 - 3 (6 - 4) + 3 (7 - 2) (5 + 4) =
6 × 5 - 3 × 2 + 3 × 5 × 9 = 30 - 6 + 135 = 159

EJERCICIOS

Efectúa las operaciones siguientes:

1. 6 [3 + (5 - 1)] **R.** 42
2. (6 + 5 + 4) 3 **R.** 45
3. (5 - 2) 3 + 6 (4 - 1) **R.** 27
4. (8 - 2) (3 - 2) (5 + 4) + 3 (6 - 1) **R.** 69
5. (3 + 2) (4 + 5) **R.** 45
6. (8 + 5 + 3) (6 - 4) **R.** 32
7. (8 + 6 + 4) 2 **R.** 36
8. (20 - 15 + 30 - 10) 5 **R.** 125
9. (3 - 2) (4 - 1) + 6 (8 - 4) + (7 - 2) (9 - 7) **R.** 37
10. (50 × 6 × 42 × 18) 9 **R.** 2041200
11. 300 - 3 (5 - 2) + (6 + 1) (9 - 3) + 4 (8 + 1) **R.** 369
12. {15 + (9 - 5) 2} {(6 × 4) 3 + (5 - 4) (4 - 3)} **R.** 1679
13. 3 (8 - 1) + 4 (3 + 2) - 3 (5 - 4) **R.** 38
14. (20 - 5 + 2) (16 - 3 + 2 - 1) **R.** 238
15. (7 - 5) 4 + 3 (4 - 2) + (8 - 2) 5 -2 (11 - 10) **R.** 42
16. (20 - 14) (8 - 6) **R.** 12
17. 800 + {20 - 3 × 4 + 5 [18 - (6 - 1) 3 + (5 - 2) 4]} **R.** 883
18. (11 - 4) 5 - 4 (6 + 2) + 4 (5 - 3) - 2 (8 - 6) **R.** 7
19. [5 + 2) 3 + 6 (6 - 1) 5] [8 + 6) 3 - (4 - 1) 2] **R.** 6156
20. (3 + 2) (5 - 1) + (8 - 1) 3 - 4 (6 - 2) **R.** 25
21. 9 [(10 - 4) 2 + (30 - 20)2] **R.** 288
22. (5 - 1) (4 - 2) + (7 - 3) (4 - 1) **R.** 20
23. 3 (9 - 2) + 2 (5 - 1) (4 + 3) + 3 (6 - 4) (8 - 7) **R.** 83
24. 500 + 6 (3 + 1) + (8 - 5) 3 - 2 (5 + 4) **R.** 515
25. 8 [5 - 3) (4 + 2)] **R.** 96

TEORÍA

Ahora veremos cómo efectuar las operaciones indicadas de multiplicación sin resolver lo encerrado dentro de los paréntesis, un método que es indispensable conocer cuando las cantidades están representadas con letras.

LEY DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar una suma indicada por un número se multiplica cada sumando por este número y se suman los productos parciales.

1) Efectuar (5 + 4) 2

Decimos que:

(5 + 4) 2 = 5 × 2 + 4 × 2 = 10 + 8 = 18

En efecto:

(5 + 4)2 = (5 + 4) + (5 + 4) =
5 + 4 + 5 + 4 = 5 + 5 + 4 + 4 =
(5 + 5) + (4 + 4) = 5 × 2 + 4 × 2

2) Efectuar (3 + 6 + 9) 5

(3 + 6 + 9) 5 = 3 × 5 + 6 × 5 + 9 × 5 =
15 + 30 + 45 = 90

En general: $(a + b + c)\, n = an + bn + cn$

La propiedad aplicada en estos ejemplos constituye la *ley* distributiva *de la multiplicación respecto de la suma.*

Para multiplicar una resta indicada por un número se multiplican el minuendo y el sustraendo por ese número y se restan los productos parciales.

1) Efectuar (8 - 5) 3

Decimos que:

(8 - 5) 3 = 8 × 3 - 5 × 3 = 24 - 15 = 9
En efecto: Multiplicar (8 - 5) 3 equivale a tomar (8 - 5) como sumando 3 veces, o sea:

(8 - 5) 3 = (8 - 5) + (8 - 5) + (8 - 5) =
(8 + 8 + 8) - (5 + 5 + 5) = 8 × 3 - 5 × 3

2) Efectuar (15 - 9) 6

(15 - 9) 6 = 15 × 6 - 9 × 6 = 90 - 54 = 36

En general: $(a - b)\, n = an - bn$

La propiedad aplicada en estos ejemplos constituye la *ley distributiva de la multiplicación con relación a la resta.*

SUMA ALGEBRAICA

La expresión 7 - 2 + 9 - 3, que contiene varios signos + ó - , es una **suma algebraica**, en la que 7, 2, 9 y 3 son los **términos de la suma**. Los términos precedidos del signo + o que no llevan signo delante son positivos (en este caso, 7 y 9) y los que van precedidos del signo - son **negativos** (en este caso, - 2 y - 3). En la suma algebraica $a + b - c - d + e$, los términos positivos son *a, b* y *e*, mientras que los negativos son - *c* y - *d*.

PRODUCTO DE UNA SUMA ALGEBRAICA POR UN NÚMERO

Una vez probado que la multiplicación es distributiva con relación a la suma y a la resta, tenemos que para multiplicar una suma algebraica por un número se multiplica cada término de la suma por dicho número, colocando delante de cada producto parcial el signo + si el término que se multiplica es positivo y el signo - si es negativo.

1) Efectuar (8 - 2 + 6 - 3) 5

$$(8 - 2 + 6 - 3)\,5 = 8 \times 5 - 2 \times 5 + 6 \times 5 - 3 \times 5 = 40 - 10 + 30 - 15 = 45$$

En general:

$$(a - b + c - d)\,n = an - bn + cb - dn$$

CÓMO SACAR EL FACTOR COMÚN

1) Por la ley distributiva sabemos que

$$(8 + 6)\,5 = 8 \times 5 + 6 \times 5$$

Si invertimos los miembros de esta igualdad, tenemos:

$$8 \times 5 + 6 \times 5 = 5\,(8 + 6)$$

En el primer miembro está el factor común 5 y en el segundo aparece el factor común 5 *multiplicando* a un paréntesis dentro del cual hemos escrito 8 + 6, que es *lo que queda* en el primer miembro al dividir cada término por 5. Así sacamos el factor común 5.

2) Por la ley distributiva sabemos que

$$(9 - 7)\,2 = 9 \times 2 - 7 \times 2$$

Si lo invertimos, tenemos:

$$9 \times 2 - 7 \times 2 = 2\,(9 - 7)$$

En el primer miembro está el factor común 2 y en el segundo aparece el 2 multiplicando a un paréntesis dentro del cual hemos puesto lo que queda en el primer miembro, es dividir cada término por el factor común 2. Así sacamos el factor común 2.

3) Sacar el factor común en 9 × 8 + 8 × 3 - 8

$$9 \times 8 + 8 \times 3 - 8 = 8\,(9 + 3 - 1)$$

4) Sacar el factor común en $ab - ac + a - am$.

$$ab - ac + a - am = a\,(b - c + 1 - m)$$

5) Sacar el factor común en $7ax - 7ab + 7am$

$$7ax - 7ab + 7am = 7a\,(x - b + m)$$

6) Sacar el factor común en $4ab + 2ac - 8an$

$$4ab + 2ac - 8an = 2a\,(2b + c - 4n)$$

FACTOR COMÚN

En la suma algebraica 2 × 5 + 3 × 2 - 4 × 2 los términos son los productos 2 × 5, 3 × 2 y 4 × 2, y en cada uno de ellos aparece el 2; que es un **factor común**. Así, en la suma algebraica 9 × 3 - 3 × 5 - 3 × 2 + 8 × 3 el 3 es un factor común; en la suma $ab + bc - bd$ el factor común es b ; en la suma $5ay + 5ax - 5an$ el factor común es $5a$.

PRODUCTO DE SUMAS Y DIFERENCIAS

Para multiplicar dos sumas indicadas se multiplican todos los términos de la primera por cada uno de los términos de la segunda y se suman los productos parciales.

1) Efectuar (6 + 5) (3 + 2). Decimos que:

$$(6 + 5)(3 + 2) = 6 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 2 + 5 \times 2 = 18 + 15 + 12 + 10 = 55$$

El producto (6 + 5) (3 + 2) se compondrá de tres veces (6 + 5) más dos veces (6 + 5), luego:

$$(6 + 5)(3 + 2) = (6 + 5)\,3 + (6 + 5)\,2 = 6 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 2 + 5 \times 2$$

2) Efectuar (9 + 7) (5 + 4)

$$(9 + 7)(5 + 4) = 9 \times 5 + 7 \times 5 + 9 \times 4 + 7 \times 4 = 45 + 35 + 36 + 28 = 144$$

En general:

$$(a + b + c)(m + n) = am + bm + cm + an + bn + cn$$

EJERCICIOS

Aplicando la ley distributiva, efectúa las operaciones siguientes:

1. $ax^2y - 9ay + ay - 3ay$ **R.** $ay(x^2 - 9 + 1 - 3)$

2. 3 (2 - 1 + 5) **R.** 18

3. (9 + 6 - 2) 5 **R.** 65

4. $(a + m - x)n$ **R.** $an + mn - nx$

5. $(b + c)a$ **R.** $ab + ac$

6. (11 + 9 + 7 + 6) 8 **R.** 264

7. $(x - y)m$ **R.** $mx - my$

8. (8 + 3) 2 **R.** 22

9. 9 (15 + 8 + 4) **R.** 243

10. $a(5 - 3 + 2)$ **R.** $4a$

11. 7 (25 - 18) **R.** 49

12. $(2a - 3b + 5c)4$ **R.** $8a - 12b + 20c$

13. $5(a + b + c)$ **R.** $5a + 5b + 5c$

14. 5 × 8 - 7 × 5 **R.** 5 (8 - 7)

15. $8x(11 - 3)$ **R.** $64x$

16. 3 (11 - 6 + 9 - 7 + 1) **R.** 24

17. 6 × 5 - 7 × 6 + 6 **R.** 6 (5 - 7 + 1)

18. 3 × 2 + 5 × 2 **R.** 2 (3 + 5)

19. $2a(b + c - d)$ **R.** $2ab + 2ac - 2ad$

20. $(a - b + c - d)x$ **R.** $ax - bx + cx - dx$

21. $5x - xy$ **R.** $x(5 - y)$

22. (7 - 5) 3 **R.** 6

23. $ab + ac$ **R.** $a(b + c)$

24. 9 × 5 - 12 × 7 + 6 ×11 **R.** 3 (15 - 28 + 22)

25. 9 × 3 + 3 × 4 + 5 × 3 **R.** 3 (9 + 4 + 5)

26. $(m - n)3$ **R.** $3m - 3n$

27. $ab - ac + a$ **R.** $a(b - c + 1)$

28. $8a - 4b$ **R.** $4(2a - b)$

29. $5xy - 5xz$ **R.** $5x(y - z)$

30. 3 × 5 + 5 × 6 - 5 + 5 ×9 **R.** 5 (3 + 6 - 1 + 9)

31. $3b + 6ab - 9b + 12b$ **R.** $3b(1 + 2a - 3 + 4)$

32. $7ab + 6ac$ **R.** $a(7b + 6c)$

33. $x^2y - x^2z - x^2$ **R.** $x^2(y - z - 1)$

34. 2 × 9 - 9 + 3 × 9 **R.** 9 (2 - 1 + 3)

35. $ax - am + an - a$ **R.** $a(x - m + n - 1)$

36. (2 - 10)3 **R.** 24

37. 50 × 13 - (15 + 5) **R.** 630

38. $(25 \times 25)^2$ **R.** 390625

39. 65 × 7 - (9 - 36) **R.** 482

40. $(a + b)^2$ **R.** $a^2 + 2ab + b^2$

PRODUCTO DE SUMA POR DIFERENCIA

Para multiplicar una suma por una diferencia se suman los productos de cada término de la suma por el minuendo y de aquí se restan los productos de cada término de la suma por el sustraendo.

1) Efectuar (9 + 7) (5 - 4). Decimos que:

(9 + 7) (5 - 4) = 9 × 5 + 7 × 5 - 9 × 4 - 7 × 4 =
45 + 35 - 36 - 28 = 16

El producto (9 + 7) (5 - 4) se compondrá de cinco veces (9 + 7) menos cuatro veces (9 + 7), luego:

(9 + 7) (5 - 4) = (9 + 7) 5 - (9 + 7) 4 =
(9 × 5 + 7 ×5) - (9 × 4 + 7 × 4) = 9 × 5 + 7 × 5 - 9 × 4 - 7 × 4

En general: $(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - db$

El producto de la suma de dos números por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de los dos números.

1) Efectuar (6 + 5) (6 - 5). Decimos que:

$(6 + 5)(6 - 5) = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 9$

Aplicando la regla explicada en el número anterior, tenemos:

$(6 + 5)(6 - 5) = 6 \times 6 + 5 \times 6 - 6 \times 5 - 5 \times 5 =$
$6 \times 6 - 5 \times 5 = 6^2 - 5^2$

2) Efectuar (9 - 3) (9 + 3)

$(9 - 3)(9 + 3) = 9^2 - 3^2 = 81 - 9 = 72$

En general: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Para multiplicar dos diferencias indicadas se suma el producto de los minuendos con el producto de los sustraendos y de aquí se restan los productos de cada minuendo por el otro sustraendo.

1) Efectuar (7 - 4) (3 - 2). Decimos que:

(7 - 4) (3 - 2) = 7 × 3 + 4 × 2 - 7 × 2 - 4 × 3 =
21 + 8 - 14 - 12 = 3

El producto (7 - 4) (3 - 2) se compondrá de tres veces (7 - 4) menos dos veces (7 - 4), luego:

(7 - 4) (3 - 2) = (7 - 4) 3 - (7 - 4) 2 =
(7 × 3 - 4 × 3) - (7 × 2 - 4 × 2) =
(7 × 3 + 4 × 2) - (7 × 2 + 4 × 3) =
7 × 3 + 4 × 2 - 7 × 2 - 4 × 3

2) Efectuar (5 - 3) (8 - 6)

(5 - 3) (8 - 6) = 5 × 8 + 3 × 6 - 5 × 6 - 3 × 8 =
40 + 18 - 30 - 24 = 4

En general: $(a - b)(c - d) = ac + bd - ad - bc$

EJERCICIOS

Aplicando las reglas estudiadas, efectúa las operaciones siguientes:

1. $(a - 3)(a + 3)$ **R.** $a^2 - 9$
2. (5 + 3) (4 - 2) **R.** 16
3. (8 + 3 + 2) (5 + 7) **R.** 156
4. (8 - 5) (8 + 5) **R.** 39
5. (8 - 5) (6 + 9) **R.** 45
6. $(m + n)(m - n)$ **R.** $m^2 - n^2$
7. (9 - 3) (7 - 2) **R.** 30
8. $(9 + b)(9 - b)$ **R.** $81 - b^2$
9. $(5 - b)(b + 5)$ **R.** $25 - b^2$
10. $(a - b)(m - n)$ **R.** $am + bn - an - bm$
11. (4 + 7) (7 - 4) **R.** 33
12. $(a - b)(4 + 3)$ **R.** $4a - 4b + 3a - 3b = 7a - 7b$
13. (8 - 2) (11 + 9 + 6) **R.** 156
14. (7 + 2) (5 + 4) **R.** 81
15. $(b - a)(a + b)$ **R.** $b^2 - a^2$
16. (15 - 7) (9 - 4) **R.** 40
17. $(a + b)(m + n)$ **R.** $am + bm + an + bn$
18. $(a + 3)(b + 6)$ **R.** $ab + 3b + 6a + 18$
19. $(a + b)(m - n)$ **R.** $am + bm - an - bn$
20. (3 + 2) (3 - 2) **R.** 5

EJERCICIOS

Aplicando la regla general, realiza las operaciones que a continuación se indican:

1. (9 - 7 + 2) (5 + 6) **R.** 44
2. (4 + 4) (5 + 5) **R.** 80
3. $(8 - 7)(x - y)$ **R.** $8x - 7x - 8y + 7y = x - y$
4. $(a + b - c)(r - s)$ **R.** $ar + br - cr - as - bs + cs$
5. (11 - 8) (25 - 16) **R.** 27
6. (4 - 1) (5 + 3) **R.** 24
7. (9 - 7) (6 - 3) **R.** 6
8. (8 + 3) (5 + 2) **R.** 77
9. (100 - 64) (43 + 1) **R.** 1584
10. (8 + 6) (5 - 2) **R.** 42
11. $(a - b)(c + d)$ **R.** $ac - bc + ad - bd$
12. (15 - 6) (9 - 4) **R.** 45
13. (11 + 3) (8 - 5) **R.** 42
14. (9 + 7) (4 + 8) **R.** 192
15. $(a - b)(m - n)$ **R.** $am - bm - an + bn$
16. (4 - 3) (6 + 5 - 2) **R.** 9
17. $(m + n)(x - y)$ **R.** $mx + nx - my - ny$
18. (5 + 3) (4 - 2 + 5 - 3) **R.** 32
19. $(p - q)(m - n)$ **R.** $mp - mq - np + nq$
20. (7 - 4 + 3) (5 - 2 - 1) **R.** 12

REGLA GENERAL PARA MULTIPLICAR SUMAS ALGEBRAICAS

De acuerdo con las reglas aplicadas en los números anteriores, tenemos que:

$(a + b)(c + d) = ab + bc + ad + bd$

$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd$

$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$

En estos resultados podemos ver que hemos multiplicado cada término del primer paréntesis por cada término del segundo paréntesis, poniendo delante de cada producto el signo + cuando los dos factores que se multiplican tienen signos iguales (los dos + o los dos -) y el signo - cuando tienen signos distintos. El primer término de cada producto, que no lleva ningún signo delante, se entenderá positivo.

Por lo tanto, podemos enunciar la siguiente **regla general:**

Para multiplicar dos sumas algebraicas se multiplica cada término de la primera suma por cada término de la segunda, poniendo delante de cada producto el signo + cuando los dos términos que se multiplican tienen signos iguales, y el signo - cuando tienen signos distintos.

Ejemplos

1) Efectuar (8 - 6) (5 + 4) por la regla general

(8 - 6) (5 + 4) =
8 × 5 - 6 × 5 + 8 × 4 - 6 × 4 =
40 - 30 + 32 - 24 = 18

Aquí multiplicamos 8 por 5, y como 8 y 5 tienen signos iguales (al no llevar signos delante llevan +) delante del producto 8 × 5 va un + (que no se escribe por ser el primer término, pero se sobrentiende). Después multiplicamos - 6 por 5 poniendo delante de este producto el signo - porque 6 y 5 tienen signos distintos; luego 8 por 4, poniendo + delante del producto porque 8 y 4 tienen signos iguales, y por último - 6 por 4 poniendo delante del producto - porque tienen signos distintos.

2) Efectuar (9 - 3) (8 - 5) por la regla general

(9 - 3) (8 - 5) =
9 × 8 - 3 × 8 - 9 × 5 + 3 × 5 =
72 - 24 - 45 + 15 = 18

Aquí multiplicamos 9 por 8 poniendo delante + (que se sobrentiende) porque 8 y 9 tienen signo +; - 3 por 8, producto que lleva delante el signo - porque tienen signos distintos; 9 por - 5, que lleva - delante porque son signos distintos y - 3 por - 5, que lleva delante + porque son signos iguales.

3) Efectuar (7 - 4 + 2) (6 - 5)

(7 - 4 + 2) (6 - 5) = 7 × 6 - 4 × 6 + 2 × 6 - 7 × 5 + 4 × 5 - 2 × 5 =
42 - 24 + 12 - 35 + 20 - 10 = 5

4) Efectuar $(a - b - c)(m - x)$

$(a - b - c)(m - x) =$
$am - bm - cm - ax + bx + cx$

NÚMERO POR PRODUCTO INDICADO

Para multiplicar un producto indicado por un número se multiplica uno de los factores del producto por dicho número.

Al multiplicar el producto 4 × 5 por 6 decimos que basta multiplicar uno solo de los factores, ya sea el 4 o el 5, por el multiplicador 6.

Si multiplicamos el factor 5 tenemos:

$$(4 \times 5)\ 6 = 4\ (5 \times 6) = 4\ (30) = 120$$

Si multiplicamos el factor 4 tenemos:

$$(4 \times 5)\ 6 = (4 \times 6)\ 5 = 24 \times 5 = 120$$

Al multiplicar uno de los factores del producto 4 × 5 por el multiplicador 6, el producto 4 × 5 queda multiplicado por 6, porque ya vimos que si el multiplicando o multiplicador se multiplican por un número, el producto queda multiplicado por dicho número.

Si se trata de un producto de más de dos factores, se procederá del mismo modo, multiplicando **uno solo** de los factores por el multiplicador:

$$(2 \times 3 \times 4)\ 5 = 2\ (3 \times 5)\ 4 = 2 \times 15 \times 4 = 120$$

En este caso la regla se justifica considerando el producto 2 × 3 × 4 descompuesto en dos factores: 2 × (3 × 4), y aplicándole la regla para el caso de dos factores.

Para multiplicar dos productos indicados se forma un solo producto con todos los factores.

Si queremos multiplicar el producto 2 × 3 por el producto 4 × 5 × 6, decimos que:

$$(2 \times 3)\ (4 \times 5 \times 6) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

Al multiplicar el factor 3 del producto 2 × 3 por el producto 4 × 5 × 6, el producto 2 × 3 queda multiplicado por el producto 4 × 5 × 6, de acuerdo con el caso anterior.

EJERCICIOS

Aplicando las reglas anteriores, realiza las operaciones siguientes:

1. (6 × 5) 9 + (3 × 4) 3 **R.** 306

2. (4 × 5) 3 **R.** 60

3. (4 × 3 × 5) (2 × 4 × 6) **R.** 2880

4. $(3a)\ a$ **R.** $3a^2$

5. $(abc)\ (ab^2c^2)$ **R.** $a^2b^3c^3$

6. $(7a^2b)\ a$ **R.** $7a^3b$

7. (7 × 3) 2 _ (4 × 5) 2 **R.** 2

8. (5 × 6 × 7) 2 **R.** 420

9. (5 × 7) (3 × 8) **R.** 840

10. 5 (3 × 7) **R.** 105

11. (2 × 9)2 **R.** 36

12. $(10 \times 10)^2$ **R.** 10000

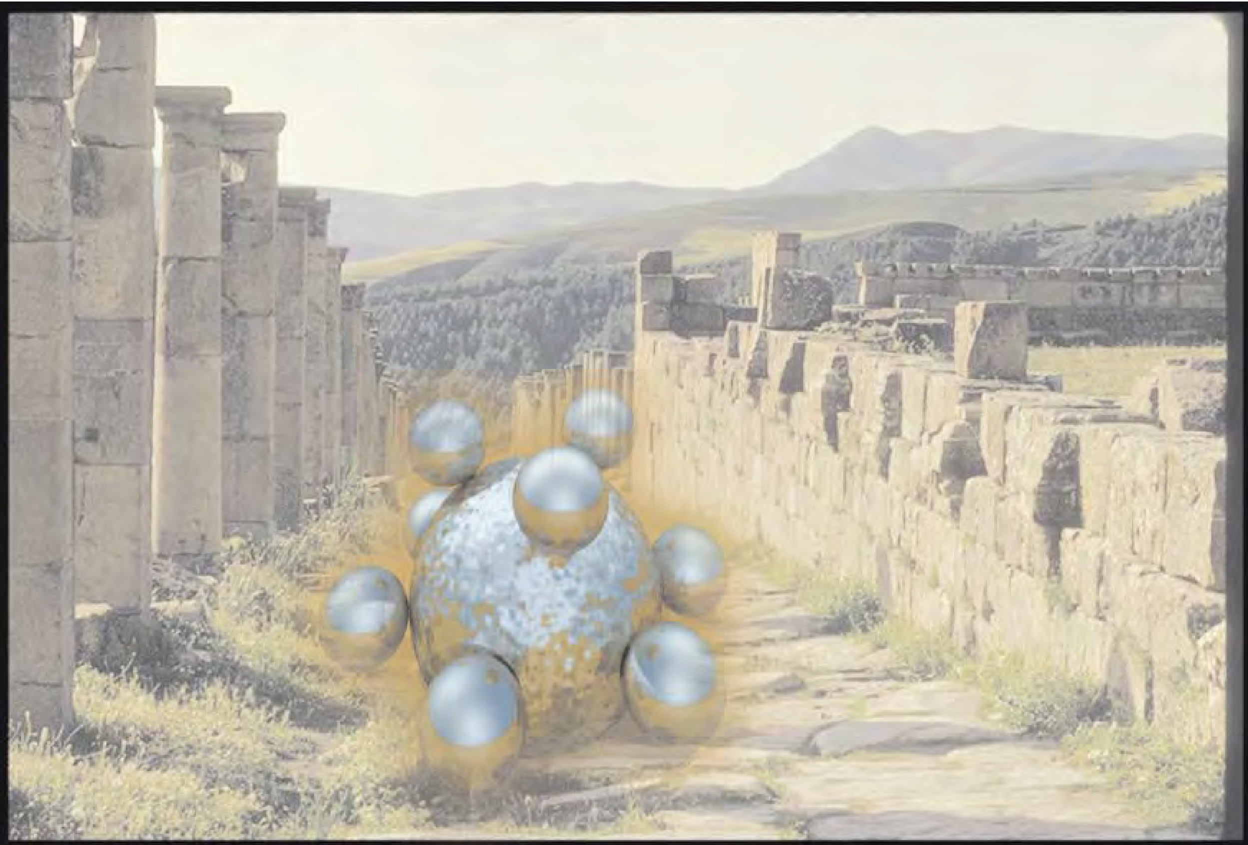
13. (8 × 7) (6 × 7) **R.** 2352

14. $(5b)b$ **R.** $5b^2$

15. $(a^2)^2$ **R.** a^4



Figura 43



Los primeros pueblos que conocieron y utilizaron la división fueron los hindúes y los babilonios. De los primeros se han tomado los métodos para la resolución de las divisiones, en la que intervienen tres elementos que son: dividendo, divisor y residuo.

CAPÍTULO XIII

DIVISIÓN

La división es una operación inversa a la multiplicación cuyo objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), es hallar el otro factor (cociente).

El signo de la división es ÷ o una rayita horizontal o inclinada entre el dividendo y el divisor. La división de *D* (dividendo) entre *d* (divisor) y siendo *c* el cociente, se indica de los tres modos siguientes:

$$D \div d = c \qquad D = \frac{c}{d} \qquad D/d = c$$

DEFINICIÓN DE DIVISIÓN

Según esta definición, **dividir un número (dividendo) entre otro (divisor)** significa **hallar un número (cociente)** que multiplicado por **el divisor** dé el **dividendo**.

De este modo, para dividir 20 entre 4 se debe encontrar el número que multiplicado por 4 dé 20, o sea el 5; por lo tanto, $20 \div 4 = 5$

Del mismo modo:

$8 \div 4 = 2$ porque $2 \times 4 = 8$,

$\frac{15}{5} = 3$ es porque $3 \times 5 = 15$,

y en general, si $D \div d = c$ es porque $cd = D$

Dado que el dividendo es el producto del divisor por el cociente, es evidente que **el dividendo dividido entre el cociente tiene que dar el divisor.**

Así: $14 \div 2 = 7$ y $14 \div 7 = 2$
$18 \div 6 = 3$ y $18 \div 3 = 6$

En general, si $D \div d = c$ se verifica que $D \div c = d$

COCIENTE

Etimológicamente, **cociente** significa **cuántas veces** e indica las veces que el dividendo contiene al divisor. Así, en 10 ÷ 5 = 2, el cociente 2 indica que el dividendo 10 contiene dos veces al divisor 5.

Una división es exacta cuando existe un número entero que multiplicado por el divisor nos da el dividendo, o sea, cuando el dividendo es múltiplo del divisor.

La división 24 ÷ 3 = 8 es exacta porque 8 × 3 = 24. El número entero 8 es el **cociente exacto** de 24 entre 3, e indica que 24 contiene a 3 ocho veces exactamente.

La división $\frac{36}{9} = 4$ es exacta porque 4 × 9 = 36. El número entero 4 es el cociente exacto de 36 entre 9, e indica que 36 contiene a 9 cuatro veces exactamente.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DIVISIÓN EXACTA

Ejemplo

Representar gráficamente la división 12 ÷ 3

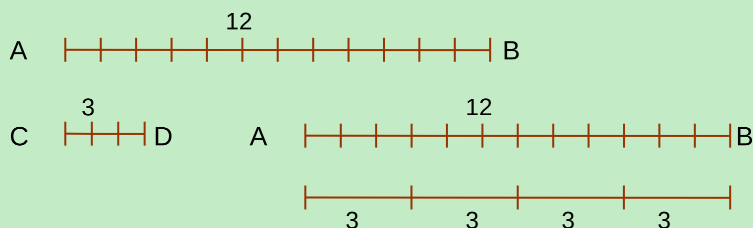


Figura 44

Primero representamos gráficamente, por medio de segmentos, el dividendo 12 y el divisor 3. El segmento *AB* = 12 representa el dividendo y el segmento *CD* = 3 representa el divisor. Se transporta el segmento divisor sobre el segmento dividendo consecutivamente, a partir del extremo *A*, y vemos que el segmento divisor está contenido 4 veces exactamente en el segmento dividendo. Este número de veces (4), que el dividendo contiene al divisor, representa el cociente exacto de 12 entre 3.

EJERCICIOS

1. Uno de los factores del producto 840 es 12. ¿Cuál es el otro factor? **R.** 70

2. Si el cociente exacto es 851 y el divisor 93, ¿cuál es el dividendo? **R.** 79143

3. Si 85 = 5*x*, ¿qué número es *x*? **R.** 17

4. ¿Por cuál número hay que dividir 15480 para que el cociente sea 15? **R.** 1032

5. Siendo $\frac{12}{3} = n$, se tendrá que 3n = ... y $\frac{12}{n}$ = ... **R.** 12, 3

6. Si $\frac{x}{y} = 6$, se tendrá que $\frac{x}{6}$ = ... y que 6y = ... **R.** y, x.

7. Si en una división exacta el dividendo es 2940 y el cociente 210, ¿cuál es el divisor? **R.** 14

8. Si al dividir *x* entre 109 el **cociente** es el duplo del divisor, ¿qué número es *x* ? **R.** 23762

9. Se reparten $731 entre varias personas, por partes iguales, y a cada una le tocan $43. ¿Cuántas personas eran? **R.** 17



Figura 45

DIVISIÓN ENTERA POR DEFECTO Y POR EXCESO

La división 23 ÷ 6 no es exacta porque 23 no es múltiplo de 6, pero se tiene que:

$$3 \times 6 = 18 < 23 \text{ y } 4 \times 6 = 24 > 23$$

lo cual indica que el cociente exacto de 23 ÷ 6 es mayor que 3 y menor que 4. En este caso, 3 es el **cociente por defecto** y 4 el **cociente por exceso**.

En la división entera 40 ÷ 7 se tiene que

$$5 \times 7 = 35 < 40 \text{ y } 6 \times 7 = 42 > 40$$

lo cual nos dice que el cociente exacto sería mayor que 5 y menor que 6. Aquí, 5 es el cociente por defecto y 6 el cociente por exceso.

En general, si *D* no es múltiplo de *d*, el cociente *D* ÷ *d* está comprendido entre dos números consecutivos. Si llamamos *c* al menor, el mayor será *c* + 1, y tendremos:

$$cd < D \text{ y } (c + 1)\, d > D$$

El cociente exacto de la división *D* ÷ *d* será mayor que *c* y menor que *c* + 1. Aquí, *c* es el cociente por defecto y *c* + 1 el cociente por exceso.

DIVISIÓN ENTERA O INEXACTA

Cuando no existe ningún número entero que multiplicado por el divisor dé el dividendo, es decir, cuando el dividendo no es múltiplo del divisor, la división es **entera o inexacta**.

Por ejemplo, la división 28 ÷ 6 es entera o inexacta porque no existe ningún número entero que multiplicamos por 6 nos dé 23; es decir, 23 no es múltiplo de 6.

RESIDUO POR EXCESO

En la división 23 ÷ 4 el cociente por exceso es 6. Si restamos del producto 6 × 4 el dividendo 23, la diferencia 4 × 6 - 23 = 1 es **el residuo por exceso**.

En la división 42 ÷ 9 el cociente por exceso es 5 y la diferencia

$$9 \times 5 - 42 = 3$$

es el residuo por exceso.

En general, siendo c el cociente por defecto de $D \div d$, el cociente por exceso será $c + 1$ y el residuo por exceso r' estará dado por la fórmula:

$$r' = d\,(c + 1) - D \quad (2)$$

El residuo por exceso es la diferencia entre el producto del divisor por el cociente por exceso y el dividendo.

En la diferencia (2) anterior el minuendo es igual a la suma del sustraendo y la diferencia; luego.

$$D + r' = d\,(c + 1)$$

y como el minuendo menos la diferencia da el sustraendo, se tendrá:

$$d\,(c + 1) - r' = D$$

RESIDUO POR DEFECTO

En la división 23 ÷ 4 el cociente por defecto es 5. Si restamos del dividendo 23 el producto 4 × 5, la diferencia 23 - 4 × 5 = 3 es el residuo por defecto.

En la división 42 ÷ 9 el cociente por defecto es 4 y la diferencia 42 - 9 × 4 = 6 es el residuo **por defecto**.

En general, si llamamos c al cociente por defecto de $D \div d$, el residuo por defecto r estará dado por la fórmula:

$$r = D - dc \quad (1)$$

El residuo por defecto de una división entera es **la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente por defecto**.

En la diferencia de la igualdad (1) anterior, como en toda diferencia, el minuendo D tiene que ser la suma del sustraendo dc y la diferencia r; luego:

$$D = dc + r$$

y en la misma igualdad (1), por ser la resta del minuendo y la diferencia igual al sustraendo, tendremos:

$$D - r = dc$$

SUMA DE LOS DOS RESIDUOS (POR DEFECTO Y POR EXCESO)

1) Consideremos la división entera 26 ÷ 7

El cociente por defecto es 3 y el residuo por defecto 26 - 7 × 3 = 5

El cociente por exceso es 4 y el residuo por exceso es 7 × 4 - 26 = 2

Al sumar los dos residuos tenemos: 5 + 2 = 7, **que es el divisor**.

2) Consideremos la división 84 ÷ 11

El cociente por defecto es 7 y el residuo por exceso 84 - 7 × 11 = 7.

El cociente por exceso es 8 y el residuo por exceso 11 × 8 - 84 = 4.

La suma de los dos residuos

(7 + 4 = 11)

es el divisor.

En conclusión, la suma de los residuos por defecto y por exceso es igual al divisor.

DEMOSTRACIÓN GENERAL

Ya quedó establecido que el residuo por defecto r y el residuo por exceso r' están dados por las fórmulas:

$$r = D - dc \quad (1)$$
$$r' = d\,(c + 1) - D$$

Al efectuar el producto $d\,(c + 1)$ en esta última igualdad, se tiene:

$$r' = dc + d - D \quad (2)$$

Si sumamos (1) y (2), se tiene:

$$r + r' = D - dc + dc + d - D$$

y simplificando D y $-D$, $-dc$ y $+dc$, queda:

$$r + r' = d$$

Esto es lo que queríamos demostrar.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DIVISIÓN ENTERA POR DEFECTO

Ejemplo

Representar gráficamente la división 9 ÷ 4 por defecto.

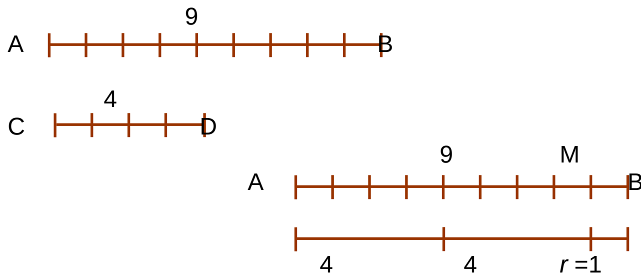


Figura 46

El segmento *AB* = 9 representa el dividendo, y el segmento *CD* = 4 el divisor. Se transporta el segmento divisor sobre el segmento dividendo, consecutivamente, a partir del extremo *A* y vemos que el divisor está contenido en el dividendo 2 veces (cociente 2) y que sobra el segmento *MB* = 1, que representa el residuo por defecto.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DIVISIÓN ENTERA POR EXCESO

Ejemplo

Representar gráficamente la división 9 ÷ 4 por exceso

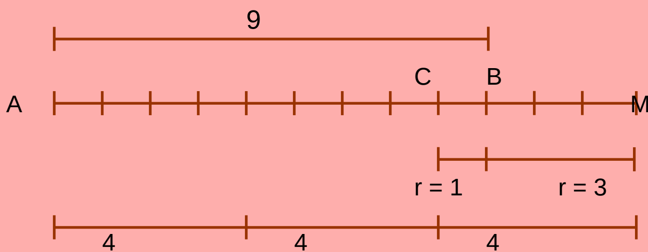


Figura 47

Aquí está representada gráficamente la división por exceso 9 ÷ 4. El cociente por exceso es 3 (las veces que se ha llevado al divisor 4 sobre el dividendo 9) y el residuo por exceso es el segmento *BM* = 3. En la figura también se representa gráficamente que la suma del residuo por exceso que es el segmento *BM* = 3 y el resto por defecto *CB* = 1 es igual al segmento *CM* = 4, que es el divisor.

LA DIVISIÓN COMO RESTA ABREVIADA

Las representaciones gráficas de la división exacta y de la división entera nos permiten ver que la división no es más que una **resta abreviada**, en la cual el divisor se resta todas las veces posibles del dividendo y el cociente indica el número de restas.

EJERCICIOS

1. Al repartir cierto número de manzanas entre 19 personas y luego de dar 6 manzanas a cada persona, sobran 8 manzanas. ¿Cuántas manzanas había? **R.** 122

2. Encuentra el cociente por defecto y por exceso en:

a) 42 ÷ 15 — **R.** 2, 3
b) 18 ÷ 5 — **R.** 3, 4
c) 31 ÷ 6 — **R.** 5, 6
d) 80 ÷ 15 — **R.** 5, 6
e) 27 ÷ 8 — **R.** 3, 4

3. *D* = 93, *d* = 12, cociente por exceso = 8. Hallar *r'*. **R.** *r'* = 3

4. *d* = 1563, *c* = 17, *r* = 16. Hallar *D*. **R.** 26587

5. *D* = 83, *c* = 9, *d* = 9. Hallar *r*. **R.** *r* = 2

6. *d* = 80, *D* = 8754, *r* = 34. Hallar *c*. **R.** *c* = 109

7. *d* = 11, cociente por exceso = 6 y *r'* = 4. Hallar *D*. **R.** *D* = 62

8. Si el dividendo es 86, el cociente por defecto 4 y el residuo por defecto 6, ¿cuál es el divisor? **R.** 20

9. *d* = 8, *c* = 11, *r* = 3. Hallar *D*. **R.** *D* = 91

10. Si el divisor es 11 y el residuo por defecto es 6, ¿cuál es el residuo por exceso. R. *r'* = 5

11. Encuentra los residuos por defecto y por exceso en:

a) 19 ÷ 5 — **R.** 4, 1
b) 27 ÷ 8 — **R.** 3, 5
c) 11 ÷ 4 — **R.** 3, 1
d) 9 ÷ 2 — **R.** 1, 1

12. ¿Qué número hay que restar de 520 para que la división 520 ÷ 9 sea exacta? **R.** 7

13. Si el divisor es 31 y el residuo por exceso 29, ¿cuál es el residuo por defecto? **R.** *r* = 2

14. El cociente por defecto es 7, *r* = 2, *r'* = 2 ¿cuál es el dividendo? **R.** *D* = 30

15. ¿Cuál es el menor número que debe restarse del dividendo, en una división inexacta, para que se haga exacta? **R.** *r*

DIVISIÓN POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS

Para dividir un entero por la **unidad seguida** de ceros, se separan de su derecha, con un punto decimal, **tantas cifras como ceros acompañen a la unidad**, y con ello el valor relativo de cada cifra se hace tantas veces menor como lo indica el divisor.

1) 567 ÷ 10 = 56.7
2) 1254 ÷ 100 = 12.54
3) 985678 ÷ 1000 = 985.678
4) 400 ÷ 100 = 4
5) 76000 ÷ 1000 = 76

EJERCICIOS

1. Efectúa las divisiones siguientes:

148 ÷ 12	34 ÷ 10	3600 ÷ 100
1234 ÷ 36	785 ÷ 100	2000 ÷ 1000
85239 ÷ 146	2589 ÷ 100	420000 ÷ 10000
785632 ÷ 1236	259631 ÷ 100000	4236000 ÷ 1000000
25807654 ÷ 9856	258 ÷ 10	98710000 ÷ 10000000

2. Se compran 42 libros por $126 y se vende cierto número por $95 y cada uno a $5. ¿Cuántos libros me quedan y cuanto gané en cada uno de los que vendí? **R.** 23; $2.

3. Cambio un terreno de 12 caballerías con valor de $5000 cada una, por otro que vale a $15000 la caballería. ¿Cuántas caballerías tiene éste? **R.** 4 caballerías.

NÚMERO DE CIFRAS DEL COCIENTE

El cociente siempre tiene una cifra más que las cifras a la derecha del primer dividendo parcial.

De este modo, al dividir 54678 entre 78 separamos en el dividendo, para empezar la operación, las tres primeras cifras de la izquierda, quedando dos a la derecha, luego el cociente tendrá una cifra más que estas dos que quedan a la derecha, o sea, tres cifras.

La división puede verificarse de tres modos distintos:

1) Al multiplicar el divisor por el cociente, y sumar el residuo por defecto, si la operación está correcta nos dará el dividendo.

2) Si la división es exacta, al dividir el dividendo entre el cociente deberá darnos el divisor. Si no es exacta, se resta el residuo del dividendo, y esta diferencia, dividida entre el cociente, tiene que dar el divisor.

3) Por las pruebas del 9 y del 11:

Prueba del 9

Se encuentra el residuo entre 9 el divisor y del cociente; se multiplican estos residuos y al producto que resulte se le añade el residuo entre 9 del residuo de la división, si lo hay. Si la operación está correcta, el residuo entre 9 de esta suma tiene que ser igual al residuo entre 9 del dividendo.

Ejemplos

1) Operación

```
1839508   2134
  13230    862
   4268
   0000
```

Residuo de 2134: 1
Residuo de 1x7: 7
Residuo de 1839508: 7
Residuo de 862: 7

2) Operación

```
449560   516
  3676   871
  0640
   124
```

Residuo de 516: 3
Residuo de 3x7+7: 1
Residuo de 449560: 1
Residuo de 87: 7

El 7 que se suma a 3 × 7 es el residuo de 124 entre 9.

Prueba del 11

En este caso el procedimiento es semejante, pero deben encontrarse los residuos entre 11, como se hizo antes.

Por tanto en el ejemplo anterior tendremos:

Residuo entre 11 de 516: 3
Residuo entre 11 de 10x2+3: 1
Residuo entre 11 de 449560: 1
Residuo entre 11 de 871: 7

LEYES DE LA DIVISIÓN

Existen tres leyes de la división exacta: ley de uniformidad, ley de monotonía y ley distributiva.

I. LEY DE UNIFORMIDAD

Esta ley puede enunciarse de dos formas:

1) **El cociente de dos números tiene un valor único o siempre es igual:** el cociente 20 ÷ 5 tiene un valor único que es el 4, porque 4 es el único número que multiplicado por 5 da 20, y 36 ÷ 12 = 3 únicamente, porque 3 es el único número que multiplicado por 12 da 36.

2) Dado que dos números iguales son el mismo número, **dividiendo miembro por miembro dos igualdades resulta otra igualdad.**

Así, siendo $\begin{cases} a = d \\ c = d \end{cases}$ resulta $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

II. LEY DE MONOTONÍA

Esta ley consta de tres partes:

1) Si una desigualdad (dividiendo) se divide entre una igualdad (divisor), siempre que la división sea posible, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad dividendo.

$$\begin{array}{c} 8 > 6 \\ 2 = 2 \\ \hline 8 \div 2 > 6 \div 2 \\ 4 > 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 12 < 15 \\ 3 = 3 \\ \hline 12 \div 3 < 15 \div 3 \\ 4 < 5 \end{array} \qquad \begin{array}{c} a > b \\ c = d \\ \hline a \div c > b \div d \end{array}$$

2) Si una igualdad (dividendo) se divide entre una desigualdad (divisor), siempre que la división sea posible, resulta una desigualdad de sentido contrario que la desigualdad divisor.

$$\begin{array}{c} 8 = 8 \\ 4 > 2 \\ \hline 8 \div 4 < 8 \div 2 \\ 2 < 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 30 = 30 \\ 5 < 6 \\ \hline 30 \div 5 > 30 \div 6 \\ 6 > 5 \end{array} \qquad \begin{array}{c} a = b \\ c < d \\ \hline a \div c > b \div d \end{array}$$

3) Si una desigualdad (dividendo) se divide entre otra desigualdad de sentido contrario (divisor), siempre que la división sea posible, resulta una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad dividendo.

$$\begin{array}{c} 12 > 8 \\ 2 < 4 \\ \hline 12 \div 2 > 8 \div 4 \\ 6 > 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 15 < 30 \\ 5 > 3 \\ \hline 15 \div 5 < 30 \div 3 \\ 3 < 10 \end{array} \qquad \begin{array}{c} a > b \\ c < d \\ \hline a \div c > b \div d \end{array}$$

III. LEY DISTRIBUTIVA DE LA DIVISIÓN

Para dividir una suma indicada por un número, se divide cada sumando por este número y se suman los cocientes parciales.

1) Efectuar (9 + 6) ÷ 3
Decimos que (9 + 6) ÷ 3 =
9 ÷ 3 + 6 ÷ 3 = 3 + 2 = 5

En efecto: 9 ÷ 3 + 6 ÷ 3 será el cociente que buscamos si multiplicado por el divisor 3 reproduce el dividendo (9 + 6), y así, por la ley distributiva de la multiplicación tenemos:

(9 ÷ 3 + 6 ÷ 3) 3 =
(9 ÷ 3) 3 + (6 ÷ 3) 3 = 9 + 6

porque el 3 como factor y divisor se suprime.

2) Efectuar (15 + 20 + 30) ÷ 5
(15 + 20 + 30) ÷ 5 =
15 ÷ 5 + 20 ÷ 5 + 30 ÷ 5 =
3 + 4 + 6 = 13

En general:

$$(a + b + c) \div m = a \div m + b \div m + c \div m$$

La propiedad explicada en los ejemplos anteriores constituye la *ley distributiva de la división respecto de la suma.*

ESCOLIO

Cuando se dividen miembro por miembro dos desigualdades del **mismo sentido**, el resultado no puede anticiparse, pues puede ser una desigualdad de ese mismo sentido o de sentido contrario o una igualdad.

$$\begin{array}{c} 20 > 6 \\ 4 > 2 \\ \hline 20 \div 4 > 6 \div 2 \\ 5 > 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 12 > 10 \\ 4 > 2 \\ \hline 12 \div 4 < 10 \div 2 \\ 3 < 5 \end{array}$$

EJERCICIOS

1. ¿Se puede saber lo que resulta dividiendo $a > b$ entre $c > d$? ¿Y $m < n$ entre 3 < 5? **R.** No.

2. ¿Cuántos valores puede tener el cociente 15 ÷ 5? ¿Por qué? **R.** 3 es el valor único, por la ley de uniformidad.

3. Aplica la ley de monotonía de la división en:

a) $\begin{cases} 8 > 5 \\ a = b \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > y \\ 3 = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} m > n \\ a = b \end{cases}$

R. a) $\frac{8}{a} > \frac{5}{b}$ b) $\frac{x}{3} > \frac{y}{3}$ c) $\frac{m}{a} > \frac{n}{b}$

4. Siendo $a = b$ y $p = q$, ¿qué se verifica según la ley de uniformidad?

R. $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$

5. En un aula hay igual número de alumnos que en otra. Si el número de alumnos de cada aula se reduce a la mitad, ¿qué sucederá y por cuál ley? **R.** Queda igual número de alumnos en las dos, por la ley de uniformidad.

6. Aplica la ley de uniformidad a las igualdades siguientes:

a) $\begin{cases} a = b \\ 3 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5 = 5 \\ x = y \end{cases}$ c) $\begin{cases} c = d \\ m = n \end{cases}$

R. a) $\frac{a}{3} = \frac{b}{3}$ b) $\frac{5}{x} = \frac{5}{y}$ c) $\frac{c}{m} = \frac{d}{n}$

7. Escribe lo que resulta dividiendo por 4 los dos miembros de $a + b = c + d$.

R. $\frac{a+b}{4} = \frac{c+d}{4}$

EJERCICIOS

Simplifica, suprimiendo las cantidades que sean a la vez factores y divisores.

1. 8 ÷ 3 × 3
2. $ac \div c$
3. 8.4.5 ÷ 8.4
4. $3ab \div 3a$
5. 5bc ÷ 5c
6. 2.3.5.6 ÷ 3.6
7. 7.4 ÷ 4 + 5 ÷ 6.6
8. 9 ÷ 7.7 - 5 ÷ 3.3
9. $(a + b)\,c \div c$
10. 5 (a - b) ÷ (a - b)
11. $\frac{3 \times 7 \times 6}{3 \times 6}$
12. $\frac{4 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 7 \times 9}$
13. $\frac{8\,abm}{4\,ab}$
14. $\frac{20\,c \div c}{5}$
15. $\frac{8(a+b)c}{4(a+b)}$.

SUPRESIÓN DE FACTORES Y DIVISORES

1) Si un número se divide entre otro y el cociente se multiplica por el divisor, se obtiene el mismo número.

Probaremos que $(a \div b)\,b = a$

Si llamamos c al cociente de dividir a entre b, tenemos:

$$a \div b = c \ (1)$$

y como el cociente multiplicado por el divisor tiene que dar el dividendo, tendremos:

$$c\,b = a$$

y como $c = a \div b$, según se ve en (1), sustituyendo este valor de c en la igualdad anterior, queda:

$$(a \div b)\,b = a$$

2) Si un número se multiplica por otro y el producto se divide por este último, se obtiene el mismo número.

Probaremos que $(a\,.\,b) \div b = a$

En la igualdad anterior está expresada una división en la que el dividendo es (a, b), el divisor b y el cociente a. Si la división es legítima, es necesario que el cociente multiplicado por el divisor dé el dividendo, y en efecto: $a, b = a, b$, con la cual queda demostrado lo que nos proponíamos.

Esta demostración nos permite decir que siempre que un número aparezca en una expresión cualquiera como factor y divisor, puede suprimirse sin que se altere la expresión.

Ejemplos

(1) 8 × 4 ÷ 4 = 8

(2) $\frac{9 \times 3 \times 2}{9 \times 3} = 2$

(3) $\frac{abcmn}{acn} = bm$

ALTERACIONES DEL DIVIDENDO Y EL DIVISOR EN LA DIVISIÓN EXACTA

1) Si el dividendo se multiplica por un número, no variando el divisor, el cociente queda multiplicado por el mismo número.

Siendo la división $D \div d = c$, decimos que:

$$Dm \div d = cm$$

Esta división será legítima si el divisor d multiplicado por el cociente cm da el dividendo Dm, y en efecto:

$$d.cm = d\,(d \div d\,)\,m = Dm$$

(En el segundo paso se sustituye c por su igual $D \div d$ y en el tercer paso se suprime d como factor y divisor).

2) Si el dividendo se divide por un número, no variando el divisor, el cociente queda dividido por el mismo número.

Siendo la división $D \div d = c$ decimos que:

$$(D \div m\,) \div d = c \div m$$

Esta división será legítima si el divisor d multiplicado por el cociente $c \div m$ da el dividendo $D \div m$, y en efecto:

$$d.c \div m = d\,(D \div d\,) \div m = D \div m$$

En el tercer paso se suprime d como factor y divisor.

3) Si el divisor se multiplica por un número, no variando el dividendo, el cociente queda dividido por dicho número.

Siendo la división $D \div d = c$, decimos que:

$$D \div dm = c \div m$$

Esta división será legítima si el divisor dm, multiplicado por el cociente $c \div m$, da el dividendo D, y en efecto:

$$dm.c \div m = dm\,(D \div d\,) \div m = D$$

(En el tercer paso se suprimen las d y las m que aparecen como factor y di-visor).

4) Si el divisor se divide por un número, no variando el dividendo, el cociente queda multiplicado por el mismo número.

Siendo la división $D \div d = c$ decimos que

$$D \div (d \div m) = cm$$

Esta división será legítima si el cociente cm multiplicado por el divisor $d \div m$ da el dividendo D, y en efecto:

$$cm.d \div m = (D \div d\,)\,m.d + m = D$$

(En el último paso se suprimen las d y las m que aparecen como factor y divisor).

5) El dividendo y el divisor se multiplican o dividen por un mismo número, el cociente no varía, ya que al multiplicar el dividendo por un número, el cociente queda multiplicado por ese número; pero al multiplicar el divisor por el mismo número, el cociente queda dividido por dicho número; luego, el cociente no varía.

Del mismo modo, al dividir el dividendo por un número, el cociente queda dividido por dicho número, pero al dividir el divisor por el mismo número, el cociente queda multiplicado por dicho número; luego, el cociente no varía.

Ejemplos

1) Si dividimos 3500 ÷ 500 podemos tachar los dos ceros del dividendo y los dos del divisor, y queda:

$$3500 \div 500 = 35 \div 5 = 7$$

porque dividimos el dividendo y el di-visor por el mismo número 100, con lo cual, según se acaba de probar, el cociente no varía.

2) Si dividimos 15.4.7 ÷ 5.4.7 podemos suprimir los factores 4 y 7 comunes al dividendo y al divisor, con lo cual el cociente no varía, y tenemos:

$$15.4.7 \div 5.4.7 = 15 \div 5 = 3$$

ALTERACIONES DEL DIVIDENDO Y EL DIVISOR EN LA DIVISIÓN ENTERA

1) Si el dividendo y el divisor de una división entera se multiplican por un mismo número, el cociente no varía y el residuo queda multiplicado por dicho número.

Siendo D el dividendo, d el divisor, c el cociente y r el residuo, tendremos:

$$D = dc + r \quad (1)$$

Si multiplicamos el dividendo y el divisor por m, quedará Dm y dm.

Decimos que al dividir Dm entre dm el cociente será el mismo de antes y c el residuo será rm, lo cual es cierto si en esta división el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo:

$$Dm = dm.c + r\,m$$

y esta igualdad es legítima, porque multiplicando por m los dos miembros de 1), se tiene:

$$Dm = (dc + r\,)\,m$$

o sea $Dm = dm.c + rm$ (2)

con lo cual queda probado lo que nos proponíamos.

2) Si el dividendo y el divisor se dividen por un mismo número divisor de ambos, el cociente no varía y el residuo queda dividido por el mismo número.

En el número anterior, partiendo de la igualdad (1), llegamos a la igualdad (2); luego, recíprocamente, si partimos de (2), llegamos a (1), y esto prueba lo que queremos demostrar.

EJERCICIOS

1. ¿Qué alteración sufre el cociente 760 ÷ 10 si 760 se multiplica por 8? ¿Y si se divide por 4?
R. Queda multiplicado por 8. Queda dividido por 4.

2. ¿Qué le sucede al cociente si se resta el divisor del dividendo, permaneciendo igual el divisor?
R. Disminuye 1.

3. Si en la división 72 ÷ 8 sumamos 8 con 72 y esta suma se divide entre 8, ¿qué le sucede al cociente?
R. Aumenta 1.

4. 60 ÷ 10 = 6. Menciona, sin efectuar la operación, cuál sería el cociente en los casos siguientes:

a) (60 × 2) ÷ 10 — **R.** 12
b) 60 ÷ (10 × 2) — **R.** 3
c) (60 ÷ 5) ÷ (10 ÷ 5) — **R.** 6
d) (60 ÷ 2) ÷ 10 — **R.** 3
e) 60 ÷ (10 ÷ 2) — **R.** 12
f) (60 × 2) ÷ (10 × 2) — **R.** 6

5. Señala, y explica por qué, sin efectuar la división, si es cierto que:

$$20 \div 4 = 10 \div 2 = 40 \div 8 = 5 \div 1$$

6. Explica por qué 9 ÷ 3 = 27 ÷ 9 = 81 ÷ 27

7. $a \div b = 30$. Escribe los cocientes siguientes:

a) $2a \div b = \ldots.$ — **R.** 60
b) $\frac{a}{2} \div b \ldots.$ — **R.** 15
c) $a \div 3b = \ldots.$ — **R.** 10

8. $24 \div a = b$. Escribe los cocientes:

a) $48 \div a = \ldots.$ — **R.** $2b$
b) $8 \div a = \ldots.$ — **R.** $\frac{b}{3}$
c) $24 \div 22a = \ldots.$ — **R.** $\frac{b}{2}$

9. $\frac{a}{b} = 60$ Escribe los cocientes.

a) $2\frac{a}{b} = \ldots.$ — **R.** 120
b) $\frac{a}{2b} = \ldots.$ — **R.** 30
c) $\frac{a \div 3}{b \div 2} \ldots.$ — **R.** 40

10. Si en la división 216 ÷ 6 restamos 6 de 216 y esta diferencia se divide por el mismo divisor, ¿qué le sucede al cociente?
R. Disminuye 1.

11. ¿Qué variación sufre el cociente 1350 ÷ 50 si el 50 se multiplica por 7; si se divide por 10?
R. Queda dividido por 7; queda multiplicado por 10.

12. ¿Qué alteración sufre el cociente 858 ÷ 6 si 858 se multiplica por 2 y 6 se divide por 2; si 858 se divide por 6 y 6 se multiplica por si mismo?
R. Queda multiplicado por 4; queda dividido por 36.

13. $a = 60$. Escribe los cocientes:

a) $\frac{a \div 10}{b \div 5} = \ldots$ — **R.** $\frac{30}{b}$
b) $\frac{5a}{b \div 4} = \ldots$ — **R.** $\frac{1200}{b}$
c) $\frac{a \div 5}{6b} = \ldots$ — **R.** $\frac{2}{b}$

14. ¿Cuánto aumenta el cociente si se añade el divisor al dividendo, permaneciendo igual el divisor?
R. 1.

15. ¿Qué alteración sufre el cociente 4500 ÷ 9 si 4500 se multiplica por 6 y 9 se divide por 3; si 4500 se divide por 4 y 9 se multiplica por 3?
R. Queda multiplicado por 18; queda dividido por 12.

16. 24 ÷ a = b. Escribe los cocientes:

a) $24 \div \frac{a}{5} = \ldots$ — **R.** $5b$
b) $4 \div 6a = \ldots$ — **R.** $\frac{b}{25}$



Los árabes fueron los primeros en utilizar la raya horizontal entre los números como símbolo de división, siendo Leonardo de Pisa el que la introdujo a Europa.

CAPÍTULO XIV

OPERACIONES INDICADAS DE DIVISIÓN

De las operaciones elementales de Aritmética, la división es quizá la más compleja. En un principio se usaba el ábaco como instrumento de división, posteriormente se fueron usando símbolos que fueron complementando las diferentes operaciones de división tales como (÷, /,).

EJERCICIOS

Efectúa las operaciones siguientes:

1. 5 + 10 ÷ 3	**R.** 5	**4.** 9 ÷ 3 × 4 ÷ 2	**R.** 6
2. 24 ÷ 3 - 2	**R.** 6	**5.** 10 × 6 ÷ 2 × 4 ÷ 2 × 7	**R.** 536
3. 18 ÷ 3 × 3 + 5	**R.** 48	**6.** 18 ÷ 2 + 5 ÷ 2 + 23 ÷ 3	**R.** 19.66
		7. 25 + 7 ÷ 4 - 2 ÷ 2 + 4	**R.** 29.75
		8. 50 ÷ 2 + 8 ÷ 11	**R.** 25.72
		9. 11 + 8 - 2 - 3 × 3 ÷ 7	**R.** 15.71
		10. 32 - 4 × 6 + 3 × 5 - 9 ÷ 6	**R.** 21.5

DIVISIÓN O MULTIPLICACIÓN SIN SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Primero se buscan los cocientes y productos indicados y luego las sumas o restas.

1) Efectuar 6 ÷ 3 + 4 ÷ 4

Primero encontramos los cocientes

6 ÷ 3 = 2 y 4 ÷ 4 = 1

y tenemos

6 ÷ 3 + 4 ÷ 4 = 2 + 1 = 3

2) Efectuar

5 × 4 ÷ 2 + 9 ÷ 3 - 8 ÷ 2 × 3

$$\underbrace{5 \times 4 \div 2}_{10} + \underbrace{9 \div 3}_{3} - \underbrace{8 \div 2 \times 3}_{12} = 10 + 3 - 12 = 1$$

DIVISIÓN CON SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Primero se efectúan las operaciones encerradas en los paréntesis y luego las que queden indicadas, como en el caso anterior.

1) Efectuar (5 + 4) ÷ 3 + (8 - 4) ÷ 2

Resolvemos primero los paréntesis y tenemos:

(5 + 4) ÷ 3 + (8 - 4) ÷ 2 = 9 ÷ 3 + 4 ÷ 2 = 3 + 2 = 5

2) Efectuar (30 - 10) ÷ (7 - 2) + (9 - 4) ÷ 5 + 3

(30 - 10) ÷ (7 - 2) + (9 - 4) ÷ 5 + 3
= 20 ÷ 5 + 5 ÷ 5 + 3 = 4 + 1 + 3 = 8

EJERCICIOS

Efectúa las operaciones siguientes:

1. 8 + 4 ÷ 2 × 3 - 4 ÷ (2 × 2)	**R.** 1
2. [15 + (8 - 3) 5] ÷ [(8 - 2) ÷ 2 + 7]	**R.** 4
3. (3 × 2) ÷ 6 + (19 - 1) ÷ (5 + 4)	**R.** 3
4. (30 - 24) ÷ 6	**R.** 1
5. 3 × 6 ÷ 2 + 10 ÷ 5 × 3	**R.** 15
6. 50 + 15 ÷ 5 × 3 - 9 ÷ 3 × 4 + 6 × 4 ÷ 6	**R.** 51
7. 9 + 5 - 4 + 3 - 8 + 5 × 3 - 20 ÷ 4 × 3	**R.** 5
8. 4 × 5 - 3 × 2 + 10 ÷ 5 - 4 ÷ 2	**R.** 14
9. (9 + 3) 5 - 2 ÷ (3 - 2) + 8 × 6 ÷ 4 ÷ 2 + 5	**R.** 10
10. 8 ÷ 2 × 5 + (9 - 1) ÷ 8 - 3	**R.** 18
11. 10 ÷ 5 + 4 - 16 ÷ 8 - 2 + 4 ÷ 4 - 1	**R.** 2
12. 6 × 5 × 4 ÷ 20 + 20 ÷ 5 ÷ 4	**R.** 7
13. 500 - (31 - 6) ÷ 5 - 3 ÷ (4 - 1)	**R.** 94
14. 40 ÷ 5 × 5 + 6 ÷ 2 × 3 + 4 - 5 × 2 ÷ 10	**R.** 52
15. 300 ÷ [(15 - 6) ÷ 3 + (18 - 3) ÷ 5]	**R.** 50
16. (15 + 20) ÷ 5	**R.** 7
17. 50 ÷ 5 - 16 ÷ 2 + 12 ÷ 6	**R.** 4
18. (9 + 7 - 2 + 4) ÷ 9	**R.** 2
19. 3 + 4 × 5 - 5 + 4 × 2	**R.** 26
20. 3 × 5 + 5 - 8 ÷ 4 × 2 × 3	**R.** 18
21. (5 - 2) ÷ 3 + (11 - 5) ÷ 2	**R.** 4
22. 200 ÷ (8 - 6) (5 - 3)	**R.** 50
23. (6 + 2) ÷ (11 - 7) + 5 ÷ (6 - 1)	**R.** 3
24. 8 × 5 + 4 - 2 + 6 ÷ 3	**R.** 44
25. (5 × 6 × 3) ÷ 15	**R.** 6
26. 150 ÷ (25 × 2) + 32 ÷ (8 × 2)	**R.** 5
27. (9 - 6) ÷ 3 + (15 - 3) ÷ (7 - 3) + (9 ÷ 3)	**R.** 7
28. (5 × 4 × 3) ÷ (15 - 3) + 18 ÷ (11 - 5) 3	**R.** 6
29. (15 - 2) 4 + 3 (6 ÷ 3) - 18 ÷ (10 - 1)	**R.** 56
30. 72 ÷ 8 + 3 - 4 × 2 ÷ 4 + 6	**R.** 16

TEORÍA

Ahora veremos cómo efectuar las operaciones indicadas de división sin resolver las operaciones encerradas en los paréntesis, método que es indispensable cuando las cantidades se representan con letras.

DIVISIÓN DE UNA RESTA INDICADA Y UN NÚMERO

Para dividir una resta indicada entre un número se dividen el minuendo y el sustraendo por este número y se restan los cocientes parciales.

1) Efectuar (20 - 15) ÷ 5.

(20 - 15) ÷ 5 = 20 ÷ 5 - 15 ÷ 5 = 4 - 3 = 1

En efecto: 20 ÷ 5 - 15 será el cociente que buscamos si multiplicado por el divisor 5 se reproduce el dividendo (20 - 15), y así, por la ley distributiva de la multiplicación tenemos:

(20 ÷ 5 - 15 ÷ 5) 5 = (20 + 5) 5 - (15 ÷ 5) 5 = 20 - 15

porque el 5 como factor y divisor se suprime.

2) Efectuar (35 - 28) ÷ 7

(35 - 28) ÷ 7 = 35 ÷ 7 - 28 ÷ 7 = 5 - 4 = 1

En general: $(a - b) \div m = a \div m - b \div m$

La propiedad explicada en los ejemplos anteriores constituye la *ley distributiva de la división respecto de la resta.*

DIVISIÓN DE UN NÚMERO Y UNA SUMA ALGEBRAICA

Ya probamos que la división es distributiva respecto de la suma y de la resta, por lo tanto tendremos que para dividir una suma algebraica por un número se divide cada término por dicho número, colocando delante de cada cociente parcial el signo + si el término que se divide es positivo y el signo - si es negativo.

1) Efectuar (15 - 10 + 20) ÷ 5

(15 - 10 + 20) ÷ 5 = 15 ÷ 5 - 10 ÷ 5 + 20 ÷ 5 =
3 - 2 + 4 = 5

En general:

$$(a - b + c - d) \div m = a \div m - b \div m + c \div m - d \div m$$

EJERCICIOS

Efectúa las operaciones siguientes:

1. $(9 + 6) \div 3$ **R.** 5
2. $(18 - 12) \div 6$ **R.** 1
3. $(12 - 8 + 4) \div 2$ **R.** 4
4. $(18 + 15 + 30) \div 3$ **R.** 21
5. $(54 - 30) \div 4$ **R.** 6
6. $(15 - 9 + 6 - 3) \div 3$ **R.** 3
7. $(32 - 16 - 8) \div 8$ **R.** 1
8. $(16 - 12 - 2 + 10) \div 2$ **R.** 6
9. $(a + b) \div m$ **R.** $a \div m + b \div m$
10. $(c - d) \div n$ **R.** $c \div n - d \div n$
11. $(2a - 4b) \div 2$ **R.** $a - 2b$
12. $(x - y + z) \div 3$ **R.** $x \div 3 - y \div 3 + z \div 3$
13. $(5a - 10b + 15c) \div 5$ **R.** $a - 2b + 3c$
14. $(6 - a - c) \div 3$ **R.** $2 - a \div 3 - c \div 3$

EJERCICIOS

Aplicando las reglas anteriores, efectúa las operaciones siguientes:

1. $(5 \times 4 + 3 \times 2) \div 2$ **R.** 13
2. $(9 \times 4) \div 2$ **R.** 18
3. $(5a \times 6b) \div 5a$ **R.** $6b$
4. $(abc) \div 3$ **R.** $(a \div 3)\, bc$
5. $(mnp) \div$ n **R.** mp
6. $(ab + bc - bd) \div b$ **R.** $a + c - d$
7. $(5 \times 9 \times 8) \div 3$ **R.** 120
8. $(4 \times 7 \times 25 \times 2) \div 25$ **R.** 56
9. $(5 \times 6) \div 5$ **R.** 6
10. $(3 \times 5 \times 8 \times 4) \div (3 \times 8)$ **R.** 20

DIVISIÓN DE UN NÚMERO Y UN PRODUCTO

Para dividir un producto indicado entre un número se divide uno solo de los factores del producto por dicho número.

1) Efectuar $(6 \times 5) \div 2$

Dividimos solamente el factor 6 entre 2 y tenemos:

$$(6 \times 5) \div 2 = (6 \div 2)\, 5 = 3 \times 5 = 15$$

En efecto: $(6 \div 2)\, 5$ será el cociente que buscamos si multiplicado por el divisor 2 da el dividendo 6×5, y como para multiplicar un producto indicado por un número basta multiplicar uno de sus factores por dicho número, tendremos:

$$(6 \div 2)\, 5 \times 2 = (6 \div 2 \times 2) \times 5 = 6 \times 5$$

porque el 2 como factor y divisor se suprime.

2) Efectuar $(17 \times 16 \times 15) \div 8$

$$(17 \times 16 \times 5) \div 8 = 17 \times (16 \div 8) \times 5 =$$
$$17 \times 2 \times 5 = 170$$

En general: $(abc) \div m = (a \div m)\, bc$

Para dividir un producto entre uno de sus factores basta suprimir ese factor en el producto.

1) Efectuar $(7 \times 8) \div 8$

$$(7 \times 8) \div 8 = 7$$

porque el 8 como factor y divisor se suprime.

2) Efectuar $(5 \times 4 \times 3) \div 4$

$$(5 \times 4 \times 3) \div 4 = 5 \times 3 = 15$$

En general:

$$(abc) \div b = ac$$
$$(abcd) \div (ad) = bc$$

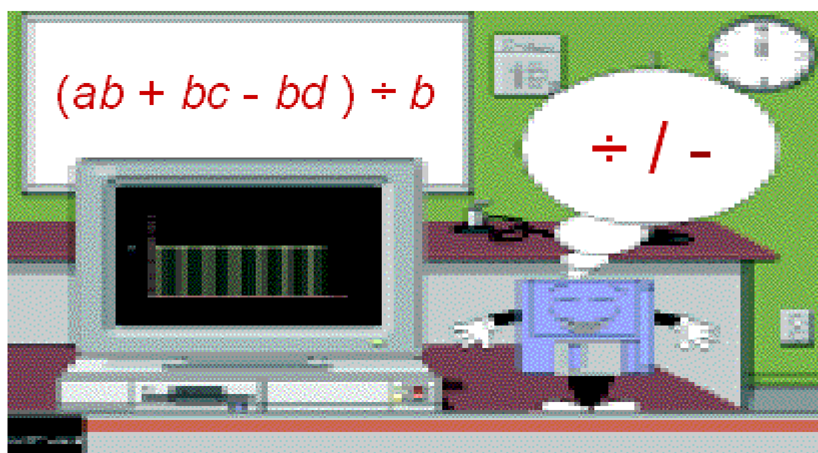


Figura 48



Debido a que el pueblo de Babilonia se dedicaba principalmente al comercio, su facilidad para solucionar problemas aritméticos era muy notable. Se encontraron unas tablillas de hace 2000 años en donde se comprueba el gran adelanto matemático que tenían.

CAPÍTULO XV

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un **problema** en Aritmética es una cuestión práctica en la que deben determinarse ciertas cantidades desconocidas (**incógnitas**) al conocer sus relaciones con otras cantidades conocidas (**datos**).

Para **resolver un problema** hay que realizar las operaciones necesarias para encontrar el valor de la incógnita o incógnitas.

Para **comprobar un problema** hay que cerciorarse de que los valores hallados para las incógnitas, una vez resuelto el problema, satisfacen las condiciones del mismo.

RESOLUCIÓN Y COMPROBACIÓN

Si la **suma de dos números es 124** y su diferencia 22, hay que encontrar **los números** a partir del conocimiento de que la suma de dos números más su diferencia es igual al duplo del mayor. Por tanto:

124 + 22 = 146 duplo del número mayor

Entonces: 146 ÷ 2 = 73 será el número mayor.

Como la suma de los dos números es 124, siendo el mayor 73, el menor será 124 - 73 = 51. **R.** 73 y 51.

Para comprobarlo debemos verificar si los dos números hallados, 73 y 51, cumplen las condiciones del problema es decir, que su suma sea 124 y su diferencia 22, y en efecto:

73 + 51 = 124 73 - 51 = 22

por lo tanto el problema está bien resuelto.

También se puede resolver este problema, considerando que la suma de dos números menos su diferencia es igual al duplo del menor, y así tendremos:

124 - 22 = 102 = duplo del número menor,

luego 102 ÷ 2 = 51 = número menor

El mayor será: 124 - 51 = 73

EJERCICIOS

1. La suma de dos números es 1250 y su diferencia 750. Encuentra los números.
R. 1000 y 250.

2. El triplo de la suma de dos números es 1350 y el duplo de su diferencia 700. Encuentra los números. **R.** 400 y 50.

3. La mitad de la suma de dos números es 850 y el cuádruplo de su diferencia 600. Encuentra los números. **R.** 625 y 775.

4. Alejandro tiene 32 canicas en sus manos, en la derecha tiene 6 más que en la izquierda. ¿Cuántas canicas tiene en cada mano? **R.** 19 en la derecha y 13 en la izquierda.

5. La suma de dos números excede en 3 unidades a 97 y su diferencia excede en 7 a 53. Encuentra los números. **R.** 80 y 20

6. Las edades de un padre y su hijo suman 34 años; si el hijo nació cuando el padre tenía 22 años, ¿cuáles son sus edades actuales? **R.** 28 y 6

7. 8534 excede en 1400 a la suma de dos números y en 8532 a su diferencia. Encuentra los dos números. **R.** 3568 y 3566.

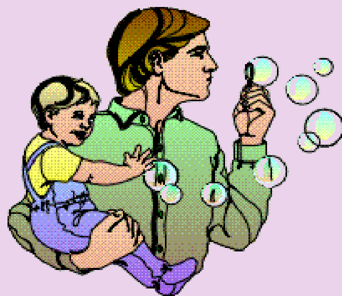


Figura 49

PROBLEMA 1

¿Qué número, sumado con su duplo, da como resultado 45?

45 es el número que se busca más dos veces dicho número, o sea el triplo del número buscado; luego, el número buscado será:

$$45 \div 3 = 15$$

Comprobación

Sumando 15 con su duplo

$$15 \times 2 = 30$$

tenemos:

$$15 + 30 = 45$$

con lo que se cumplen las condiciones del problema.

EJERCICIOS

1. ¿Qué número sumado con su duplo da como resultado 261?
R. 87

2. ¿Qué número sumado con su triplo resulta 384?
R. 96

3. 638 excede en 14 unidades a la suma de un número con su quíntuplo. ¿Cuál es ese número?
R. 104.

4. La edad de Roberto es el cuádruplo de la de Luis; si ambas edades se suman y se le añaden 17 años, el resultado es 42 años. Encuentra las edades.
R. Luis tiene 5 años y Roberto 20 años.

5. ¿Qué número sumado con su duplo da como resultado 90?
R. 30

PROBLEMA 2

Si la suma de dos números es 102 y su cociente 5, encontrar los números.

Cuando se divide la suma de dos números entre su cociente **aumentado en 1**, se obtiene el menor de los dos números:

$$102 \div (5 + 1) = 102 \div 6 =$$
$$17 = \text{número menor}$$

El mayor será:

$102 - 17 = 85$ **R.** 85 y 17

Comprobación

Veamos si 85 y 17 cumplen las condiciones del problema, y en efecto:

$$85 + 17 = 102$$
$$85 \div 17 = 5$$

EJERCICIOS

1. La suma de dos números es 450 y su cociente 8. Encuentra los números.
R. 400 y 50

2. La suma de dos números es 3768 y su cociente 11. Encuentra los números. **R.** 3454 y 314

3. El duplo de la suma de dos números es 100 y el cuádruplo de su cociente 36. Encuentra los números.
R. 45 y 5

4. 800 excede en 60 unidades a la suma de dos números y en 727 a su cociente. Encuentra los números.
R. 730 y 10

5. La edad de A es 4 veces la de B y ambas edades suman 45 años. ¿Qué edad tiene cada uno?
R. A tiene 36 años y B 9 años.

6. Entre A y B tienen $12,816 y B tiene la tercera parte de lo que tiene A. ¿Cuánto tiene cada uno?
R. A tiene $9,612 y B $3,204.

PROBLEMA 3

Si la diferencia de dos números es 8888 y su cociente 9, encontrar los números.

Cuando se divide la diferencia de dos números entre su cociente **disminuido en 1**, se obtiene el número menor:

8888 ÷ (9 - 1) = 8888 ÷ 8 =
1111 = número menor

El número menor es 1111, y como la diferencia de los dos números es 8888, el número mayor se encontrará sumando el menor con la diferencia de ambos:

1111 + 8888 = 9999 = número mayor
R. 9999 y 1111

Comprobación

Aquí veremos que los números hallados, 9999 y 1111, cumplen las condiciones del problema:

9999 - 1111 = 8888
9999 : 1111 = 9

EJERCICIOS

1. Dos autos salen de dos ciudades A y B distantes entre sí 840 km, para encontrarse. El de A va a 50 km/h y el de B a 70 km/h. Si salieron a las 6 a.m., ¿a qué hora se encontrarán y a qué distancia de A y de B? **R.** A la 1 p.m.; a 350 km de A y 490 km de B.

2. A las 6 a.m., sale un auto de A a 60 km/h y va al encuentro de otro que sale de B a 80 km/h, a la misma hora. Sabiendo que se encuentran a las 11 a.m., ¿cuál es la distancia entre A y B? **R.** 700 km.





Figura 51

EJERCICIOS

1. La diferencia de dos números es 150 y su cociente 4. Encuentra los números.
R. 200 y 50

2. El cociente de dos números es 12 y su diferencia 8965. Encuentra los números.
R. 9780 y 815

3. La mitad de la diferencia de dos números es 60 y el duplo de su cociente es 10. Encuentra los números. **R.** 150 y 30.

4. La diferencia de dos números excede en 15 a 125 y su cociente es tres unidades menor que 11. Encuentra los números. **R.** 160 y 20

5. 2000 excede en 788 a la diferencia de dos números y en 1995 a su cociente. Encuentra los números. **R.** 1010 y 202

6. Hoy la edad de A es cuatro veces la de B, y cuando B nació A tenía 12 años. ¿Cuáles son las edades actuales? **R.** 16 y 4

PROBLEMA 4

Dos correos salen a las 7 a.m. de dos ciudades, *A* y *B* , distantes entre sí 150 km, y se dirigen hacia el otro. El que sale de *A* va a 8 km por hora y el que sale de *B* a 7 km, por hora. ¿A qué hora se encontrarán y a qué distancia de *A* y de *B* ?



Figura 50

El que sale de *A* avanza 8 km/h (figura 50) y el de *B* avanza 7 km/h, por lo tanto en una hora se acercan 8 + 7 = 15 km, y como la distancia que separa *A* de *B* es de 150 km, se encontrarán al cabo de 150 km ÷ 15 km = 10 horas.

Como salieron a las 7 a.m., se encontrarán a las 5 p.m.

En las 10 h que se ha estado moviendo el que salió de *A* ha recorrido 8 km × 10 = 80 km; luego, el punto de encuentro dista de *A* 80 km y de *B* 150 km - 80 km = 70 km.

Comprobación

El que salió de *B*, en las 10 horas que se ha movido para encontrar al de *A*, recorrió 10 × 7 km = 70 km, que es la distancia del punto de encuentro al punto *B*.

PROBLEMA 5

Dos autos salen de dos ciudades, *A* y *B* , situadas a 1400 km de distancia, y se dirigen uno hacia el otro. El de *A* sale a las 6 a.m. y va a 100 km/h y el *B* a las 8 a.m. a 50 km/h ¿A qué hora se encontrarán y a qué distancia de los puntos *A* y *B* ?



Figura 51

El que sale de *A* (figura 51), de 6 a 8 de la mañana recorre 2 × 100 km = 200 km; a las 8 a.m., cuando sale el de *B* , la distancia que los separa es de 1400 km - 200 km = 1200 km.

A partir de las 8 a.m., en cada hora se acercan 100 km + 50 km = 150 km; para encontrarse, necesitarán 1200 km ÷ 150 km = 8 horas, a partir de las 8 a.m.; por lo tanto se encontrarán a las 4 p.m.

El que salió de *A* ha estado avanzando desde las 6 a.m. hasta las 4 p.m., o sea 10 horas, a razón de 100 km por hora, por lo que ha recorrido 10 × 100 km = 1000 km; luego, el punto de encuentro *E* dista 1000 km de *A* y 1400 - 1000 = 400 km de *B*.

Comprobación

De 8 a.m. a 4 p.m., es decir 8 horas, el que salió de *B* ha recorrido 8 × 50 km = 400 km, que es la distancia del punto de encuentro al punto *B*.

EJERCICIOS

1. Dos móviles parten de *M* y *N* distantes entre sí 99 km y van al encuentro. El de *M* sale a las 6 am a 6 km/h y el de *N* a las 9 am a 3 km/h. Sabiendo que el de *M* descansa de 12 a 3 pm y a las 3 emprende de nuevo su marcha a la misma velocidad anterior, ¿a qué hora se encontrará con el de *N* que no varió su velocidad desde que salió y a qué distancia de *M* y *N* ?
R. A las 8 pm; a 66 km de *M* y 33 km de *N*.

2. Dos autos salen a la misma hora de dos ciudades *A* y *B* distantes 320 km y van al encuentro. Se encuentran a la 1 pm en un punto que dista 120 km de *A*. ¿A qué hora salieron sabiendo que el de *A* iba a 30 km/h y el de *B* a 50 km/h?
R. 9 am.

3. Dos móviles salen de dos puntos *A* y *B* que distan 236 km y van al encuentro. Si el de *A* sale a las 5 am a 9 km/h y el de *B* a las 9 am a 11 km/h, ¿a qué hora se encontrarán y a qué distancia de *A* y de *B* ?
R. A las 7 pm; a 126 km de *A* y 110 km de *B*.

PROBLEMA 6

Dos autos salen a las 9 a.m. de dos puntos, *A* y *B* (*B* está al este de *A*), distantes entre sí 60 km y ambos se dirigen al este. El de *A* va a 25 km/h y el de *B* a 15 km/h. ¿A qué hora se encontrarán y a qué distancia de *A* y *B* ?

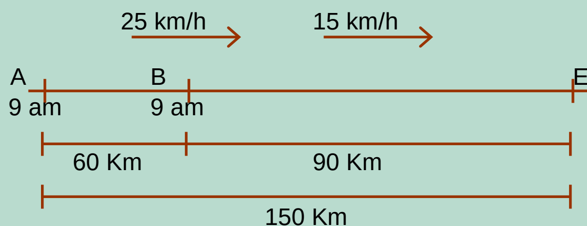


Figura 52

En tanto que el de *B* (figura 52) recorre 15 km, hacia el este en 1 hora, el de *A* recorre 25 km en el mismo sentido en 1 hora; luego, el de *A* se acerca al de *B* 25 - 15 = 10 km por cada hora.

Para alcanzarlo tendrá que avanzar durante 60 km ÷ 10 km = 6 horas, y dado que salieron a las 9 a.m., lo alcanzará a las 3 p.m.

El de *A* avanzó 6 horas a razón de 25 km por cada hora para alcanzar al de *B* ; luego, el punto de encuentro está a 25 km × 6 = 150 km de *A* y a 150 km - 60 km = 90 km de *B*.

Comprobación

El auto que salió de *B* recorrió en 6 horas 15 km × 6 = 90 km, que es la distancia del punto de encuentro al punto *B*.

PROBLEMA 7

Un auto sale de *A* a las 7 a.m., a 60 km/h hacia el este, y otro sale de *B* a las 9 a.m., situado a 30 km, al oeste de *A*, a 90 km/h para alcanzarlo. ¿A qué hora lo alcanzará y a qué distancia de *A* y de *B*?

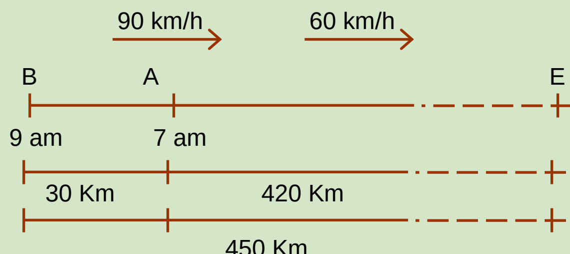


Figura 53

El de *A* (figura 53) salió a las 7 a.m. a 60 km/h, por lo que de 7 a 9 a.m. ha recorrido 2 × 60 km = 120 km, así que a las 9 a.m. la ventaja que le lleva al que sale de *B* es de 30 km + 120 km = 150 km.

A partir de las 9 a.m. el de *B* se acerca al de *A* a razón de 90 - 60 = 30 km por cada hora, así que lo alcanzará al cabo de 150 km ÷ 30 = 5 horas, después de las 9 a.m., o sea a las 2 p.m.

En 5 horas el auto que salió de *B* ha recorrido 5 × 90 km = 450 km; luego, el punto de encuentro *E* se halla a 450 km a la derecha de *B* y a 450 - 30 = 420 km a la derecha de *A*.

Comprobación

De 7 a.m. a 2 p.m. hay 7 horas, durante las cuales el que salió de *A* ha recorrido 7 × 60 km = 420 km, que es la distancia antes de *A* hasta el punto de encuentro.

EJERCICIOS

1. Un corredor le concede a otro una ventaja de 10 metros. Si la velocidad del que tiene ventaja es de 6 m por seg. y la del otro 8 m por seg., ¿en cuánto tiempo alcanzará al primero?
R. 5 seg.

2. Un auto sale de *A* hacia la derecha a 90 km/h a las 12 del día y en el mismo instante sale otro de *B* hacia la derecha a 75 km/h (*B* está a la derecha de *A*). *A* alcanza a *B* a las 7 p.m. ¿Cuál es la distancia entre *A* y *B*? **R.** 105 km.

3. Dos autos salen de dos ciudades *A* y *B* distantes entre sí 100 km, ambos hacia el este (*B* está más al este que *A*). *B* sale a las 6 a.m. a 60 km por hora y *A* sale a las 8 a.m. a 80 km/h. ¿A qué hora se encontrarán sabiendo que se han detenido, el que salió de *B* de 12 a 1 y el que salió de *A* de 12 a 2 para almorzar, reanudando después su marcha a las mismas velocidades anteriores? **R.** 12 p.m.

4. Dos correos salen de dos ciudades *M* y *N* (*N* está al oeste de *M*) distantes entre sí 8 km y van ambos hacia el este. El de *M* sale a las 6 a.m. y anda 1 km/h y el de *N* sale a las 8 am y anda 3 km/h. ¿A qué hora se encontrarán y a que distancia de *M* y *N*?
R. 1 pm; a 7 km de *M* y 15 km de *N*.

PROBLEMA 8

Para incrementar su cuenta de ahorros, un estudiante lleva al banco tres bolsas de dinero. La 1ª y la 2ª juntas tienen $350; la 2ª y la 3ª juntas $300, y la 1ª y la 3ª juntas $250. ¿Cuánto tiene cada bolsa?

1ª bolsa + 2ª bolsa = $350
2ª bolsa + 3ª bolsa = $300
1ª bolsa + 3ª bolsa = $250
Suma: $900

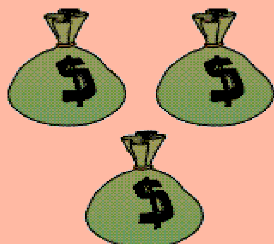


Figura 54

La suma $900 contiene dos veces lo de la primera bolsa, más dos veces lo de la segunda, más dos veces lo de la tercera, luego la mitad de la suma $900 ÷ 2 = $450 = 1ª bolsa + 2ª bolsa + 3ª bolsa.

Si las tres juntas tienen $450, y la 1ª y la 2ª, $350, la tercera tendrá $450 - $350 = $100

La segunda tendrá $300 - $100 = $200

La primera tendrá $350 - $200 = $150

1ª $150; 2ª $200; 3ª $100

Comprobación

La 1ª y la 2ª tienen $150 + $200 = $350

La 2ª y la 3ª tienen $200 + $100 = $300

La 1ª y la 3ª tienen $150 + $100 = $250

Por lo tanto, los valores encontrados para las incógnitas satisfacen las condiciones del problema.

PROBLEMA 11

Un estanque tiene dos llaves, una de las cuales vierte 117 litros en 9 minutos y la otra 112 litros en 8 minutos, y un desagüe por el que salen 42 litros en 6 minutos. El estanque contenía 500 litros de agua y al abrir las dos llaves y el desagüe al mismo tiempo se llenó en 48 minutos. ¿Cuál es la capacidad del estanque?

La 1ª llave vierte 117 ÷ 9 = 13 litros por minuto.

La 2ª llave vierte 112 ÷ 8 = 14 litros por minuto.

Las dos llaves juntas vierten 13 + 14 = 27 litros por minuto.

Por el desagüe salen 42 ÷ 6 = 7 litros por minuto.

Si en un minuto las dos llaves vierten 27 litros y salen 7 litros por el desagüe, quedan en el estanque 20 litros por cada minuto; luego, en 48 minutos, tiempo que tarda en llenarse el estanque, se han quedado 20 × 48 = 960 litros, y como éste tenía ya 500 litros, la capacidad del estanque es 500 + 960 = 1460 litros.

Comprobación

Se encontró una capacidad total de 1460 litros. Si quitamos los 500 litros que ya había en el estanque, quedan 1460 - 500 = 960 litros de capacidad. Estos 960 litros se llenan en 960 ÷ 20 = 48 minutos.

PROBLEMA 12

Si un comerciante compra 30 pantalones a 20 dólares cada uno y luego vende 20 pantalones a 18 dólares cada uno, ¿en cuánto tiene que vender los restantes para no perder?

Costo de los 30 pantalones a 20 dólares cada uno:

30 × 20 = 600 dólares

Si no quiere perder, es necesario que de la venta saque estos 600 dólares que gastó.

Al vender 20 pantalones a 18 dólares cada uno, sacó 20 × 18 = $360; luego, lo que debe obtener de los pantalones restantes para no perder son $600 - $360 = $240.

Como ya vendió 20 pantalones le quedan 30 - 20 = 10

Si de estos 10 tiene que sacar $240, tendrá que vender cada pantalón a $240 ÷ 10 = $24.

Comprobación

Vendiendo los 10 pantalones que le quedaban a $24 obtuvo 10 × $24 = $240, y de los 20 que ya había vendido antes a $18 obtuvo 20 × $18 = $360; así, en total obtuvo de las ventas $240 + $360 = $600, que es el total que invirtió, y de esta forma no perderá dinero.

EJERCICIOS

1. Un estanque cuya capacidad es de 300 litros está vacío y cerrado su desagüe. ¿En cuánto tiempo se llenará si abrimos al mismo tiempo tres llaves que vierten; la 1ª, 36 litros en 3 minutos; la 2ª, 48 litros en 6 minutos y la 3ª, 15 litros en 3 minutos? **R.** 12 minutos.

2. Un estanque tiene tres grifos que vierten: el 1°, 50 litros en 5 minutos; el 2°, 91 litros en 7 minutos y el 3°, 108 litros en 12 minutos, y dos desagües por los que salen 40 litros en 5 minutos y 60 litros en 6 minutos, respectivamente. Si estando vacío el estanque y abiertos los desagües, se abren las tres llaves al mismo tiempo y necesita 40 minutos para llenarse, ¿cuál es su capacidad? **R.** 560 litros.

3. Un estanque tiene agua hasta su tercera parte; si se abriera una llave que vierte 119 litros en 7 minutos y un desagüe por el que salen 280 litros en 8 minutos, el depósito se vaciaría en 53 minutos. ¿Cuál es la capacidad del estanque? **R.** 2,862 litros.

4. Si en un estanque vacío cuya capacidad es de 3600 litros se abrieran al mismo tiempo tres llaves y un desagüe, el estanque se llenaría en 15 minutos. Por el desagüe salen 240 litros en 4 minutos. Si el estanque tiene 600 litros de agua y el desagüe está cerrado, ¿en cuánto tiempo lo llenarán las tres llaves? **R.** 10 minutos.

5. Un estanque se puede llenar por dos llaves, una de las cuales vierte 200 litros en 5 minutos y la otra 150 litros en 6 minutos. El estanque tiene un desagüe por el que salen 8 litros en 4 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará el estanque, si estando vacío, se abren al mismo tiempo las dos llaves y el desagüe, sabiendo que su capacidad es de 441 litros? **R.** 7 minutos.

6. Un depósito tiene tres llaves que vierten: la primera, 68 litros en 4 minutos; la segunda, 108 litros en 6 minutos y la tercera, 248 litros en 8 minutos y un desagüe por el que salen 55 litros en 5 minutos. Si el desagüe está cerrado y se abren las tres llaves al mismo tiempo, el depósito se llena en 53 minutos. ¿En cuánto tiempo puede vaciar el desagüe estando lleno y cerradas las llaves?
R. 5 horas, 18 minutos.

7. Un lavabo tiene una llave que vierte 24 litros en 4 minutos y un desagüe por el que salen 32 litros en 16 minutos. Si estando vacío el lavabo y abierto el desagüe se abre la llave, ¿en cuánto tiempo se llenará el lavabo si su capacidad es de 84 litros?
R. 21 minutos.

PROBLEMA 11

Un estanque tiene dos llaves, una de las cuales vierte 117 litros en 9 minutos y la otra 112 litros en 8 minutos, y un desagüe por el que salen 42 litros en 6 minutos. El estanque contenía 500 litros de agua y al abrir las dos llaves y el desagüe al mismo tiempo se llenó en 48 minutos. ¿Cuál es la capacidad del estanque?

La 1ª llave vierte 117 ÷ 9 = 13 litros por minuto.

La 2ª llave vierte 112 ÷ 8 = 14 litros por minuto.

Las dos llaves juntas vierten 13 + 14 = 27 litros por minuto.

Por el desagüe salen 42 ÷ 6 = 7 litros por minuto.

Si en un minuto las dos llaves vierten 27 litros y salen 7 litros por el desagüe, quedan en el estanque 20 litros por cada minuto; luego, en 48 minutos, tiempo que tarda en llenarse el estanque, se han quedado 20 × 48 = 960 litros, y como éste tenía ya 500 litros, la capacidad del estanque es 500 + 960 = 1460 litros.

Comprobación

Se encontró una capacidad total de 1460 litros. Si quitamos los 500 litros que ya había en el estanque, quedan 1460 - 500 = 960 litros de capacidad. Estos 960 litros se llenan en 960 ÷ 20 = 48 minutos.

PROBLEMA 12

Si un comerciante compra 30 pantalones a 20 dólares cada uno y luego vende 20 pantalones a 18 dólares cada uno, ¿en cuánto tiene que vender los restantes para no perder?

Costo de los 30 pantalones a 20 dólares cada uno:

30 × 20 = 600 dólares

Si no quiere perder, es necesario que de la venta saque estos 600 dólares que gastó.

Al vender 20 pantalones a 18 dólares cada uno, sacó 20 × 18 = $360; luego, lo que debe obtener de los pantalones restantes para no perder son $600 - $360 = $240.

Como ya vendió 20 pantalones le quedan 30 - 20 = 10

Si de estos 10 tiene que sacar $240, tendrá que vender cada pantalón a $240 ÷ 10 = $24.

Comprobación

Vendiendo los 10 pantalones que le quedaban a $24 obtuvo 10 × $24 = $240, y de los 20 que ya había vendido antes a $18 obtuvo 20 × $18 = $360; así, en total obtuvo de las ventas $240 + $360 = $600, que es el total que invirtió, y de esta forma no perderá dinero.

EJERCICIOS

1. Un estanque cuya capacidad es de 300 litros está vacío y cerrado su desagüe. ¿En cuánto tiempo se llenará si abrimos al mismo tiempo tres llaves que vierten; la 1ª, 36 litros en 3 minutos; la 2ª, 48 litros en 6 minutos y la 3ª, 15 litros en 3 minutos? **R.** 12 minutos.

2. Un estanque tiene tres grifos que vierten: el 1°, 50 litros en 5 minutos; el 2°, 91 litros en 7 minutos y el 3°, 108 litros en 12 minutos, y dos desagües por los que salen 40 litros en 5 minutos y 60 litros en 6 minutos, respectivamente. Si estando vacío el estanque y abiertos los desagües, se abren las tres llaves al mismo tiempo y necesita 40 minutos para llenarse, ¿cuál es su capacidad? **R.** 560 litros.

3. Un estanque tiene agua hasta su tercera parte; si se abriera una llave que vierte 119 litros en 7 minutos y un desagüe por el que salen 280 litros en 8 minutos, el depósito se vaciaría en 53 minutos. ¿Cuál es la capacidad del estanque? **R.** 2,862 litros.

4. Si en un estanque vacío cuya capacidad es de 3600 litros se abrieran al mismo tiempo tres llaves y un desagüe, el estanque se llenaría en 15 minutos. Por el desagüe salen 240 litros en 4 minutos. Si el estanque tiene 600 litros de agua y el desagüe está cerrado, ¿en cuánto tiempo lo llenarán las tres llaves? **R.** 10 minutos.

5. Un estanque se puede llenar por dos llaves, una de las cuales vierte 200 litros en 5 minutos y la otra 150 litros en 6 minutos. El estanque tiene un desagüe por el que salen 8 litros en 4 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará el estanque, si estando vacío, se abren al mismo tiempo las dos llaves y el desagüe, sabiendo que su capacidad es de 441 litros? **R.** 7 minutos.

6. Un depósito tiene tres llaves que vierten: la primera, 68 litros en 4 minutos; la segunda, 108 litros en 6 minutos y la tercera, 248 litros en 8 minutos y un desagüe por el que salen 55 litros en 5 minutos. Si el desagüe está cerrado y se abren las tres llaves al mismo tiempo, el depósito se llena en 53 minutos. ¿En cuánto tiempo puede vaciar el desagüe estando lleno y cerradas las llaves?
R. 5 horas, 18 minutos.

7. Un lavabo tiene una llave que vierte 24 litros en 4 minutos y un desagüe por el que salen 32 litros en 16 minutos. Si estando vacío el lavabo y abierto el desagüe se abre la llave, ¿en cuánto tiempo se llenará el lavabo si su capacidad es de 84 litros?
R. 21 minutos.

PROBLEMA 13

Un ganadero compra cierto número de reses por 5,600 dólares. Vende 34 reses por $2,210, perdiendo $5 en cada una. ¿En cuánto tiene que vender el resto para que la ganancia total sea de 2,130 dólares?

Costo total de las reses: 5,600 dólares.

Para ganar $2,130 hay que sacar de la venta $5,600 + $2,130 = $7,730.

De la primera venta obtuvo $2,210; por tanto, de las reses que le quedan debe obtener $7,730 - $2,210 = $5,520.

Veamos cuántas reses quedaron.

Precio de venta de una res: $2,210 ÷ 34 = $65. Al vender cada res en $65, perdió $5 por cada una; luego, el precio de compra fue de $70 por cada una.

Si cada res le costó $70 y el importe total de la compra fue de $5,600, compró $5,600 ÷ $70 = 80 reses.

Como ya se vendieron 34, quedan 80 - 34 = 46 reses, de las cuales necesita obtener $5,520, por lo que hay que vender cada res en $5,520 ÷ 46 = $120.

Comprobación

Al vender las 46 reses que le quedaban a $120 cada una obtiene 46 × $120 = $5,520, y de la primera venta sacó $2,210, con lo que tiene en total $5,520 + $2,210 = $7,730. Como el costo inicial fue de $5,600, la ganancia es $7,730 - $5,600 = $2,130; por tanto, se cumplen las condiciones del problema.

PROBLEMA 14

Un capataz contrata a un obrero ofreciéndole 5 dólares por cada día que trabaje y 2 dólares por cada día que, a causa de la lluvia, no pueda trabajar. Al cabo de 23 días el obrero recibe 91 dólares. ¿Cuántos días trabajó y cuántos no?

Si el obrero hubiese trabajado los 23 días habría recibido 23 × $5 = $115, pero como sólo le pagaron 91 dólares, la diferencia $115 - $91 = $24 proviene de los días que no pudo trabajar.

Por cada día que no trabaja deja de recibir $5 - $2 = $3, por lo tanto no trabajó $24 ÷ $3 = 8 días, y trabajó 23 - 8 = 15 días.

Comprobación

En 15 días que trabajó recibió 15 × $5 = $75

En 8 días que no trabajó recibió 8 × $2 = $16

En total recibió $75 + $16 = $91



Figura 56

EJERCICIOS

1. Compré 500 sombreros a 6 dólares cada uno. Vendí cierto número en $500, a 5 dólares cada uno. ¿A cómo tengo que vender el resto para no perder? **R.** 6.25 dólares.

2. Compré 80 libros por 5,600 dólares. Vendí una parte en $5,400, a $90 cada uno. ¿Cuántos libros me quedan y cuánto gané en cada uno de los que vendí? **R.** Quedan 20 libros y la ganancia es de $20.

3. Un comerciante compró 20 trajes. Vendió 5 a 75 dólares, 6 a 60, 7 a 45 y el resto a 70, obteniendo así una utilidad de 390 dólares. ¿Cuál fue el costo de cada traje?
R. 40 dólares.

4. En un teatro las entradas para adulto costaban 9 dólares y para niños de $3. Concurrieron 752 espectadores y se recaudaron 5,472 dólares. ¿Cuántos espectadores eran adultos y cuántos niños?
R. 536 adultos y 216 niños.

5. Un comerciante pagó 45,900 dólares por 128 trajes de lana y de gabardina. Por cada traje de lana pagó $300 y por cada traje de gabardina $400. ¿Cuántos trajes de cada clase compró?
R. 53 de lana y 75 de gabardina.

6. Cada día que un alumno aprende sus lecciones, el profesor le da 5 vales, y cada día que no las sabe el alumno, tiene que darle al profesor 3 vales. Al cabo de 18 días el alumno ha recibido 34 vales. ¿Cuántos días supo sus lecciones el alumno y cuántos no las supo?
R. Las supo 11 días, no las supo 7 días.

7. Un capataz contrata a un obrero, ofreciéndole $12 por cada día que trabaje pero con la condición de que, por cada día que el obrero, por su voluntad, deje de ir al trabajo, tendrá que pagarle al capataz $4. Al cabo de 18 días el obrero le debe al capataz $24. ¿Cuántos días ha trabajado y cuántos días ha dejado el obrero de ir al trabajo?
R. Trabajó 3 días, dejó de ir 15 días.

8. Para tener $12.30 en 150 monedas que son de a cinco y diez centavos, ¿cuántas deben ser de a cinco y cuántas de a diez?
R. 54 de a cinco, 98 de a diez.

9. ¿Por qué número se multiplica 815 cuando se convierte en 61,125? **R.** Por 72.



Se cree que los sacerdotes mesopotámicos fueron los primeros en elevar un número a una potencia. Esto lo hacían empleando la tabla de cuadrados y el principio que dice: "el producto de dos números es siempre igual al cuadrado de su promedio menos el cuadrado de su semidiferencia".

CAPÍTULO XVI

ELEVACIÓN A POTENCIAS Y SUS OPERACIONES INVERSAS

El **objeto de la potenciación o elevación a potencias** es hallar las potencias de un número, y constituye una operación de composición.

La **potencia** de un número es el resultado de tomarlo como factor dos o más veces. Por ejemplo, 9 es una potencia de 3 porque 3 × 3 = 9; 64 es una potencia de 4 porque

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

NOTACIÓN Y NOMENCLATURA

Al número que se multiplica por sí mismo se le llama **base de la potencia** y a la derecha y arriba de la base se escribe un número pequeño llamado **exponente**, que indica las veces que la base se repite como factor.

La segunda potencia o **cuadrado** de un número es el resultado de tomarlo como factor dos veces. Así: $5^2 = 5 \times 5 = 25$

En la tercera potencia o **cubo** se toma como factor tres veces. Así $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

En la cuarta potencia se toma como factor cuatro veces. Así: $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

La quinta, sexta, séptima, etc., potencias de un número resultan de tomarlo como factor cinco, seis, siete, etc., veces. Así:

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$
$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$

Y en general, la enésima potencia de un número es el resultado de tomarlo como factor *n* veces.

$$A^n = A \times A \times A \times A \ldots\ldots n \text{ veces}$$

POTENCIAS SUCESIVAS

Toda cantidad elevada a cero equivale a 1. Así: $2^0 = 1$, $5^0 = 1$

Se ha convenido en llamar primera potencia de un número al mismo número. Así:

$$3^1 = 3,\ 5^1 = 5$$

Por tanto, las potencias sucesivas de 2 serán:

$$2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32, \text{ etc.,}$$

las potencias sucesivas de 3 serán:

$$3^0 = 1,\ 3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27,\ 3^4 = 81,\ 3^5 = 243, \text{ etc.,}$$

y las potencias sucesivas de 3 serán:

$10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, $10^5 = 100000$, etc.

EJERCICIOS

Desarrolla las potencias siguientes:

1. 31^2	**R.** 961	**13.** 67^3	**R.** 300763
2. 44^4	**R.** 3748096	**14.** 15^2	**R.** 225
3. 16^5	**R.** 1048576	**15.** 11^5	**R.** 161051
4. $2^0 \times 2$	**R.** 2	**16.** $21^0 \times 10^2 \times 8^0$	**R.** 102400
5. $3^0 \times 54$	**R.** 54	**17.** $6^2 \times 9^0 \times 2^{10}$	**R.** 36864
6. $4^2 \times 3^2$	**R.** 144	**18.** $\frac{3^0}{2^2 \times 3^2}$	**R.** $\frac{1}{36}$
7. $5^0 \times 3^7 \times 6^0$	**R.** 2187	**19.** $\frac{5^3}{3^0}$	**R.** 125
8. $2^0 \times 3^0 \times 4^0 \times 5^0$	**R.** 1	**20.** $\frac{3^2 \times 3^0}{9}$	**R.** 1
9. $3^3 \times 4^2 \times 5^4$	**R.** 270000	**21.** $\frac{2^4 \times 5^2}{5^0 \times 4^2}$	**R.** 25
10. $\frac{3^4 \times a^0}{9^2\ b^0}$	**R.** 1	**22.** $3^3 \times 2^2$	**R.** 108
11. $\frac{5^5 \times 2^3}{10^2 \times 5^0}$	**R.** 250	**23.** $8 \times 50 - 50$	**R.** 7
12. $3^0 \times \frac{5^2}{4^0}$	**R.** 25	**24.** a 0b 0 + c 0 + 4d 0	**R.** 6

CUADRADO

A la segunda potencia de un número se le llama cuadrado, porque representa siempre (en unidades de área) el área de un cuadrado cuyo lado sea dicho número (en unidades de longitud).

Si un cuadrado (figura 57) tiene de lado 2 cm, el área de dicho cuadrado es: $2 \times 2 = 4$ cm^2; si el lado es 3 cm el área del cuadrado es: $3 \times 3 = 9$ cm^2; si el lado es 4 metros, el área del cuadrado es: $4 \times 4 = 16$ metros^2, etc. En general, n^2 representa el área de un cuadrado cuyo lado sea n.

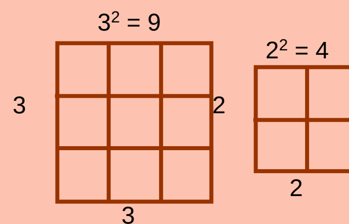


Figura 57

Debido a su utilidad, es necesario conocer los cuadrados de los 20 primeros números:

Número	Cuadrado
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400

CUBO

A la tercera potencia de un número se le llama cubo, porque representa (en unidades de volumen) el volumen de un cubo cuya arista sea dicho número (en unidades de longitud).

Si la arista de un cubo (figura 58) es 2 cm, el volumen de dicho cubo será: 2 × 2 × 2 = 8 cm^3; si la arista es 3 cm, el volumen del cubo será: 3 × 3 × 3 = 27 cm^3.

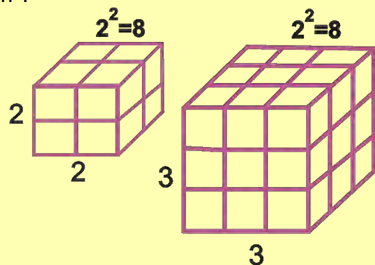


Figura 58

En general, n^3 representa el volumen de un cubo cuya arista es *n*.

Debido a su utilidad, es necesario conocer de memoria los cubos de los 20 primeros números.

Número	Cubo
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

COMPARACIÓN DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

1) Si la base es > 1, cuanto mayor es el exponente, mayor es la potencia.

Así, como 2 > 1, tenemos: $2^0 < 2^1 < 2^2 < 2^3 \ldots\ldots < ^n$

2) Si la base es 1, todas las potencias son iguales.

Así, $1^0 = 1^1 = 1^2 = 1^3 \ldots\ldots = 1^n$

3) Si la base es < 1, cuanto mayor es el exponente, menor es la potencia.

Así, como 0.5 < 1, tendremos: $0.5^0 > 0.5^1 > 0.5^2 > 0.5^3 \ldots . > 0.5^n$

EJERCICIOS

Aplica las reglas anteriores y realiza las potencias siguientes:

1. $3^5 \div 3^5$	**R.** 1
2. $5 \cdot 5^2 \cdot 5^m$	**R.** 5^{3+m}
3. $a^2 \cdot a^3 \cdot a^5$	**R.** a^{10}
4. $(a^6 \cdot a^5) \div (a^3 \cdot a)$	**R.** a^7
5. $2m \cdot 3m \cdot m^6$	**R.** $6m^8$
6. $3^2 \cdot 3$	**R.** 27
7. $4a \cdot a^x \cdot 5a^2$	**R.** $20a^{3+x}$
8. $(x \cdot x^6) \div (x^5 \cdot x^2)$	**R.** 1
9. $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$	**R.** 59,049
10. $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$	**R.** 512
11. $a^3 \div a$	**R.** a^2
12. $a^{12} \div (a^3 \cdot a \cdot a^2)$	**R.** a^6
13. $a^6 \div a^4$	**R.** a^2
14. $2^8 \div 2^3$	**R.** 32
15. $6^x \div 6$	**R.** 6^{x-1}
16. $x^{10} \div (x \cdot x^2)$	**R.** x^7
17. $a^x \div a^x$	**R.** 1
18. $(2^4 \cdot 2) \div 2^2$	**R.** 8
19. $(2^8 \cdot 2^3) \div (2^{10} \cdot 2^3)$	**R.** 2^2
20. $5^m \div 5^n$	**R.** 5^{m-n}
21. $x^{20} \div (x^6 \cdot x^8 \cdot x)$	**R.** x^5
22. $(5^5 \cdot 5^3 \cdot 5^6) \div 5^{14}$	**R.** 1

PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

Para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes.

Siendo el producto $a^2 \cdot a^3$, decimos que $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$

y en efecto: $a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$

Ejemplos

1) $2^2 \cdot 2^4 = 2^{2+4} = 2^6 = 64$

2) $3^3 \cdot 3 \cdot 3^4 = 3^{3+1+4} = 3^8 = 6561$

3) $5^m \cdot 5^n = 5^{m+n}$

4) $a \,.\, a^x \cdot a^2 = a^{1+x+2} = a^{x+3}$

COCIENTE DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

Para dividir potencias de la misma base se restan los exponentes.

Siendo el cociente

$$a^7 \div a^3$$

decimos que $a^7 \div a^3 = a^{7-3} = a^4$

Así, a^4 será el cociente de esta división si multiplicado por el divisor a^3 reproduce el dividendo a^7

Y en efecto:

$$a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = a^7$$

Ejemplos

1) $3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3 = 27$

2) $5^7 \div 5^4 = 5^{7-4} = 5^3$

3) $a^4 \div a = a^{4-1} = a^3$

4) $2^m \div 2^n = 2^{m-n}$

5) $a \div a^m = a^{1-m}$

EJERCICIOS

Encuentra los resultados:

1. $\sqrt{81}$	**R.** 9	**4.** $\sqrt[3]{216}$	**R.** 6	**7.** $\sqrt[6]{64}$	**R.** 2
2. $\sqrt[3]{27}$	**R.** 3	**5.** $\sqrt[5]{32}$	**R.** 2	**8.** $\sqrt[7]{128}$	**R.** 2
3. $\sqrt{100}$	**R.** 10	**6.** $\sqrt[4]{81}$	**R.** 3	**9.** $\sqrt[5]{243}$	**R.** 3

10. Si 8 es la raíz cúbica de un número, ¿cuál es este número? **R.** 512

11. Si 31 es la raíz cuadrada de un número, cuál es este número? **R.** 961

12. ¿Cuál es el número cuya raíz cuarta es 4? **R.** 256

13. ¿Cuál es el número cuya raíz sexta es 2? **R.** 64

14. $\sqrt{a} = 7$	**R.** 49	**17.** $\sqrt[4]{a} = 5$	**R.** 625
15. $\sqrt{b} = 11$	**R.** 121	**18.** $\sqrt[5]{a} = 7$	**R.** 16,807
16. $\sqrt[3]{a} = 7$	**R.** 343	**19.** $\sqrt[6]{m} = 2$	**R.** 64

20. Siendo $a^3 = b$ se verifica que $\sqrt[3]{b} = ...$ **R.** a

21. Siendo $5^4 = 625$ se verifica que $\sqrt[4]{625} = ...$ **R.** 5

OPERACIONES INVERSAS DE LA POTENCIACIÓN

Una vez conocidos la base y el exponente de la potenciación podremos hallar la potencia. Ahora bien, dado que la potenciación no es conmutativa, pues no se puede permutar la base por el exponente, resulta que las operaciones inversas de la potenciación son dos:

I. La radicación, que consiste en hallar la base conociendo la potencia y el exponente.

II. La logaritmación, que consiste en hallar el exponente conociendo la potencia y la base.

SUPRESIÓN DE ÍNDICE Y EXPONENTE

Cuando la cantidad subradical está elevada a un exponente igual que el índice, ambos pueden suprimirse.

Así: $\sqrt[3]{5^3}$ porque 3 elevado al cuadrado da 3^2

$\sqrt[3]{5^3}$=5 porque 5 elevado al cubo da 5^3

$\sqrt[n]{a^n}$ porque a elevado a n da a ^{n}

RAÍZ EXACTA Y RAÍZ ENTERA

Se sabe que una raíz es **exacta** cuando, elevada a la potencia que indica el índice, reproduce la cantidad subradical. Por ejemplo, 3 es la raíz cuadrada exacta de 9 porque $3^2 = 9$ y 9 es la raíz cúbica exacta de 729 porque $9^3 = 729$.

Cuando no existe ningún número entero que elevado a la potencia que indica el índice reproduzca la cantidad subradical, entonces la raíz es **inexacta o entera**.

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 38 es entera o inexacta, porque no existe ningún número entero que elevado al cuadrado dé 38.
A las raíces inexactas o enteras también se les llama **radicales**.

RADICACIÓN

Como $5^2 = 25$, el número 5 que elevado al cuadrado da 25 es la **raíz cuadrada** de 25, lo que se expresa con la notación:

$$\sqrt[2]{25} = 5$$

El signo √ se llama **signo radical, 25 es la cantidad subradical**, 5 es la raíz cuadrada y el número 2 que va en el signo radical es el índice o grado de la raíz, el cual indica que 5 elevado al cuadrado da 25.

En la práctica se omite el índice 2.

Así: $\sqrt[2]{9}$ se escribe $\sqrt{9}$

Como $4^3 = 64$, el número 4 que elevado al cubo da 64 es la raíz cúbica de 64, lo que se expresa con la notación:

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

Aquí la cantidad subradical es 64 y el índice o grado es 3, el cual indica que 4 elevado al cubo da 64.

Del mismo modo:

$\sqrt[4]{16}$ significa que $2^4 = 16$

$\sqrt[5]{243}$ =3 significa que 3^5= 243

Y en general:

$\sqrt[n]{a} = b$ significa que $b^n = a$

En conclusión podemos decir que la **raíz de un número es el número que elevado a la potencia que indica** el índice reproduce la cantidad subradical.

RADICACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES

Para que sea posible la radicación exacta de los números naturales es necesario que el número natural al cual se le extrae la raíz sea una potencia perfecta, de igual grado que el índice de la raíz, de otro número natural.

Los únicos números naturales con raíz cuadrada exacta son los **cuadrados perfectos**, es decir, los números naturales que sean el cuadrado de otro número natural:

1 que es el cuadrado de 1

4 que es el cuadrado de 2

9 que es el cuadrado de 3

16 que es el cuadrado de 4

Los únicos números naturales con raíz cúbica exacta son los **cubos perfectos**, es decir, los números naturales que son el cubo de otro número natural:

8 que es el cubo de 2

27 que es el cubo de 3

64 que es el cubo de 4

125 que es el cubo de 5

Los únicos números naturales con raíz cuarta exacta son los que resultan de elevar a la cuarta potencia otro número natural:

16 que es la cuarta potencia de 2

81 que es la cuarta potencia de 3

256 que es la cuarta potencia de 4

25 que es la cuarta potencia de 5

En general, para que un **número natural tenga raíz exacta** de grado *n* es necesario que dicho número sea **la enésima potencia** de otro número natural.

LOGARITMACIÓN

Como $3^2 = 9$, el número 2, que es el exponente al que hay que elevar la base 3 para que dé 9, es el logaritmo de 9 de base 3, lo que se expresa con la notación:

$$\log_3 9 = 2$$

El subíndice siempre representa la base del sistema.

Como $5^3 = 125$, el número 3, que es el exponente a la que hay que elevar la base 5 para que dé 125, es el logaritmo de 125 de base 5, lo que se expresa con la notación:

$$\log_3 125 = 3$$

Del mismo modo:

Como $7^2 = 49$, resulta que $\log_7 49 = 2$
Como $3^5 = 243$, resulta que $\log_3 243 = 5$
Como $2^8 = 256$, resulta que $\log_2 256 = 8$,

y en general, si $a^x = b$, resulta que $\log_a b = x$

En conclusión, podemos decir que el logaritmo de un número con relación a otro llamado base es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número.

Los logaritmos vulgares son los más usados y tienen la base 10. En éstos el subíndice 10 se omite, de modo que cuando no hay subíndice se sobreentiende que la base es 10. Así:

$10^0 = 1 \therefore \log 1 = 0$,
$10^1 = 10 \therefore \log 10 = 1$,
$10^2 = 100 \therefore \log 100 = 2$,
$10^3 = 1000 \therefore \log 1000 = 3$, etc.

LOGARITMACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Para que el logaritmo de un número natural con respecto a una base dada sea otro número natural, es necesario que el número sea una potencia perfecta de la base:

$$\log_2 8 = 3 \text{ porque } 2^3 = 8$$

Pero $\log_3 8$ no es un número natural, porque 8 no es una potencia perfecta de 3; igualmente $\log 100 = 2$ porque $10^2 = 100$, pero log 105 no es un número natural porque 105 no es una potencia perfecta de 10.

EJERCICIOS

En cada uno de estos casos escribe el log de la potencia:

1. $\log_3 9 = \ldots$ **R.** 2
2. $5^{a+1} = x$ **R.** $\log_5 x = a + 1$
3. $7^4 = 2401$ **R.** $\log_7 2401 = 4$
4. $5^4 = 625$ **R.** $\log_5 625 = 4$
5. $2^2 = 4$ **R.** $\log_2 4 = 2$
6. $3^3 = 27$ **R.** $\log_3 27 = 3$
7. $\log_4 16 = \ldots$ **R.** 2
8. $3^5 = 243$ **R.** $\log_3 243 = 5$
9. $a^n = 8x$ **R.** $\log_a 8x = n$
10. $6^2 = 36$ **R.** $\log_6 36 = 2$
11. $2^8 = 256$ **R.** $\log_2 256 = 8$
12. $5^0 = 1$ **R.** $\log_5 1 = 0$
13. $2^{10} = 1024$ **R.** $\log_2 1024 = 10$
14. $2^4 = 16$ **R.** $\log_2 16 = 4$
15. $\log_3 729 =$ **R.** 6
16. $a^m = c$ **R.** $\log_a c = m$
17. $x^6 = m$ **R.** $\log_x m = 6$
18. $\log 10{,}000 =$ **R.** 4
19. $a^{3x} = b$ **R.** $\log_a b = 3x$
20. $x^{2a} = a + b$ **R.** $\log_x (a + b) = 2a$
21. $\log_6 1 =$ **R.** 0
22. $5^2 = 25$ **R.** $\log_5 25 = 2$
23. $\log_8 512 =$ **R.** 3
24. $4^3 = 64$ **R.** $\log_4 64 = 3$
25. $\log_2 64 =$ **R.** 6
26. $a^3 = b$ **R.** $\log_a b = 3$
27. $\log_9 729 =$ **R.** 3

Encuentra el número:

28. Cuyo $\log_3$ es 4 **R.** 81
29. Cuyo $\log_2$ es 6 **R.** 64
30. Cuyo $\log_5$ es 4 **R.** 625
31. Cuyo $\log_2$ es 9 **R.** 512

¿Puedes encontrar?

33. $\log_2 21$? **R.** No
34. $\log_5 36$? **R.** No
35. Siendo $\log_3 x = a$, ¿qué puede escribir? **R.** $3^a = x$
36. Siendo $\log_a 8 = 3$, ¿qué puede escribir? **R.** $a^3 = 8$
37. Siendo $\log_x 81 = 4$, ¿qué número es *x* ? **R.** 3
38. Siendo $\log_x 512 = a + 1$, ¿qué número es *a* ? **R.** 2
39. Siendo $\log_3 243 = x - 1$, ¿qué número es *x* ? **R.** 6

CAPÍTULO XVII

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS, MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Se dice que dos números son primos entre sí cuando su único divisor común es la unidad. Para que dos números sean primos entre sí no es imprescindible que sean primos. Si dos números son primos también son primos entre sí.

Un número m es múltiplo de un número n cuando al efectuar la división $m \div n$ el resto es cero. En este supuesto diremos que m es divisible por n o bien que n es un divisor de m.

Cuando un número es divisible por otros números además de la unidad y de sí mismo se dice que es un número compuesto.



Alrededor del siglo III a. C. los griegos comenzaron a desarrollar de manera más profunda la Aritmética. Uno de sus grandes representantes fue Eratóstenes, quien desarrolló un método para determinar la serie de los números primos.

DEFINICIONES

Un **número primo absoluto o simple** sólo es divisible por sí mismo y por la unidad.

Ejemplo

5, 7, 11, 29, 37, 97

Un **número compuesto o no primo,** además de ser divisible por sí mismo y por la unidad, lo es por otro factor.

Ejemplo

El número 14 es compuesto porque, además de ser divisible por 14 y por 1, es divisible por 2 y por 7; el 21 es compuesto porque, además de ser divisible por sí mismo y por la unidad, es divisible por 3 y por 7.

Un **múltiplo** de un número es el que lo contiene un número exacto de veces. Por ejemplo, 14 es múltiplo de 2 porque 14 contiene a 2 siete veces; 20 es múltiplo de 5 porque contiene a 5 cuatro veces.

Los múltiplos de un número se **forman multiplicando** este número por la serie infinita de los números naturales 0, 1, 2, 3 . . . . . . ; luego, todo número tiene **infinitos múltiplos**.

La serie infinita de los múltiplos de 5 es:

$0 \times 5 = 0$
$1 \times 5 = 5$
$2 \times 5 = 10$
$3 \times 5 = 15$
$4 \times 5 = 20$
$5 \times 5 = 25$, etc.

En este caso el número 5 es el módulo de esta serie infinita.

En general, la serie infinita de los múltiplos de n es:

$0\times n,\ 1\times n,\ 2\times n,\ 3\times n,\ 4\times n,\ 5\times n$

Para indicar que 10 es múltiplo de 5 se escribe:

10 = m. de 5

o también escribiendo un punto encima del módulo:

$10 = \dot{5}$

Para expresar que 28 es múltiplo de 7:

28 = m. de 7 ó $28 = \dot{7}$

En general, para indicar que a es múltiplo de b se escribe:

a = m. de b ó $a = \dot{b}$

SUBMÚLTIPLOS

Un submúltiplo, factor o divisor de un número es el que está contenido en el primero un número exacto de veces.

Ejemplos

El número 4 es submúltiplo de 24 porque está contenido en 24 seis veces; el 8 es factor o divisor de 64 porque está contenido en 64 ocho veces.

Los divisores de un número se llaman *partes alícuotas* (partes iguales) de ese número. Así, 5 es divisor de 20 y es una parte alícuota porque 20 puede dividirse en 4 partes iguales de 5 cada una; 4 también es una parte alícuota de 20 porque puede dividirse en 5 partes iguales de 4 cada una.

Por lo tanto, la parte alícuota de un número es cada una de las partes iguales en que se puede dividir dicho número.

Un número par es todo número múltiplo de 2 y cuya fórmula general es $2n$, siendo n un número entero cualquiera, ya sea par o impar, pues si es par, multiplicado por 2 dará otro número par, y si es impar, multiplicado por 2 también dará un número par. Todos los números pares, excepto el 2, son compuestos.

Por otra parte, el número impar no es múltiplo de 2 y su fórmula general es $2n \pm 1$, siendo n un número entero cualquiera, pues $2n$ representa un número par, que aumentado o disminuido en una unidad dará un número impar.

Los equimúltiplos son dos o más números que contienen a otros un mismo número de veces.

Ejemplos

14, 24 y 32 son equimúltiplos de 7, 12 y 16, porque el 14 contiene al 7 dos veces, el 24 contiene al 12 dos veces y el 32 contiene al 16 dos veces.

Para *hallar dos o más equimúltiplos de varios números dados* se multiplican éstos por un mismo factor. Los *productos* serán los equimúltiplos de los números dados.

Para hallar tres números que sean equimúltiplos de 5, 6 y 7, se procede de la manera siguiente:

$$5 \times 4 = 20,\ 6 \times 4 = 24,\ 7 \times 4 = 28$$

Aquí vemos que 20, 24 y 28 son equimúltiplos de 5, 6 y 7.

Finalmente, dos o más números son equidivisores de otros cuando están contenidos en éstos el mismo número de veces.

Ejemplos

5, 6 y 7 son equidivisores de 20, 24 y 28, porque el 5 está contenido en el 20 cuatro veces, el 6 en el 24 cuatro veces y el 7 en el 28 cuatro veces.

Para hallar dos o más equidivisores de otros números dados basta dividirlos por un mismo número, y los *cocientes* serán los equidivisores.

Para hallar tres equidivisores de los números 50, 80 y 90, se procede de la manera siguiente:

$$50 \div 10 = 5,\ 80 \div 10 = 8,\ 90 \div 10 = 9$$

Aquí vemos que 5, 8 y 9 son equidivisores de 50, 80 y 90.

EJERCICIOS

1. Encuentra los múltiplos menores que 400 de estos números: 45, 56, 72 y 87.

2. ¿Cuáles son los tres números menores que se deben restar de un número par para hacerlo impar?

3. ¿Cuántos divisores tiene un número primo?

4. Encuentra cinco equidivisores de 120, 240, 560, 780 y 555.

5. ¿Son compuestos todos los números pares? ¿Son pares todos los números compuestos?

6. ¿Cuál es el residuo de dividir un número entre uno de sus divisores?

7. De los números siguientes, ¿cuáles son primos y cuáles son compuestos?: 12, 57, 43, 87, 97, 124, 131, 191.

8. Forma cuatro múltiplos de cada uno de estos números: 5, 6, 12 y 13.

9. ¿Son primos todos los números impares? ¿Son impares todos los números primos?

10. ¿Cuántos múltiplos tiene un número?

11. Menciona cuáles son los tres números menores que se pueden añadir a un número par para hacerlo impar.

12. Encuentra todos los múltiplos menores que 100 de estos números: 14 y 23.

13. Si un número es múltiplo de otro, ¿qué es éste del primero?

14. ¿Cuál es el mayor divisor de 784? ¿Y el menor?

15. ¿Cuál es el múltiplo menor de un número?

16. Responde si los número siguientes son o no primos y señala por qué: 13, 17, 19, 24, 31, 37, 38, 45, 68, 79, 111, 324.

17. Encuentra ocho equimúltiplos de 7, 8, 9, 10, 11, 13, 24 y 56.



El francés Blas Pascal fue quien desarrolló las reglas para determinar la divisibilidad de un número cualquiera.

CAPÍTULO XVIII

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA DIVISIBILIDAD

La divisibilidad es la cantidad que dividida por otra, da como resultado un cociente exacto, sin residuo.

Los criterios de divisibilidad son unas señales características de los números que permiten conocer cuáles son sus divisores.

Los teoremas que presentamos a continuación van acompañados de una demostración con números, posteriormente hay una demostración general con letras.

TEOREMA I

Todo número que no divide a otros dos, divide a su diferencia si los residuos por defecto que resultan de dividir estos dos números entre el número **que no los divide son iguales**.

Siendo el número 5, que no divide a 28 ni a 13, pero el residuo por defecto de dividir 28 entre 5 es 3 y el residuo de dividir 13 entre 5 también es 3 (hipótesis), probaremos que 5 divide a la diferencia 28 - 13 = 15 (tesis).

En efecto: 28 = 5 × 5 + 3

13 = 5 × 2 + 3

Restando miembro por miembro estas igualdades, tenemos:

28 - 13 = 5 × 5 - 5 × 2 + 3 - 3

Sacando 5 factor común en el segundo miembro:

28 - 13 = 5 (5 - 2) + (3 - 3)

y como 3 - 3 = 0, nos queda:

28 - 13 = 5 (5 - 2)

o sea **28 - 13 = 5 × 3**

lo que nos dice que la diferencia 28 - 13, o sea 15, contiene a 5 tres veces; luego, 5 divide a la diferencia 28 - 13, que es lo que queríamos demostrar.

Demostración General

Siendo el número n que no divide a a ni a b; r el residuo de dividir a entre n y b entre n (hipótesis). Vamos a probar que n divide a la diferencia $a - b$.

En efecto: Siendo q el cociente de dividir a entre n y q' el cociente de dividir b entre n, como r es el residuo en ambos casos, tenemos:

$$a = nq + r$$

$$b = nq' + r$$

Restando estas igualdades:

$$a - b = nq - nq' + r - r$$

y como $r - r = 0$, nos queda:

$$a - b = nq - nq'$$

Sacando n factor común:

$$\boxed{a - b = n(q - q')}$$

lo que nos dice que la diferencia $a - b$ contiene a n un número exacto de veces $(q - q')$, o sea que n divide a la diferencia $a - b$, que es lo que queríamos de-mostrar.

TEOREMA II

Todo número que divide a otro divide a sus **múltiplos**.

Siendo el número 5, que divide a 10 (hipótesis) probaremos que 5 divide a cualquier múltiplo de 10; por ejemplo, a 10 × 4 = 40 (tesis).

En efecto: $10 \times 4 = 10 + 10 + 10 + 10$

Ahora bien, 5 divide a todos los sumandos 10 del segundo miembro por hipótesis; luego, dividirá a su suma que es 10 × 4, o sea 40, porque hay un teorema que dice que todo número que divide a varios sumandos divide a su suma; por tanto, 5 divide a 40, que es lo que queríamos demostrar.

Demostración General

Siendo el número *n* que divide al número *a* (hipótesis). Vamos a probar que *n* divide a cualquier múltiplo de *a*, por ejemplo a *ab* (tesis).

En efecto: $ab = a + a + a + a \ldots\ldots\ b$ veces

Ahora bien: *n* divide a todos los sumandos *a* del segundo miembro por hipótesis; luego, dividirá a su suma, que es *ab,* porque hay un teorema que dice que todo número que divide a varios sumandos divide a su suma; luego, *n* divide a *ab*, que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA IV

Todo número que divide **a uno de dos sumandos** y no divide al otro, no divide a la suma.

Siendo la suma 10 + 13 = 23. El número 5 divide a 10 y no divide a 13 (hipótesis), probaremos que 5 no divide a 23 (tesis).

En efecto: 23 - 10 = 13. Si 5 dividiera a 23, como 5 divide a 10 (por hipótesis), tendría que dividir a la diferencia entre 23 y 10, que es 13, porque todo número que divide a otros dos divide a su diferencia, pero es imposible que 5 divida a 13, porque va contra lo que hemos supuesto; luego, 5 no divide a 23.[4]

Demostración General

Siendo la suma $a + b = s$. El número *n* divide a *a* y no divide a *b* (hipótesis). Vamos a probar que *n* no divide a *s* (tesis).

En efecto: $s - a = b$. Si *n* dividiera a *s*, como *n* divide a *a* por hipótesis, tendría que dividir a la diferencia entre *s* y *a* que es *b*, porque todo número que divide a otros dos divide a su diferencia, pero es imposible que *n* divida a *b*, porque va contra lo que hemos supuesto, luego *n* no divide a *s*, que es lo que queríamos demostrar.

[4] A este método de demostración se le llama "reducción al absurdo".

TEOREMA III

Todo número que divide a otros varios, **divide a su suma**.

Siendo el número 5, que divide a 10, 15 y 20 (hipótesis) probaremos que 5 divide a 10 + 15 + 20 = 45, o sea que 10 + 15 + 20 es *m.* de 5.

En efecto: 10 = 5 × 2; 15 = 5 × 3; 20 = 5 × 4

Sumando miembro por miembro estas igualdades, según la ley de uniformidad de la suma, tenemos:
10 + 15 + 20 = 5 × 2 + 5 × 3 + 5 × 4

Sacando el factor común 5 en el segundo miembro de esta última igualdad, tenemos:

$$10 + 15 + 20 = 5\ (2 + 3 + 4)$$

o sea $10 + 15 + 20 = 5 \times 9$

lo que nos dice que la suma 10 + 15 + 20, o sea 45, contiene a 5 nueve veces; luego, 5 divide a la suma 10 + 15 + 20, que es lo que queríamos demostrar.

Demostración General

Siendo el número *n* que divide a los números *a, b* y *c* (hipótesis). Vamos a probar que *n* divide a la suma $a + b + c$.

En efecto: siendo *q* el cociente de dividir *a* entre *n, q'* el cociente de dividir *b* entre *n* y *q''* el cociente de dividir *c* entre *n.* Como el dividendo es el producto del divisor por el cociente, tendremos:

$$a = nq$$
$$b = nq'$$
$$c = nq''$$

Sumando miembro por miembro estas igualdades, tenemos:

$$a + b + c = nq + nq' + nq''$$

Sacando *n* factor común:

$$a + b + c = n\ (q + q' + q'')$$

lo que nos dice que $a + b + c$ contiene a *n* un número exacto de veces, $q + q' + q''$ veces, o sea que *n* divide a la suma $a + b + c$, que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA V

Todo número que **no divide** a otros varios **divide a su suma**, si la suma de los residuos que resultan de dividir éstos entre el número que no los divide, es divisible por este número.

Siendo el número 7, que no divide a 15, ni a 37, ni a 46, pero el residuo de dividir 15 entre 7 es 1, el de dividir 37 entre 7 es 2 y el de dividir 46 entre 7 es 4, y la suma de estos residuos, 1 + 2 + 4 = 7, es divisible por 7 (hipótesis).

Probaremos que 7 divide a 15 + 37 + 46 = 98 (tesis).

En efecto:
$$15 = 7 \times 2 + 1$$
$$37 = 7 \times 5 + 2$$
$$46 = 7 \times 6 + 4$$

Sumando estas igualdades:

$$15 + 37 + 46 = 7 \times 2 + 7 \times 5 + 7 \times 6 + 1 + 2 + 4$$

Sacando factor común 7:

$$15 + 37 + 46 = 7\ (2 + 5 + 6) + (1 + 2 + 4)$$

o sea $\boxed{15 + 37 + 46 = 7 \times 13 + 7}$

Ahora bien, en el segundo miembro, 7 divide a 7 × 13 porque es un múltiplo de 7, y divide a 7 porque todo número es divisible por sí mismo; luego, 7 divide a su suma 15 + 37 + 46 o sea 98, porque según el teorema anterior todo número que divide a otros divide a su suma, que es lo que queríamos demostrar.

Demostración General

Siendo el número n que no divide a los números a, b ni c.

Siendo r el residuo de dividir a entre n; r' el residuo de dividir b entre n; r'' el residuo de dividir c entre n y la suma $r + r' + r''$ divisible por n (hipótesis).

Vamos a probar que n divide a $a + b + c$ (tesis)

En efecto: Siendo q el cociente de dividir a entre n, q' el de dividir b entre n y q'' el de dividir c entre n, tendremos:

$$a = nq + r \quad b = nq' + r' \quad c = nq'' + r''$$

porque en toda división inexacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo.

Sumando miembro por miembro estas igualdades, tenemos:

$$a + b + c = nq + nq' + nq'' + r + r' + r''$$

Sacando n factor común:

$$\boxed{a + b + c = n\ (q + q' + q'') + (r + r' + r'')}$$

Ahora bien: n divide al sumando $n\ (q + q' + q'')$ porque este número es múltiplo de n, y divide al sumando $(r + r' + r'')$ porque en la hipótesis hemos supuesto que la suma de los residuos era divisible por n ; luego, si n divide a estos dos sumandos, tiene que dividir a su suma, que es $a + b + c$, porque según el teorema anterior, todo número que divide a varios sumandos divide a su suma. Luego, n divide a $a + b + c$, que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA VI

Todo número que **divide** a otros dos, divide a su **diferencia**.

Siendo el número 3, que divide a 18 y a 12 (hipótesis), probaremos que 3 divide a la diferencia 18 - 12 = 6 (tesis).

En efecto:
$$18 = 3 \times 6$$
$$12 = 3 \times 4$$

Restando miembro por miembro estas igualdades, tenemos:

$$18 - 12 = 3 \times 6 - 3 \times 4$$

Sacando 3 factor común en el segundo miembro:

$$18 - 12 = 3\ (6 - 4)$$

o sea $\boxed{18 - 12 = 3 \times 2}$

lo que nos dice que la diferencia 18 - 12 = 6 contiene a 3 dos veces, o sea que 3 divide a 18 - 12, que es lo que queríamos demostrar.

Demostración General

Siendo el número n que divide a a y a b siendo $a > b$ (hipótesis). Vamos a probar que n divide a $a - b$ (tesis).

En efecto: Siendo q el cociente de dividir a entre n y q' el cociente de dividir b entre n. Como en toda división exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, tenemos:

$$a = nq$$
$$b = nq'$$

Restando miembro por miembro estas igualdades, según la ley de uniformidad de la resta, tenemos:

$$a - b = nq - nq'$$

Sacando n factor común en el segundo miembro:

$$\boxed{a - b = n\ (q - q')}$$

lo que nos dice que la diferencia $a - b$ contiene a n un número exacto de veces $q - q'$ veces; luego, n divide a la diferencia $a - b$, que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA VII

Todo número que **divide al divisor** y al resto de una división inexacta, **divide al dividendo**.

Siendo la división 28 | 8, 4 3. El número 2 divide al divisor 8 y al residuo por defecto 4 (hipótesis). Probaremos que 2 divide al dividendo 28 (tesis).

En efecto, en toda división inexacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo; por tanto:

$$28 = 8 \times 3 + 4$$

Cierto, 2 divide a 8 y a 4 por hipótesis. Si 2 divide a 8, tiene que dividir a 8 × 3, que es un múltiplo de 8, porque todo número que divide a otro divide a sus múltiplos, y si 2 divide a 8 × 3 y a 4, tiene que dividir a su suma porque hay un teorema que dice que todo número que divide a otros varios divide a su suma; luego, 2 divide a 28, que es lo que queríamos demostrar.

Demostración General

Siendo la división D | d, R c. Siendo el número *n* que divide a *d* y a *R* (hipótesis). Vamos a probar que *n* divide a *D* (tesis).

En efecto: $D = dc + R$

Ahora bien, *n* divide a *d* y a *R* por hipótesis. Si *n* divide a *d,* tiene que dividir a *dc* porque hay un teorema que dice que todo número que divide a otro divide a sus múltiplos, y si *n* divide a *dc* y a *R,* tiene que dividir a su suma, que es *D,* porque todo número que divide a otros dos divide a su suma; por tanto, *n* divide a *D*, que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA VIII

Todo número que divide a la **suma de dos sumandos** y a uno de éstos, **tiene que dividir** al otro sumando.

Siendo la suma 8 + 10 = 18. El número 2 divide a 18 y a 10 (hipótesis). Probaremos que 2 divide a 8 (tesis).

En efecto: 18 - 10 = 8. 2 divide a 18 y a 10 por hipótesis; luego, tiene que dividir a su diferencia 8, porque hay un teorema que dice que todo número que divide a otros dos divide a su diferencia; luego, 2 divide a 8, que es lo que queríamos demostrar.

Demostración General

En la suma $a + b = s$, el número *n* divide a *s* y al sumando *a* (hipótesis). Vamos a probar que *n* divide al otro sumando *b* (tesis).

En efecto: $s - a = b$. El número *n* divide a *s* y a *a* por hipótesis, luego tiene que dividir a su diferencia *b*, porque hay un teorema que dice que todo número que divide a otros dos divide a su diferencia, luego *n* divide a *b*, es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA IX

Todo número que divide al dividendo y al divisor de una división inexacta, divide al residuo.

Siendo la división 24 | 9, 6 2. El número 3 divide al dividendo 24 y al divisor 9 (hipótesis). Probaremos que 3 divide al residuo 6 (tesis).

En toda división inexacta el residuo por defecto es la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente; por tanto:

$$24 - 9 \times 2 = 6$$

Ahora bien, en la diferencia anterior 3 divide a 24 y a 9 por hipótesis. Si 3 divide a 9, tiene que dividir a 9 × 2 que es un múltiplo de 9, porque hay un teorema que dice que todo número que divide a otro divide a sus múltiplos, y si 3 divide al minuendo 24 y al sustraendo 9 × 2, tiene que dividir a su diferencia que es el residuo 6, porque todo número que divide a otros dos divide a su diferencia; por tanto 3 divide a 6, que es lo que queríamos demostrar.

Demostración General

Siendo la división D | d, R c. El número n divide al dividendo D y al divisor d (hipótesis). Vamos a probar que n divide al residuo R (tesis).

En efecto: $D - dc = R$

Ahora bien, en la diferencia anterior *n* divide a *D* y a *d* por hipótesis. Si *n* divide a *d* tiene que dividir a *dc* porque todo número que divide a otro divide a sus múltiplos, y si *n* divide a *D* y a *dc* tiene que dividir a su diferencia, que es *R,* porque todo número que divide a otros dos, divide a su diferencia; luego, *n* divide a *R,* que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA X

Si un número divide a **todos los sumandos** de una suma, **menos a uno** de ellos, no divide a la suma, y el residuo que se obtiene al dividir la suma entre el número, es el mismo que se obtiene dividiendo el sumando no divisible entre dicho número.

Siendo el número 5, que divide a 10 y a 15 pero no divide a 22, siendo 2 el residuo de dividir 22 entre 5 (hipótesis), demostraremos que 5 no divide a 10 + 15 + 22 = 47 y que el residuo de dividir 47 entre 5 es 2, igual al residuo de dividir 22 entre 5 (tesis).

En efecto:

$$10 = 5 \times 2$$
$$15 = 5 \times 3$$
$$22 = 5 \times 4 + 2$$

Sumando miembro por miembro estas igualdades, según la ley de uniformidad, tenemos:

$$10 + 15 + 22 = 5 \times 2 + 5 \times 3 + 5 \times 4 + 2$$

Sacando el factor común 5 en el segundo miembro, tenemos:

$$10 + 15 + 22 = 5\,(2 + 3 + 4) + 2$$

o sea

$$\boxed{10 + 15 + 22 = 5 \times 9 + 2}$$

y esta última igualdad demuestra el teorema, pues nos dice que el número 5 está contenido en la suma 9 veces, pero no exactamente, pues sobra el residuo 2; luego 5 no divide a 10 + 15 + 22. Además, nos dice que el residuo de dividir 10 + 15 + 22 entre 5 es 2 que es igual al residuo de dividir 22 entre 5.

Demostración General

Siendo el número n que divide a a y a b, pero no divide a c; siendo r el residuo de dividir c entre n (hipótesis). Vamos a demostrar que n no divide a $a + b + c$ y que el residuo de dividir la suma $a + b + c$ entre n es el mismo que el de dividir c entre n, o sea r (tesis).

En efecto: Llamemos q al cociente de dividir a entre n ; q' al cociente de dividir b entre n ; q'' al cociente de dividir c entre n siendo r el residuo de esta división:

Tendremos:

$$a = nq$$
$$b = nq'$$
$$c = nq'' + r$$

Sumando miembro por miembro estas igualdades, tenemos:

$$a + b + c = nq + nq' + nq'' + r$$

o sea

$$\boxed{a + b + c = n\,(q + q' + q'') + r}$$

y esta última igualdad demuestra el teorema, al indicarnos que el número n no está contenido en la suma $a + b + c$ un número exacto de veces, pues está contenido en ella $q + q' + q''$ veces pero sobra el residuo r; luego, n no divide a $a + b + c$.

Además, nos dice que el residuo de dividir $a + b + c$ entre n es r, que es el mismo residuo que resulta de dividir c entre n. Entonces queda demostrado lo que nos proponíamos.

EJERCICIOS

1. ¿Qué es la diferencia entre un múltiplo de 11 y otro múltiplo de 11? ¿Por qué?

2. ¿Es divisible por 2 la diferencia de 132 y 267? ¿Por qué?

3. ¿Será divisible por 5 la suma de 9, 11 y 25? ¿Por qué?

4. Si el divisor y el resto de una división inexacta son múltiplos de 5, ¿cuál será el dividendo? ¿Por qué?

5. ¿Qué es la suma de un múltiplo de 5 con otro múltiplo de 5? ¿Por qué?

6. Si un número divide al minuendo y al resto, ¿divide al sustraendo? ¿Por qué?

7. ¿Qué clase de número es el residuo de la división de dos números pares, si los hay? ¿Por qué?

8. ¿Es par o impar la suma de dos números impares? ¿Por qué?

9. ¿Será divisible por 5 la suma de 17, 21 y 37? ¿Por qué?

10. ¿Es par o impar la diferencia entre dos números pares? ¿Por qué?

11. Si un número divide al sustraendo y al resto, divide al minuendo. ¿Por qué?

12. Si un número divide al sustraendo y no divide al resto, ¿divide al minuendo? ¿Por qué?

13. Señala sin efectuar la división, cuál es el residuo de dividir la suma de 11, 14 y 21 entre 7. ¿Por qué?

14. ¿Por qué no puede ser impar la suma de dos números pares?

15. Menciona, sin efectuar la división, cuál es el residuo de dividir la suma de 21 y 35 entre 5. ¿Por qué?

16. ¿Será divisible por 5 la suma de 17, 21 y 36? ¿Por qué?

17. ¿Es par o impar la suma de un número par con uno impar? ¿Por qué?

18. El residuo de la división de 84 entre 9 es 3. Menciona sin efectuar la división, ¿cuál será el residuo de dividir 168 entre 28? ¿y 28 entre 3?



Los teoremas básicos de divisibilidad de los números enteros fueron demostrados por Euclides en los "Elementos". Por su parte Dedekind realizó la generalización de los caracteres de divisibilidad de números racionales e ideales.

CAPÍTULO XIX

CARACTERES DE DIVISIBILIDAD

Los caracteres de divisibilidad son ciertas señales de los números que nos permiten conocer, por simple inspección, si un número es divisible por otro.

La teoría de la divisibilidad numérica comprende el estudio de los números primos y compuestos, la determinación del M.C.D. y M.C.M., y los criterios de divisibilidad.

Un criterio general que permite saber si un número N es divisible por m se obtiene mediante los llamados restos potenciales, es decir, los restos que se obtienen dividiendo las potencias sucesivas de un cierto número por el mismo divisor.

La teoría de la divisibilidad algebraica coincide con la teoría de las ecuaciones.

DIVISIBILIDAD POR 5

Teorema

Un número es **divisible por 5** cuando termina en cero o cinco.

1) **Cuando el número termina en cero**. Siendo, por ejemplo, el número 70 divisible por 10 porque termina en cero, y 10 es divisible por 5 porque lo contiene 2 veces. Ahora bien, si 5 divide a 10, dividirá a 70, que es múltiplo de 10, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.

2) **Cuando el número termina en cinco**. Siendo, por ejemplo, el número 145. Descomponiendo este número en decenas y unidades, tendremos:

$$145 = 140 + 5$$

Donde 5 divide a 140 porque termina en cero, y también divide a 5 porque todo número es divisible por sí mismo; luego, si el 5 divide a 140 y 5, dividirá a su suma, que es 145, porque todo número que divide a varios sumandos, divide a la suma.

3) **Cuando el número no termina en cero ni en cinco**. Esto significa que el número no es divisible por 5.

Siendo, por ejemplo, 88 = 80 + 8. 5 divide a 80, pero no a 8; luego no divide a 88, porque si un número divide a un sumando y no divide al otro, no divide a la suma.

Además, el **residuo** de dividir el número entre 5 es el que se obtiene dividiendo entre 5 la cifra de las unidades. Así, el residuo de dividir 88 entre 5 es el que se obtiene dividiendo 8 entre 5, o sea 3.

DIVISIBILIDAD POR 2

Teorema

Un número es **divisible por 2** cuando termina en cero o en cifra par.

1) **Cuando el número termina en cero**. Siendo por ejemplo, el número 40 divisible por 10 porque termina en cero y 10 es divisible por 2. Ahora bien, si 2 divide a 10, tiene que dividir a 40, que es múltiplo de 10, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.

2) **Cuando el número termina en cifra par**. Siendo por ejemplo, el número 86. Descomponiendo este número en decenas y unidades, tenemos:

$$86 = 80 + 6$$

Donde 2 divide a 80 porque termina en cero y también divide a 6, porque todo número par es divisible por 2; luego, si 2 divide a 80 y a 6, dividirá a su suma 86, porque todo número que divide a varios sumandos divide a su suma.

3) **Cuando el número no termina en cero ni en cifra par**. Esto significa que el número termina en cifra impar y no es divisible por 2.

Siendo por ejemplo, 97 = 90 + 7. 2 divide a 90, pero no a 7; luego, no divide a su suma, que es 97, porque hay un teorema que dice que si un número divide a un sumando y no divide al otro, no divide a la suma.

Además, el **residuo** de dividir el número entre 2 es el que se obtiene dividiendo por 2 la cifra de las unidades. Este residuo, cuando existe, siempre es 1.

DIVISIBILIDAD POR LAS POTENCIAS DE 10

Para dividir un número terminado en ceros por la unidad seguida de ceros, se suprimen de la derecha del número tantos ceros como ceros acompañen a la unidad, y lo que queda es el cociente exacto. Así:

$$10 \div 10 = 1$$
$$250 \div 10 = 25$$
$$23500 \div 100 = 235$$
$$18000 \div 1000 = 18$$
$$40000 \div 100 = 400$$
$$140000 \div 10000 = 14$$
$$250000 \div 1000 = 250$$
$$1000000 \div 10000 = 100$$

Por tanto, **un número es divisible por 10 cuando termina en cero**, porque suprimiendo este cero queda dividido por 10 y lo que queda es el cociente exacto: 70, 180 y 1,560 son divisibles por 10.

Un número es divisible por 10^2 = 100 cuando termina en dos ceros, porque suprimiendo estos ceros queda dividido por 100 y lo que queda es el cociente exacto: 800, 1,400 y 13,700 son divisibles por 100.

Un número es divisible por 10^3 = 1000 cuando termina en tres ceros; por 10^4 = 10,000 cuando termina en cuatro ceros: por 10^5 = 100,000 cuando termina en cinco ceros, etc. Así, 8,000 es divisible por 1,000; 150,000 es divisible por 10,000; 800,000 es divisible por 100,000, etc.

En general, todo número terminado en ceros es divisible por la unidad seguida de tantos ceros como ceros haya a la derecha del número.

DIVISIBILIDAD POR 25

Teorema

Un número es **divisible por 25** cuando sus **dos últimas** cifras de la derecha son **ceros** o forman un múltiplo de **25**.

1) Cuando las dos últimas cifras de la derecha son ceros. Siendo, por ejemplo, el número 800 divisible por 100 porque termina en dos ceros, y 100 es divisible por 25 porque lo contiene 4 veces; luego, si 25 divide a 100, dividirá a 800, que es múltiplo de 100, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.

2) Cuando las dos últimas cifras de la derecha forman un múltiplo de 25. Siendo, por ejemplo, el número 650. Descomponiendo este número en centenas y unidades, tendremos:

650 = 600 + 50

Donde 25 divide a 600 porque termina en dos ceros, y divide a 50 porque hemos supuesto que las dos últimas cifras forman un múltiplo de 25. Luego, si el 25 divide a 600 y a 50, dividirá a su suma, que es 650, porque todo número que divide a varios sumandos divide a la suma.

3) Cuando las dos últimas cifras de la derecha no son ceros ni forman un múltiplo de 25. Esto significa que el número no es divisible por 25.

Siendo, por ejemplo, 834 = 800 + 34. 25 divide a 800, pero no a 34; luego, no divide a la suma, porque si un número divide a un sumando y no divide al otro, no divide a la suma.

Además, el **residuo** de dividir el número entre 25 es el que resulta de dividir el número que forman las dos últimas cifras entre 25. Así, el residuo de dividir 834 entre 25 es el mismo de dividir 34 entre 25, o sea 9.

DIVISIBILIDAD POR 4

Teorema

Un número es **divisible por 4** cuando sus dos últimas cifras de la derecha son **ceros o forman un múltiplo de cuatro.**

1) Cuando las dos últimas cifras de la derecha son ceros. Siendo, por ejemplo, el número 600 divisible por 100 porque termina en dos ceros, y 100 es divisible por 4 porque lo contiene 25 veces; luego, si 4 divide a 100, dividirá a 600, que es múltiplo de 100, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.

2) Cuando las dos últimas cifras de la derecha forman un múltiplo de 4. Siendo por ejemplo, el número 416. Descomponiendo este número en centenas y unidades tendremos:

416 = 400 + 16

Donde 4 divide a 400 porque termina en dos ceros, y a 16; porque hemos supuesto que las dos últimas cifras forman un múltiplo de 4; luego, si el 4 divide a 400 y a 16, dividirá a su suma, que es 416, porque si un número divide a varios sumandos, divide a la suma.

3) Cuando las dos últimas cifras de la derecha no son ceros ni forman un múltiplo de 4. Esto significa que el número no es divisible por 4.

Siendo, por ejemplo, 314 = 300 + 14. 4 divide a 300, pero no a 14; luego, no divide a su suma 314, porque todo número que divide a un sumando y no divide al otro no divide a la suma.

Además, el **residuo** de dividir el número entre 4 es el que se obtiene dividiendo entre 4 el número que forman las dos últimas cifras de la derecha. Así, el residuo de dividir 314 entre 4 es el mismo de dividir 14 entre 4, o sea 2.

DIVISIBILIDAD POR 125

Teorema

Un número es **divisible** por 125 cuando sus **tres últimas cifras** de la derecha son ceros o forman un **múltiplo de 125**.

1) Cuando las tres últimas cifras de la derecha son ceros. Siendo, por ejemplo, el número 8,000 divisible por 1,000 porque termina en tres ceros, y 1,000 es divisible por 125 porque lo contiene 8 veces; luego, si 125 divide a 1,000, dividirá a 8,000, que es múltiplo de 1,000, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.

2) Cuando las tres últimas cifras de la derecha forman un múltiplo de 125. Siendo, por ejemplo, el número 4,250. Descomponiendo este número en millares y unidades, tendremos:

4250 = 4000 + 250

Donde 125 divide a 4,000 porque termina en tres ceros, y a 250, por suposición; luego, si el 125 divide a 4,000 y a 250, dividirá a su suma, que es 4,250, porque todo número que divide a varios sumandos divide a la suma.

3) Cuando las tres últimas cifras de la **derecha no son ceros ni forman un múltiplo de 125**. Esto significa que el número no es divisible por 125.

Siendo, por ejemplo, 8,156 = 8,000 + 156. 1,225 divide a 8,000, pero no a 156; luego, no divide a su suma, porque si un número divide a un sumando y no divide al otro, no divide a la suma.

Además, el residuo de dividir el número entre 125 es el que resulta de dividir el número que las tres últimas cifras de la derecha entre 125.

Así, el residuo de dividir 8,156 entre 125 es el mismo de dividir 156 entre 125, o sea 31.

DIVISIBILIDAD POR 8

Teorema

Un número es **divisible por 8** cuando sus **tres últimas cifras** de la derecha son **ceros** o forman un **múltiplo de 8.**

1) **Cuando las tres últimas cifras de la derecha son ceros.** Siendo, por ejemplo, el número 5000 divisible por 1000 porque termina en tres ceros, y 1000 es divisible por 8 porque lo contiene 125 veces; luego, si el 8 divide a 1000, dividirá a 5000, que es múltiplo de 1,000, porque todo número que divide a otro, divide a sus múltiplos.

2) **Cuando las tres últimas cifras de la derecha forman un múltiplo de 8.** Siendo, por ejemplo, el número 6512. Descomponiendo este número en millares y unidades, tendremos:

$$6512 = 6000 + 512$$

Donde 8 divide a 6,000 porque termina en tres ceros, y a 512 porque hemos supuesto que el número formado por las tres últimas cifras es múltiplo de 8; luego, si el 8 divide a 6,000 y a 512, dividirá a su suma, que es 6,512, porque si un número divide a todos los sumandos, divide a la suma.

3) **Cuando las tres últimas cifras no son ceros ni forman un múltiplo de 8.** Esto significa que el número no es divisible por 8.

Siendo, por ejemplo, 7,124 = 7,000 + 124. 8 divide a 7,000, pero no a 124; luego, no divide a la suma 7,124, porque si un número divide a un sumando y no divide al otro, no divide a la suma.

Además, el **residuo** de dividir el número entre 8 es el que resulta de dividir el número que forman las tres últimas cifras de la derecha entre 8.

Así, el residuo de dividir 7,124 entre 8 es el mismo de dividir 124 entre 8, o sea 4.

DIVISIBILIDAD POR 3

Primer lema

La unidad, seguida de cualquier número de ceros, es igual a un múltiplo de 3 más la unidad.

$$10 = 3 \times 3 + 1 = \text{m. de } 3 + 1$$
$$100 = 33 \times 3 + 1 = \text{m. de } 3 + 1$$
$$1000 = 333 \times 3 + 1 = \text{m. de } 3 + 1$$
$$10000 = 3333 \times 3 + 1 = \text{m. de } 3 + 1$$

Segundo lema

Una cifra significativa, **seguida de cualquier número de ceros**, es igual a un múltiplo de 3 más la misma cifra.

$$20 = 10 \times 2 = (\text{m. de } 3 + 1) \times 2 = (\text{m. de } 3) \times 2 + 1 \times 2 = \text{m. de } 3 + 2$$
$$500 = 100 \times 5 = (\text{m. de } 3 + 1) \times 5 = (\text{m. de } 3) \times 5 + 1 \times 5 = \text{m. de } 3 + 5$$
$$6000 = 1000 \times 6 = (\text{m. de } 3 + 1) \times 6 = (\text{m. de } 3) \times 6 + 1 \times 6 = \text{m. de } 3 + 6$$

Teorema

Todo número entero es igual a un múltiplo de 3 **más la suma de los valores absolutos** de sus cifras.

Siendo un número entero cualquiera, por ejemplo el 1356.

Vamos a demostrar que

$$1356 = \text{m. de } 3 + (1 + 3 + 5 + 6) = \text{m. de } 3 + 15$$

Descomponiendo este número en sus unidades de distinto orden, tendremos:

$$1356 = 1000 + 300 + 50 + 6$$

Aplicando los lemas anteriores, tendremos:

$$1000 = \text{m. de } 3 + 1$$
$$300 = \text{m. de } 3 + 3$$
$$50 = \text{m. de } 3 + 5$$
$$6 = 6$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, tendremos:

$$1356 = \text{m. de } 3 + (1 + 3 + 5 + 6)$$

o sea,

$$1356 = \text{m. de } 3 + 15$$

que es lo que queríamos demostrar.

COROLARIO

Un número es **divisible por 3** cuando **la suma de los valores absolutos** de sus cifras es **múltiplo de 3**.

Según el teorema anterior, todo número entero es igual a un múltiplo de 3 más la suma de los valores absolutos de sus cifras.

Por tanto, si la suma de los valores absolutos de las cifras de un número es múltiplo de 3, dicho número se puede descomponer en dos sumandos: uno m. de 3, que evidentemente es divisible por 3, y el otro la suma de los valores absolutos de sus cifras, que también es múltiplo de 3; y si los dos sumandos son divisibles por 3, su suma, que será el número dado, también será divisible por 3, porque hay un teorema que dice que todo número que divide a varios sumandos también divide a la suma.

Por ejemplo, el número 4,575 será divisible por 3 porque la suma de los valores absolutos de sus cifras, 4 + 5 + 7 + 5 = 21, es un múltiplo de 3.

Según el teorema anterior, 4,575 = m. de 3 + 21

El sumando m. de 3, evidentemente, es divisible por 3, y el otro sumando, 21, **que es la suma de los valores absolutos de las cifras de 4,575**, también es divisible por 3. Luego, si el 3 divide a los dos sumandos, tiene que dividir a su suma, que es 4,575, porque todo número que divide a otros varios tiene que dividir a su suma.

ESCOLIO

Cuando la suma de los valores absolutos de las cifras de un número **no es múltiplo de 3**, dicho número no es divisible por 3. Por ejemplo, el número 989 **no es divisible por 3,** porque la suma de los valores absolutos de sus cifras, 9 + 8 + 9 = 26, no es múltiplo de 3.

Sabemos que 989 = m. de 3 + 26

El sumando m. de 3, evidentemente, es divisible por 3, pero el otro sumando, 26, **que es la suma de los valores absolutos**, no es divisible por 3; luego, la suma de esos dos sumandos, que es el número 989, no será divisible por 3, porque hay un teorema que dice que si un número divide a uno de dos sumandos y no divide al otro, tampoco divide a la suma.

Además, en este caso, el **residuo** de dividir el número entre 3 es el que se obtiene dividiendo entre 3 a la suma de los valores absolutos de sus cifras. Así, el residuo de dividir 989 entre 3 es el que resulta de dividir 9 + 8 + 9 = 26 entre 3, o sea 2.

DIVISIBILIDAD POR 9

Se demuestra de modo análogo a la divisibilidad por 3, pero poniendo el número nueve donde diga tres; de este modo, consta de los dos lemas, el teorema y el corolario siguientes:

PRIMER LEMA. La unidad seguida de cualquier número de ceros es igual a un múltiplo de 9 más la unidad.

SEGUNDO LEMA. Una cifra significativa seguida de cualquier número de ceros es igual a un múltiplo de 9 más la misma cifra.

TEOREMA. Todo número entero es igual a un múltiplo de 9 más la suma de los valores absolutos de sus cifras.

COROLARIO. Un número es divisible por 9 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 9.

Las demostraciones son análogas a las de la divisibilidad por 3.

Además, el **residuo** de dividir un número entre 9 es el que se obtiene dividiendo entre 9 la suma de los valores absolutos de sus cifras.

DIVISIBILIDAD POR 7

Un número es divisible por 7 cuando, separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 2, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 7.

Ejemplos

1) Para saber si el número 2,058 es divisible por 7, se hace lo siguiente:

```
 205'8 × 2 = 16
- 16
 18'9 × 2 = 18
- 18
 0
```

da cero, por tanto 2,058 es divisible por 7.

2) Averiguar si el número 2,401 es divisible o no por 7.

```
 240'1 × 2 = 2
- 2
 23'8 × 2 = 16
- 16
 07
```

da múltiplo de 7, por tanto 2,401 es divisible por 7.

3) Averiguar si 591 es o no divisible por 7.

```
 59'1 × 2 = 2
- 2
 5'7 × 2 = 14
- 14
 9
```

no da 0 ni múltiplo de 7, por tanto 591 no es divisible por 7.

Si el producto de la primera cifra de la derecha por 2 no se puede restar de lo que queda a la izquierda, se invierten los términos de la resta.

DIVISIBILIDAD POR 11

Primer lema

La unidad, seguida de un número par de ceros, es igual a un múltiplo de 11 de más la unidad.

100 | 11
1 | 9

100 = 11 × 9 + 1 = m. de 11 + 1

10000 | 11
100 | 909
1

10000 = 909 × 11 + 1 = m. de 11 + 1

Segundo lema

La unidad, seguida de un número impar de ceros, es igual a un múltiplo de 11 menos la unidad.

10 = 11 - 1 = m. de 11 - 1

1,000 | 11
10 | 90

1,000 = 11 × 90 + 10 = m. de 11 + 10 =

m. de 11 + 11 - 1 = m. de 11 - 1

100,000 | 11
100 | 9090
10

100,000 = 11 × 9090 + 10 = m. de 11 + 10 =

m. de 11 + 11 - 1 = m. de 11 - 1

Tercer lema

Una cifra significativa, seguida de un número par de ceros, es **igual a un múltiplo de 11** más la misma cifra.

400 = 100 × 4 = (m. de 11 + 1) × 4 =

(m. de 11) × 4 + 1 × 4 = m. de 11 + 4

60,000 = 10,000 × 6 = (m. de 11 + 1) × 6 =

(m. de 11) × 6 + 1 × 6 = m. de 11 + 6

Cuarto lema

Una cifra significativa, seguida de un número impar de ceros, es igual a un múltiplo de 11 menos la misma cifra.

90 = 10 × 9 = (m. de 11 - 1) × 9 =

(m. de 11) × 9 - 1 × 9 = m. de 11 - 9

4,000 = 1,000 × 4 = (m. de 11 - 1) × 4 =

(m. de 11) × 4 - 1 × 4 = m. de 11 - 4

Teorema

Todo número entero es igual a un múltiplo de 11 más la diferencia entre la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar par, contando de derecha a izquierda.

Siendo, por ejemplo, el número 13,947. Vamos a demostrar que

13,947 = m. de 11 + [(7 + 9 + 1) - (4 + 3)] =

m. de 11 + (17 - 7) = m. de 11 + 10

Descomponiendo este número en sus unidades de distinto orden, tendremos:

13,947 = 10,000 + 3,000 + 900 + 40 + 7

Al aplicar los lemas anteriores, tendremos:

10,000 = m. de 11 + 1
3,000 = m. de 11 - 3
900 = m. de 11 + 9
40 = m. de 11 - 4
7 = 7

Sumando ordenadamente estas igualdades:

13,947 = m. de 11 + [(7 + 9 + 1) - (4 + 3)] =
m. de 11 + (17 - 10)

o sea

13,947 = m. de 11 + 10

que es lo que queríamos demostrar.

COROLARIO

Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar par, de derecha a izquierda, es cero o múltiplo de 11.

1) Cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par es cero.

Siendo, por ejemplo, el número 4763, en el cual tenemos

(3 + 7) - (6 + 4) = 10 - 10 = 0

Vamos a demostrar que este número es divisible por 11.

Según el teorema anterior, tenemos:

4763 = m. de 11 + [(3 + 7) - (6 + 4)] = m. de 11 + 0

o sea 4763 = m. de 11

2) Cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par es múltiplo de 11.

Siendo, por ejemplo, el número 93819, en el cual tenemos:

(9 + 8 + 9) - (1 + 3) = 26 - 4 = 22 = m. de 11

Vamos a demostrar que este número es divisible por 11.

Sabemos que

93819 = m. de 11 + [(9 + 8 + 9) - (1 + 3)] =

m. de 11 + (26 - 4)

o sea, 93819 = m. de 11 + 22

Aquí vemos que el número 93819 es la suma de dos sumandos que son m. de 11 y 22. Uno de ellos m. de 11, evidentemente es divisible por 11, y el otro sumando, 22, **que es la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par**, también es múltiplo de 11; luego, si el 11 divide a los dos sumandos, tiene que dividir a su suma, que es el número 93819, porque un teorema dice que si un número divide a otros varios, también divide a su suma.

Si la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par de un número **no es cero ni múltiplo de 11**, dicho número **no es múltiplo de 11**.

Siendo por, ejemplo, el número 5439, en el cual tendremos:

(9 + 4) - (3 + 5) = 13 - 8 = 5

Sabemos que

5439 = m. de 11 + [(9 + 4) - (3 + 5)]

o sea,

5439 = m. de 11 + 5

Evidentemente el sumando m. de 11 es divisible por 11, pero el sumando 5 no lo es; por tanto su suma, que es el número 5439, tampoco será divisible por 11, porque todo número que divide a uno de dos sumandos y no divide al otro, tampoco divide a la suma.

Además, en este caso, el **residuo** de dividir el número entre 11 es el que se obtiene dividiendo entre 11 la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par.

Así, el residuo de dividir 1,829 entre 11 es el que resulta de dividir (9 + 8) - (2 + 1) = 14 entre 11, o sea 3.

Si la suma de las cifras de lugar impar es **menor** que la suma de las cifras de lugar par, se aumenta la primera en el múltiplo de 11 necesario para que la sustracción sea posible, lo que no hace variar el residuo.

Para saber cuál es el residuo de la división de 8291 entre 11, se tiene: (1 + 2) - (9 + 8) = 3 - 17. Como no se puede restar, se añade al 3 el múltiplo de 11 necesario para que la resta sea posible, en este caso 22, y se tiene: (3 + 22) - 17 = 25 - 17 = 8. De este modo, el residuo de 8291 entre 11 es 8.

DIVISIBILIDAD POR 19

Un número es divisible por 19 cuando, separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 17, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 19.

Ejemplos

1) Averiguar si 171 es divisible por 19.

```
 17'1 × 17 = 17
- 17
   0
```

da cero, por tanto 171 es múltiplo de 19.

2) Averiguar si 1,501 es múltiplo de 19.

```
 150'1 × 17 = 17
- 17
  13'3 × 17 = 51
-  51
   38
```

da 38, que es múltiplo de 19, por tanto 1,501 es divisible por 19.

DIVISIBILIDAD POR 13

Un número es divisible por 13 cuando, separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 9, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 13.

Ejemplos

1) Averiguar si el número 1,456 es múltiplo de 13.

```
 145'6 × 9 = 54
-  54
 09'1× 9 = 9
-   9
    0
```

da cero, por tanto 1,456 es divisible por 13

2) Averiguar si 195 es divisible por 13.

```
 19'5 × 9 = 45
- 45
  26
```

da 26, que es múltiplo de 13, por tanto 195 es divisible por 13

3) Averiguar si 2,139 es divisible por 13.

```
 213'9 × 9 = 81
- 81
 13'2 × 9 = 18
- 18
   5
```

da 5, por tanto 2,139 no es divisible por 13

DIVISIBILIDAD POR 17

Un número es divisible por 17 cuando, separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 5, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 17.

Ejemplos

1) Averiguar si el número 2,142 es múltiplo de 17.

```
 214'2 × 5 = 10
- 10
 20'4 × 5 = 20
- 20
 0
```

da cero, por tanto 2,142 es divisible por 17.

2) Averiguar si 3,524 es múltiplo de 17.

```
 352'4 × 5 = 20
- 20
 33'2 × 5 = 10
- 10
 23
```

Da 23, por tanto 3,524 no es divisible por 17.

EJERCICIOS

1. Diga por simple inspección, cuál es el residuo de dividir 95 entre 3; 1246 entre 3; 456789 entre 3; 986547 entre 9; 2345 entre 11; 93758 entre 11; 7234 entre 11; 928191 entre 11.

2. ¿Qué cifra debe añadirse a la derecha de 32254 para que resulte un número de cinco cifras que sea múltiplo de 11?

3. Para hallar el mayor múltiplo de 11 contenido en 2738, ¿en cuánto se debe disminuir este número?

4. ¿Cuál es la diferencia entre 871 y el mayor múltiplo de 9 contenido en él?

5. ¿Cuál es la menor cifra que debe añadirse al número 124 para que resulte un número de 4 cifras que sea múltiplo de 3?

6. ¿Por cuáles de los números 7, 11, 13, 17 y 19 son divisibles 91, 253, 169, 187, 209, 34,573, 2,227 y 2,869?

7. ¿Por cuáles de los números 8, 125, 11 y 13 son divisibles 8998, 1375, 7512, 8192?

8. ¿Menciona por simple inspección, cuál es el residuo de dividir 85 entre 2; 128 entre 5; 215 entre 4; 586 entre 25; 1,046 entre 8?

9. Señala tres cifras distintas que pueden añadirse al número 562 para formar un número de 4 cifras que sea múltiplo de 3.

10. Para hallar el mayor múltiplo de 3 contenido en 7,345, ¿en cuánto se debe disminuir este número?

11. Diga cual es el mayor múltiplo de 9 contenido en 7276.

12. ¿Qué cifra debe suprimirse en 857 para que resulte un número de dos cifras múltiplo de 3?

13. ¿Por cuáles de los números 2, 3, 4, 5, 11 y 25 son divisibles 175, 132, 165, 193, 12344, 12133?

14. ¿Cuándo es divisible el número 17?

COMPROBACIÓN DE LA DIVISIBILIDAD EN LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES

Los **caracteres de divisibilidad**, principalmente por 9 y por 11, se aplican a la **prueba de las operaciones fundamentales** y constituyen lo que se llama prueba del 9 y prueba del 11. Aquí debe tenerse presente que el residuo de dividir un número entre 9 se obtiene dividiendo entre 9 la suma de los valores absolutos de las cifras del número, y que el residuo de dividir un número entre 11 se obtiene dividiendo entre 11 la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par del número.

En la práctica, para hallar el residuo de dividir un número entre 9 o **exceso sobre 9** del número, se suma cada cifra con la siguiente, restando 9 cada vez que la suma sea 9 o mayor que 9, y si alguna cifra del número es 9, no se toma en cuenta. De este modo, para hallar el residuo de dividir 64,975 entre 9, diremos: 6 y 4, 10; menos 9, 1; 1 y 7, 8 (el 9 no se toma en cuenta); 8 y 5, 13; menos 9, 4. El residuo de dividir el número entre 9 es 4.

SUMA

Prueba del 9

Se encuentra el residuo entre 9 de cada sumando; si la operación es correcta, el residuo entre 9 de la suma de ambos tiene que ser igual, al residuo entre 9 de la suma total.

Ejemplo

	Operación	Prueba
	2345	Residuo entre 9 de 2345 5
+	7286	Residuo entre 9 de 7286 5
	138797	Residuo entre 9 de 138797 8
	148428	Suma de estos residuos 18
		Residuo de esta suma entre 9 0
		Residuo de la suma 148428 entre 9 0

Prueba del 11

En este caso el procedimiento es semejante, por lo que aplicando el ejemplo anterior tendremos:

Residuo entre 11 de 2345:	(5 + 3) - (4 + 2) = 8 - 6 = 2
Residuo entre 11 de 7286:	(6 + 2) - (8 + 7) = 8 - 15
	= (8 + 11) - 15 = 4
Residuo entre 11 de 138797	(7 + 7 + 3) - (9 + 8 + 1) = 17 - 18
	= (17 + 11) - 18 = 10

Suma de estos residuos 16
Residuo de esta suma entre 11 .... 6 - 1 = 5
Residuo de la suma 148428 entre 11 .. (8 + 4 + 4) - (2 + 8 + 1) = 16 - 11 = 5

RESTA

El minuendo de una resta es la suma de dos sumandos: el sustraendo y la diferencia. Por tanto, para probar la resta podemos aplicar la regla dada para probar la suma, considerando como sumandos el sustraendo y la diferencia y como suma total el minuendo.

Prueba del 9

Se encuentra el residuo entre 9 del sustraendo y de la diferencia; si la operación es correcta, el residuo entre 9 de la suma de ambos tiene que ser igual al residuo entre 9 del minuendo.

Ejemplo

Operación	Prueba
75,462	Residuo entre 9 de 61034 5
- 61,034	Residuo entre 9 de 14428 1
14,428	Suma de estos residuos 6
	Residuo entre 9 de 6 6
	Residuo entre 9 de 75462..............6

Prueba del 11

Ejemplo

En este caso el procedimiento es semejante, por lo que aplicando el ejemplo anterior tendremos:

Residuo entre 11 de 61034 ....(4 + 6) - (3 + 1) = 10 - 4 = 6

Residuo entre 11 de 14428 .... (8 + 4 + 1) - (2 + 4) = 13 - 6 = 7

Suma de estos residuos 13

Residuo entre 11 de 13 .... 3 - 1 = 2

Residuo entre 11 de 75462.............(2 + 4 + 7) - (6 + 5) = 13 - 11 = 2

MULTIPLICACIÓN

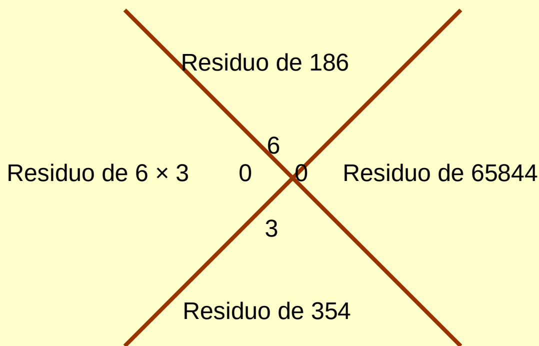
Prueba del 9

Se encuentra el residuo entre 9 del multiplicando y del multiplicador; si la operación es correcta, el residuo entre 9 del producto de ambos tiene que ser igual al residuo entre 9 del producto total.

Ejemplo

Operación	Prueba
186	Residuo de 186 entre 9 6
× 354	Residuo de 354 entre 9 3
744	Producto de estos residuos 18
930	Residuo entre 9 de 18 0
558	Residuo entre 9 del producto 65,844 . 0
65844	

En la práctica, esta operación se dispone así:



Prueba del 11

Aplicando el mismo ejemplo anterior tendremos:

Residuo entre 11
de 186 ....(6 + 1) - 8 = 7 - 8 = (7 + 11) - 8 = 10

Residuo entre 11 de 354 ....(4 + 3) - 5 = 7 - 5 = 2

Producto de estos residuos 20

Residuo entre
11 de este producto .... 0 - 2 = (0 + 11) - 2 = 9

Residuo entre 11 del
producto 65,844 ......(4 + 8 + 6) - (4 + 5) = 18 - 9 = 9

DIVISIÓN

Dado que el dividendo de una división exacta es el producto de dos factores (divisor y cociente), para probar una división exacta aplicaremos la regla dada para probar un producto considerando como factores el divisor y el cociente y como producto el dividendo.

Si la división es inexacta, el dividendo será la suma de dos sumandos producto del divisor por el cociente y el residuo; por tanto aplicamos la regla anterior y la regla dada para la suma.

Prueba del 9

Se encuentra el residuo entre 9 el divisor y del cociente; se multiplican estos residuos y al producto que resulte se le añade el residuo entre 9 del residuo de la división, si lo hay. Si la operación está correcta, el residuo entre 9 de esta suma tiene que ser igual al residuo entre 9 del dividendo.

1) Operación

```
1839508 | 2134
  13230   862
   4268
   0000
```

Residuo de 2134: 1
Residuo de 1 × 7: 7
Residuo de 1839508: 7
Residuo de 862: 7

Prueba del 11

En este caso el procedimiento es semejante, pero deben encontrarse los residuos entre 11, como se hizo antes.

VALIDEZ DE LAS COMPROBACIONES

La garantía de estas pruebas es relativa, pues si no cumplen con los requisitos señalados en cada caso, podemos tener la seguridad de que la operación está mal, pero si la prueba resulta bien, no podemos tener la seguridad de que la operación está correcta, ya que las cifras podrían estar mal halladas, aunque la suma de sus valores absolutos sea igual a la de las cifras correctas, resultando que la prueba está bien.

Por otro lado, en la prueba del 9 no se atiende al lugar que ocupan las cifras, así que teniendo cifras iguales a las correctas, pero en distinto orden, la prueba resultará bien.

Sin embargo la prueba del 11, como toma en cuenta el lugar de las cifras, ofrece mayor garantía que la del 9, aunque es mucho más laboriosa.



Después de que la serie de los números primos, fue desarrollada por Euclides, los griegos no volvieron a sobresalir en esta área. En el siglo XVII, Fermat propuso el teorema de los exponentes primos.

CAPÍTULO XX

TEORÍA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Un método muy empleado para determinar si un número es primo o no lo es, consiste en dividir dicho número entre todos los números primos menores que él.

Si la división no es exacta y el cociente obtenido es menor o igual que el divisor, el número es primo.

Por el contrario, si alguna división es exacta el número no es primo.

Este procedimiento es análogo al empleado por Erastóstenes para obtener su famosa Criba.

NÚMEROS PRIMOS RELATIVOS DOS A DOS

Los **números primos entre sí dos a dos** son tres o más números tales que cada uno de ellos es primo con cada uno de los demás.

Así, 8, 9 y 17 son primos dos a dos, porque 8 es primo con 9 y con 17, y 9 es primo con 17; 5, 11, 14 y 39 son primos dos a dos, porque 5 es primo con 11, con 14 y con 39; 11 es primo con 14 y con 39; y 14 es primo con 39.

Los números 10, 15, 21 y 16 son primos entre sí, porque el único número que los divide **a todos** es 1, pero **no son** primos dos a dos, porque 15 y 21 tienen el factor común 3. Cuando varios números son primos dos a dos, necesariamente son primos entre sí, aunque pueden no ser primos dos a dos.

NÚMEROS PRIMOS RELATIVOS

Los **números primos entre sí o números primos** relativos son dos o más números que no tienen más divisor común que 1.

El mayor divisor común o máximo común divisor de varios números primos entre sí es 1. Así, 8 y 15 son primos entre sí o primos relativos porque su único factor común es 1, pues 8 es divisible por 2, pero 15 no, y 15 es divisible por 3 y por 5, pero 8 no.

Por ejemplo, 7, 12 y 15 son primos entre sí porque 7 no divide a 12 ni a 15; 2 divide a 12, pero no a 7 ni a 15; 3 divide a 12 y a 15, pero no a 7; 5 divide a 15, pero no a 7 ni a 12; luego, su único divisor común es 1.

Por otro lado, 12, 14 y 18 no son primos entre sí, porque 2 los divide a todos, y 35, 70 y 45 tampoco son primos entre sí, porque 5 los divide a todos.

Para que dos o más números sean primos entre sí, **no es necesario que sean primos absolutos**. Así, 8 no es primo, 15 tampoco, y sin embargo, son primos entre sí; 7 es primo, 12 no lo es y 25 tampoco, **pero son primos entre sí. Si dos o más números son primos absolutos cada uno de ellos**, evidentemente serán primos entre sí.

NÚMEROS CONSECUTIVOS

Los **números consecutivos** son dos o más números enteros tales que cada uno se diferencia del anterior en una unidad, y representan conjuntos que se diferencian en un elemento.

Ejemplos

5 y 6; 21 y 22; 7, 8 y 9;
18, 19, 20 y 21

Dos números enteros consecutivos se expresan por las fórmulas *n* y *n* = 1.

Así, si *n* es 5, *n* + 1 será 6 y *n* - 1 será 4. Evidentemente, 5 y 6 ó 4 y 5 son consecutivos.

De dos números consecutivos, uno es *par* y otro *impar.*

Dos números *enteros consecutivos* son primos *entre sí.* Si los números consecutivos *n* y *n* + 1 tuvieran un divisor común distinto de la unidad, este divisor común dividiría a su diferencia, porque todo divisor de dos números divide a su diferencia; pero la diferencia entre *n* y *n* + 1 es la unidad, luego ese divisor tendría que dividir a la unidad, lo cual es imposible.

Las fórmulas para expresar tres o más números enteros consecutivos son: *n*, *n* + 1, *n* + 2, *n* + 3... o también, *n*, *n* - 1, *n* - 2, *n* - 3... Tres o más *números enteros consecutivos son primos entre sí.*

EJERCICIOS

1. Señala si los siguientes grupos de números son o no primos entre sí:
a) 22, 33, 44, 55 y 91
b) 14, 21, 28, 35 y 26
c) 35, 18, 12 y 28
d) 34, 51, 68, 85 y 102

2. Si Enrique tiene un año menos que Ricardo y ambas edades suman 103 años, ¿cuál es la edad de cada uno?

3. Escribe 2 números, 3 números, 4 números que sean primos entre sí.

4. Con los números 28, 35, 17, 14, 26 y 15 forma un grupo de tres números que no sean primos entre sí; un grupo de cinco que sean primos entre sí y un grupo de tres que sean primos dos a dos.

5. Escribe tres números compuestos, cuatro números compuestos, primos entre sí dos a dos.

6. Las edades de Pedro y Juan son dos números enteros consecutivos cuya suma es 51. Si Pedro es el menor, ¿cuál es la edad de cada uno?

7. Los números 23, 46 y 69 no son primos entre sí porque...

8. Escribe dos números compuestos, y tres números compuestos primos entre sí.

9. Menciona si los siguientes grupos de números son primos entre sí y si lo son dos a dos:
a) 5, 7, 17, 10, 14 y 32
b) 7, 9, 11, 13, 15 y 17
c) 24, 36, 42, 60 y 81

10. ¿Es posible que varios números pares sean primos entre sí?

11. Escribe cinco números impares primos entre sí dos a dos.

12. Escribe cuatro números impares, y seis números impares, primos entre sí.

13. ¿Son primos dos a dos los siguientes grupos de números?:

a) 18, 45 y 37
b) 13, 17, 16 y 24
c) 22, 35, 33 y 67

14. Escribe tres números, cuatro números primos entre sí dos a dos.

15. ¿Puede haber varios números múltiplos de 3 que sean primos entre sí?



Figura 59

16. Un comerciante compró el lunes cierto número de sacos de azúcar; el martes compró un saco más que los que compró el lunes; el miércoles uno más que el martes, y el jueves uno más que el miércoles. Si en los 4 días adquirió 102 sacos, ¿cuántos compró cada día?

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES SOBRE LOS NÚMEROS PRIMOS

TEOREMA 1

Si un número primo **no divide** a otro número, necesariamente **es primo con él**.

Siendo el número primo a, que no divide al número b, demostraremos que a es primo con b, o sea que a y b son primos entre sí.

El número a, por ser primo, solo es divisible por a y por 1. Por lo tanto, los únicos divisores comunes que pueden tener a y b son a o 1. Ahora bien: a no puede ser divisor común de a y b, porque suponemos que a no divide a b; luego, el único divisor común de a y b es 1, o sea que a y b son primos entre sí, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

El número primo 5 no divide a 14; 5 y 14 son primos entre sí.

TEOREMA 2

Todo número que **divide a un producto** de **dos factores** y es primo con uno de ellos, necesariamente **divide al otro factor**.

Siendo el número *a* que divide al producto *bc* y es primo con *b*, demostraremos que *a* tiene que dividir al otro factor *c*.

Como *a* y *b* son primos entre sí, su mayor divisor común es 1. Multiplicando los números *a* y *b* por *c* resultarán los productos *ac* y *bc* ; y el m.c.d. de estos productos será 1 × *c*, o sea *c*, porque si dos números se multiplican por un mismo número, su m.c.d. queda multiplicado por ese mismo número. Ahora bien: *a* divide al producto *ac* por ser un factor de este producto y al producto *bc* por suposición; luego dividirá al m.c.d. de *ac* y *bc* que es *c*, porque todo número que divide a otros dos, divide a su m.c.d. Por tanto, *a* divide a *c*, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

5 divide al producto 7 × 10 = 70, y como es primo con 7, divide a 10.

TEOREMA 3

Todo **número compuesto** tiene por lo menos un **factor primo** mayor que 1.

Siendo el número compuesto *N*, demostraremos que *N* tiene por lo menos un factor primo mayor que 1.

En efecto: *N*, por ser compuesto, tiene que poseer algún divisor distinto de sí mismo y de la unidad que llamaremos *N′*, el cual tiene que ser primo o compuesto.

Si *N′* es primo queda demostrado el teorema, porque *N* tendrá un divisor primo mayor que 1.

Si *N′* es compuesto deberá tener un divisor distinto de *N′* y de la unidad que llamaremos *N″*, el cual será divisor de *N* porque *N* es múltiplo de *N′* y todo número que divide a otro divide a sus múltiplos. *N″* será primo o compuesto.

Si *N″* es primo queda demostrado el teorema; si es compuesto deberá tener un divisor distinto de *N″* y de la unidad que llamaremos *N‴*, el cual dividirá a *N.*

Este *N‴* será primo o compuesto. Si es primo queda demostrado el teorema, y si es compuesto deberá tener otro divisor distinto de sí mismo y de la unidad, que llamaremos *N⁗*, el cual dividirá a *N* y así sucesivamente.

Ahora bien, como estos divisores se van haciendo cada vez menores, pero siempre mayores que la unidad, y no habiendo un número ilimitado de divisores, llegaremos necesariamente a un número primo que dividirá a *N*.

Por tanto, *N* tiene por lo menos un divisor primo mayor que 1.

Ejemplo

El número compuesto 14 es divisible por los números primos 2 y 7; el número compuesto 121 es divisible por el número primo 11.

TEOREMA 4

La serie de los números primos es **ilimitada**, es decir que por grande que sea un número primo, siempre hay otro número **primo mayor.**

Siendo el número primo *P* tan grande como se quiera, demostraremos que hay otro número primo mayor que *P*, para lo cual formaremos el producto de todos los números primos menores que *P*, lo multiplicamos por *P*, añadimos la unidad y siendo *N* el resultado:

$$1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times P + 1 = N$$

Evidentemente *N* es mayor que *P* y tiene que ser primo o compuesto. Si *N* es primo queda demostrado el teorema, porque habrá un número primo mayor que *P.*

Si *N* es compuesto tiene que poseer un divisor primo mayor que 1, porque hay un teorema que dice que todo número compuesto tiene por lo menos un divisor primo mayor que 1.

Ese divisor primo de *N* tiene que ser menor, igual o mayor que *P*. Ahora bien, el divisor primo de *N* no puede ser menor que *P*, porque dividiendo a *N* por cualquiera de los números primos menores que *P* daría como residuo la unidad; no puede ser igual a *P*, porque dividiendo *N* por *P* daría también como residuo la unidad; luego, si *N* necesita tener un divisor primo y ese divisor primo no es menor que *P* ni igual a *P*, tiene que ser mayor que *P*.

Por tanto, hay un número primo mayor que *P*, al cual se puede aplicar el mismo razonamiento; entonces, la serie de los números primos es ilimitada.

TEOREMA 5

Si dos números son primos entre sí, todas sus potencias también lo son.

Siendo los números *a* y *b* primos entre sí, demostraremos que dos potencias cualesquiera de estos números, por ejemplo a^m y b^n, también son números primos entre sí.

Por definición de potencia, sabemos que:

$a^m = a \times a \times a \times a \ldots . m$ veces
$b^n = b \times b \times b \times b \ldots . n$ veces

Si las potencias a^m y b^n no fueran números primos entre sí, tendrían un factor primo común, por ejemplo *P*. Si *P*, dividiera a a^m y b^n, tendría que dividir *a* y *b*, según el teorema anterior, lo cual va en contra de lo que hemos supuesto (que *a* y *b* son primos entre sí). Por tanto, a^m y b^n no pueden tener ningún factor común, o sea que son números primos entre sí, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

2 y 3 son primos entre sí y dos potencias cualesquiera de estos números, por ejemplo, 32 que es 2^5 y 81 que es 3^4, también son números primos entre sí.

TEOREMA 6

Todo número primo que divide a una potencia de un número tiene que dividir a este número.

Siendo el número primo *P* que divide a a^n, demostraremos que *P* divide a *a*.

Por definición de potencia, sabemos que

$a^n = a \times a \times a \times a \ldots . n$ veces

El número primo *P* divide a a^n, por suposición, por tanto divide a su igual $a \times a \times a \times a \ldots . n$ veces.

Si *P* divide a este producto, tiene que dividir a uno de sus factores, porque todo número primo que divide a un producto de varios factores tiene que dividir a uno de ellos, pero todos los factores son *a* ; luego, *P* divide a *a*, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

El número primo 3 divide a 216 que es 6^3 y también divide a 6.

TEOREMA 7

Todo número primo que divide a un producto de varios factores, divide por lo menos a uno de ellos.

Siendo el número primo *P* que divide al producto *abcd*, demostraremos que *P* tiene que dividir a uno de estos factores.

El producto *abcd* se puede considerar descompuesto en dos factores, de este modo: *a(bcd).*

Si *P* divide a *a*, queda demostrado el teorema, y si *P* no divide a *a* será primo con él, porque hay un teorema que dice que si un número primo no divide a otro número es primo con él. Y *P* tendrá que dividir al otro factor *bcd,* porque hay un teorema que dice que si un número divide al producto de dos factores y es primo con uno de ellos, tiene que dividir al otro.

Por tanto, *P* divide al producto *bcd.*

Este producto se puede considerar descompuesto en dos factores: *b(cd).* Si *P* divide al factor *b* queda demostrado el teorema; si no lo divide es primo con él, y tendrá que dividir al otro factor *cd*.

Si *P* divide al factor *c*, queda demostrado el teorema; si no lo divide es primo con él y tendrá que dividir al otro factor, que es *d.*

Luego, *P* divide a uno de los factores, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

El número primo 3 que divide al producto 5 × 8 × 6 = 240, tiene que dividir por lo menos a uno de los factores y, en efecto, divide a 6.

EJERCICIOS

Menciona si son o no primos los números siguientes:

1. 97 2.	**2.** 59	**3.** 601	**4.** 997
5. 139	**6.** 271	**7.** 683	**8.** 1009
9. 169	**10.** 289	**11.** 713	**12.** 1099
13. 197	**14.** 307	**15.** 751	**16.** 1201
17. 211	**18.** 361	**19.** 811	**20.** 1207
21. 221	**22.** 397	**23.** 841	**24.** 1301
25. 229	**26.** 541	**27.** 881	**28.** 1309
29. 239	**30.** 529	**31.** 961	**32.** 2099
33. 451	**34.** 685	**35.** 985	**36.** 5047

TABLA DE NÚMEROS PRIMOS

Para formar una tabla de números primos desde el 1 hasta un número dado, se escribe la serie natural de los números desde la unidad hasta dicho número. En seguida, a partir del 2, que se deja, se tacha su cuadrado 4 y a partir del 4 se van tachando de dos en dos lugares todos los números siguientes múltiplos de 2.

A partir del 3, que se deja, se tacha su cuadrado 9 y desde el 9 se tachan de tres en tres lugares todos los números siguientes múltiplos de 3. A partir del 5, que se deja, se tacha su cuadrado 25 y desde el 25 se tachan de cinco en cinco lugares todos los números siguientes múltiplos de 5. A partir del 7, que se deja, se tacha su cuadrado 49 y desde el 49 se van tachando de siete en siete lugares todos los números siguientes múltiplos de 7.

A partir del 11, del 13, del 17 y los siguientes números primos, se procede de modo semejante: Se dejan esos números, se tacha su cuadrado, y a partir de éste se tachan los números siguientes, de tantos en tantos lugares como unidades tenga el número primo de que se trate. La operación termina al llegar a un número primo cuyo cuadrado quede fuera del límite dado. Los números primos son los que quedan sin tachar.

Ejemplo

Aquí formaremos una tabla de números primos del 1 al 150.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	~~43~~	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	~~73~~	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	~~79~~	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
~~121~~	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	~~133~~	~~134~~	~~135~~	~~136~~	~~137~~	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~

Los números primos del 1 al 150 son: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139 y 149.

En esta tabla la operación termina al llegar al número primo 13, cuyo cuadrado (169) queda fuera de la tabla.

Este procedimiento se conoce con el nombre de *Criba de Eratóstenes* [5].

[5] Se le llama *Criba* porque al tachar los números se va formando una especie de agujeros, y se le dice de *Eratóstenes* porque fue este célebre matemático griego el creador de dicho procedimiento.

ESCOLIO

Al escribir los números puede prescindirse de los números pares, excepto el 2, porque como se ve todos los números pares se tachan.

DIVISIBILIDAD POR NÚMEROS COMPUESTOS

De acuerdo con lo demostrado en el teorema anterior, si un número es divisible por dos factores primos entre sí, será divisible por su producto.

Un número es divisible por 6 cuando es divisible a la vez por 2 y por 3, es decir, cuando termina en cero o cifra par y la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3.

Un número es divisible por 12 cuando es divisible a la vez por 3 y por 4, es decir, cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3 y sus dos últimas cifras de la derecha son ceros o forman un múltiplo de 4.

Un número es divisible por **14** cuando es divisible a la vez por 2 y por 7; por **15** cuando es divisible a la vez por 3 y por 5; por **18** cuando es divisible a la vez por 2 y por 9; por **20** cuando es divisible a la vez por 4 y por 5; etc.

EJERCICIOS

1. Forma una tabla de números primos del 1 al 120.

2. Forma una tabla de números primos del 1 al 180.

3. Forma una tabla de números primos del 1 al 325.

4. Forma una tabla de números primos del 1 al 500.

TEOREMA PARA SABER SI UN NÚMERO ES PRIMO O NO

Para saber si un número dado es primo o no, se divide dicho número por todos los números primos menores que él y si se llega, sin obtener cociente exacto, a una división inexacta en la que el cociente sea igual o menor que el divisor, el número dado es primo. Si alguna división es exacta, el número dado no es primo.

Ejemplo

Queremos averiguar si el número 179 es o no primo. Lo dividimos por 2, 3, 5, 7, 11 y 13 sin obtener cociente exacto y al dividirlo por 13 nos da 13 de cociente. Demostraremos que 179 es primo, para lo cual bastará comprobar que no es divisible por ningún número primo mayor que 13.

Si 179 fuera divisible por algún número primo mayor que 13, por ejemplo 17, el cociente de esta división exacta sería menor que 13, porque si al dividir 179 entre 13 nos dio 13 de cociente, al dividirlo entre 17, mayor que 13, el cociente será menor que 13. Siendo a este cociente, como la división sería exacta, tendríamos:

$$179 = 17 \times a$$

179 sería divisible por a. Si a fuera primo, como es menor que 13, 179 sería divisible por un número primo menor que 13, lo cual, por hipótesis, es falso.

Si a fuera compuesto, al ser menor que 13, forzosamente tendría un factor primo menor que 13, que dividiría a 179, lo cual es imposible.

Luego, si 179 no es divisible por ningún número primo, es primo, ya que si fuera compuesto tendría por lo menos un factor primo mayor que 1.

Ejemplos

1) Averiguar si 191 es o no primo.

191	2	191	3	191	5	19	17
11	95	11	63	41	38	51	27
1		2		1		2	

191	11	191	13	191	17
81	17	61	14	21	11
4		9		4	

En esta última división el cociente 11 es menor que el divisor 17 y la división es inexacta, por tanto 191 es primo.

2) Averiguar si 853 es o no primo.

Aquí no haremos las divisiones por 2, 3, 5, 7 ni 11 (siempre que se vea que el cociente será mayor que el divisor), sino que aplicaremos los caracteres de divisibilidad que conocemos para ver si el número dado es o no divisible por estos números.

En este caso tenemos que 853 no es divisible por 2, porque no termina en cifra par; no es divisible por 3 porque

$$8 + 5 + 3 = 16$$

no es múltiplo de 3; tampoco lo es por 5 porque no termina en cero ni en 5; no lo es por 7 porque:

85'3 × 2 = 6
- 6
7'9 × 2 = 18
- 18
11 no da 0 ni múltiplo de 7

Tampoco es divisible por 11 porque

$$(3 + 8) - 5 = 11 - 5 = 6$$

no da cero ni múltiplo de 11.

En cada uno de estos casos, si se hubiera dividido, el cociente evidentemente no hubiera sido igual ni menor que el divisor.

Ahora procedemos a dividir por 13, 17, 19, etc.

853	13	853	17	853	19
73	65	003	50	093	44
8				17	

853	23	853	29
163	37	273	29
02		12	

En esta última división *inexacta* el cociente es igual al divisor, por tanto 853 es primo.

3) Averiguar si 391 es primo.

Aplicando los caracteres de divisibilidad, vemos que no es divisible por 2, 3, 5, 7 ni 11. Tendremos:

391	13	391	17
01	30	51	23
		0	

Esta última división es exacta, por tanto, 391 es compuesto.

TEOREMA

Si un número es divisible por dos o más factores primos entre sí dos a dos, también es divisible por su producto.

Siendo, el número N divisible por los factores a, b y c, que son primos entre sí dos a dos, probaremos que N es divisible por el producto ab y por el producto abc.

Como N es divisible por a, llamando q al cociente de dividir N entre a, tendremos:

$$N = aq \ (1)$$

El factor b divide a N por hipótesis, por tanto divide a su igual aq, pero como es primo con a por hipótesis, dividirá a q, porque todo número que divide al producto de dos factores y es primo con uno de ellos, tiene que dividir al otro factor. Llamando q' al cociente de dividir q entre b, tendremos:

$$q = bq' \ (2)$$

Si multiplicamos miembro por miembro las igualdades (1) y (2), tendremos:

$$Nq = aqbq'$$

Al dividir ambos miembros por *q,* para lo cual basta suprimir ese factor en cada producto, la igualdad no varía y tendremos:

$$N = abq' \text{ o sea } N = (ab)\, q'$$

igualdad que demuestra la primera parte del teorema, pues nos dice que el número *N* contiene al producto *ab* un número exacto de veces, *q'* veces, o sea que *N* es divisible por el producto *ab*, que es lo primero que queríamos demostrar.

Ahora bien: *c* divide a *N* por hipótesis, luego dividirá a su igual *aq,* pero como es primo con *a* dividirá a *q;* si divide a *q* dividirá a su igual *bq'* pero como es primo con *b* dividirá a *q'*. Llamando *q''* al cociente de dividir *q'* entre *c*, tendremos:

$$q' = cq'' \ (3)$$

Al *multiplicar* miembro por miembro las igualdades (1), (2) y (3), tendremos:

$$Nqq' = aqbq'cq''$$

Al dividir ambos miembros de esta igualdad por *q* y por *q'*, para lo cual basta suprimir estos factores en ambos productos, la igualdad no varía y tendremos:

$$N = abcq'' \text{ o sea } N = (abc)\, q''$$

igualdad que demuestra la segunda parte del teorema, pues nos indica que el número *N* contiene al producto *abc* un número exacto de veces, *q''* veces, o sea que *N* es divisible por el producto *abc,* que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA

El producto de tres números enteros consecutivos siempre es divisible por 6.

Siendo los números enteros consecutivos *n, n* + 1 y *n* + 2 y *P* su producto, tendremos:

$$n\,(n + 1)\,(n + 2) = P$$

De tres números enteros consecutivos por lo menos uno necesariamente es par, y otro necesariamente es múltiplo de 3.

Si 2 divide por lo menos a uno de estos factores, dividirá a P, que es múltiplo de ese factor, y si 3 divide a uno de estos factores, dividirá a P, que es múltiplo de ese factor. Ahora bien, siendo *P* divisible por 2 y por 3, que son primos entre sí, será divisible por 6, porque si un número es divisible por dos factores primos entre sí, es divisible por su producto. Luego, *P* es divisible por 6, que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA

Todo número primo **mayor que 3** equivale a un múltiplo de 6 aumentado o disminuido en una unidad.

Siendo N un número primo mayor que 3, demostraremos que:

$$N = \text{m. de } 6 \pm 1$$

Dividamos *N* entre 6, siendo *q* el cociente y *R* el residuo. Tendremos:

$$N = 6q + R$$

Siendo 6 el divisor, necesariamente *R* < 6. *R* no puede ser cero, porque si fuera cero, *N* sería divisible por 6, lo cual es imposible porque *N* es primo; luego *R* tiene que ser 1, 2, 3, 4 ó 5.

R no puede ser 2 porque tendríamos:

$$N = 6q + 2$$

y al ser estos dos sumandos divisibles por 2, su suma *N* sería divisible por 2, lo cual es imposible porque *N* es primo.
R no puede ser 3 porque tendríamos:

$$N = 6q + 3$$

y al ser estos dos sumandos divisibles por 3, su suma *N* sería divisible por 3, lo cual es imposible porque *N* es primo.

R no puede ser 4 porque tendríamos:

$$N = 6q + 4$$

y al ser estos dos sumandos divisibles por 2, *N* sería divisible por 2, lo cual es imposible.

Luego, si *R* tiene que ser 1, 2, 3, 4 ó 5 y no puede ser 2, 3 ni 4, necesariamente tiene que ser 1 ó 5.

Si *R* es 1, tendremos:

$$N = 6q + 1 = \text{m. de } 6 + 1$$

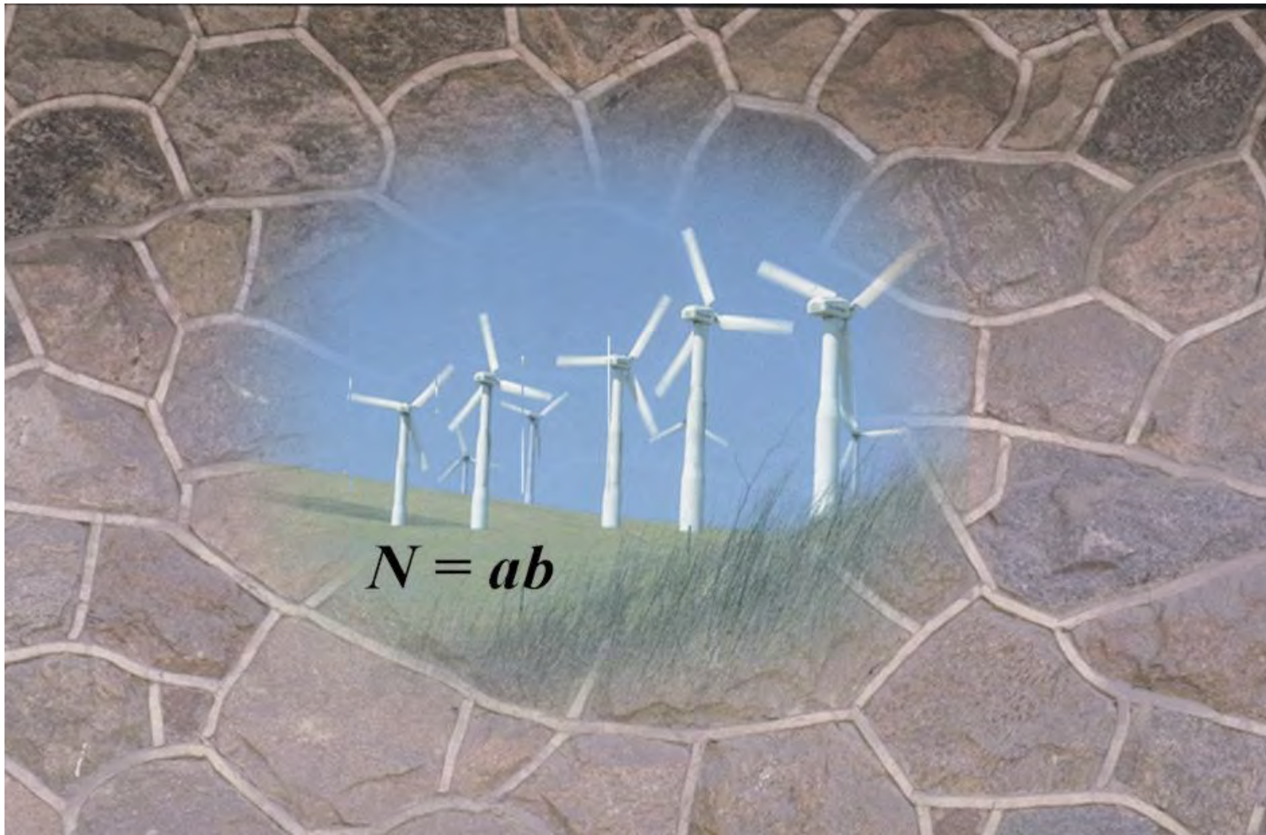
Si *R* es 5, tendremos:

$$N = 6q + 5 = \text{m. de } 6 + 5 = \text{m. de } 6 + (6 - 1) = \text{m. de } 6 - 1$$

De esta forma queda demostrado lo que nos proponíamos.

Ejemplos

11 = 12 -1 = m. de 6 -1
19 = 18 + 1 = m. de 6 + 1



Las bases de la aritmética se fueron estableciendo con los trabajos de Gauss, Euler y Fermat. Posteriormente, Tchebycheff realizó progresos notables respecto a los números primos; Landau trabajó sobre la distribución de dichos números.

CAPÍTULO XXI

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Todo número compuesto puede escribirse como producto de números primos.

El sistema más utilizado para descomponer un número en el producto de sus factores primos consiste en escribir el número considerado y trazar a su derecha una recta vertical. A la derecha de la recta se escribe el menor de los divisores que sea un número primo.

El cociente obtenido se escribe debajo del número y se vuelve a dividir por el menor de sus divisores que sea un número primo y así sucesivamente hasta obtener como cociente un número primo. Así, por ejemplo, para descomponer el número 630 en producto de factores primos procedemos del modo siguiente:

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

TEOREMA

Todo **número compuesto** es igual a un **producto** de factores primos.

Siendo el número compuesto *N*, demostraremos que *N* es igual a un producto de factores primos.

N tendrá por lo menos un divisor primo que llamaremos *a,* porque todo número compuesto tiene por lo menos un factor primo mayor que la unidad.

Dividiendo *N* entre *a* nos dará un cociente exacto que llamaremos *b*, y como el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, tendremos:

$N = ab$: (1)

Si *b* fuera primo, estaría demostrado el teorema. Si *b* no es primo, tendrá por lo menos un divisor primo que llamaremos *c*, y llamado *q* al cociente de dividir *b* entre *c*, tendremos:

$b = cq$:

Si sustituimos este valor de *b* en la igualdad (1), tendremos:

$N = acq$ (2)

Si *q* es primo queda demostrado el teorema, pero si es compuesto, tendrá un divisor primo que llamaremos *d*, y siendo *q* el cociente de dividir *q* entre *d*, tendremos:

$q = dq'$

Al sustituir este valor de *q* en (2) tendremos:

$N = acdq'$

Si *q'* es primo queda demostrado el teorema, pero si no lo es, tendrá un divisor primo, y así sucesivamente. Ahora bien, como los cocientes van disminuyendo, necesariamente llegaremos a un cociente primo, que dividido por sí mismo dará como cociente la unidad y entonces el número *N* será igual a un producto de factores primos, que es lo que queríamos demostrar.

Para descomponer un número compuesto en sus factores primos se divide el número dado por el menor de sus divisores primos; el cociente se divide también por el menor de sus divisores primos, y así sucesivamente con los demás cocientes, hasta encontrar un cociente primo que se dividirá por sí mismo.

Ejemplos

1) Descomponer 204 en sus factores primos

204	2
102	2
51	3
17	17
1	

$204 = 2^2 \times 3 \times 17$

Los factores primos de 204 son 2, 3 y 17.

2) Descomponer 25,230 en factores primos

25230	2
12615	3
4205	5
841	29
1	

$25230 = 2 \times 3 \times 5 \times 29^2$

Los divisores primos de 25,230 son 2, 3, 5 y 29.

EJERCICIOS

Descompón en sus factores primos los números siguientes:

1. 54
2. 341
3. 2401
4. 13690
5. 91
6. 377
7. 2093
8. 15700
9. 96
10. 408
11. 2890
12. 21677
13. 121
14. 441
15. 3249
16. 21901
17. 160
18. 507
19. 3703
20. 47601
21. 169

TEOREMA

Un **número compuesto no puede** descomponerse más que en **un solo sistema de factores primos**.

Siendo el número *N*, que descompuesto en sus factores primos es igual a *abcd*. Supongamos que el mismo número *N* admitiera otra descomposición en factores primos: *a' b' c' d'*. Demostraremos que la primera descomposición *abcd* es igual a la segunda *a'b'c'd'*.

Tenemos:

$N = abcd$
$N = a'b'c'd'$

y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, tendremos:

$abcd = a'b'c'd'$

El factor primo *a* divide al producto *abcd* por ser factor suyo, luego dividirá al producto *a'b'c'd'*, que es igual al anterior. Si *a* divide a este producto, tiene que dividir a uno de sus factores, porque un teorema dice que todo número primo que divide a un producto de varios factores tiene que dividir por lo menos a uno de ellos, por ejemplo a *a'*, por tanto *a* = *a'*, porque para que un número primo divida a otro es necesario que sean iguales. De este modo, al dividir el producto *abcd* por *a* (para lo cual basta suprimir este factor) y el producto *a'b'c'd'* por *a'* (para lo cual bastará suprimir este factor), la igualdad subsistirá y tendremos:

$bcd = b'c'd$

El factor primo *b* divide al producto *bcd* por ser uno de sus factores, por tanto dividirá a su igual *b'c'd'* ; pero si *b* divide al producto *b'c'd'*, tiene que dividir a uno de sus factores, por ejemplo *b'*, luego *b* = *b'*, por ser ambos números primos. Si dividimos el producto *bcd* por *b* y el producto *b'c'd'* por *b'* , la igualdad subsistirá y tendremos:

$cd = c'd'$

El factor primo *c* divide al producto *cd*, por tanto dividirá a su igual *c'd'*, y si *c* divide a *c'd'*, dividirá a uno de sus factores, por ejemplo *c'*, luego *c* = *c'*. Dividiendo el producto *cd* por *c* y el producto *c'd'* por *c'*, la igualdad subsistirá y tendremos:

$d = d'$

De este modo, si *a* = *a'* , *b* = *b'* , *c* = *c'* y *d* = *d'* o sea, si los factores de la primera descomposición son iguales a los de la segunda, ambas descomposiciones son iguales y no hay dos descomposiciones, sino una sola, que es lo que queríamos demostrar.

DIVISORES SIMPLES Y COMPUESTOS DE UN NÚMERO COMPUESTO

Para conocer cuántos divisores simples y compuestos tiene un número compuesto, se descompone en sus factores primos, después se escriben los exponentes de los factores primos considerando que si un factor no tiene exponente, se considera que su exponente es la unidad; se suma la unidad a cada exponente y los números resultantes se multiplican entre sí. El producto indicará el número total de divisores.

Ejemplos

1) Siendo el número 900. Para saber cuántos divisores simples y compuestos tiene, lo descomponemos en sus factores primos:

900	2
450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

Se escriben los exponentes 2, 2 y 2. A cada uno se le suma la unidad y se multiplican los números que resulten:

$$(2 + 1) \times (2 + 1) \times (2 + 1) = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

divisores entre simples o primos y compuestos son los que tienen el número 900.

2) Averiguar cuántos divisores tiene el número 1008

1008	2
504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

1008 = 24 × 32 × 7

Tendrá:
$(4 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 5 \times 3 \times 2 = 30$ divisores entre primos y compuestos.

Ya vimos cómo hallar cuántos divisores tiene un número compuesto; ahora descubriremos cuáles son esos divisores.

Para hallar todos los factores simples y compuestos de un número se descompone el número compuesto dado en sus factores primos.

A continuación se escriben en una línea la unidad y las potencias sucesivas del primer factor primo, y se traza una raya. Se multiplica esta primera fila de divisores por las potencias del segundo factor primo y al terminar se traza una raya. Se multiplican todos los divisores así encontrados por las potencias del tercer factor primo, y así sucesivamente hasta multiplicar por las potencias del último factor primo.

Ejemplos

1) Encontrar todos los divisores de 1800

1800	2
900	2
450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$

2^3	2	2^2	2^3
3^2	3	3^2	
5^2	5	5^2	

En seguida escribimos en una línea la unidad y las potencias del primer factor primo, que son 2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$; trazamos una raya y multiplicamos esos factores por 3; $3 \times 1 = 3$, $3 \times 2 = 6$, $3 \times 4 = 12$, $3 \times 8 = 24$, y después esos mismos factores de la primera fila por $3^2 = 9$ obteniendo: $9 \times 1 = 9$, $9 \times 2 = 18$, $9 \times 4 = 36$, $9 \times 8 = 72$; trazamos otra raya y multiplicamos todos los divisores que hemos obtenido hasta ahora, primero por 5 y luego por $5^2 = 25$ y tendremos:

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72
5	10	20	40
15	30	60	120
45	90	180	360
25	50	100	200
75	150	300	600
225	450	900	1800

Estos son todos los divisores simples y compuestos de 1800. Los simples o primos son 1, 2, 3 y 5; todos los demás son compuestos.

El último divisor encontrado siempre será igual al número dado.

2) Buscar todos los factores simples y compuestos de 15925, pero encontrando antes el número de divisores.

15925	5
3185	5
637	7
91	7
13	13
1	

$15925 = 5^2 \times 7^2 \times 13$

Tendrá $(2 + 1)\ (2 + 1)\ (1 + 1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$ divisores

Al encontrar los divisores:

5^2	5	5^2
7^2	7	7^2
13	13	

Tendremos:

	1	5	25
7 por la 1a. fila	7	35	175
$7^2 = 49$ por la 1a. fila	49	245	1225
13 por todos los anteriores. . .	13	65	325
	91	455	2275
	637	3185	15925

Se obtuvieron 18 divisores, el mismo número que encontramos antes.

EJERCICIOS

Busca todos los divisores simples y compuestos de los números siguientes, pero encontrando primero el número de divisores:

1. 9702 **R.** 36 fact.: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 7, 14, 21, 42, 63, 126, 49, 98, 147, 294, 441, 882, 11, 22, 33, 66, 99, 198, 77, 154, 231, 462, 693, 1386, 539, 1078, 1617, 3234, 4851, 9702.

2. 3366 **R.** 24 fact.: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 11, 22, 33, 66, 99, 198, 17, 34, 51, 102, 153, 306, 187, 374, 561, 1122, 1683, 3366.

3. 130 **R.** 8 fact.: 1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130.

4. 108 **R.** 12 fact.: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108.

5. 6727 **R.** 6 fact.: 1, 7, 31, 217, 961, 6727.

6. 6591 **R.** 8 fact.: 1, 3, 13, 39, 169, 507, 2197, 6591.

7. 2040 **R.** 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 17, 34, 68, 136, 51, 102, 204, 408, 85, 170, 340, 680, 255, 510, 1020, 2040.

8. 5929 **R.** 9 fact.: 1, 7, 49, 11, 77, 539, 121, 847, 5929.

9. 54 **R.** 8 fact.: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

10. 6006 **R.** 32 fact.: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 11, 22, 33, 66, 77, 154, 231, 462, 13, 26, 39, 78, 91, 182, 273, 546, 143, 286, 429, 858, 1001 2002, 3003, 6006.

11. 735 **R.** 12 fact.: 1, 3, 5, 15, 7, 21, 35, 105, 49, 147, 245, 735,

12. 162 **R.** 10 fact.: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162.

13. 567 **R.** 10 fact.: 1, 3, 9, 27, 81, 7, 21, 63, 189, 567.

14. 5819 **R.** 6 fact.: 1, 11, 23, 253, 529, 5819.

15. 5915 **R.** 12 fact.: 1, 5, 7, 35, 13, 65, 91, 455, 169, 845, 1183, 5915.

16. 1029 **R.** 8 fact.: 1, 3, 7, 21, 49, 147, 343, 1029.

17. 315 **R.** 12 fact.: 1, 3, 9, 5, 15, 45, 7, 21, 63, 35, 105, 315.

18. 340 **R.** 12 fact.: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 17, 34, 68, 85, 170, 340.

19. 204 **R.** 12 fact.: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 17, 34, 68, 51, 102, 204.

20. 216 **R.** 16 fact.: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 27, 54, 108, 216.

21. 4459 **R.** 8 fact.: 1, 7, 49, 343, 13, 91, 637, 4459.

22. 3159

23. 540 **R.** 24 fact.: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108, 5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180, 135, 270, 540.

24. 1080 **R.** 32 fact.: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 27, 54, 108, 216, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360, 135, 270, 540, 1080.

25. 4020 **R.** 24 fact.: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 5, 10, 20, 15, 30, 60, 67, 134, 268, 201, 402, 804, 335, 670, 1340, 1005, 2010, 4020.

26. 14161 **R.** 9 fact.: 1, 7, 49, 17, 119, 833, 289, 2023, 14161.

27. 210 **R.** 16 fact.: 1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210.

NÚMEROS PERFECTOS Y NÚMEROS AMIGOS

Los **números perfectos** son aquellos iguales a la suma de todos sus factores, excepto el mismo número, por ejemplo: 6, 28 y 496.

Los **números amigos** son dos números tales que cada uno es igual a la suma de los divisores del otro, por ejemplo: 220 y 284.



Se piensa que el primero que desarrolló el método del Máximo Común Divisor (también llamado divisiones sucesivas) fue Euclides. En su libro los "Elementos" este tema es desarrollado ampliamente.

CAPÍTULO XXII

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Es el **mayor número** que divide a dos o más números exactamente, y se expresa con las iniciales *m. c. d.*

Ejemplos

1) 18 y 24 son divisibles por 2, 3 y 6. ¿Algún número mayor que 6 divide a 18 y 24? No. Entonces, 6 es el m. c. d. de 18 y 24.

2) 60, 100 y 120 son divisibles por 2, 4, 5, 10 y 20. Ningún número mayor que 20 divide a los tres. Entonces, 20 es el m. c. d de 60, 100 y 120.

M.C.D. POR INSPECCIÓN

Cuando los números son pequeños, se puede hallar muy fácilmente el m. c. d. por simple inspección.

Dado que el m. c. d. de varios números tiene que ser divisor del **menor** de ellos, nos fijamos en el número **menor** de los dados y si divide a todos los demás, será el m. c. d. Si no los divide, buscamos el mayor de los divisores del menor que los divide a todos y éste será el m. c. d. que buscamos.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. d. de 48, 72 y 84.
48 no divide a los demás. De los divisores de 48, 24 no divide a 84 y 12 divide a 72 y 84, por tanto, 12 es el m. c. d. de 48, 72 y 84.

2) Hallar el m. c. d. de 18, 12 y 6.
El número menor 6 divide a 18 y a 12, por tanto 6 es el m. c. d. de 18, 12 y 6.

EJERCICIOS

Por simple inspección encuentra el m. c. d. de los números siguientes:

1. 24 y 32	**R.** 8
2. 16, 24 y 40	**R.** 8
3. 8 y 12	**R.** 4
4. 3, 6 y 9	**R.** 3
5. 22, 33 y 44	**R.** 11
6. 9 y 18	**R.** 9
7. 7, 14 y 21	**R.** 7
8. 20, 28, 36 y 40	**R.** 4
9. 20 y 16	**R.** 4
10. 15, 20, 30 y 60	**R.** 5
11. 18 y 24	**R.** 6
12. 24, 36 y 72	**R.** 12
13. 28, 42, 56 y 70	**R.** 14
14. 21 y 28	**R.** 7
15. 30, 42 y 54	**R.** 6

EJERCICIOS

Por divisiones sucesivas, encuentra el m. c. d. de los números siguientes:

1. 93 y 2387	**R.** 31
2. 19578 y 47190	**R.** 78
3. 35211 y 198803	**R.** 121
4. 1189 y 123656	**R.** 1189
5. 77615 y 108661	**R.** 15523
6. 144 y 520	**R.** 8
7. 4008004 y 4280276	**R.** 4004
8. 19367 y 33277	**R.** 107
9. 212 y 1431	**R.** 53
10. 948 y 1975	**R.** 79
11. 207207 y 479205	**R.** 207
12. 1164 y 3686	**R.** 194
13. 76 y 1710	**R.** 38
14. 111 y 518	**R.** 37
15. 303 y 1313	**R.** 101
16. 9879 y 333555	**R.** 111
17. 65880 y 92415	**R.** 915
18. 51 y 187	**R.** 17

MÉTODO PARA ENCONTRAR EL M.C.D.

Cuando no es sencillo encontrar el m.c.d. por simple inspección, éste puede encontrarse por alguno de estos métodos:

1) Por divisiones sucesivas.

2) Por descomposición en factores primos.

M.C.D. POR DIVISIONES SUCESIVAS

Teorema

El m.c.d. del dividendo y el divisor de una división inexacta es igual al del divisor y el residuo.

En los principios fundamentales de la divisibilidad demostramos que todo número que divide al dividendo y al divisor de una división inexacta divide al residuo, y que todo número que divide al divisor y al residuo de una división inexacta divide al dividendo. Por lo tanto, todo factor común del dividendo y el divisor será factor común del divisor y el residuo; por tanto, el m.c.d., que no es sino el mayor de estos factores comunes, será igual para el dividendo y el divisor que para el divisor y el residuo.

Ejemplo

En la división 350 | 80 el m.c.d. de 350 y 80 es 10, que
30   4

también es el m.c.d. de 80 y 30.

Siguiendo una regla práctica, se divide el mayor de los números dados por el menor. Si la división es exacta, el menor es el m. c. d, pero si es inexacta, se divide el divisor por el primer residuo; el primer residuo por el segundo, éste por el tercero y así sucesivamente hasta obtener una división exacta. El último divisor será el m. c. d.

Según estos ejemplos:

1) El m.c.d. de 150 y 25 es 25

	6
150	25
00	

2) El m.c.d. de 2227 y 2125 es 17

	1	20	1	5
2227	2125	102	85	17
102	85	17	00	

Si al hallar el m. c. d. encontramos un *residuo que sea primo y la división siguiente no es exacta*, no es necesario continuar la operación; podemos afirmar que el m. c. d. es 1, o sea que los números son primos entre sí.

Si buscamos el m. c. d. de 1471 y 462, tenemos:

	3	5	2
1471	462	85	37
85	37	11	

Aquí encontramos el residuo primo 37 y la división siguiente no es exacta, por lo que el m. c. d. es 1. En efecto, el m. c. d. de 1471 y 462 es el de 462 y 85 y éste el de 85 y 37.

Ahora bien, como 37 es primo, el m. c. d. de 85 y 37 sólo puede ser 37 ó 1; 37 no lo es, porque la división de 85 entre 37 no es exacta, por tanto tiene que ser 1, es decir que 1471 y 462 son primos entre sí.

TEOREMA

Todo divisor de dos números divide a su m. c. d.

Siendo el número *N* que divide a *A* y *B*. Para encontrar el m. c. d. de *A* y *B* llamaremos *Q, Q′* y *Q″* a los cocientes, *R* y *R′* a los residuos:

	Q	Q ′	Q ″
A	B	R	
B	R′	**0**	

Demostraremos que *N* divide a *R′* que es el m. c. d. de *A* y *B.*

Si *N* divide a *A* y *B*, dividendo y divisor de la primera división, también dividirá al residuo *R*, porque un teorema dice que todo número que divide al dividendo y al divisor de una división inexacta divide al residuo. En la segunda división entre *B* entre *R, N* que divide al dividendo y al divisor, dividirá al residuo *R′*, que es el m. c. d. de *A* y *B*.

El m. c. d. de 80 y 60 es 20.
Todo los divisores comunes de 80 y 60 como 2, 4, 5 y 10 dividen a 20.

TEOREMA

Si se multiplican o dividen dos números por un mismo número, su m. c. d. queda multiplicado o dividido por el mismo número.

Siendo *A* y *B* los números, encontraremos su m. c. d.:

Q	Q′	Q ″	
A	B	R	R′
R	R′	**0**	

Demostraremos que si *A* y *B* se multiplican o dividen por un mismo número *n, R′*, que es su m. c. d., también quedará multiplicado o dividido por *n*.

Si *A* y *B* se multiplican o dividen por *n*, el residuo *R* quedará multiplicado o dividido por *n*, porque si el dividendo y el divisor de una división inexacta se multiplican o dividen por un mismo número, el residuo queda multiplicado o dividido por dicho número.

En la segunda división, el dividendo *B* y el divisor *R* están multiplicados o divididos por *n*, por tanto el residuo *R′* también quedará multiplicado o dividido por *n*.

Pero *R′* es el m. c. d. de *A* y *B* ; entonces queda demostrado lo que nos proponíamos.

El m. c. d. de 80 y 24 es 8. Si multiplicamos
80 × 3 = 240 y 24 × 3 = 72
y hallamos el m.c.d. de 240 y 72 encontraremos que es 24, o sea 8 × 3.

EJERCICIOS

Por divisiones sucesivas encuentra el m. c. d. de estos números:

1. 3240, 5400, 5490, 6300 y 7110 **R.** 90
2. 45150, 51600, 78045 y 108489 **R.** 129
3. 2168, 7336 y 9184 **R.** 8
4. 136, 204, 221 y 272 **R.** 17
5. 425, 800 y 950 **R.** 25
6. 500, 560, 725, 4350, 8200 **R.** 5
7. 1560, 2400 y 5400 **R.** 120
8. 153, 357 y 187 **R.** 17
9. 31740, 47610, 95220 y 126960 **R.** 15870
10. 236, 590 y 1239 **R.** 59
11. 168, 252, 280 y 917 **R.** 7
12. 1240, 1736, 2852 y 3131 **R.** 31
13. 63860, 66340, 134385 y 206305 **R.** 155
14. 432, 648, 756, 702 y 621 **R.** 27
15. 770, 990, 1265 y 3388 **R.** 11
16. 78, 130 y 143 **R.** 13
17. 486, 729, 891, 1944 y 4527 **R.** 9
18. 465, 651 y 682 **R.** 31

TEOREMA

Todo divisor de varios números divide a su m. c. d.

Siendo el número *N* que divide a *A, B, C* y *D*, demostraremos que *N* divide al m. c. d. de *A, B, C* y *D*.

Así:

A. . . . } *d* . . .
B. . . .
C . . . . } *d′* . . .
D . . . . } *d ″*

Siendo que *N* divide a todos los números dados, dividirá a *A* y *B*, y si divide a estos dos números, dividirá a su m. c. d., que es *d*, porque todo divisor de dos números divide a su m. c. d. Si *N* divide a *d*, como también divide a *C*, por ser uno de los números dados, dividirá al m. c. d. de *d* y *C*, que es *d ′,* y si divide a *d ′*, como también divide a *D*, dividirá al m. c. d. de *d′* y *D*, que es *d″* . Pero *d″* es el m. c. d. de *A, B, C* y *D* ; de este modo queda demostrado lo que nos proponíamos.

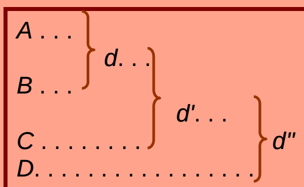
El m. c. d. de 100, 150 y 75 es 25. El 5, que es divisor común de estos números, divide también a 25.

CÓMO HALLAR EL M.C.D. DE MÁS DE DOS NÚMEROS POR DIVISIONES SUCESIVAS

Teorema

Para buscar el m. c. d. de más de dos números por divisiones sucesivas se halla primero el de dos de ellos; después el de otro de los números dados y el m. c. d. hallado; después el de otro número y el segundo m. c. d., y así sucesivamente hasta el último número. El último m. c. d. es el m. c. d. de todos los números dados.

Siendo los números *A, B, C* y *D*, encontraremos el m. c. d. de *A* y *B* siendo éste *d* ; hallemos el de *d'* y *C* siendo éste *d'*, hallemos el de *d'* y *D* siendo éste *d''*. Demostraremos que *d''* es el m. c. d. de *A, B, C* y *D*.



El m. c. d. de *A, B, C* y *D* divide a todos estos números; entonces, si divide a *A* y *B* dividirá a su m. c. d., que es *d*, porque todo divisor de dos números divide a su m. c. d: si divide a *d*, como también divide a *C*, por ser uno de los números dados dividirá al m. c. d. de *d* y *C*, que es *d'* y si divide a *d'*, como también divide a *D*, dividirá al m. c. d. de *d'* y *D*, que es *d''* ; por tanto *d''* no puede ser menor que el m. c. d. de *A*, *B, C* y *D*, porque si fuera menor, éste no podría dividirlo.

Por otra parte, *d''* divide a *D* y a *d'* por ser su m. c. d.; si divide a *d'*, dividirá a *C* y *d,* que son múltiplos de *d'* , y si divide a *d*, dividirá a *A* y *B*, que son múltiplos de *d*, por tanto *d''* es divisor de *A, B, C* y *D* ; pero no puede ser mayor que el m. c. d. de estos números, porque éste, como su nombre lo indica, es el mayor divisor común de estos números.

Ahora bien, si *d''* no es menor ni mayor que el m. c. d. de *A, B, C* y *D*, será igual a dicho m. c. d. Por tanto, *d''* es el m. c. d. de *A, B, C* y *D*.

Ejemplo

Encontrar el m. c. d. de 4940, 4420 y 2418 y 1092 por divisiones sucesivas.

Conviene empezar por los dos números menores para terminar más rápidamente.

Hallemos el m. c. d. de 2418 y 1092:

	2	4	1	2
2418	1092	234	156	78
234	156	78	00	

Ahora hallamos el m. c. d. de 4420 y 78:

	56	1	1
4420	78	52	26
520	26	0	
52			

Ahora hallamos el m. c. d. de 4940 y 26:

	190
4940	26
234	
000	

El m. c. d. de 4940, 4420, 2418 y 1092 es 26.

Al encontrar el m. c. d. de varios números *si alguno de los números dados es múltiplo de otro, puede prescindirse del mayor*. De tal forma, si queremos hallar el m. c. d. de 529, 1058, 690 y 2070, como 1058 es múltiplo de 529 prescindimos de 1058 y como 2070 es múltiplo de 690 prescindimos de 2070.

Nos quedamos con 529 y 690 y hallamos el m. c. d. de estos números, que es 23, a la vez m. c. d. de 529, 1058, 690 y 2070.

TEOREMA

Los cocientes que resultan de dividir dos o más números por su m. c. d. son primos entre sí.

Siendo los números *A*, *B* y *C*, cuyo m. c. d. es *d*.

Al dividir estos números por su m. c. d., que es *d*, también *d* quedará dividido por sí mismo, porque si varios números se dividen por un mismo número su m. c. d. queda dividido por dicho número. Así, $\frac{d}{d} = 1$; entonces, 1 será el m. c. d. de los cocientes, es decir que estos cocientes serán primos entre sí.

Al dividir 30 y 45 por su m. c. d. 15, los cocientes

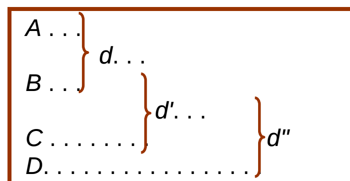
$$30 \div 15 = 2 \text{ y } 45 \div 15 = 3$$

son primos entre sí.

TEOREMA

Si se multiplican o dividen más de dos números por un mismo número, su m. c. d. quedará multiplicado o dividido por ese mismo.

Siendo los números *A, B, C* y *D*, encontraremos su m. c. d.:



Demostraremos que si *A, B, C* y *D* se multiplican o dividen por un mismo número *n*, su m. c. d.., que es *d''*, también quedará multiplicado o dividido por *n*.

Si *A* y *B* se multiplican o dividen por *n*, su m. c. d., *d* también, quedará multiplicado o dividido por *n*. Si *d* queda multiplicado o dividido por *n*, como lo está *C,* el m. c. d. de *d* y *C*, que es *d'*, también quedará multiplicado o dividido por *n*, y si *d'* queda multiplicado o dividido por *n*, como lo está *D* el m. c. d. de *d'* y *D*, que es *d''*, también quedará multiplicado o dividido por *n*. Pero *d''* es el m. c. d. de *A, B, C* y *D* ; por tanto, queda demostrado lo que nos proponíamos.

El m. c. d. de 36, 48 y 60 es 12.

Si dividimos 36 ÷ 6 = 6, 48 ÷ 6 = 8 y 60 ÷ 6 = 10 y buscamos el m. c. d. de 6, 8 y 10, encontramos que es 2, o sea el resultado de 12 ÷ 6.

MÉTODO ABREVIADO

El m. c. d. de varios números por descomposición en factores primos puede hallarse rápidamente dividiendo al mismo tiempo todos los números dados por un factor común, los cocientes nuevamente por un factor común y así sucesivamente hasta que los cocientes sean primos entre sí. El m. c. d. es el producto de los factores comunes.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. d. de 208, 910 y 1690 por el método abreviado.

208	910	1690	2	
104	455	845	13	m. c. d. = 2 × 13 = 26
8	35	65		

208, 910 y 1690 tenían el factor común 2. Los dividimos entre 2 y obtuvimos los cocientes 104, 455 y 845. Estos cocientes tenían el factor común 13, los dividimos entre 13 y obtuvimos los cocientes 8, 35 y 65, que no tienen ningún divisor común. El m. c. d. es 2 × 13 = 26.

2) Hallar el m. c. d. de 3430, 2450, 980 y 4410 por el método abreviado.

3430	245	980	4410	10	
343	245	98	441	7	m. c. d. =
49	35	14	63	7	10 × 7^2 = 490
7	5	2	9		

EJERCICIOS

1. Siendo 7 divisor común de 35 y 140, ¿será divisor del m. c. d. de estos dos números? ¿Por qué?

2. 9 es el m. c. d. de 18, 54 y 63. ¿Cuál será el m. c. d. de 6, 18 y 21? ¿Por qué?

3. Menciona tres divisores comunes de 12, 24 y 48.

4. Si 24 es el divisor y 8 el residuo de una división inexacta, ¿será 4 factor común del dividendo y el divisor? ¿Por qué?

5. ¿Pueden ser 4 y 6 los cocientes de dividir dos números por su m. c. d.?

6. Si 18 es el dividendo y 12 el divisor, ¿será 3 factor común del divisor y el residuo? ¿Por qué?

7. 8 es el m. c. d. de 32 y 108. ¿Cuál será el m. c. d. de 64 y 216?

8. ¿Será 11 divisor del m. c. d. de 33 y 45?

EJERCICIOS

Por descomposición en factores primos (puedes utilizar el método abreviado) encuentra el m. c. d. de:

1. 98, 294, 392 y 1176 — **R.** 98
2. 19578 y 47190 — **R.** 78
3. 320, 450, 560 y 600 — **R.** 10
4. 171, 342, 513 y 684 — **R.** 171
5. 144 y 520 — **R.** 8
6. 33, 77 y 121 — **R.** 11
7. 500, 560, 725, 4350 y 8200 — **R.** 5
8. 858, 2288 y 3575 — **R.** 143
9. 54, 76, 114 y 234 — **R.** 2
10. 464, 812 y 870 — **R.** 58
11. 3174, 4761, 9522 y 12696 — **R.** 1587
12. 2168, 7336 y 9184 — **R.** 8
13. 850, 2550, 4250 y 12750 — **R.** 850
14. 2645, 4232, 4761 y 5819 — **R.** 529
15. 465, 744, 837 y 2511 — **R.** 93

M. C. D. POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Teorema

El m. c. d. de varios números descompuestos en sus factores primos es el producto de sus factores primos comunes afectados de su menor exponente.

Siendo los números *A, B* y *C*, cuyo m. c. d. es *D*, dividamos estos números por el producto de sus factores primos comunes afectados de su menor exponente, que llamaremos *P*, y siendo *a, b* y *c* los cocientes:

$$\frac{A}{P}=a, \quad \frac{B}{P}=b, \quad \frac{C}{P}=c$$

Es evidente que los cocientes *a, b* y *c* serán primos entre sí, porque al dividir los números dados por *P*, el producto de los factores primos comunes con su menor exponente, los cocientes no tendrán más factor común que la unidad.

Al dividir los números *A, B* y *C* por *P*, su m. c. d. *D* también ha quedado dividido por *P*, porque si se dividen varios números por otro, su m. c. d. queda dividido por dicho número; por tanto, el m. c. d. de los cocientes *a, b* y *c* será $\frac{D}{P}$; pero sabemos que el m. c. d. de estos cocientes es la unidad; luego, $\frac{D}{P}=1$ y por lo tanto $D = P$, o sea que *D*, el m. c. d. de los números dados *A, B* y *C*, es igual a *P*, el producto de los factores primos comunes afectados de su menor exponente.

Siguiendo una regla práctica se descomponen los números dados en sus factores primos.

El m. c. d. se forma con el producto de los factores primos comunes con su menor exponente.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. d. de 1800, 420, 1260 y 108.

1800	2	420	2	1260	2	108	2
900	2	210	2	630	2	54	2
450	2	105	3	315	3	27	3
225	3	35	5	105	3	9	3
75	3	7	7	35	5	3	3
25	5	1		7	7	1	
5	5			1			
1							

$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$
$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$
$1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$
$108 = 2^2 \times 3^3$

Multiplicamos el 2, que es factor común por estar en las cuatro descomposiciones, afectado del exponente 2, que es el menor; por 3, que también está en las cuatro descomposiciones, afectado del exponente 1, que es el menor; los demás factores no se toman por no estar en todas las descomposiciones. Luego:

m. c. d. de 1800, 420, 1260 y 108 = $2^2 \times 3 = 12$

2) Hallar el m. c. d. de 170, 2890, 204 y 5100 por descomposición en factores. Como 2890 es múltiplo de 170, porque 2890 ÷ 170 = 17, y como 5100 es múltiplo de 204, porque 5100 ÷ 204 = 25, prescindimos de 2890 y 5100 y buscamos el m. c. d. de 170 y 204:

170	2	204	2
85	5	102	2
17	17	51	3
1		17	17
		1	

m. c. d. = 2 × 17 = 34

De aquí resulta que 34 es el m. c. d. de 170, 2890, 204 y 5100.

EJERCICIOS

1. Si quiero dividir cuatro varillas de 38, 46, 57 y 66 cm de longitud en pedazos de 9 cm de longitud, ¿cuántos cm habría que desperdiciar en cada varilla y cuántos pedazos obtendríamos de cada una?

2. Hay tres varillas de 60, 80 y 100 cm de longitud, deben dividirse en pedazos de la misma longitud sin que sobre ni falte nada. Señala tres longitudes posibles para cada pedazo.

3. Se tienen tres extensiones de 3675, 1575 y 2275 metros cuadrados de superficie y se quieren dividir en parcelas iguales. ¿Cuál será la superficie de cada parcela para que el número de parcelas de cada una sea el menor posible? **R.** 175 m^2



Figura 60

4. Se tienen tres extensiones de 3675, 1575 y 2275 metros cuadrados de superficie y se quieren dividir en parcelas iguales. ¿Cuál será la superficie de cada parcela para que el número de parcelas de cada una sea el menor posible? **R.** 175 m^2

5. Compré cierto número de trajes por \$2050. Vendí una parte en \$15000, cobrando por cada traje lo mismo que me había costado. Hallar el mayor valor posible de cada traje, y en ese supuesto, ¿cuántos trajes me quedan?
R. \$50 y quedan 11 trajes.

DIVISORES COMUNES

Los divisores comunes de dos o más números son divisores del m. c. d. de estos números, porque todo divisor de dos o más números divide a su m. c. d. Por tanto, para hallar los divisores comunes a dos o más números, buscamos el m. c. d. de estos números y luego los factores simples y compuestos de este m. c. d., y dichos factores serán los divisores comunes a los números dados.

Para encontrar los factores comunes a 180 y 252, se busca el m. c. d. de estos números:

	1	2	2
252	180	72	36
72	36	0	

En seguida se encuentran los factores simples y compuestos de 36:

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$36 = 2^2 \times 3^2$

2^2	2	2^2
3^2	3	3^2

1	2	4
3	6	12
9	18	36

Los factores comunes a 180 y 252 son 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.

EJERCICIOS

Encuentra los factores comunes a estos números:

1. 204, 510 y 459 **R.** 1, 3, 17 y 51

2. 315 y 525 **R.** 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 y 105

3. 60 y 210 **R.** 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30

4. 56, 84 y 140 **R.** 1, 2, 4, 7, 14 y 28

5. 400, 500, 350 y 250 **R.** 1, 2, 5, 10, 25 y 50

6. 48 y 72 **R.** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48

7. 18 y 72 **R.** 1, 2, 3, 6, 9 y 18

8. 90 y 225 **R.** 1, 3, 5, 9, 15 y 45

9. 320 y 800 **R.** 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80 y 160

10. 450 y 1500 **R.** 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75 y 150

11. 243, 1216, 2430 y 8100 **R.** 1, 3, 9, 27 y 81

12. 147 y 245 **R.** 1, 7 y 49

13. 40 y 200 **R.** 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 y 40

14. 120, 300 y 360 **R.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60

EJERCICIOS

1. Se quieren envasar 161 kilos, 253 kilos y 207 kilos de plomo en tres cajas de modo que los bloques de plomo de cada caja tengan el mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada pedazo de plomo y cuántos caben en cada caja?
R. 23 kilos; 7 en la primera; en la segunda 11 y en la tercera 9.

2. Se tienen tres cajas que contienen 1600 libras, 2000 libras y 3392 libras de jabón respectivamente. El jabón de cada caja está dividido en bloques del mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada bloque y cuántos bloques hay en cada caja?
R. Cada bloque pesa 16 libras; en la primera caja 100; en la segunda 125 y en la tercera 212.

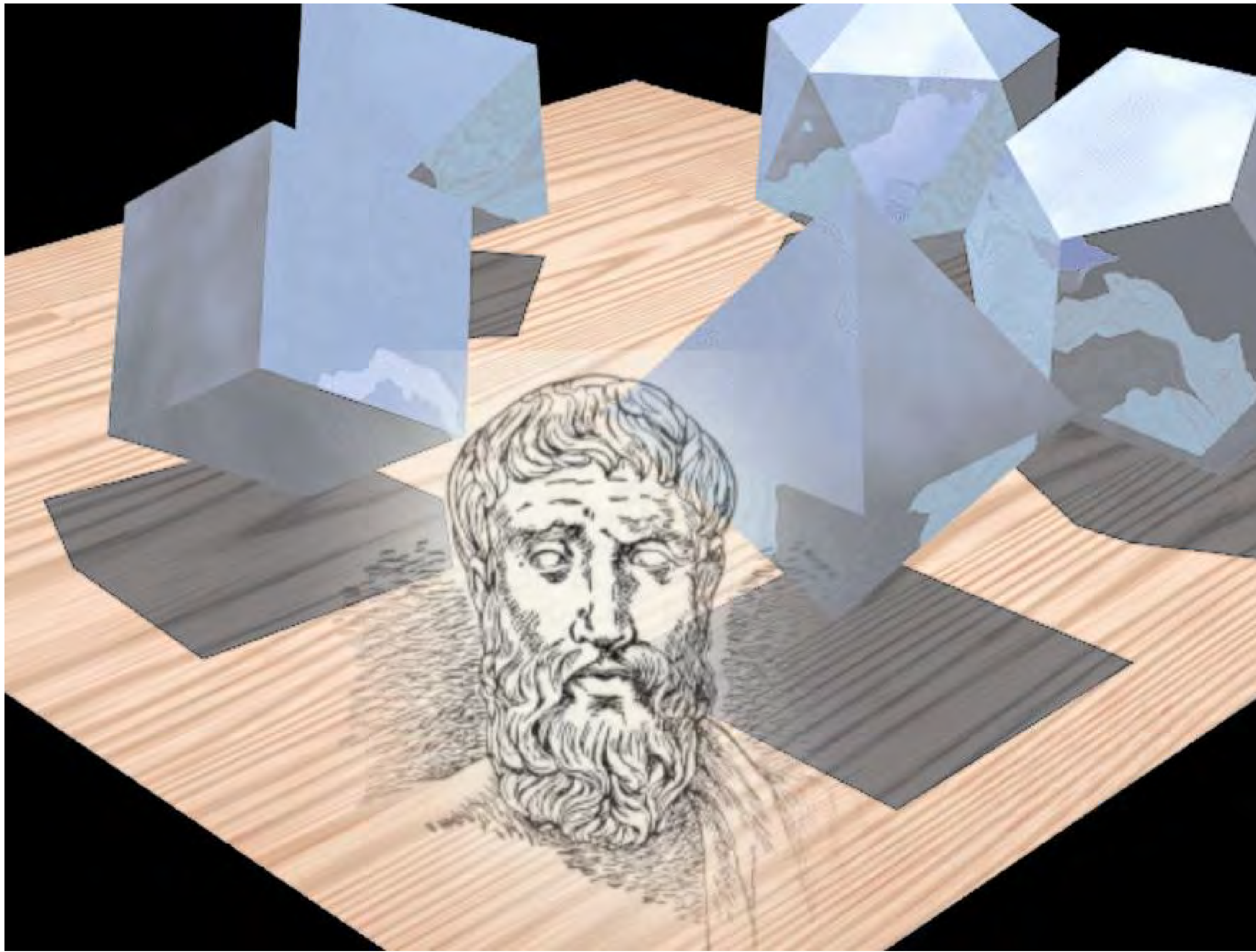
3. Un hombre tiene tres rollos de billetes de banco. En uno tiene \$4500, en otro \$5240 y en el tercero \$6500. Si todos los billetes son iguales y de la mayor denominación posible, ¿cuánto vale cada billete y cuántos billetes hay en cada rollo?
R. \$20; en el primero 225; en el segundo 262 y en el tercero 325.



Figura 61

4. Un padre da a un hijo 80 cts., a otro 75 cts. y a otro 60 cts., para repartir entre los pobres, de modo que todos den a cada pobre la misma cantidad. ¿Cuál es la mayor cantidad que podrían dar a cada pobre y cuántos los pobres socorridos?
R. 5 cts.; 43 pobres.

5. Dos cintas de 36 metros y 48 metros de longitud se quieren dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?
R. 12 metros.



En los "Elementos", Euclides desarrolló un procedimiento para resolver el mínimo común múltiplo de la siguiente forma: "el producto de dos números dividido entre el m.c.d. de ambos números, da el mínimo común múltiplo".

CAPÍTULO XXIII

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Se denomina mínimo común múltiplo (m.c.m.) de varios números al menor de los múltiplos comunes de dichos números.

Para determinar el mínimo común múltiplo de varios números se descomponen todos ellos en factores primos y a continuación se calcula el mínimo común múltiplo multiplicando todos los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

MÚLTIPLO COMÚN

El **múltiplo común** de dos o más números es todo número que contiene exactamente a cada uno de ellos.

Por ejemplo, 40 es múltiplo común de 20 y 8 porque 40 contiene a 20 dos veces y a 8 cinco veces exactamente.

Asimismo, 90 es múltiplo común de 45, 18 y 15 porque:

$$90 \div 45 = 2,\ 90 \div 18 = 5 \text{ y } 90 \div 15 = 6$$

sin que sobre residuo en ningún caso.

MÍNIMO COMÚN DE DOS O MÁS NÚMEROS

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor que contiene un número exacto de veces a cada uno de ellos y se expresa con las iniciales m. c. m.

Ejemplos

1) 36 contiene exactamente a 9 y a 6; 18 también contiene exactamente a 9 y a 6.

¿Algún número menor que 18 contiene exactamente a 9 y 6? No. Entonces, 18 es el m. c. m. de 9 y 6.

2) 60 es divisible por 2, 3 y 4; 48 y 12 también.

Como no hay ningún número menor que 12 divisible por 2, 3 y 4, entonces 12 es el m. c. m. de 2, 3 y 4.

MÍNIMO COMÚN POR INSPECCIÓN

La teoría del m. c. m. es de gran importancia por sus numerosas aplicaciones, y tratándose de números pequeños puede hallarse muy fácilmente por simple inspección, pues dado que el m. c. m. de varios números tiene que ser múltiplo del mayor de ellos, se investiga si el mayor de los números dados contiene exactamente a los demás, y de ser así, el mayor es el m. c. m. Si no los contiene, se busca el menor múltiplo del número mayor que los contiene exactamente y éste será el m. c. m. que buscamos.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. m. de 8 y 4.

Como el número mayor 8 contiene exactamente a 4 y 8 es el m. c. m. de 8 y 4.

2) Hallar el m. c. m. de 8, 6 y 4.

8 contiene exactamente a 4 pero no a 6. De los múltiplos de 8, 8 × 2 = 16 no contiene exactamente a 6, 8 × 3 = 24 contiene exactamente a 6 y 4. Por tanto, 24 es el m. c. m. de 8, 6 y 4.

3) Hallar el m. c. m. de 10, 12 y 15.

15 no contiene a los demás; 15 × 2 = 30 no contiene a 12; 15 × 3 = 45 tampoco; 15 × 4 = 60 contiene cinco veces a 12 y 6 veces a 10. Por tanto, 60 es el m. c. m. de 10, 12 y 15.

EJERCICIOS

Por simple inspección, menciona cuál es el m. c. m. de los números siguientes:

1. 7, 14, 21, 35 y 70	**R.** 210
2. 12 y 15	**R.** 60
3. 3, 4, 10 y 15	**R.** 60
4. 30, 15 y 60	**R.** 60
5. 7 y 14	**R.** 14
6. 5, 10 y 20	**R.** 20
7. 2, 5, 10 y 25	**R.** 50
8. 9 y 15	**R.** 45
9. 4, 8, 16 y 32	**R.** 32
10. 5, 10 y 15	**R.** 30
11. 10, 20, 40 y 80	**R.** 80
12. 21 y 28	**R.** 84
13. 2, 6, 18 y 36	**R.** 36
14. 5, 10, 15, 30 y 45	**R.** 90
15. 4 y 6	**R.** 12
16. 2, 3, 4 y 6	**R.** 12
17. 8 y 10	**R.** 40
18. 14 y 21	**R.** 42
19. 2, 4, 10, 20, 25 y 30	**R.** 300
20. 16 y 24	**R.** 48
21. 121, 605 y 1210	**R.** 1210
22. 2, 3 y 9	**R.** 18
23. 2, 6 y 9	**R.** 18
24. 3, 5 y 6	**R.** 30
25. 2, 3, 5 y 6	**R.** 30
26. 3, 6 y 12	**R.** 12
27. 4, 10, 15, 20 y 30	**R.** 60
28. 3, 15, 75 y 375	**R.** 375
29. 9 y 18	**R.** 18
30. 4, 5, 8 y 20	**R.** 40

MÉTODO PARA ENCONTRAR EL M.C.M.

Cuando se dificulta hallar el m. c. m. por simple inspección, por no ser pequeños los números, también se puede encontrar:

1) Por el m. c. d.

2) Por descomposición en factores primos.

M. C. M. POR EL M. C. D.

Teorema

El m. c. m. de dos números es igual a su producto dividido por su m. c. d.

El producto de dos números dados será múltiplo común de ambos, pues contendrá a cada factor tantas veces como unidades tenga el otro.

Si dividimos este producto por un factor común a los dos números dados, el cociente seguirá siendo múltiplo común de los dos números dados, aunque menor que el anterior.

Por tanto, si dividimos el producto por el mayor factor común de los dos números dados, que es su m. c. d., el cociente será también múltiplo común de los dos y el menor posible.

Siguiendo una regla práctica se multiplican los números dados y se divide este producto por el m. c. d. de ambos. El cociente será el m. c. m.

1) Hallar el m. c. m. de 84 y 120 por el m. c. d.

Busquemos el m. c. d.:

	1	2	3
120	84	36	12
36	12	0	

m. c. d. = 12

El m. c. m. será: $\frac{\mathbf{120 \times 84}}{\mathbf{12}} = 120 \times 7 = 840$

Aquí observamos que para dividir el producto 120 × 84 por 12 basta dividir uno de los factores, por ejemplo el 84, por 12.

2) Hallar el m. c. m. de 238 y 340.

Busquemos el m. c. d.:

	1	2	3
340	238	102	34
102	34	00	

m. c. d. = 34

El m. c. m. de 238 y 340 será: $\frac{\mathbf{238 \times 340}}{\mathbf{34}} = 238 \times 10 = 2380$

Por otra parte, si los dos números dados son primos entre sí, el m. c. m. es su producto, porque siendo su m. c. d. la unidad, al dividir su producto por 1 queda igual.

De este modo, el m. c. m. de 15 y 16, que son primos entre sí, será 15 × 16 = 240.

El m. c. m. de 123 y 143 será 123 × 143 = 17589

EJERCICIOS

Por medio del m. c. d., encuentra el m. c. m. de los números siguientes:

1. El m. c. d. de dos números es 115 y el m. c. m. 230. ¿Cuál es el producto de los dos números? **R.** 26450

2. 96 y 108 **R.** 864
3. 8 y 9 **R.** 72
4. 12 y 40 **R.** 120
5. 45 y 90 **R.** 90
6. 930 y 3100 **R.** 9300
7. 36 y 37 **R.** 1332

8. El m. c. d. de dos números es 2 y el m. c. m. 16. Encuentra el producto de los dos números. **R.** 32

9. 96 y 97 **R.** 9312
10. 14 y 21 **R.** 42
11. 105 y 210 **R.** 210
12. 254 y 360 **R.** 45720

13. El m. c. m. de dos números primos entre sí es 240. Si uno de los números es 15, ¿cuál es el otro? **R.** 16

14. 109 y 327 **R.** 327
15. 16 y 30 **R.** 240
16. 140 y 343 **R.** 6860
17. 12 y 44 **R.** 132
18. 15 y 45 **R.** 45
19. 80 y 120 **R.** 240
20. 124 y 160 **R.** 4960
21. 9504 y 14688 **R.** 161568

22. El m. c. m. de dos números es 450 y el m. c. d. 3. Si uno de los números es 18, ¿cuál es el otro? **R.** 75

23. 104 y 200 **R.** 2600
24. 101 y 102 **R.** 10302
25. 125 y 360 **R.** 9000
26. 320 y 848 **R.** 16960
27. 7856 y 9293 **R.** 73005808
28. 10108 y 15162 **R.** 30324

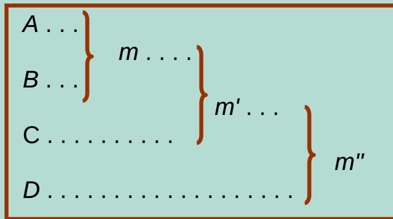
CÓMO ENCONTRAR EL M.C.M. POR EL M.C.D. DE VARIOS NÚMEROS

Para encontrar el **m. c. m. de más de dos números por el m. c. d.,** debemos basarnos en el siguiente:

Teorema

El m. c. m. de varios números no se altera porque se sustituyan dos de ellos por su m. c. m.

Siendo los números *A, B, C* y *D*, encontraremos el m. c. m. de *A* y *B* siendo éste m ; hallemos el de *m* y *C* y sea éste *m'* ; y *D* siendo éste *m''* . Demostraremos que *m''* es el m. c. m. de *A, B, C* y *D*.



Todo múltiplo común de *A, B, C* y *D*, por serlo en particular de A y B, será múltiplo de su m. c. m. m, porque todo múltiplo de dos números es múltiplo de su m. c. m.

Por otra parte, todo múltiplo común de m, *C y D*, por serlo en particular de *m*, lo será de sus divisores *A* y *B*, por tanto será múltiplo común de *A, B, C y D.*

Entonces, *A, B, C* y *D* tienen los mismos múltiplos comunes que *m*, *C* y *D* ; luego el m. c. m., que no es sino el menor de estos múltiplos comunes, será el mismo para A, B, *C* y *D* que para m, *C* y *D*.

Según esto, podemos sustituir A y B por su m. c. m., que es m ; así como m y C por su m. c. m., que es m' , quedando solamente m ' y D.

El m. c. m. de *m'* y *D,* que es *m''* , será el m. c. m. de *A, B, C y D*.

Siguiendo una regla práctica se halla primero el m. c. m. de dos números, luego el de otro de los números dados y el m. c. m. hallado, después el de otro de los números dados y el segundo m. c. m. hallado, y así sucesivamente hasta el último número.

El último m. c. m. será el m. c. m. de todos los números dados.

Si alguno de los números dados es divisor de otro, puede suprimirse al encontrar el m. c. m.

La operación con los restantes se debe empezar por los mayores, ya que así se termina más pronto.

Hallar el m. c. m. de 400, 360, 180, 54 y 18.

Como 18 es divisor de 54 y 180 de 360, prescindimos de ambos y nos quedamos con 400, 360 y 54.

Busquemos el m. c. m. de 400 y 360:

$$\frac{400 \times 360}{40} = 10 \times 360 = 3600$$

	1	9	
400	360	40	m. c. d. = 40
40	00		

Busquemos el m. c. m. de 3600 y 54:

$$\frac{3600 \times 54}{18} = 3600 \times 3 = 10800$$

	66	1	2	
3600	54	36	18	m. c. d. = 18
360	18	0		
36				

10800 es el m. c. m. de 400, 360, 180, 54 y 18.

Por otra parte, si los números dados son primos dos a dos, el m. c. m. es su producto, porque 1 es el m. c. d. de dos cualesquiera de ellos.

Ejemplo

El m. c. m. de 4, 7, 8 y 21 será:

$$4 \times 7 \times 8 \times 21 = 4704$$

EJERCICIOS

Por medio del m. c. d., encuentra el m. c. m. de estos números:

1. 3, 5, 15, 21 y 42 — **R.** 210
2. 2, 3 y 11 — **R.** 66
3. 100, 500, 2100 y 3000 — **R.** 21000
4. 108, 216, 306, 2040 y 4080 — **R.** 36720
5. 110, 115 y 540 — **R.** 136620
6. 15, 25 y 75 — **R.** 75
7. 56, 72, 124 y 360 — **R.** 78120
8. 9, 12, 16 y 25 — **R.** 3600
9. 2, 4, 8 y 16 — **R.** 16
10. 5, 10, 40 y 80 — **R.** 80
11. 210, 360 y 548 — **R.** 345240
12. 58, 85, 121, 145 y 154 — **R.** 4175710
13. 7, 14, 28 y 56 — **R.** 56
14. 100, 300, 800 y 900 — **R.** 7200
15. 13, 91, 104 y 143 — **R.** 8008
16. 15, 30, 60 y 180 — **R.** 180
17. 7, 8, 9 y 13 — **R.** 6552
18. 8, 10, 15 y 32 — **R.** 480
19. 15, 30, 45 y 60 — **R.** 180
20. 16, 84 y 114 — **R.** 6384
21. 33, 49, 165, 245 y 343 — **R.** 56595
22. 105, 306, 405 y 504 — **R.** 385560

M. C. M. POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Teorema

El m. c. m. de **varios números descompuestos en sus factores primos** es igual **al producto de los factores primos comunes y no comunes** afectados de su mayor exponente.

Siendo los números *A, B* y *C* que descompuestos en sus factores primos equivalen a:

$A = 2^3 \times 3^3 \times 5$
$B = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$
$C = 2 \times 3^2 \times 11$

Demostraremos que el m. c. m. de *A, B* y *C* será $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$, para lo cual debemos probar: 1) Que es común múltiplo de *A, B* y *C*. 2) Que es el menor común múltiplo de estos números.

El producto $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$ es **común múltiplo** de *A, B* y *C* porque contiene todos los factores primos de estos números con iguales o mayores exponentes, y es el **menor múltiplo** común de *A, B* y *C* porque cualquier otro producto menor tendría algún factor primo de menos, en cuyo caso no sería múltiplo del número que contuviera a ese factor; por ejemplo, el producto $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$ será menor que $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$, pero no será múltiplo de *C* porque no contiene el factor primo 11 que se halla en la descomposición de *C*; o teniendo los mismos factores primos, alguno estaría elevado a un exponente menor, en cuyo caso no sería múltiplo del número que contuviera ese factor elevado a un exponente mayor; por ejemplo, $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$ no sería múltiplo de *B* porque el factor primo 2 está elevado en este producto a la tercera potencia, y en el número *B* está a la cuarta potencia. Luego, si ningún otro número menor que el producto $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$ puede ser común múltiplo de A, *B* y *C,* el producto $2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$ es el m. c. m. de los números dados.

Siguiendo una regla práctica se descomponen los números en sus factores primos y el m. c. m. se forma con el producto de los factores primos comunes y no comunes afectados de su mayor exponente.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. m. de 50, 80, 120 y 300.

50	2	80	2	120	2	300	2
25	5	40	2	60	2	150	2
5	5	20	2	30	2	75	3
1		10	2	15	3	25	5
		5	5	5	5	5	5
		1		1		1	

$50 = 2 \times 5^2$
$80 = 2^4 \times 5$
$120 = 2^3 \times 3 \times 5$
$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

El m. c. m. estará formado por el factor primo 2, elevado a su mayor exponente que es 4, multiplicado por el factor primo 5, elevado a su mayor exponente que es 2, multiplicado por el factor primo 3, elevado a su mayor exponente que es 1. Así:

m. c. m. de 50, 80, 120 y 300 = $2^4 \times 5^2 \times 3 = 1200$

2) Hallar el m. c. m. de 24, 48, 56 y 168.

Como el 24 es divisor de 48 y el 56 de 168, prescindimos de 24 y 56 y buscamos solamente el m. c. m. de 48 y 168, porque todo múltiplo común de estos números será múltiplo de sus divisores 24 y 56:

48	2	168	2
24	2	84	2
12	2	42	2
6	2	21	3
3	3	7	7
1	1	1	

$48 = 2^4 \times 3$

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$

m. c. m. = $2^4 \times 3 \times 7 = 336$

De aquí resulta que 336 será el m. c. m. de 24, 48, 56 y 168.

MÉTODO ABREVIADO

El m. c. m. por descomposición en factores primos se puede hallar más rápido dividiendo cada uno de los números dados por su menor divisor; lo mismo se hace con los cocientes hasta que todos los cocientes sean 1. El m. c. m. es el producto de todos los divisores primos.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. m. de 30, 60 y 190 por el método abreviado. Prescindimos de 30, divisor de 60, y tenemos:

60	190	2
30	95	2
15	95	3
5	95	5
1	19	19
	1	

m. c. m. = 22 × 3 × 5 × 19 = 1140

El número que no es divisible por un factor primo se repite debajo, como se hizo dos veces con el número 95.

2) Hallar el m. c. m. de 360, 480, 500 y 600 por el método abreviado.

360	480	500	600	2
180	240	250	300	2
90	120	125	150	2
45	60	125	75	2
45	30	125	75	2
45	15	125	75	3
15	5	125	25	3
5	5	125	75	5
1	1	25	5	5
		5	1	5
		1		

m. c. m. = $2^5 \times 3^2 \times 5^3$

= 32 × 9 × 125 = 36000

EJERCICIOS

Por descomposición en factores primos (puedes utilizar el método abreviado) encuentra el m. c. m. de:

1. 15, 16, 48, y 150 **R.** 1200
2. 18, 24 y 40 **R.** 360
3. 100, 500, 700 y 1000 **R.** 7000
4. 46 y 69 **R.** 138
5. 2, 3, 6, 12 y 50 **R.** 300
6. 5, 7, 10 y 14 **R.** 70
7. 13, 19, 39 y 342 **R.** 4446
8. 32, 48 y 108 **R.** 864
9. 14, 38, 56 y 114 **R.** 3192
10. 14, 28, 30 y 120 **R.** 840
11. 32 y 80 **R.** 160
12. 108, 216, 432 y 500 **R.** 54000
13. 96, 102, 192 y 306 **R.** 9792
14. 21, 39, 60 y 200 **R.** 54600
15. 5476, 6845, 13690, 16428 y 20535 **R.** 82140
16. 98, 490, 2401 y 4900 **R.** 240100
17. 529, 1058, 1587 y 5290 **R.** 15870
18. 841, 1682, 2523 y 5887 **R.** 35322
19. 81, 100, 300, 350 y 400 **R.** 226800
20. 91, 845, 1690 y 2197 **R.** 153790

EJERCICIOS

1. Encuentra la menor distancia que se puede medir exactamente con una regla de 2, 5 u 8 pies de largo. **R.** 40 pies.

2. Tres galgos arrancan juntos en una carrera donde la pista es circular. Si el primero tarda 10 segundos en dar una vuelta a la pista, el segundo 11 segundos y el tercero 12 segundos, ¿al cabo de cuántos segundos pasarán juntos por la línea de salida y cuántas vueltas habrá dado cada uno en ese tiempo? **R.** 660 seg. u 11 min.; el 1º, 66; el 2º, 60 y el 3º, 55.

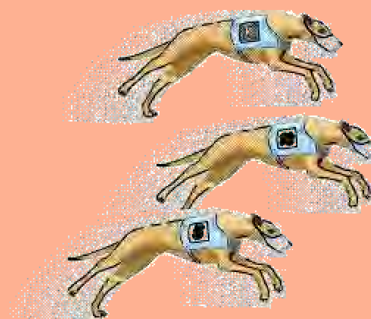


Figura 62

3. ¿Con 10 dólares puedo comprar un número exacto de lápices de 3 y 5 dólares?

4. ¿Con qué cantidad, menor que 40 dólares, podré comprar un número exacto de manzanas de 4, 6 y 9 dólares cada una?

5. ¿Con 30 dólares puedo comprar un número exacto de lápices de 3, 5 y 6 dólares cada uno? ¿Cuántos de cada precio?

6. Tres aviones salen de una misma ciudad, el 1º cada 8 días, el 2º cada 10 días y el 3º cada 20 días. Si salen juntos de ese aeropuerto el día 2 de enero, ¿cuáles serán las dos fechas más próximas en que volverán a salir juntos? (el año no es bisiesto). **R.** 11 de febrero y 23 de marzo.

7. ¿Cuál es la menor capacidad de un estanque que se puede llenar en un número exacto de minutos por cualquiera de tres llaves que vierten: la 1ª, 12 litros por minuto; la 2ª, 18 litros por minuto y la 3ª, 20 litros por minuto? **R.** 180 litros.



Los pueblos de la antigüedad dejaron vestigios en los que se pueden corroborar que utilizaban los quebrados o fracciones. La palabra *fractio*, que significa quebrar, romper, fue utilizada para designar este tipo de operaciones.

CAPÍTULO XXIV

NÚMEROS FRACCIONARIOS

Ya vimos que las **cantidades discontinuas o pluralidades**, al igual que las manzanas en un cesto, están constituidas por elementos naturalmente separados unos de otros.

Mientras que las **cantidades continuas**, como la longitud de una sala, constituyen un todo cuyos elementos no están naturalmente separados entre sí.

Así, la medición de las cantidades continuas y las divisiones inexactas ampliaron el campo de los números al introducir los números fraccionarios.

NÚMEROS FRACCIONARIOS

Los **números fraccionarios son necesarios en las divisiones inexactas**, debido a que la división exacta no siempre es posible, pues muchas veces resulta que no existe ningún entero que multiplicado por el divisor dé el dividendo (la división de 3 entre 5 no es exacta porque no hay ningún número entero que multiplicado por 5 dé 3). Por tanto, ¿cómo se puede expresar el cociente exacto de 3 entre 5? **por medio del número fraccionario** 3/5. Asimismo, el cociente exacto de 4 entre 7 se expresa 4/7 y el de 9 entre 5 se expresa 9/5.

Lo anterior nos dice que todo número fraccionario representa el cociente exacto de una división en la cual el numerador representa el dividendo y el denominador el divisor.

Un **número fraccionario o quebrado** es aquel que expresa una o varias partes iguales de la unidad principal. Si dicha unidad se divide en dos partes iguales, se les llama **medios**; si se divide en tres partes iguales, se les llama **tercios**; en cuatro partes iguales, **cuartos**; en cinco partes iguales, **quintos**; en seis partes iguales, **sextos**.

MEDIDAS Y UNIDADES

Para **medir una cantidad continua**, como la longitud de un segmento *AB* (figura 63), se elige una longitud cualquiera, digamos otro segmento *CD*, como **unidad de medida principal**.



Figura 63

En seguida se transporta el segmento *CD* sobre *AB* a partir de uno de sus extremos, y encontramos que el segmento *AB* contiene exactamente tres veces *CD*, es decir que la medida de *AB* abarca 3 veces la unidad principal o segmento *CD*. Sin embargo, no siempre la unidad principal está contenida un número exacto de veces en la longitud a medir.

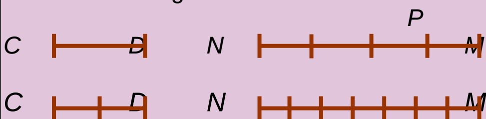


Figura 64

Por ejemplo, si medimos la longitud del segmento *NM* (figura 64) siendo la unidad principal el segmento *CD*, al transportar *CD* sobre *NM*, vemos que contiene 3 veces a *CD* y sobra el segmento *PM*. Entonces tomamos como unidad de medida la mitad de *CD* (unidad secundaria) y al llevarla sobre *NM* a partir del extremo *N*, vemos que está contenida exactamente 7 veces en *NM*. Aquí decimos que la medida del segmento *NM* representa 7 veces la mitad de *CD*, es decir, 7/2 de *CD.*

Fue necesario introducir un nuevo número

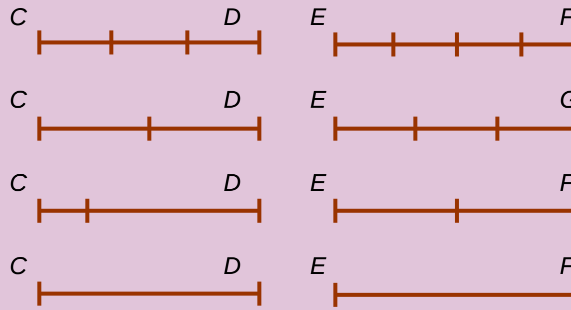


Figura 65

fraccionario: 7/2, donde el 2 (**denominador**) indica que la unidad principal (longitud de *CD*) se dividió en dos partes iguales, mientras que el 7 (**numerador**) indica que *NM* contiene siete de estas partes. Del mismo modo, para medir la longitud del segmento *EF* (figura 65) siendo *CD* la unidad principal, al transportar *CD* sobre *EF* vemos que este segmento es menor que la unidad principal *CD*. Si tomamos como unidad la mitad de *CD*, línea *a*), o su tercera parte, línea *b*), y las llevamos sobre *EF*, dicho segmento no contiene exactamente a estas **unidades secundarias**. Al tomar como unidad de medida la cuarta parte de *CD*, línea *c*), vemos que está contenida exactamente tres veces en *EF*. Así, la medida del segmento *EF* es 3 veces la cuarta parte de *CD*, o sea 3/4 de *CD*. En el número fraccionario 3/4 el denominador 4 indica que la **unidad secundaria** escogida es la cuarta parte de la unidad principal, y el numerador 3 indica las veces que *EF* contiene a dicha unidad secundaria.

En resumen, **unidad principal** es la unidad elegida y **unidades secundarias** son cada una de las partes iguales en que puede dividirse la unidad principal.

DEFINICIÓN DE QUEBRADO

Un quebrado **consta** de **dos términos: numerador** y **denominador**.

El **denominador** indica en cuántas partes iguales se dividió la unidad principal, y el **numerador**, cuántas de esas partes se toman.

En el quebrado **tres cuartos** $\frac{3}{4}$, el denominador 4 indica que la unidad se dividió en cuatro partes iguales, y el numerador 3, que se tomaron tres de esas partes iguales.

Para expresar un quebrado se escribe el numerador arriba separado del denominador por una diagonal o bien una raya, horizontal.

Así, cuatro quintos se escribe $\frac{4}{5}$ o 4/5 y cinco $\frac{5}{8}$ octavos ó 5/8.

Para leer un quebrado primero se enuncia el numerador y después el denominador.

Así, si el denominador es 2, se lee medios; si es 3, tercios; 4, cuartos; 8, octavos; 9, novenos, y 10, décimos. Pero cuando es mayor que 10, se añade al número la terminación avo.

Así, $\frac{3}{8}$ se lee tres octavos; $\frac{5}{7}$ cinco séptimos; $\frac{3}{11}$ tres onceavos; $\frac{4}{15}$ cuatro quinceavos.

INTERPRETACIÓN

Cualquier quebrado puede considerarse como el **cociente** de una división donde el numerador representa el dividendo y el denominador el divisor.

Así, $\frac{2}{3}$ representa el cociente de una división donde el numerador 2 es el dividendo y el denominador 3 el divisor.

Si $\frac{2}{3}$ es el cociente de la división de 2 entre 3, multiplicando este cociente $\frac{2}{3}$ por el divisor 3, nos daría el dividendo 2, y así es:

2 **tercios** × 3 = 2 **tercios** + 2 **tercios** + 2 **tercios** =
6 **tercios** = 2

porque si 3 **tercios** constituyen una unidad, 6 **tercios**, que es el doble, formarán 2 unidades.

Los quebrados se clasifican en **comunes y decimales**.

Los **quebrados comunes** son aquellos cuyo denominador no es la unidad seguida de ceros, por ejemplo $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{13}$.

Los **quebrados decimales** son aquellos cuyo denominador es la unidad seguida de ceros, por ejemplo $\frac{7}{10}, \frac{9}{100}, \frac{11}{1000}$.

Por otra parte, los quebrados también pueden definirse como **propios, iguales a la unidad e impropios**.

Un quebrado propio es aquel cuyo numerador es menor que el denominador, por ejemplo 2 , 3 , 5 . Por otro lado, **todo quebrado propio es menor que la unidad**. Así, $\frac{3}{4}$ es menor que la unidad porque ésta la hemos dividido en 4 partes iguales y sólo tomamos 3; por tanto, a $\frac{3}{4}$ le falta $\frac{1}{4}$ para ser igual a $\frac{4}{4}$, o sea la unidad.

Un **quebrado igual a la unidad** es aquel cuyo numerador es igual al denominador, por ejemplo 6, 7, 8,

Y un **quebrado impropio** es aquel cuyo numerador es mayor que el denominador, por ejemplo $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}$. Por otro lado, todo **quebrado impropio es mayor que la unidad**. Así, es mayor que la unidad porque ésta la hemos dividido en 5 partes iguales y tomamos 7 de estas partes; por tanto, $\frac{7}{5}$ excede en $\frac{2}{5}$ a $\frac{5}{5}$, o sea la unidad.

El número mixto consta de entero y quebrado: $1\frac{2}{3}, 4\frac{3}{5}$, y contiene un número exacto de unidades, y además de una o varias partes iguales de la unidad.

EJERCICIOS

1. Escribe estos quebrados: siete décimos; catorce diecinueveavos, doscientos cincuenta, ciento treinta y dosavos; cincuenta y nueve, cuatrocientos ochenta y nueveavos; mil doscientos cincuenta y tres, tres mil novecientos ochenta y nueveavos.

2. ¿En cuánto excede cada uno de estos quebrados a la unidad?:
$\frac{9}{7}, \frac{15}{11}, \frac{23}{11}, \frac{89}{7}, \frac{314}{237}, \frac{1089}{1000}$

3. ¿Cuántos tercios hay en una unidad, en 2 unidades, en 3 unidades?

4. ¿Cuántos novenos hay en una unidad, en 4 unidades, en 7 unidades?

5. ¿Cuántos cuartos, sextos y décimos hay en media unidad?

6. ¿Cuántos treceavos hay en 2 unidades, en 5 unidades?

7. ¿Cómo pueden interpretarse los quebrados ? $\frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{11}{12}$ Explícalo.

8. ¿Cuántos medios hay en la mitad de una unidad; cuántos tercios en la tercera parte de una unidad; cuántos octavos en la octava parte de una unidad?

9. Si divido una manzana en 5 partes iguales, a un niño le doy tres de esas partes y a otro el resto, ¿cómo se llaman las partes que di a cada uno?

10. De estos quebrados, ¿cuáles son mayores, menores e iguales a la unidad?:

$\frac{5}{7}, \frac{16}{9}, \frac{15}{15}, \frac{31}{96}, \frac{114}{113}, \frac{19}{14}, \frac{103}{103}, \frac{1350}{887}, \frac{95}{162}, \frac{162}{95}, \frac{95}{95}$.

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES COMUNES

TEOREMA 1

De varios quebrados con igual denominador, es mayor el que tenga mayor numerador.

Siendo los quebrados $\frac{7}{4}, \frac{5}{4}$ y $\frac{3}{4}$, decimos que $\frac{7}{4}$ es el mayor, ya que todos estos quebrados representan partes iguales de la unidad, o sea cuartos; por tanto será el mayor el que contenga mayor número de partes, es decir $\frac{7}{4}$.

TEOREMA 3

De varios quebrados con igual numerador, es mayor el que tenga menor denominador.

Siendo los quebrados $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}$ y $\frac{2}{7}$, decimos que $\frac{2}{3}$ es el mayor, ya que estos tres quebrados contienen el mismo número de partes de la unidad, dos cada uno; pero las partes del primero son mayores que las del segundo o el tercero, pues en el primero la unidad está dividida en tres partes iguales; en el segundo, en cinco, y en el tercero, en siete; por tanto $\frac{2}{3}$ es el mayor.

TEOREMA 5

Si a los dos términos de un quebrado propio se les suma un mismo número, el quebrado que resulta es mayor que el primero.

Siendo el quebrado $\frac{5}{7}$, sumemos un mismo número, por ejemplo el 2, a sus dos términos, y tendremos $\frac{5+2}{7+2} = \frac{7}{9}$. Decimos que . $\frac{7}{9} > \frac{5}{7}$.

A $\frac{7}{9}$ le faltan $\frac{2}{9}$ para ser igual a $\frac{9}{9}$, o sea la unidad, y a $\frac{5}{7}$ le faltan $\frac{2}{7}$ para ser igual a $\frac{7}{7}$, o sea la unidad; pero $\frac{2}{9}$ es menor que $\frac{2}{7}$; por tanto a $\frac{7}{9}$ le falta menos para ser igual a la unidad que a $\frac{5}{7}$, o sea, $\frac{7}{9} > \frac{5}{7}$.

TEOREMA 2

Si a los dos términos de un quebrado propio se les resta un mismo número, el quebrado que resulta es menor que el primero.

Siendo el quebrado $\frac{5}{7}$, restamos un mismo número, el 2, a sus dos términos y tendremos 5 - 2 = 3. Decimos que $\frac{3}{5} < \frac{5}{7}$.

A $\frac{3}{5}$ le faltan $\frac{2}{5}$ para ser igual a $\frac{5}{5}$, o sea la unidad, y a $\frac{5}{7}$ le faltan $\frac{2}{7}$ para ser igual a $\frac{7}{7}$, o sea la unidad; pero $\frac{2}{5}$ es mayor que $\frac{2}{7}$; por tanto, a $\frac{3}{5}$ le falta más para ser igual a la unidad que a $\frac{5}{7}$, o sea, $\frac{3}{5} < \frac{5}{7}$.

TEOREMA 4

Si a los dos términos de un quebrado impropio se les suma un mismo número, el quebrado que resulta es menor que el primero.

Siendo el quebrado $\frac{7}{5}$, sumemos un mismo número, el 2, a sus dos términos y tendremos: $\frac{7+2}{5+2} = \frac{9}{7}$. Decimos que . $\frac{9}{4} < \frac{7}{5}$

Así: $\frac{9}{7}$ excede a la unidad en $\frac{2}{7}$ y $\frac{7}{5}$ excede a la unidad en $\frac{2}{5}$; pero $\frac{2}{7}$ es menor que $\frac{2}{5}$; luego, $\frac{9}{7} < \frac{7}{5}$.

TEOREMA 6

Si a los dos términos de un quebrado impropio se les resta un mismo número, el quebrado que resulta es mayor que el primero.

Siendo el quebrado $\frac{7}{5}$, restemos un mismo número, el 2, a sus dos términos y tendremos $\frac{7-2}{5-2} = \frac{5}{3}$. Decimos que $\frac{5}{3} > \frac{7}{5}$.

Así: $\frac{5}{3}$ excede a la unidad en $\frac{2}{3}$, y $\frac{7}{5}$ la excede en $\frac{2}{5}$; pero $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{2}{5}$; luego, $\frac{5}{3} > \frac{7}{5}$.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es mayor; $\frac{17}{12}$ **o** $\frac{14}{9}$ **;** $\frac{6}{5}$ **u** $\frac{9}{8}$?

2. ¿En cuánto exceden $\frac{3}{4}$ **y** $\frac{17}{14}$ a la unidad? ¿Cuál es mayor de los dos?

3. Señala cuál de los quebrados siguientes es el mayor, cuál el menor y por qué:

$\frac{7}{10}, \frac{7}{16}, \frac{7}{19}, \frac{7}{23}$

4. ¿Cuál es mayor: $\frac{11}{15}$ **o** $\frac{7}{11}$ **;** $\frac{7}{9}$ **u** $\frac{11}{13}$?

5. ¿Cuánto le falta a $\frac{3}{5}$ para ser la unidad? ¿Y a $\frac{5}{7}$? ¿Cuál será mayor: $\frac{3}{5}$ **o** $\frac{5}{7}$?

6. Escribe de menor a mayor estos quebrados: $\frac{3}{5}, \frac{11}{13}, \frac{5}{7}$

7. ¿Disminuye o aumenta $\frac{16}{11}$ si se le suma 6 a sus dos términos? ¿y si se le resta 5?

8. ¿Aumenta o disminuye $\frac{8}{13}$ si se suma 5 a sus dos términos? ¿y si se resta 3?

9. Menciona cuál de los quebrados siguientes es el mayor, cuál el menor y por qué:

$\frac{5}{8}, \frac{11}{6}, \frac{13}{5}, \frac{19}{6}$

10. Escribe de mayor a menor estos quebrados:

$\frac{21}{17}, \frac{9}{5}$ **y** $\frac{7}{3}$.

11. De los siguientes quebrados, ¿cuál es el mayor?

$\frac{5}{7}, \frac{16}{9}, \frac{15}{15}, \frac{31}{96}, \frac{114}{113}, \frac{19}{14}, \frac{103}{103}, \frac{1350}{887}, \frac{95}{162}, \frac{162}{95}, \frac{95}{95}$

TEOREMA 7

Si el numerador de un quebrado se multiplica por un número, sin variar el denominador, el quebrado queda multiplicado por dicho número, y si se divide, el quebrado queda dividido por dicho número.

Ya sabemos que el quebrado representa el cociente de una división en la cual el numerador es el dividendo y el denominador el divisor.

Ahora bien, si el dividendo de una división se multiplica o divide por un número, el cociente queda multiplicado o dividido por dicho número.

Por lo tanto, al multiplicar o dividir el numerador, que es el dividendo, por un número, el quebrado, que es el cociente, quedará multiplicado o dividido por el mismo número.

TEOREMA 8

Si el denominador de un quebrado se multiplica o se divide por un número, el quebrado queda dividido en el primer caso y multiplicado en el segundo por el mismo número.

Un teorema dice que si el divisor se multiplica o se divide por un número, el cociente queda dividido en el primer caso y multiplicado en el segundo por dicho número.

Por lo tanto, al multiplicar o dividir el denominador, que es el divisor, por un número, el quebrado, que es el cociente, quedará dividido en el primer caso y multiplicado en el segundo por el mismo número.

TEOREMA 9

Si los dos términos de un quebrado se multiplican o se dividen por un mismo número, el quebrado no varía.

Al multiplicar el numerador por un número, el quebrado queda multiplicado por ese mismo número; pero al multiplicar el denominador por dicho número, el quebrado queda dividido por el mismo número, por tanto no varía.

Asimismo, al dividir el numerador por un número, el quebrado queda dividido por dicho número; pero al dividir el denominador por el mismo número el quebrado queda multiplicado por el mismo número, por tanto no varía.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál de estos quebrados es menor, y por qué? $\frac{7}{10}, \frac{7}{16}, \frac{7}{19}$, y $\frac{7}{23}$.

2. ¿Cuál de estos quebrados es mayor? $\frac{21}{17}, \frac{9}{5}$ y $\frac{7}{3}$.

3. ¿Qué alteración sufre el quebrado $\frac{14}{28}$ si multiplicamos sus dos términos por 3? ¿y si lo dividimos por 2?

4. Siendo el quebrado $\frac{75}{125}$, encuentra dos quebrados equivalentes de términos mayores y dos de términos menores.

5. ¿Qué alteración sufre el quebrado $\frac{8}{11}$ si multiplicamos el numerador por 2? ¿Y si lo dividimos por 4?

6. Haz los quebrados $\frac{7}{8}$ y $\frac{11}{12}$ dos veces mayores sin que varíe el numerador.

7. ¿Qué alteración sufre el quebrado $\frac{16}{19}$ al sustituir el 16 por 32, y por 2?

8. ¿Cuál de estos quebrados es menor $\frac{1}{5}, \frac{3}{15}, \frac{27}{135}$ y $\frac{6}{30}$?

9. ¿Es $\frac{20}{31}$ mayor o menor que $\frac{4}{31}$ y cuántas veces?

10. Haz los quebrados $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ cinco veces menores sin que varíe el numerador.

11. ¿Qué alteración tendrá $\frac{5}{6}$ si multiplicamos el denominador por 3? ¿Y si lo dividimos por 2?

12. ¿Es $\frac{7}{51}$ mayor o menor que $\frac{7}{17}$ y cuántas veces?

13. ¿Qué le sucede al quebrado $\frac{22}{105}$ si sustituimos el denominador por 5, por 35?

14. ¿Qué alteración sufre el quebrado $\frac{9}{15}$ al sustituir el 9 por 3 y el 15 por 5?

15. ¿Cuál de estos quebrados es mayor $\frac{2}{3}, \frac{8}{12}$ y $\frac{16}{24}$?

16. Siendo el quebrado $\frac{7}{9}$, encuentra tres quebrados equivalentes de términos mayores.

17. Haz los quebrados $\frac{2}{3}, \frac{8}{4}$ y $\frac{5}{6}$ tres veces mayores sin que varíe el denominador:

18. Haz los quebrados $\frac{8}{9}, \frac{16}{31}$ y $\frac{32}{45}$ ocho veces menores sin que varíe el denominador.

19. ¿Qué alteración sufre el quebrado $\frac{7}{8}$ si sustituimos el 8 por 2, por 24?

20. Haz los quebrados $\frac{2}{3}, \frac{8}{12}$ y $\frac{16}{24}$ cinco veces menores sin que varíe el numerador.

21. ¿Qué alteración sufre el quebrado $\frac{9}{15}$ si multiplicamos el numerador por 2? ¿Y si lo dividimos por 4?

22. ¿Qué alteración sufre el quebrado $\frac{5}{6}$ al sustituir el 5 por 16, y por 8?

23. ¿Cuál de estos quebrados es menor $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$?

24. ¿Qué le sucede al quebrado $\frac{20}{31}$ si sustituimos el denominador por 5, por 35?

CAPÍTULO XXV

REDUCCIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DE QUEBRADOS



Gracias a las medidas es que surgieron los números fraccionarios. La representación de estos números ha ido evolucionando, pues en la antigüedad cada pueblo los marcaba de manera diferente; por ejemplo, los griegos indicaban el numerador con un acento y el denominador con dos.

Como se vio anteriormente, la división de números enteros no es siempre posible.

Para resolver este problema, a cada par ordenado de números enteros (a, b) donde b no puede ser nunca cero se le hace corresponder el cociente $a : b$.

El número a/b así obtenido recibe el nombre de fracción, el número a se denomina numerador y el número b se llama denominador.

Se dice que una fracción es común cuando su denominador no es la unidad seguida de ceros y que es propia cuando su numerador es menor que su denominador.

CÓMO TRANSFORMAR UN NÚMERO MIXTO EN QUEBRADO

Para convertir un número mixto en quebrado se multiplica el entero por el denominador, al producto se le añade el numerador y esta suma se parte por el denominador.

Convertir $5\frac{2}{3}$ en quebrado impropio:

$$5\frac{2}{3} = \frac{5 \times 3 + 2}{3} = \frac{17}{3}$$

Una unidad equivale a 3 tercios, por lo tanto en 5 unidades hay 15 tercios, más los dos tercios que ya tenemos, suman 17 tercios.

EJERCICIOS

Convierte en quebrados, por simple inspección, los números siguientes:

1. $1\frac{1}{1}$	**2.** $4\frac{1}{3}$	**3.** $9\frac{2}{4}$	**4.** $11\frac{2}{5}$
5. $1\frac{1}{4}$	**6.** $6\frac{2}{5}$	**7.** $9\frac{5}{6}$	**8.** $12\frac{3}{4}$
9. $1\frac{1}{2}$	**10.** $7\frac{3}{4}$	**11.** $10\frac{1}{3}$	**12.** $15\frac{2}{3}$
13. $3\frac{1}{4}$	**14.** $8\frac{1}{2}$	**15.** $10\frac{3}{8}$	**16.** $16\frac{1}{4}$
17. $3\frac{1}{4}$	**18.** $8\frac{3}{7}$	**19.** $10\frac{5}{7}$	**20.** $18\frac{3}{6}$

EJERCICIOS

Convierte en quebrados estos números:

1. $15\frac{3}{8}$ **2.** $17\frac{5}{18}$ **3.** $60\frac{3}{17}$ **4.** $90\frac{19}{31}$

5. $12\frac{3}{11}$ **6.** $23\frac{4}{27}$ **7.** $65\frac{7}{80}$ **8.** $90\frac{19}{37}$

9. $16\frac{7}{8}$ **10.** $31\frac{5}{31}$ **11.** $5\frac{7}{105}$ **12.** $101\frac{13}{18}$

13. $19\frac{3}{11}$ **14.** $42\frac{7}{25}$ **15.** $8\frac{1}{102}$ **16.** $104\frac{13}{17}$

17. $20\frac{3}{19}$ **18.** $53\frac{9}{17}$ **19.** $25\frac{7}{73}$ **20.** $500\frac{9}{63}$

ENTEROS CONTENIDOS EN UN QUEBRADO IMPROPIO

Para encontrar los enteros contenidos en un quebrado impropio, se divide el numerador por el denominador. Si el cociente es exacto, representa los enteros; si no lo es, se le añade al entero un quebrado que tenga por numerador el residuo y por denominador el divisor.

1) Encontrar los enteros contenidos en $\frac{32}{4}$

$$\begin{array}{l|l} 32 & 4 \\ \hline 0 & 8 \end{array} \qquad \frac{32}{4} = 8$$

Una unidad contiene $\frac{4}{4}$, por lo tanto en $\frac{32}{4}$ habrá tantas unidades como veces esté contenido 4 en 32, o sea 8.

2) Convertir en quebrado $\frac{335}{228}$

$$\begin{array}{l|l} 335 & 228 \\ \hline 107 & 1\frac{107}{228} \end{array} \qquad \frac{335}{228} = 1\frac{107}{228}$$

EJERCICIOS

Encuentra por simple inspección, los enteros contenidos en:

1. $\frac{112}{11}$ **2.** $\frac{108}{12}$

3. $\frac{8}{5}$ **4.** $\frac{63}{10}$

5. $\frac{95}{18}$ **6.** $\frac{21}{7}$

7. $\frac{125}{25}$ **8.** $\frac{19}{7}$

9. $\frac{80}{11}$ **10.** $\frac{100}{11}$

11. $\frac{32}{8}$ **12.** $\frac{7}{2}$

13. $\frac{25}{8}$ **14.** $\frac{85}{19}$

15. $\frac{102}{19}$ **16.** $\frac{81}{9}$

17. $\frac{5}{2}$ **18.** $\frac{31}{4}$

19. $\frac{115}{35}$ **20.** $\frac{354}{61}$

21. $\frac{815}{237}$ **22.** $\frac{4200}{954}$

23. $\frac{54137}{189}$ **24.** $\frac{174}{53}$

25. $\frac{401}{83}$ **26.** $\frac{1001}{184}$

27. $\frac{8632}{1115}$ **28.** $\frac{60185}{419}$

29. $\frac{195}{63}$ **30.** $\frac{563}{54}$

31. $\frac{1563}{315}$ **32.** $\frac{9732}{2164}$

33. $\frac{89356}{517}$ **34.** $\frac{215}{73}$

35. $\frac{601}{217}$ **36.** $\frac{2134}{289}$

37. $\frac{12485}{3284}$ **38.** $\frac{102109}{1111}$

39. $\frac{318}{90}$ **40.** $\frac{743}{165}$

41. $\frac{3115}{417}$ **42.** $\frac{335}{228}$

43. $\frac{184236}{17189}$ **44.** $\frac{34136}{7432}$

45. $\frac{17760}{15}$ **46.** $\frac{36278}{17}$

47. $\frac{128640}{40}$ **48.** $\frac{168944}{32}$

REDUCCIÓN DE UN ENTERO A QUEBRADO

Para reducir un entero a quebrado el modo más sencillo consiste en ponerle por denominador la unidad

$$5 = \frac{5}{1}, 17 = \frac{17}{1}$$

Para reducir un entero a quebrado de denominador dado se multiplica el entero por el denominador y el producto se parte por el denominador.

1) Reducir 6 a quebrado equivalente de denominador 7.

$$6 = \frac{6 \times 7}{7} = \frac{42}{7}$$

Si una unidad equivale a 7 séptimos, 6 unidades serán 6 × 7 = 42 séptimos.

2) Reducir 17 a novenos.

$$17 = \frac{17 \times 9}{9} = \frac{153}{9}$$

Si una unidad contiene 9 novenos, 17 unidades contendrán 17 × 9 = 153 novenos.

EJERCICIOS

Reducir:

1. $4 = \frac{}{2}$ **2.** $5 = \frac{}{8}$ **3.** $4 = \frac{}{3}$ **4.** $7 = \frac{}{2}$

5. $9 = \frac{}{6}$ **6.** $11 = \frac{}{9}$ **7.** $5 = \frac{}{12}$ **8.** $13 = \frac{}{11}$

9. $28 = \frac{}{4}$ **10.** $8 = \frac{}{2}$ **11.** $30 = \frac{}{9}$ **12.** $9 = \frac{}{1}$

13. $6 = \frac{}{4}$ **14.** $7 = \frac{}{11}$ **15.** $8 = \frac{}{5}$ **16.** $6 = \frac{}{12}$

17. $12 = \frac{}{10}$ **18.** $20 = \frac{}{5}$ **19.** $49 = \frac{}{7}$ **20.** $52 = \frac{}{3}$

EJERCICIOS

Reducir

1. 95 a 95avos **R.** $\frac{9025}{95}$

2. 61 a 84avos **R.** $\frac{5124}{84}$

3. 2 a tercios **R.** $\frac{6}{3}$

4. 1184 a 15avos **R.** $\frac{17760}{15}$

5. 3 a cuartos **R.** $\frac{12}{4}$

6. 4 a cuartos **R.** $\frac{16}{4}$

7. 101 a 12avos **R.** $\frac{1212}{12}$

8. 5 a tercios **R.** $\frac{15}{3}$

9. 9 a novenos **R.** $\frac{81}{9}$

10. 306 a 53avos **R.** $\frac{16218}{53}$

11. 15 a onceavos **R.** $\frac{165}{11}$

12. 3216 a 40avos **R.** $\frac{128640}{40}$

13. 31 a 22avos **R.** $\frac{682}{22}$

14. 201 a 32avos **R.** $\frac{6432}{32}$

15. 43 a 51avos **R.** $\frac{2193}{51}$

16. 84 a 92avos **R.** $\frac{7728}{92}$

17. 26 a treceavos **R.** $\frac{338}{13}$

18. 153 a 14avos **R.** $\frac{2142}{14}$

19. 5217 a 32avos **R.** $\frac{168944}{32}$

20. 2134 a 17avos **R.** $\frac{36278}{17}$

21. 2662 a 15avos **R.** $\frac{39930}{15}$

22. 3535 a 20avos **R.** $\frac{70700}{20}$

23. 1259 a 30 avos **R.** $\frac{37770}{30}$

24. 8593 a 16avos **R.** $\frac{137488}{16}$

EJERCICIOS

1. 301 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{8127}{27}$

2. 8888 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{97768}{11}$

3. 99 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{2277}{23}$

4. 3789 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{64413}{17}$

5. 186 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{4092}{22}$

6. 201 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{8341}{41}$

7. 1000 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{56000}{56}$

8. 255 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{9945}{39}$

9. 405 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{11340}{28}$

10. 104 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{1976}{19}$

11. 999 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{13986}{14}$

12. 4444 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{66660}{15}$

13. 2356 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{44764}{19}$

14. 96 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{1440}{15}$

15. 3525 a quebrado equivalente de denominador **R.** $\frac{42300}{12}$

REDUCCIÓN DE UNA FRACCIÓN A TÉRMINOS MAYORES O MENORES

Para reducir una fracción a términos mayores o menores existen dos opciones:

1) Para reducir una fracción a otra fracción equivalente de denominador dado, cuando el nuevo denominador es múltiplo del primero, o reducir una fracción a términos mayores, el denominador de la nueva fracción será el dado.

Para hallar el numerador se multiplica el numerador del quebrado dado por el cociente que resulta de dividir los dos denominadores.

a) Convertir en quebrado equivalente de denominador 24.

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 6}{24}=\frac{18}{24}$$

Para que 4 se convierta en 24 hay que multiplicar por 6, luego para que el quebrado no varíe hay que multiplicar el numerador por 6:

$$3 \times 6 = 18$$

b) Convertir en treinta cincoavos

$$\frac{2}{7}=\frac{2\times 5}{35}=\frac{10}{35}$$

Para que 7 se convierta en 35 hay que multiplicar por 5; luego, para que el quebrado no varíe hay que multiplicar el numerador por 5:

$$2 \times 5 = 10$$

EJERCICIOS

Reducir, por simple inspección:

1. $\frac{1}{2} = \frac{}{4}$ **2.** $\frac{3}{5} = \frac{}{25}$ **3.** $\frac{2}{11} = \frac{}{33}$

4. $\frac{1}{3} = \frac{}{6}$ **5.** $\frac{1}{6} = \frac{}{19}$ **6.** $\frac{5}{12} = \frac{}{24}$

7. $\frac{1}{4} = \frac{}{12}$ **8.** $\frac{2}{7} = \frac{}{21}$ **9.** $\frac{1}{13} = \frac{}{39}$

10. $\frac{1}{5} = \frac{}{20}$ **11.** $\frac{1}{8} = \frac{}{24}$ **12.** $\frac{1}{14} = \frac{}{56}$

13. $\frac{2}{3} = \frac{}{12}$ **14.** $\frac{2}{9} = \frac{}{38}$ **15.** $\frac{2}{16} = \frac{}{45}$

16. $\frac{3}{4} = \frac{}{20}$ **17.** $\frac{1}{10} = \frac{}{40}$ **18.** $\frac{7}{16} = \frac{}{30}$

EJERCICIOS

Reducir:

1. $\frac{7}{102}$ a quebrado equivalente de denominador 816 **R.** $\frac{56}{816}$

2. $\frac{13}{72}$ a quebrado equivalente de denominador 576 **R.** $\frac{104}{576}$

3. $\frac{11}{91}$ a quebrado equivalente de denominador 637 **R.** $\frac{77}{637}$

4. $\frac{113}{123}$ a quebrado equivalente de denominador 1107 **R.** $\frac{1017}{1107}$

5. $\frac{7}{94}$ a quebrado equivalente de denominador 752 **R.** $\frac{56}{752}$

6. $\frac{7}{65}$ a quebrado equivalente de denominador 520 **R.** $\frac{56}{520}$

7. $\frac{7}{81}$ a quebrado equivalente de denominador 729 **R.** $\frac{63}{729}$

8. $\frac{13}{98}$ a quebrado equivalente de denominador 882 **R.** $\frac{117}{882}$

EJERCICIOS

Reducir

1. $\frac{7}{29}$ a 841avos **R.** $\frac{203}{841}$

2. $\frac{79}{83}$ a 415avos **R.** $\frac{395}{415}$

3. $\frac{3}{5}$ a 35avos **R.** $\frac{21}{35}$

4. $\frac{12}{19}$ a 133avos **R.** $\frac{84}{133}$

5. $\frac{33}{29}$ a 174avos **R.** $\frac{198}{174}$

6. $\frac{6}{7}$ a 63avos **R.** $\frac{54}{63}$

7. $\frac{5}{11}$ a 121avos **R.** $\frac{55}{121}$

8. $\frac{1}{6}$ a 42avos **R.** $\frac{7}{42}$

9. $\frac{4}{13}$ a 130avos **R.** $\frac{40}{130}$

10. $\frac{7}{8}$ a 96avos **R.** $\frac{84}{96}$

11. $\frac{8}{17}$ a 102avos **R.** $\frac{48}{102}$

12. $\frac{8}{21}$ a 105avos **R.** $\frac{40}{105}$

11. $\frac{9}{22}$ a 176avos **R.** $\frac{72}{176}$

12. $\frac{24}{25}$ a 200avos **R.** $\frac{192}{200}$

REDUCCIÓN DE FRACCIÓN DADA A FRACCIÓN EQUIVALENTE

Para reducir una fracción dada a otra fracción equivalente de denominador dado, cuando el nuevo denominador es divisor del primero, o para reducir una fracción a términos menores, el denominador de la nueva fracción será el dado. Para hallar el numerador se divide el numerador del quebrado dado por el cociente que resulta de dividir los dos denominadores.

1) Convertir $\frac{15}{24}$ en quebrado equivalente de denominador 8.

$$\frac{15}{24}=\frac{15\div 3}{8}=\frac{5}{8}$$

Para que 24 se convierta en 8 hay que dividirla entre 3; luego, para que el quebrado no varíe hay que dividir el numerador entre 3: 15 ÷ 3 = 5.

2) Convertir $\frac{49}{91}$ en treceavos

$$\frac{49}{91}=\frac{49\div 7}{13}=\frac{7}{13}$$

Para que 91 se convierta en 13 hay que dividirlo entre 7; luego, para que el quebrado no varíe hay que dividir el numerador entre 7: 49 ÷ 7 = 7.

EJERCICIOS

Reducir, por simple inspección:

1. $\frac{15}{20}=\frac{}{4}$ **2.** $\frac{2}{4}=\frac{}{2}$

3. $\frac{13}{26}=\frac{}{2}$ **4.** $\frac{4}{6}=\frac{}{3}$

5. $\frac{9}{27}=\frac{}{3}$ **6.** $\frac{4}{8}=\frac{}{2}$

7. $\frac{6}{27}=\frac{}{9}$ **8.** $\frac{6}{10}=\frac{}{5}$

9. $\frac{20}{28}=\frac{}{7}$ **10.** $\frac{9}{24}=\frac{}{8}$

11. $\frac{20}{30}=\frac{}{3}$ **12.** $\frac{10}{18}=\frac{}{9}$

13. $\frac{24}{32}=\frac{}{4}$ **14.** $\frac{15}{20}=\frac{}{4}$

15. $\frac{12}{33}=\frac{}{11}$ **16.** $\frac{16}{20}=\frac{}{5}$

17. $\frac{20}{64}=\frac{}{7}$ **18.** $\frac{8}{22}=\frac{}{11}$

19. $\frac{30}{60}=\frac{}{2}$ **20.** $\frac{32}{24}=\frac{}{3}$

EJERCICIOS

Reducir:

1. $\frac{84}{128}$ a 32avos **R.** $\frac{21}{32}$

2. $\frac{25}{35}$ a séptimos **R.** $\frac{5}{7}$

3. $\frac{7}{11}$ a medios **R.** $\frac{1}{2}$

4. $\frac{999}{1179}$ a 131avos **R.** $\frac{111}{131}$

5. $\frac{225}{335}$ a 67avos **R.** $\frac{45}{67}$

6. $\frac{27}{38}$ a cuartos **R.** $\frac{3}{4}$

7. $\frac{6}{15}$ a quintos **R.** $\frac{2}{5}$

8. $\frac{8}{20}$ a quintos **R.** $\frac{2}{5}$

9. $\frac{54}{27}$ a novenos **R.** $\frac{18}{9}$

10. $\frac{20}{24}$ a sextos **R.** $\frac{5}{6}$

11. $\frac{50}{55}$ a 11avos **R.** $\frac{10}{11}$

12. $\frac{60}{90}$ a 18avos **R.** $\frac{12}{18}$

13. $\frac{96}{126}$ a 21avos **R.** $\frac{16}{21}$

14. $\frac{119}{364}$ a 52avos **R.** $\frac{17}{52}$

15. $\frac{126}{729}$ a 81avos **R.** $\frac{14}{81}$

16. $\frac{512}{776}$ a 97avos **R.** $\frac{64}{97}$

17. $\frac{640}{816}$ a 102avos **R.** $\frac{80}{102}$

18. $\frac{490}{7007}$ a 1001avos **R.** $\frac{70}{1001}$

19. $\frac{343}{1771}$ a 253avos **R.** $\frac{49}{253}$

20. $\frac{192}{4488}$ a 561avos **R.** $\frac{34}{561}$

EJERCICIOS

Reducir:

1. $\frac{1300}{1690}$ a quebrado equivalente de denominador 13 **R.** $\frac{10}{13}$

2. $\frac{365}{990}$ a quebrado equivalente de denominador 198 **R.** $\frac{72}{198}$

3. $\frac{91}{672}$ a quebrado equivalente de denominador 96 **R.** $\frac{13}{96}$

4. $\frac{912}{1204}$ a quebrado equivalente de denominador 301 **R.** $\frac{228}{301}$

5. $\frac{343}{924}$ a quebrado equivalente de denominador 132 **R.** $\frac{49}{132}$

6. $\frac{84}{595}$ a quebrado equivalente de denominador 85 **R.** $\frac{12}{85}$

7. $\frac{654}{3006}$ a quebrado equivalente de denominador 501 **R.** $\frac{109}{501}$

8. $\frac{516}{816}$ a quebrado equivalente de denominador 204 **R.** $\frac{129}{204}$

9. $\frac{480}{824}$ a quebrado equivalente de denominador 103 **R.** $\frac{60}{103}$

10. $\frac{915}{1430}$ a quebrado equivalente de denominador 286 **R.** $\frac{183}{286}$

11. $\frac{729}{1395}$ a quebrado equivalente de denominador 465 **R.** $\frac{243}{465}$

12. $\frac{726}{3828}$ a quebrado equivalente de denominador 638 **R.** $\frac{121}{638}$

13. $\frac{93}{961}$ a quebrado equivalente de denominador 31 **R.** $\frac{3}{31}$

14. $\frac{320}{272}$ a quebrado equivalente de denominador 17 **R.** $\frac{2}{17}$

FRACCIÓN IRREDUCIBLE

Una **fracción irreducible** es aquella cuyos dos términos son primos entre sí y está reducida a su más simple expresión o a su mínima expresión.

De tal modo,

$$\frac{14}{13}$$

es una fracción irreducible porque sus dos términos, 13 y 14, son primos entre sí; $\frac{17}{23}$ es otra fracción irreducible.

TEOREMA

Cuando los dos términos de una fracción irreducible se elevan a una potencia, la fracción que resulta también es irreducible.

Siendo el quebrado irreducible $\frac{a}{b}$, demostraremos que si elevamos los dos términos de este quebrado a una misma potencia, por ejemplo n, la fracción resultante, $\frac{a^n}{b^n}$, es también irreducible.

El hecho de que la fracción

$$\frac{a^n}{b^n}$$

es irreducible significa que sus dos términos a y b son primos entre sí.

Ahora bien, un teorema dice que si dos números son primos entre sí, sus potencias de cualquier grado también lo son.

Luego, a^n y b^n son primos entre sí; por tanto

$$\frac{a^n}{b^n}$$

es un quebrado irreducible, que es lo que queríamos demostrar.

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Simplificar una fracción significa convertirla en otra fracción equivalente cuyos términos sean menores, y para ello se dividen sus dos términos sucesivamente por los factores comunes que posean.

1) Reducir a su más simple expresión $\frac{1350}{2550}$

$$\frac{1350\left(^{10}\right.}{2550}=\frac{135\left(^{3}\right.}{255}=\frac{45\left(^{5}\right.}{85}=\frac{9}{17}$$

Primero dividimos 1350 y 2550 por su factor común 10 y obtenemos 135 y 255; dividimos 135 y 255 por su factor común 3 y obtenemos 45 y 85; dividimos 45 y 85 por su factor común 5 y obtenemos 9 y 17. Como 9 y 17 son primos entre sí, la fracción $\frac{9}{17}$ es irreducible y equivalente a $\frac{1350}{2550}$ porque no hemos hecho más que dividir los dos términos de cada fracción por el mismo número, con lo cual el valor de la fracción no se altera.

2) Reducir a su mínima expresión $\frac{12903}{16269}$

$$\frac{12903\left(^{3}\right.}{16269}=\frac{4301\left(^{11}\right.}{5423}=\frac{391}{493}$$

Como 391 y 493 no son números pequeños, no podemos asegurar, a simple vista, que son primos entre sí. Para verificarlo hallamos el m. c. d. de 391 y 493. Si son primos entre sí, su m. c. d. será 1; si no lo son, el factor o los factores comunes que aún tengan aparecerán en el m. c. d.:

	1	3	1	5
493	391	102	85	17
102	85	17	0	

m. c. d. = 17

391 y 493 no son primos entre sí porque tienen el factor común 17.

Ahora dividimos 391 y 494 por su m. c. d. 17 y tendremos:

$$\frac{391\div 17}{493\div 17}=\frac{23}{29}$$

Esta fracción $\frac{23}{29}$, sin duda alguna es irreducible, luego:

$$\frac{12903}{16269}=\frac{23}{29}$$

EJERCICIOS

Reducir a su más simple expresión las fracciones siguientes:

1. $\frac{54}{108}$ **R.** $\frac{1}{2}$

2. $\frac{594}{648}$ **R.** $\frac{11}{12}$

3. $\frac{4235}{25410}$ **R.** $\frac{1}{6}$

4. $\frac{539}{833}$ **R.** $\frac{11}{17}$

5. $\frac{54}{96}$ **R.** $\frac{9}{16}$

6. $\frac{260}{286}$ **R.** $\frac{10}{11}$

7. $\frac{72}{144}$ **R.** $\frac{1}{2}$

8. $\frac{2004}{3006}$ **R.** $\frac{2}{3}$

9. $\frac{84}{126}$ **R.** $\frac{2}{3}$

10. $\frac{1955}{3910}$ **R.** $\frac{1}{2}$

11. $\frac{99}{105}$ **R.** $\frac{3}{5}$

12. $\frac{286}{1859}$ **R.** $\frac{2}{13}$

13. $\frac{162}{189}$ **R.** $\frac{6}{7}$

14. $\frac{1470}{4200}$ **R.** $\frac{7}{20}$

15. $\frac{114}{288}$ **R.** $\frac{19}{48}$

16. $\frac{7854}{9922}$ **R.** $\frac{357}{451}$

17. $\frac{343}{539}$ **R.** $\frac{7}{11}$

18. $\frac{4459}{4802}$ **R.** $\frac{13}{14}$

19. $\frac{121}{143}$ **R.** $\frac{11}{13}$

20. $\frac{1798}{4495}$ **R.** $\frac{2}{5}$

21. $\frac{306}{1452}$ **R.** $\frac{51}{242}$

22. $\frac{1690}{3549}$ **R.** $\frac{10}{21}$

23. $\frac{168}{264}$ **R.** $\frac{7}{11}$

24. $\frac{2016}{3584}$ **R.** $\frac{9}{16}$

25. $\frac{72}{324}$ **R.** $\frac{2}{9}$

26. $\frac{1598}{1786}$ **R.** $\frac{17}{19}$

27. $\frac{98}{105}$ **R.** $\frac{14}{15}$

28. $\frac{1573}{11011}$ **R.** $\frac{1}{7}$

REDUCCIÓN DE UNA FRACCIÓN A SU MÁS SIMPLE EXPRESIÓN

Por otra parte, para reducir una fracción a su más simple expresión por medio de una sola operación, primero debe encontrarse el m. c. d. de los dos términos de la fracción y dividir el numerador y el denominador por su m. c. d.

Reducir a su mínima expresión $\frac{7293}{17017}$

	2	3	
17017	7293	2431	m.c.d. = 2431
2431	0000		

Ahora dividimos 7293 y 17017 por su m. c. d. 2431:

$$\frac{7293 \div 2431}{17017 \div 2431} = \frac{3}{7}$$

CÓMO SIMPLIFICAR EXPRESIONES COMPUESTAS

Para **simplificar expresiones fraccionarias** cuyo numerador sea un producto indicado y su denominador otro producto, se van dividiendo los factores del numerador y el denominador por sus factores comunes hasta que no haya más factores comunes del numerador y el denominador.

Simplificar

$$\frac{12 \times 10 \times 35}{16 \times 14 \times 21}$$

Tendremos:

1

3 5 5

$$\frac{12 \times 10 \times 35}{16 \times 14 \times 21} = \frac{1 \times 5 \times 5}{4 \times 7 \times 1} = \frac{25}{28}$$

Dividimos 12 y 16 entre 4 y obtenemos los cocientes 3 y 4; 10 y 14 entre 2 y obtenemos los cocientes 5 y 7; 35 y 21 entre 7 y obtenemos los cocientes 5 y 3; 3 y 3 entre 3 y obtenemos los cocientes 1 y 1.

En el numerador queda 1 × 5 × 5 y en el denominador 4 × 7 × 1, o sea $\frac{25}{28}$.

EJERCICIOS

Reducir a su mínima expresión, mediante una sola operación.

1. $\frac{98}{147}$ **R.** $\frac{2}{3}$

2. $\frac{273}{637}$ **R.** $\frac{3}{7}$

3. $\frac{332}{415}$ **R.** $\frac{4}{5}$

4. $\frac{285}{513}$ **R.** $\frac{5}{9}$

5. $\frac{252}{441}$ **R.** $\frac{4}{7}$

6. $\frac{623}{979}$ **R.** $\frac{7}{11}$

7. $\frac{370}{444}$ **R.** $\frac{5}{6}$

8. $\frac{2002}{5005}$ **R.** $\frac{2}{5}$

9. $\frac{3003}{6006}$ **R.** $\frac{1}{2}$

10. $\frac{1212}{1515}$ **R.** $\frac{4}{5}$

11. $\frac{1503}{2338}$ **R.** $\frac{9}{14}$

12. $\frac{343}{7007}$ **R.** $\frac{7}{143}$

13. $\frac{411}{685}$ **R.** $\frac{3}{5}$

14. $\frac{6170}{7404}$ **R.** $\frac{5}{6}$

15. $\frac{2478}{3186}$ **R.** $\frac{7}{9}$

16. $\frac{1727}{1884}$ **R.** $\frac{11}{12}$

17. $\frac{2006}{7021}$ **R.** $\frac{2}{7}$

18. $\frac{4359}{11624}$ **R.** $\frac{3}{8}$

19. $\frac{7075}{11320}$ **R.** $\frac{5}{8}$

20. $\frac{2138}{19242}$ **R.** $\frac{1}{9}$

21. $\frac{2401}{19208}$ **R.** $\frac{1}{8}$

22. $\frac{12460}{21805}$ **R.** $\frac{4}{7}$

23. $\frac{8505}{13365}$ **R.** $\frac{7}{11}$

24. $\frac{16005}{18139}$ **R.** $\frac{15}{17}$

25. $\frac{32828}{35092}$ **R.** $\frac{29}{31}$

26. $\frac{40620}{69054}$ **R.** $\frac{10}{17}$

27. $\frac{154508}{170772}$ **R.** $\frac{19}{21}$

EJERCICIOS

Simplificar:

1. $\dfrac{17\times 28\times 204\times 3200}{50\times 100\times 49\times 34}$ R. $37\dfrac{53}{175}$

2. $\dfrac{3\times 2\times 5}{6\times 4\times 10}$ R. $\dfrac{1}{8}$

3. $\dfrac{10\times 7}{7\times 5}$ R. 2

4. $\dfrac{8\times 9\times 49\times 33}{21\times 28\times 11\times 6}$ R. 3

5. $\dfrac{9\times 8}{18\times 6}$ R. $\dfrac{2}{3}$

6. $\dfrac{350\times 1200\times 4000\times 620\times 340}{1000\times 50\times 200\times 800\times 170}$ R. $260\dfrac{2}{5}$

7. $\dfrac{2\times 6}{16\times 8}$ R. $\dfrac{3}{28}$

8. $\dfrac{2\times 3\times 5\times 6\times 7}{4\times 12\times 10\times 18\times 14}$ R. $\dfrac{1}{96}$

9. $\dfrac{5\times 20\times 18}{3\times 6\times 10}$ R. 10

10. $\dfrac{2\times 6}{6\times 8}$ R. $\dfrac{1}{4}$

REDUCCIÓN DE QUEBRADOS AL MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR

Si se quiere **reducir quebrados al mínimo común denominador,** primero se deben simplificar los quebrados dados, a continuación se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores y éste será el denominador común. Para hallar los numeradores se divide el m.c.m. entre cada demonimador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

1) Reducir al mínimo común denominador $\dfrac{2}{3}, \dfrac{35}{60}$ y $\dfrac{5}{180}$

Simplificamos los quebrados y queda: $\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{12}, \dfrac{1}{36}$

Buscaremos el m. c. m. de los denominadores 3, 12 y 36, el cual será 36, porque 3 y 12 son divisores de 36. 36 *será el denominador común.*

Para hallar el numerador del primer quebrado dividimos el m. c. m. 36 entre el primer denominador: 36 ÷ 3 = 2, y multiplicamos este cociente 12 por el primer numerador 2: 12 × 2 = 24.

Para hallar el segundo denominador dividimos el m. c. m. 36 entre el denominador del segundo quebrado 12: 36 ÷ 12 = 3 y multiplicamos este cociente 3 por el segundo numerador 7: 3 × 7 = 21.

Para hallar el tercer numerador dividimos el m. c. m. 36 entre el tercer denominador 36: 36 ÷ 36 = 1, y este cociente 1 lo multiplicamos por el tercer numerador 1: 1 × 1 = 1.

m.c.m. = 36

36 ÷ 3 = 12	$\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\times 12}{36}=\dfrac{24}{36}$
36 ÷ 12 = 3	$\dfrac{7}{12}=\dfrac{7\times 3}{36}=\dfrac{21}{36}$
36 ÷ 36 = 1	$\dfrac{1}{36}=\dfrac{1\times 1}{36}=\dfrac{1}{36}$

2) Reducir al mínimo común denominador los quebrados

$\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{5}{8}$ y $\dfrac{11}{14}$

Hallamos el m. c. m. de 8 y 14, pues 4 está contenido en 8 y 7 en 14.

8	2	14	2
4	2	7	7
2	2	1	
1			

m. c. m. = $2^3 \times 7 = 56$

56 ÷ 4 = 14	$\dfrac{3}{4}=\dfrac{3\times 14}{56}=\dfrac{42}{56}$
56 ÷ 7 = 8	$\dfrac{5}{7}=\dfrac{5\times 8}{56}=\dfrac{40}{56}$
56 ÷ 8 = 7	$\dfrac{5}{8}=\dfrac{5\times 7}{56}=\dfrac{35}{56}$
56 ÷ 14 = 4	$\dfrac{11}{14}=\dfrac{11\times 4}{56}=\dfrac{44}{56}$

EJERCICIOS

Reducir al mínimo común denominador, por simple inspección:

1. $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{20}$ **R.** $\frac{4}{20}, \frac{2}{20}, \frac{3}{20}$

2. $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ **R.** $\frac{8}{12}, \frac{2}{12}, \frac{1}{12}$

3. $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ **R.** $\frac{4}{16}, \frac{2}{16}, \frac{1}{16}$

4. $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$ **R.** $\frac{4}{24}, \frac{2}{24}, \frac{1}{24}$

5. $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{7}{19}$ **R.** $\frac{12}{18}, \frac{10}{18}, \frac{7}{18}$

6. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}$ **R.** $\frac{8}{16}, \frac{12}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}$

7. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{5}{27}, \frac{1}{81}$ **R.** $\frac{27}{81}, \frac{18}{15}, \frac{15}{81}, \frac{1}{81}$

8. $\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{7}{20}, \frac{11}{40}$ **R.** $\frac{8}{40}, \frac{12}{40}, \frac{14}{40}, \frac{11}{40}$

9. $\frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \frac{7}{15}, \frac{4}{30}$ **R.** $\frac{5}{30}, \frac{9}{30}, \frac{14}{30}, \frac{4}{30}$

10. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}$ **R.** $\frac{3}{9}, \frac{2}{9}$

11. $\frac{5}{8}, \frac{11}{12}$ **R.** $\frac{15}{24}, \frac{22}{24}$

12. $\frac{3}{8}, \frac{7}{30}$ **R.** $\frac{45}{120}, \frac{28}{120}$

13. $\frac{7}{12}, \frac{11}{15}$ **R.** $\frac{35}{60}, \frac{44}{60}$

14. $\frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{3}{8}$ **R.** $\frac{12}{72}, \frac{16}{72}, \frac{27}{72}$

15. $\frac{1}{10}, \frac{3}{15}, \frac{8}{25}$ **R.** $\frac{5}{50}, \frac{10}{50}, \frac{16}{50}$

16. $\frac{1}{10}, \frac{3}{27}, \frac{7}{30}$ **R.** $\frac{9}{90}, \frac{10}{90}, \frac{21}{90}$

17. $\frac{5}{6}, \frac{7}{20}, \frac{11}{25}$ **R.** $\frac{250}{300}, \frac{105}{300}, \frac{132}{300}$

18. $\frac{7}{18}, \frac{2}{45}, \frac{11}{60}$ **R.** $\frac{84}{180}, \frac{5}{180}, \frac{33}{180}$

19. $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{7}{12}, \frac{11}{24}$ **R.** $\frac{36}{72}, \frac{16}{72}, \frac{42}{72}, \frac{33}{72}$

20. $\frac{1}{6}, \frac{7}{14}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$ **R.** $\frac{10}{60}, \frac{30}{60}, \frac{3}{60}, \frac{2}{60}$

21. $\frac{3}{5}, \frac{1}{12}, \frac{5}{8}, \frac{7}{120}$ **R.** $\frac{72}{120}, \frac{10}{120}, \frac{75}{120}, \frac{7}{120}$

22. $\frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{15}{48}, \frac{1}{64}$ **R.** $\frac{56}{64}, \frac{48}{64}, \frac{20}{64}, \frac{1}{64}$

23. $\frac{3}{16}, \frac{1}{21}, \frac{2}{15}, \frac{7}{48}$ **R.** $\frac{315}{1680}, \frac{80}{1680}, \frac{224}{1680}, \frac{245}{1680}$

24. $\frac{5}{11}, \frac{7}{121}, \frac{8}{9}, \frac{5}{44}$ **R.** $\frac{1980}{4356}, \frac{252}{4356}, \frac{3872}{4536}, \frac{495}{4536}$

25. $\frac{2}{24}, \frac{18}{48}, \frac{5}{22}, \frac{7}{44}$ **R.** $\frac{22}{264}, \frac{99}{264}, \frac{60}{264}, \frac{42}{264}$

26. $\frac{3}{14}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{3}{28}$ **R.** $\frac{54}{252}, \frac{28}{252}, \frac{35}{252}, \frac{27}{252}$

27. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ **R.** $\frac{2}{6}, \frac{1}{6}$

28. $\frac{2}{5}, \frac{1}{15}$ **R.** $\frac{6}{15}, \frac{1}{15}$

29. $\frac{1}{7}, \frac{4}{21}$ **R.** $\frac{3}{21}, \frac{4}{21}$



Entre los siglos VI y VII, los hindúes desarrollaron las primeras reglas para resolver operaciones fraccionarias o quebrados. Dos hombres Mahavira (siglo IX) y Bháskara (siglo XII) ampliaron y perfeccionaron dichas reglas. En la actualidad, esas normas se siguen utilizando.

CAPÍTULO XXVI

OPERACIONES FRACCIONARIAS

Las operaciones aritméticas básicas con fracciones son: suma, resta, multiplicación y división.

La suma de números fraccionarios presenta dos casos, dependiendo de que los números que se sumen tengan igual o distinto denominador.

La resta de números fraccionarios es un caso particular de la suma ya que restar dos números fraccionarios no es más que sumar al primero de ellos el opuesto del otro.

El producto de los números racionales o fraccionarios cumple las propiedades uniforme, asociativa, conmutativa, elemento neutro y elemento simétrico.

Para dividir dos números racionales basta con multiplicar el primero por el inverso del segundo. O sea, la división es un caso particular de la multiplicación de números racionales.

SUMA

Para sumar **quebrados de igual denominador** se suman los numeradores y el resultado se parte por el denominador común, luego se simplifica el resultado y se encuentran los enteros, si los hay.

Ejemplos

Efectuar esta operación: $\frac{7}{9}+\frac{10}{9}+\frac{4}{9}$

$$\mathbf{\frac{7}{9}+\frac{10}{9}+\frac{4}{9}=\frac{7+10+4}{9}=\frac{21}{9}}=(\text{simplificando})=\mathbf{\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}}$$

SUMA DE QUEBRADOS CON DENOMINADOR DIFERENTE

Para sumar **quebrados de distinto denominador** primero se simplifican los quebrados dados, si esto es posible.

Una vez irreducibles se reducen al mínimo común denominador y se suman igual que en el caso anterior.

Ejemplo

Efectuar esta operación: $\mathbf{\frac{12}{48}+\frac{21}{49}+\frac{23}{60}}$

Al simplificar los quebrados, queda: $\mathbf{\frac{1}{4}+\frac{3}{7}+\frac{23}{60}}$

Reduciendo al mínimo común denominador se encuentra el m. c. m. de los denominadores, para lo cual prescindimos de 4 por ser divisor de 60, y como 60 y 7 son primos entre sí, el m. c. m. será su producto: 60 × 7 = 420.

Por lo tanto, 420 será el mínimo común denominador, y tendremos:

$$\mathbf{\frac{1}{4}+\frac{3}{7}+\frac{23}{60}=\frac{150+180+161}{420}=\frac{446}{420}}$$

(simplificando)

$$\mathbf{\frac{223}{210}=1\frac{13}{210}}$$

EJERCICIOS

Simplifica las operaciones siguientes:

1. $\mathbf{\frac{5}{21}+\frac{10}{21}+\frac{23}{21}+\frac{4}{21}}$ **R. 2**

2. $\mathbf{\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{2}{8}}$ **R.** $\mathbf{1\frac{1}{4}}$

3. $\mathbf{\frac{3}{11}+\frac{7}{11}+\frac{12}{11}}$ **R. 2**

4. $\mathbf{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$ **R. 1**

5. $\mathbf{\frac{3}{17}+\frac{8}{17}+\frac{11}{17}+\frac{23}{17}}$ **R.** $\mathbf{2\frac{11}{17}}$

6. $\mathbf{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{5}{4}+\frac{7}{4}}$ **R. 4**

7. $\mathbf{\frac{2}{9}+\frac{5}{9}+\frac{7}{9}}$ **R.** $\mathbf{1\frac{5}{9}}$

8. $\mathbf{\frac{5}{7}+\frac{8}{7}+\frac{10}{7}+\frac{15}{7}}$ **R.** $\mathbf{5\frac{3}{7}}$

9. $\mathbf{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}$ **R.** $\mathbf{1\frac{4}{5}}$

10. $\mathbf{\frac{18}{53}+\frac{32}{53}+\frac{40}{53}+\frac{1}{53}+\frac{16}{53}}$ **R.** $\mathbf{2\frac{1}{53}}$

11. $\mathbf{\frac{1}{6}+\frac{7}{6}+\frac{11}{6}+\frac{13}{6}}$ **R.** $\mathbf{5\frac{1}{3}}$

12. $\mathbf{\frac{41}{79}+\frac{37}{79}+\frac{25}{79}+\frac{71}{79}+\frac{63}{79}}$ **R. 3**

13. $\mathbf{\frac{17}{84}+\frac{3}{84}+\frac{5}{84}+\frac{11}{84}+\frac{6}{84}}$ **R.** $\mathbf{\frac{1}{2}}$

14. $\mathbf{\frac{23}{6}+\frac{15}{6}+\frac{20}{6}+\frac{44}{6}}$ **R. 17**

EJERCICIOS

Simplifica las operaciones siguientes:

1. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$ R. $1\frac{1}{2}$
2. $\frac{5}{12}+\frac{7}{24}$ R. $\frac{17}{24}$
3. $\frac{5}{8}+\frac{11}{64}$ R. $\frac{51}{64}$
4. $\frac{7}{24}+\frac{11}{30}$ R. $\frac{79}{120}$
5. $\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{16}$ R. $2\frac{3}{16}$
6. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ R. $\frac{7}{8}$
7. $\frac{7}{5}+\frac{8}{15}+\frac{11}{60}$ R. $2\frac{7}{60}$
8. $\frac{9}{10}+\frac{8}{15}+\frac{13}{75}$ R. $1\frac{91}{150}$
9. $\frac{3}{21}+\frac{1}{2}+\frac{2}{49}$ R. $\frac{67}{98}$
10. $\frac{3}{5}+\frac{7}{4}+\frac{11}{5}$ R. $4\frac{11}{60}$
11. $\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}$ R. $\frac{29}{144}$
12. $\frac{8}{60}+\frac{13}{90}+\frac{7}{120}$ R. $\frac{121}{360}$
13. $\frac{13}{121}+\frac{4}{55}+\frac{9}{10}$ R. $1\frac{97}{1210}$
14. $\frac{7}{20}+\frac{3}{40}+\frac{1}{80}+\frac{3}{15}$ R. $\frac{51}{80}$
15. $\frac{2}{300}+\frac{5}{500}+\frac{2}{1000}+\frac{7}{250}$ R. $\frac{7}{150}$
16. $\frac{5}{16}+\frac{2}{48}+\frac{1}{9}+\frac{3}{18}$ R. $\frac{91}{144}$
17. $\frac{6}{17}+\frac{1}{34}+\frac{1}{51}+\frac{4}{3}$ R. $1\frac{25}{34}$
18. $\frac{7}{90}+\frac{11}{30}+\frac{3}{80}+\frac{7}{40}$ R. $\frac{473}{720}$
19. $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{7}{24}+\frac{11}{30}$ R. $1\frac{19}{120}$
20. $\frac{19}{18}+\frac{61}{72}+\frac{13}{210}+\frac{1}{10}+\frac{8}{5}$ R. $2\frac{179}{270}$

SUMA DE NÚMEROS MIXTOS

La suma de números mixtos puede verificarse siguiendo dos procedimientos.

En el primero, se suman separadamente los enteros y los quebrados.

A la suma de los enteros se añade la suma de los quebrados, y el resultado es la suma total.

Ejemplo

Sumar

$$5\frac{2}{3}+6\frac{4}{8}+3\frac{1}{6}$$

Suma de los enteros: 5 + 6 + 3 = 14

Suma de los quebrados:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{8}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4+3+1}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

El resultado de los enteros, que es 14, se suma con el resultado de los quebrados, que es $1\frac{1}{3}$:

$$14+1\frac{1}{3}=15\frac{1}{3}$$

En el segundo procedimiento se reducen los mixtos a quebrados y éstos suman.

Ejemplo

Sumar

$$5\frac{2}{3}+6\frac{4}{8}+3\frac{1}{6}$$

$$\frac{17}{3}+\frac{13}{2}+\frac{19}{6}=\frac{34+39+19}{6}=$$

$$\boxed{\frac{92}{6}=\frac{46}{3}=15\frac{1}{3}}$$

EJERCICIOS

Simplifica las operaciones siguientes:

1. $3\frac{1}{4}+5\frac{3}{4}$ R. 9
2. $3\frac{3}{4}+5\frac{5}{9}+7\frac{1}{12}$ R. $16\frac{7}{18}$
3. $8\frac{3}{7}+6\frac{5}{7}$ R. $15\frac{1}{7}$
4. $4\frac{1}{6}+3\frac{1}{10}+2\frac{1}{15}$ R. $9\frac{1}{3}$
5. $9\frac{3}{5}+4\frac{1}{10}$ R. $13\frac{7}{10}$
6. $1\frac{1}{8}+5\frac{3}{20}+6\frac{5}{10}$ R. $12\frac{23}{40}$
7. $7\frac{1}{8}+3\frac{5}{24}$ R. $10\frac{1}{3}$
8. $6\frac{1}{27}+4\frac{1}{18}+1\frac{1}{54}$ R. $11\frac{1}{9}$
9. $12\frac{5}{6}+13\frac{7}{9}$ R. $26\frac{11}{18}$
10. $1\frac{1}{42}+3\frac{1}{14}+10\frac{11}{84}$ R. $14\frac{19}{84}$
11. $1\frac{1}{10}+1\frac{1}{100}$ R. $2\frac{11}{100}$
12. $6\frac{1}{11}+7\frac{5}{11}+8\frac{2}{11}+4\frac{3}{11}$ R. 26
13. $5\frac{1}{8}+6\frac{3}{20}$ R. $11\frac{11}{40}$
14. $4\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+7\frac{1}{16}+1\frac{1}{32}$ R. $17\frac{16}{32}$
15. $8\frac{7}{20}+5\frac{11}{26}$ R. $13\frac{79}{100}$
16. $3\frac{1}{5}+4\frac{1}{10}+1\frac{1}{50}+2\frac{3}{25}$ R. $10\frac{11}{25}$
17. $3\frac{1}{65}+11\frac{1}{26}$ R. $14\frac{101}{130}$
18. $1\frac{1}{5}+3\frac{1}{4}+2\frac{1}{15}+4\frac{1}{60}$ R. $10\frac{8}{15}$
19. $7\frac{9}{55}+8\frac{13}{44}$ R. $15\frac{101}{220}$
20. $5\frac{3}{7}+3\frac{1}{14}+2\frac{1}{6}+7\frac{1}{2}$ R. $18\frac{1}{6}$
21. $5\frac{4}{5}+6\frac{2}{5}+8\frac{3}{5}$ R. $20\frac{4}{5}$
22. $1\frac{1}{5}+4\frac{1}{80}+5\frac{1}{16}+2\frac{1}{40}$ R. $12\frac{3}{10}$
23. $8\frac{1}{9}+10\frac{7}{9}+16\frac{1}{9}$ R. 35
24. $2\frac{1}{18}+6\frac{7}{15}+4\frac{1}{45}+7\frac{1}{90}$ R. $19\frac{5}{9}$
25. $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}+1\frac{1}{6}$ R. 5
26. $4\frac{1}{31}++1\frac{1}{62}+1\frac{1}{93}+4\frac{1}{4}$ R. $10\frac{119}{372}$
27. $5\frac{3}{4}+6\frac{1}{3}+8\frac{1}{12}$ R. $20\frac{1}{6}$
28. $1\frac{1}{10}+1\frac{1}{100}+1\frac{1}{1000}+1\frac{1}{10000}$ R. $4\frac{1111}{10000}$
29. $2\frac{1}{5}+4\frac{1}{10}+8\frac{3}{25}$ R. $14\frac{21}{50}$
30. $3\frac{1}{160}+2\frac{1}{45}+4\frac{7}{50}+1\frac{1}{800}$ R. $10\frac{527}{3600}$

SUMAS COMBINADAS

En cuanto a los **enteros, mixtos y quebrados**, se suman los enteros con los enteros de los números mixtos, luego se suman los quebrados y se añade este resultado a la suma de los enteros.

Ejemplo

Efectuar $5+4\frac{7}{8}+\frac{3}{9}+4\frac{2}{12}$

Se suman los enteros: 5 + 4 + 4 = 13

Se suman los quebrados:

$$\frac{7}{8}+\frac{3}{9}+\frac{1}{12}=\frac{7}{8}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=$$

$$\frac{21+8+2}{24}=\frac{31}{24}=1\frac{7}{24}$$

Finalmente se suman ambos resultados:

$$13+1\frac{7}{24}=14\frac{7}{24}$$

EJERCICIOS

1. Un deportista camina $4\frac{1}{2}$ km el lunes, $8\frac{2}{3}$ km el martes, 10 km el miércoles y $\frac{5}{8}$ de km el jueves ¿Qué distancia recorrió en estos cuatro días? **R.** $23\frac{19}{24}$ km.



Figura 66

2. Roberto estudió $3\frac{2}{3}$ horas, Enrique $5\frac{3}{4}$ horas y Juan 6 horas. ¿Cuánto tiempo estudiaron los tres? **R.** $15\frac{5}{12}$ horas.

3. Si un campesino cosecha 2,500 kilos de papas, $250\frac{1}{8}$ kilos de trigo y $180\frac{2}{9}$ kilos de arroz, ¿cuántos kilos cosechó en total? **R.** $2930\frac{25}{72}$ kilos.

EJERCICIOS

Simplificar estas operaciones:

1. $14+5\frac{3}{3}$ **R.** $19\frac{2}{3}$
2. $\frac{3}{48}+10+3\frac{1}{5}+8$ **R.** $21\frac{21}{80}$
3. $7+\frac{8}{7}$ **R.** $8\frac{1}{7}$
4. $2\frac{1}{20}+3\frac{5}{40}+9+\frac{7}{36}$ **R.** $14\frac{133}{360}$
5. $\frac{14}{12}+60$ **R.** $61\frac{1}{6}$
6. $8\frac{1}{4}+6+\frac{3}{8}$ **R.** $14\frac{5}{8}$
7. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}$ **R.** $1\frac{1}{4}$
8. $18+\frac{6}{5}$ **R.** $19\frac{1}{5}$
9. $\left(3+2\frac{3}{5}\right)+\left(4\frac{1}{3}+\frac{3}{20}\right)$ **R.** $10\frac{1}{12}$
10. $6+2\frac{1}{30}+5+7\frac{1}{45}$ **R.** $20\frac{1}{18}$
11. $\left(9+\frac{1}{18}\right)+\left(\frac{7}{24}+6\right)$ **R.** $15\frac{25}{72}$
12. $\frac{7}{45}+4+\frac{11}{60}+2+\frac{1}{90}$ **R.** $6\frac{7}{20}$
13. $4+\frac{7}{48}8\frac{1}{57}+\frac{1}{114}$ **R.** $12\frac{9}{76}$
14. $\left(\frac{3}{80}+\frac{5}{40}\right)+\left(\frac{5}{40}+\frac{1}{8}\right)$ **R.** $1\frac{43}{80}$
15. $\left(\frac{7}{8}+\frac{5}{32}\right)+\left(\frac{7}{24}+6\right)$ **R.** $14\frac{43}{96}$
16. $\left(\frac{1}{28}+\frac{7}{14}+\frac{5}{56}\right)+\left(1+\frac{1}{112}\right)$ **R.** $1\frac{71}{112}$

RESTA

Para restar **quebrados de igual denominador** se restan los numeradores y esta diferencia se parte por el denominador común, luego se simplifica el resultado y se encuentran los enteros, si los hay.

Ejemplo

Efectuar esta operación:

$$\frac{7}{12}-\frac{5}{12}$$

$$\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12}$$

(simplificando)

$$\boxed{\frac{1}{6}}$$

EJERCICIOS

Por mera inspección, simplifica las operaciones siguientes:

1. $\frac{24}{35}-\frac{10}{35}$ R. $\frac{2}{5}$
2. $\frac{17}{20}-\frac{7}{20}$ R. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{46}{51}-\frac{20}{51}-\frac{9}{51}$ R. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{8}{15}-\frac{3}{15}$ R. $\frac{1}{3}$
5. $\frac{7}{8}-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}$ R. $\frac{1}{8}$
6. $\frac{9}{16}-\frac{5}{16}$ R. $\frac{1}{4}$
7. $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$ R. $\frac{3}{5}$
8. $\frac{19}{42}-\frac{12}{42}$ R. $\frac{1}{6}$
9. $\frac{23}{25}-\frac{11}{25}-\frac{7}{25}$ R. $\frac{1}{5}$
10. $\frac{11}{12}-\frac{7}{12}-\frac{4}{12}$ R. 0
11. $\frac{11}{14}-\frac{1}{14}$ R. $\frac{3}{7}$
12. $\frac{7}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$ R. 1

RESTA DE QUEBRADOS DE DIFERENTE DENOMINADOR

Para restar **quebrados de distinto denominador** se simplifican los quebrados, si esto es posible. Una vez irreducibles, se reducen al mínimo común denominador y se restan igual que en el caso anterior.

Ejemplo

Efectuar $\frac{5}{40}-\frac{4}{320}$

Al simplificar los quebrados, queda:

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{80}$$

Luego se reduce al mínimo común denominador:

$$\boxed{\frac{1}{8}-\frac{1}{80}=\frac{10-1}{80}=\frac{9}{80}}$$

RESTA DE ENTEROS Y QUEBRADOS

Para restar **enteros y quebrados** se quita una unidad al entero, la cual se pone en forma de quebrado de igual denominador que el quebrado dado, y se restan ambos.

Ejemplo

1) Efectuar $15-\frac{3}{8}$

$$\boxed{15-\frac{3}{8}=14\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=14\frac{5}{8}}$$

2) Efectuar $75-\frac{11}{126}$

$$75-\frac{11}{126}=74\frac{126}{126}-\frac{11}{126}=$$

$$\boxed{74\frac{115}{126}}$$

EJERCICIOS

Simplifica estas operaciones:

1. $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$ R. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{3}{5}-\frac{1}{10}$ R. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{7}{12}-\frac{1}{4}$ R. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{11}{8}-\frac{7}{24}$ R. $1\frac{1}{12}$
5. $\frac{3}{7}-\frac{2}{49}$ R. $\frac{19}{49}$
6. $\frac{3}{8}-\frac{1}{12}$ R. $\frac{7}{24}$
7. $\frac{7}{6}-\frac{7}{8}$ R. $\frac{7}{24}$

EJERCICIOS

Realiza las siguientes operaciones:

1. $\frac{11}{10}-\frac{14}{15}$ **R.** $\frac{1}{6}$
2. $\frac{11}{12}-\frac{7}{16}$ **R.** $\frac{23}{48}$
3. $\frac{7}{62}-\frac{3}{155}$ **R.** $\frac{29}{310}$
4. $\frac{7}{80}-\frac{1}{90}$ **R.** $\frac{11}{144}$
5. $\frac{11}{150}-\frac{2}{175}$ **R.** $\frac{13}{210}$
6. $\frac{93}{120}-\frac{83}{150}$ **R.** $\frac{133}{600}$
7. $\frac{101}{114}-\frac{97}{171}$ **R.** $\frac{109}{342}$
8. $\frac{57}{160}-\frac{17}{224}$ **R.** $\frac{157}{560}$
9. $6\frac{5}{6}-3\frac{1}{6}$ **R.** $3\frac{3}{2}$
10. $7\frac{3}{5}-4\frac{3}{10}$ **R.** $3\frac{3}{10}$
11. $8\frac{5}{6}-5\frac{1}{12}$ **R.** $3\frac{3}{4}$
12. $9\frac{7}{8}-2\frac{5}{24}$ **R.** $7\frac{2}{3}$
13. $10\frac{5}{6}-2\frac{7}{9}$ **R.** $8\frac{1}{18}$
14. $12\frac{2}{3}-7\frac{1}{11}$ **R.** $5\frac{19}{33}$
15. $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{40}$ **R.** $\frac{7}{20}$
16. $\frac{3}{15}-\frac{1}{45}-\frac{1}{90}$ **R.** $\frac{1}{6}$
17. $\frac{3}{2}-\frac{2}{121}-\frac{5}{11}$ **R.** $1\frac{7}{242}$
18. $\frac{7}{35}-\frac{1}{100}-\frac{11}{1000}$ **R.** $\frac{179}{1000}$
19. $\frac{19}{38}-\frac{7}{80}-\frac{11}{90}$ **R.** $\frac{229}{720}$
20. $8-\frac{2}{3}$ **R.** $7\frac{1}{3}$
21. $9-\frac{9}{10}$ **R.** $8\frac{1}{10}$
22. $13-\frac{7}{8}$ **R.** $12\frac{1}{8}$
23. $16-\frac{1}{11}$ **R.** $15\frac{10}{11}$
24. $6\frac{23}{30}-2\frac{7}{40}$ **R.** $4\frac{71}{120}$
25. $11\frac{3}{8}-5\frac{1}{24}$ **R.** $6\frac{1}{3}$
26. $19\frac{5}{7}-12\frac{8}{105}$ **R.** $7\frac{67}{105}$
27. $14\frac{11}{45}-5\frac{7}{60}$ **R.** $9\frac{23}{180}$
28. $9\frac{1}{6}-7\frac{2}{3}$ **R.** $1\frac{1}{2}$
29. $8\frac{1}{8}-2\frac{3}{4}$ **R.** $5\frac{3}{8}$
30. $25-\frac{2}{13}$ **R.** $24\frac{11}{13}$
31. $30-\frac{7}{24}$ **R.** $29\frac{17}{24}$
32. $32-\frac{17}{80}$ **R.** $31\frac{63}{80}$
33. $81-\frac{1}{90}$ **R.** $80\frac{89}{90}$
34. $93-\frac{45}{83}$ **R.** $92\frac{32}{53}$
35. $106-\frac{104}{119}$ **R.** $105\frac{15}{119}$
36. $125-\frac{1}{125}$ **R.** $124\frac{124}{125}$
37. $215\ \frac{3}{119}$ **R.** $214\frac{116}{119}$
38. $316-\frac{11}{415}$ **R.** $315\frac{404}{415}$
39. $25\frac{7}{50}-14\frac{6}{25}$ **R.** $10\frac{9}{10}$
40. $80\frac{3}{8}-53\frac{5}{9}$ **R.** $26\frac{59}{72}$
41. $115\frac{5}{27}-101\frac{7}{9}$ **R.** $13\frac{11}{27}$
42. $182\frac{13}{90}-116\frac{11}{40}$ **R.** $65\frac{313}{360}$
43. $215\frac{23}{80}-183\frac{7}{50}$ **R.** $32\frac{59}{400}$
44. $312\frac{11}{90}-219\frac{5}{35}$ **R.** $92\frac{59}{60}$

RESTA DE NÚMEROS MIXTOS

La **resta de números mixtos** puede efectuarse por dos procedimientos.

Primero se restan separadamente los enteros y los quebrados y a la resta de los enteros se añade la resta de los quebrados.

Ejemplos

1) Efectuar $15\frac{5}{8} - 10\frac{7}{12}$

Resta de los enteros: 15 – 10 = 5

Resta de los quebrados:

$$\frac{5}{8} - \frac{7}{12} = \frac{15 - 14}{24} = \frac{1}{24}$$

A la diferencia de los enteros, que es 5, se añade la diferencia de los quebrados $\frac{1}{24}$

$$5 + \frac{1}{24} = 5\frac{2}{24}$$

2) Efectuar $9\frac{2}{7} - 5\frac{3}{4}$

Resta de los enteros 9 – 5 = 4

Resta de los quebrados:

$$\frac{2}{7} - \frac{3}{4} = \frac{8 - 21}{28}$$

No es posible hacer esta resta, ya que el quebrado $\frac{2}{7}$ es menor que $\frac{3}{4}$

por lo tanto, para efectuar la resta se quita una unidad de la diferencia de los enteros: 4 1 = 3 enteros, y esta unidad se pone en forma $\frac{7}{7}$ de se añade a $\frac{2}{7}$ y con esto tendremos:

$$\left(\frac{7}{7} + \frac{2}{7}\right) - \frac{3}{4} = \frac{9}{7} - \frac{3}{4} = \frac{36 - 21}{28} = \frac{15}{28}$$

A los 3 enteros que quedaron después de quitar la unidad se añade esta diferencia de los quebrados, y tenemos:

$$3 + \frac{15}{28} = 3\frac{15}{28}$$

En el **segundo procedimiento** se reducen los mixtos a quebrados y se restan como quebrados.

Ejemplo

Efectuar

$$5\frac{1}{6} - 3\frac{1}{8}$$

$$5\frac{1}{6} - 3\frac{1}{8} = \frac{31}{6} - \frac{25}{8} =$$

$$\frac{124 - 75}{24} = \frac{49}{24} = 2\frac{1}{24}$$

RESTA DE NÚMEROS ENTEROS Y MIXTOS

Para restar **enteros y mixtos** se quita una cantidad al entero, al cual se pone en forma de quebrado de igual denominador que el quebrado del sustraendo, y luego se restan separadamente enteros y quebrados.

Ejemplos

1) Efectuar $6 - 4\frac{1}{3}$

Se le quita una unidad a 6, se pone en forma de $\frac{3}{3}$ y tendremos:

$$6 - 4\frac{1}{3} = 5\frac{3}{3} - 4\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$$

2) Efectuar $50 - 14\frac{3}{5}$

$$50 - 14\frac{3}{5} = 49\frac{5}{5} - 14\frac{3}{5} = 35\frac{2}{3}$$

EJERCICIOS

Simplifica estas operaciones:

1. $60 - 36\frac{41}{45}$ R. $23\frac{4}{45}$
2. $21 - 5\frac{1}{30}$ R. $15\frac{29}{30}$
3. $16 - 2\frac{7}{10}$ R. $13\frac{3}{10}$
4. $9 - 4\frac{1}{2}$ R. $4\frac{1}{2}$
5. $20 - 4\frac{1}{20}$ R. $15\frac{19}{20}$
6. $12 - 1\frac{7}{9}$ R. $10\frac{2}{9}$
7. $31 - 6\frac{2}{35}$ R. $24\frac{33}{35}$
8. $10 - 5\frac{3}{4}$ R. $4\frac{1}{4}$
9. $50 - 18\frac{18}{19}$ R. $31\frac{1}{19}$
10. $14 - 13\frac{15}{17}$ R. $\frac{2}{17}$
11. $18 - 3\frac{3}{11}$ R. $14\frac{8}{11}$
12. $40 - 35\frac{11}{42}$ R. $4\frac{31}{42}$
13. $70 - 46\frac{104}{113}$ R. $23\frac{9}{113}$

RESTA DE MIXTOS Y ENTEROS

Para restar **mixtos y enteros** se resta el entero de los enteros del número mixto.

Ejemplo

Efectuar $14\frac{1}{8}-9$

Si restamos 9 del 14 resulta

14 - 9 = 5, luego nos queda $5\frac{1}{8}$.

COMBINACIÓN DE SUMA Y RESTA

Para la **suma y resta combinadas de quebrados** se simplifican los quebrados dados, si esto es posible, luego se reducen al mínimo común denominador y se hacen las operaciones.

Ejemplo

Efectuar $\frac{14}{60}-\frac{1}{8}-\frac{16}{64}+\frac{15}{36}$

Simplificando nos queda:

$$\frac{7}{30}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=\frac{28-15-30+50}{120}=\frac{78-45}{120}=\frac{33}{120}=(\text{simplificando})=\frac{11}{40}$$

EJERCICIOS

Simplificar las operaciones siguientes:

1. $53\frac{7}{10}-49$
2. $16\frac{3}{5}-6$
3. $40\frac{2}{11}-17$
4. $18\frac{2}{9}-6$
5. $20\frac{3}{4}-14$
6. $31\frac{3}{82}-30$
7. $35\frac{23}{25}-18$
8. $1\frac{7}{8}-1$
9. $27\frac{17}{19}-16$
10. $42\frac{3}{65}-19$

EJERCICIOS

Simplifica estas operaciones:

1. $\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$ **R.** $\frac{2}{45}$
2. $\frac{6}{9}+\frac{15}{25}-\frac{8}{15}$ **R.** $\frac{11}{15}$
3. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{12}$ **R.** $1\frac{5}{12}$
4. $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$ **R.** $\frac{11}{120}$
5. $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\frac{7}{12}$ **R.** $\frac{17}{24}$
6. $\frac{11}{15}-\frac{7}{30}+\frac{3}{10}$ **R.** $\frac{4}{5}$
7. $\frac{5}{6}-\frac{1}{90}+\frac{4}{7}$ **R.** $1\frac{124}{315}$
8. $\frac{1}{50}-\frac{2}{75}+\frac{7}{150}-\frac{1}{180}$ **R.** $\frac{31}{900}$
9. $\frac{4}{41}+\frac{7}{82}-\frac{1}{6}$ **R.** $\frac{2}{123}$
10. $\frac{11}{26}+\frac{9}{91}-\frac{3}{39}$ **R.** $\frac{81}{182}$
11. $\frac{31}{108}-\frac{43}{120}+\frac{59}{150}$ **R.** $\frac{1739}{5400}$
12. $\frac{111}{200}+\frac{113}{300}-\frac{117}{400}$ **R.** $\frac{767}{1200}$
13. $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{12}-\frac{1}{14}$ **R.** $\frac{1}{28}$
14. $\frac{2}{40}+\frac{7}{80}-\frac{11}{36}+\frac{13}{72}$ **R.** $\frac{1}{80}$
15. $\frac{7}{12}+\frac{5}{9}-\frac{4}{24}$ **R.** $\frac{35}{38}$
16. $\frac{7}{20}+\frac{11}{320}+\frac{1}{160}-\frac{3}{80}$ **R.** $\frac{113}{320}$
17. $\frac{13}{2}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128}$ **R.** $6\frac{57}{128}$
18. $\frac{15}{16}-\frac{1}{48}-\frac{1}{96}-\frac{1}{80}$ **R.** $\frac{143}{160}$
19. $\frac{7}{11}-\frac{1}{121}-\frac{1}{1331}+\frac{1}{6}$ **R.** $\frac{6341}{7986}$

COMBINACIONES DE SUMA Y RESTA

Para la **suma y resta combinadas de enteros, quebrados y mixtos**, a los enteros se les pone como denominador la unidad; los mixtos se reducen a quebrados; se simplifican los quebrados si esto es posible y se efectúan las operaciones con estos quebrados.



Figura 67

Ejemplo

Efectuar $14-2\frac{3}{16}-\frac{1}{8}+\frac{5}{6}$

$$\frac{14}{1}-\frac{35}{16}-\frac{1}{8}+\frac{5}{6}=\frac{672-105-6+40}{48}=$$

$$\frac{712-111}{48}=\frac{601}{48}=12\frac{25}{48}$$

EJERCICIOS

Simplifica las operaciones siguientes:

1. $3+\frac{3}{5}-\frac{1}{8}$ R. $3\frac{19}{40}$
2. $6+1\frac{1}{3}-\frac{2}{5}$ R. $6\frac{14}{15}$
3. $9-5\frac{1}{6}+4\frac{1}{12}$ R. $7\frac{11}{12}$
4. $35-\frac{1}{8}-\frac{3}{24}$ R. $34\frac{3}{4}$
5. $80-3\frac{3}{5}-4\frac{3}{10}$ R. $72\frac{1}{10}$
6. $6\frac{1}{15}-4\frac{1}{30}+\frac{7}{25}$ R. $2\frac{47}{150}$
7. $\frac{7}{20}+3\frac{1}{16}-2\frac{1}{5}$ R. $1\frac{17}{80}$
8. $9+\frac{2}{3}+5\frac{7}{48}-\frac{1}{60}$ R. $14\frac{191}{240}$
9. $8\frac{3}{7}+1\frac{3}{56}-\frac{1}{98}$ R. $12\frac{185}{392}$
10. $9+\frac{5}{8}-3+2\frac{1}{9}$ R. $8\frac{53}{72}$
11. $16\frac{1}{3}-14\frac{2}{5}+7\frac{2}{9}$ R. $9\frac{7}{45}$
12. $9\frac{3}{8}-4\frac{1}{40}+6\frac{1}{60}$ R. $11\frac{11}{30}$
13. $14\frac{7}{25}-6\frac{3}{50}-+8\frac{11}{40}$ R. $16\frac{99}{200}$
14. $4\frac{1}{3}-2+3-\frac{1}{9}$ R. $5\frac{2}{9}$
15. $9+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3$ R. $11\frac{3}{4}$
16. $6+5\frac{1}{3}-4\frac{1}{6}-1\frac{1}{2}$ R. $5\frac{2}{3}$
17. $3\frac{3}{5}-\frac{5}{8}+\frac{7}{40}-1$ R. $1\frac{3}{4}$
18. $6\frac{1}{19}-2\frac{3}{38}+5\frac{1}{76}-\frac{1}{2}$ R. $8\frac{37}{75}$
19. $\frac{3}{8}+\frac{17}{18}+\frac{32}{6}-2\frac{3}{5}$ R. $4\frac{41}{240}$
20. $9-\frac{1}{108}-\frac{1}{216}-\frac{1}{144}$ R. $8\frac{47}{48}$
21. $5\frac{1}{6}2\frac{1}{32}+\frac{7}{64}-\frac{1}{18}$ R. $3\frac{109}{576}$
22. $9+6\frac{1}{20}-3\frac{1}{75}+\frac{11}{320}$ R. $12\frac{341}{4800}$
23. $5\frac{7}{9}-3\frac{1}{3}-\frac{11}{36}+\frac{1}{4}$ R. $2\frac{7}{18}$
24. $16\frac{1}{4}-3\frac{1}{8}-2\frac{4}{7}-\frac{3}{28}$ R. $10\frac{25}{56}$
25. $50\frac{3}{5}-6-8\frac{1}{50}-2\frac{3}{10}$ R. $34\frac{7}{25}$
26. $\frac{1}{6}+4\frac{1}{5}-2\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}$ R. $2\frac{4}{45}$

EJERCICIOS

Simplifica estas operaciones combinadas:

1. $500-\left(\frac{1}{8}+\frac{9}{8}+\frac{3}{40}\right)$ **R.** $498\frac{3}{20}$

2. $9-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$ **R.** $8\frac{5}{6}$

3. $14-\left(2\frac{1}{2}-1\frac{3}{5}\right)$ **R.** $13\frac{1}{10}$

4. $\frac{1}{8}+\left(4\frac{1}{15}-\frac{1}{60}+\frac{3}{80}\right)$ **R.** $4\frac{17}{30}$

5. $50-\left(6-\frac{1}{5}\right)$ **R.** $44\frac{1}{5}$

6. $18-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{7}{4}\right)$ **R.** $16\frac{11}{12}$

7. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)$ **R.** $\frac{83}{96}$

8. $16\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{20}\right)$ **R.** $15\frac{19}{20}$

9. $\left(\frac{7}{30}-\frac{1}{60}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{5}-\frac{1}{20}\right)$ **R.** $3\frac{29}{60}$

10. $6\frac{3}{4}-\left(3\frac{1}{9}-\frac{1}{18}+1\right)$ **R.** $3\frac{25}{36}$

11. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{5}{6}$ **R.** 0

12. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{6}$ **R.** 0

13. $\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$ **R.** $1\frac{1}{6}$

14. $\left(6-\frac{1}{5}\right)-\left(4-\frac{1}{3}\right)$ **R.** 2

15. $\left(4\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}\right)+\left(6\frac{1}{5}-5\frac{1}{6}\right)$ **R.** $2\frac{17}{60}$

16. $\left(6-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(2-\frac{1}{2}+1\right)$ **R.** $3\frac{1}{3}$

17. $180-3\frac{1}{5}-\left(2\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)$ **R.** $174\frac{37}{90}$

EJERCICIOS

1. Una calle tiene $50\frac{2}{3}$ metros de longitud y otra $45\frac{5}{8}$ metros. ¿Cuántos metros tienen las dos juntas y cuánto le falta a cada una para medir 80 metros de largo?
R. $96\frac{7}{24}$ m; $29\frac{1}{3}$ m; $34\frac{3}{8}$ m.

2. Debo $183 y pago $\$42\frac{2}{7}$. ¿Cuánto me falta por pagar?

R.. $\$140\frac{5}{7}$

3. Un empleado gana mensualmente 200. Gasta $\$50\frac{2}{9}$ para la alimentación de su familia; $60 para alquiler y $\$18\frac{3}{8}$ en otros gastos. ¿Cuánto puede ahorrar mensualmente?
R.. $\$71\frac{29}{72}$



Figura 68

4. Un niño emplea la cuarta parte del día en estudiar; la sexta parte en hacer ejercicio y la novena en divertirse. ¿Qué parte del día le queda libre? **R.** $\frac{17}{36}$

MULTIPLICACIÓN

Para **multiplicar dos o más quebrados** se multiplican los numeradores y el producto se parte por el producto de los denominadores.
El resultado se simplifica y se encuentran los enteros, si los hay.

Ejemplos

1) Efectuar

$$\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{17}{8}$$

$$\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{17}{8}=\frac{5\times3\times17}{7\times4\times8}=$$

$$\frac{255}{224}=1\frac{31}{224}$$

Al procedimiento de eliminar uno por uno los numeradores y denominadores cuando existe factor común a ellos, se le llama cancelación y debe emplearse siempre que sea posible, puesto que es más rápido y seguro.

Al cancelar tachamos los numeradores y denominadores que tienen un factor común.

Operando en esta forma, la fracción producto se reduce a su mínima expresión.

2) Efectuar, cancelando:

$$\frac{4}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{6}$$

$$\frac{4}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{6}=\frac{\overset{1}{4}\times\overset{1}{2}\times\overset{1}{3}}{\underset{3}{9}\times\underset{2}{3}\times\underset{3}{6}}=$$

$$\frac{1\times1\times1}{3\times2\times3}=\frac{1}{18}$$

EJERCICIOS

Simplifica estas operaciones:

1. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}$	R.1	2. $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}$	R. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{4}{5}\times\frac{10}{9}$	R. $\frac{8}{9}$	4. $\frac{6}{7}\times\frac{7}{8}\times\frac{8}{9}$	R. $\frac{2}{3}$
5. $\frac{7}{8}\times\frac{16}{21}$	R. $\frac{2}{3}$	6. $\frac{7}{19}\times\frac{19}{13}\times\frac{26}{21}$	R. $\frac{2}{3}$
7. $\frac{52}{24}\times\frac{4}{13}$	R. $4\frac{1}{6}$	8. $\frac{23}{34}\times\frac{17}{28}\times\frac{7}{69}$	R. $\frac{1}{24}$
9. $\frac{18}{15}\times\frac{90}{36}$	R.3	10. $\frac{90}{15}\times\frac{41}{108}\times\frac{34}{82}$	R. $\frac{5}{18}$
11. $\frac{21}{22}\times\frac{11}{49}$	R. $\frac{3}{14}$	12. $\frac{2}{3}\times\frac{6}{5}\times\frac{10}{9}\times\frac{1}{8}$	R. $\frac{1}{9}$
13. $\frac{13}{4}\times\frac{72}{39}$	R.6	14. $\frac{7}{8}\times\frac{8}{11}\times\frac{22}{14}\times\frac{1}{4}$	R. $\frac{1}{4}$
15. $\frac{24}{102}\times\frac{51}{72}$	R. $\frac{1}{6}$	16. $\frac{5}{6}\times\frac{7}{10}\times\frac{3}{14}\times\frac{1}{5}$	R. $\frac{1}{40}$
17. $\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}\times\frac{1}{4}$	R. $\frac{1}{7}$	18. $\frac{3}{5}\times\frac{17}{19}\times\frac{5}{34}\times\frac{38}{75}$	R. $\frac{1}{25}$

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS MIXTOS

Para multiplicar los números mixtos, éstos se reducen a quebrados y se multiplican como tales.

Ejemplo

Efectuar $5\frac{2}{3}\times2\frac{4}{5}\times4\frac{1}{9}$

$$5\frac{2}{3}\times2\frac{4}{5}\times4\frac{1}{9}=\frac{17}{3}\times\frac{14}{5}\times\frac{37}{9}=$$

$$\frac{7\times14\times37}{3\times5\times9}=\frac{8806}{135}=65\frac{31}{135}$$

EJERCICIOS

Simplificar

1. $3\frac{1}{6}\times 2\frac{4}{19}$ **R.** 7

2. $2\frac{5}{6}\times 3\frac{3}{4}\times 1\frac{1}{17}$ **R.** $11\frac{1}{4}$

3. $2\frac{1}{7}\times 2\frac{4}{5}\times 3\frac{1}{3}\times 4\frac{1}{2}$ **R.** 90

4. $3\frac{1}{4}\times 1\frac{1}{13}$ **R.** $3\frac{1}{2}$

5. $10\frac{1}{10}\times 3\frac{1}{101}\times 1\frac{3}{152}$ **R.** 31

6. $5\frac{1}{4}\times 2\frac{2}{9}$ **R.** $11\frac{2}{3}$

7. $8\frac{1}{9}\times 1\frac{2}{73}$ **R.** $8\frac{1}{3}$

8. $3\frac{1}{4}\times 1\frac{1}{3}\times 1\frac{11}{26}\times 1\frac{1}{37}$ **R.** $6\frac{1}{3}$

9. $1\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{3}\times 1\frac{1}{5}$ **R.** $2\frac{2}{5}$

10. $6\frac{2}{7}\times 1\frac{3}{11}$ **R.** 8

11. $1\frac{1}{2}\times 1\frac{2}{3}$ **R.** $2\frac{1}{2}$

12. $9\frac{2}{9}\times 1\frac{1}{83}\times 2\frac{3}{21}$ **R.** 20

13. $14\frac{4}{5}\times 5\frac{5}{6}$ **R.** $86\frac{1}{3}$

14. $8\frac{1}{3}\times 5\frac{1}{4}\times 1\frac{3}{25}$ **R.** 49

15. $1\frac{1}{5}\times 1\frac{1}{9}\times 1\frac{1}{8}\times 1\frac{3}{5}$ **R.** $2\frac{2}{5}$

MULTIPLICACIÓN COMBINADA

En la **multiplicación de enteros, mixtos y quebrados**, a los enteros se les pone como denominador la unidad; los mixtos se reducen a quebrados y todos se multiplican como quebrados.

Ejemplo

Efectuar $14\times 3\frac{4}{5}\times \frac{1}{12}\times \frac{3}{4}$

$$14\times 3\frac{4}{5}\times \frac{1}{12}\times \frac{3}{4}=\frac{14}{1}\times \frac{19}{5}\times \frac{1}{12}\times \frac{3}{14}=\frac{14\times 19\times 1\times 3}{5\times 12\times 14}=\frac{19}{20}$$

EJERCICIOS

Simplificar:

1. $7\frac{2}{3}\times \frac{11}{46}\times \frac{1}{121}\times 66$ **R.** 1

2. $3\times \frac{1}{35}\times 3$ **R.** $\frac{3}{5}$

3. $13\times \frac{5}{6}\times \frac{3}{10}\times \frac{5}{26}$ **R.** $\frac{9}{10}$

4. $2\frac{1}{2}\times \frac{1}{5}\times 2$ **R.**1

5. $19\times 5\frac{3}{14}\times \frac{2}{73}\times \frac{7}{19}$ **R.**1

6. $3\frac{1}{4}\times \frac{2}{13}\,\frac{1}{3}$ **R.** $\frac{1}{6}$

7. $\frac{11}{18}\times 2\frac{1}{9}\times 36\times \frac{1}{38}$ **R.** $1\frac{2}{9}$

8. $\frac{5}{6}\times \frac{9}{7}\times 2\frac{1}{3}$ **R.** $2\frac{1}{2}$

9. $\frac{11}{12}\times 24\times \frac{7}{121}$ **R.** $1\frac{3}{11}$

10. $9\frac{1}{3}\times 7\frac{5}{7}\times 20\frac{1}{3}\times \frac{1}{1708}$ **R.** $\frac{6}{7}$

11. $\frac{5}{9}\times \frac{7}{8}\times 4\frac{1}{3}\times \frac{4}{35}$ **R.** $\frac{13}{54}$

12. $2\frac{1}{3}\times 3\frac{1}{4}\times 4\frac{1}{5}\times \frac{1}{637}$ **R.** $\frac{1}{20}$

13. $\frac{7}{9}\times 2\frac{1}{4}\times \frac{18}{35}$ **R.** $\frac{9}{10}$

14. $36\times \frac{1}{84}\times \frac{14}{9}\times \frac{1}{6}$ **R.** $\frac{1}{9}$

15. $\frac{11}{26}\times 52\times 3\frac{1}{13}\times 1\frac{6}{7}\times \frac{5}{33}$ **R.** $19\frac{1}{21}$

16. $\frac{11}{36}\times \frac{18}{121}\times 2\frac{3}{5}\times \frac{1}{169}\times 715$ **R.** $\frac{1}{2}$

17. $1\frac{1}{2}\times 1\frac{2}{3}\times \frac{6}{35}$ **R.** $\frac{3}{7}$

18. $7\frac{2}{9}\times 18\times \frac{5}{13}\times 6\frac{1}{3}\times \frac{1}{20}$ **R.** $15\frac{5}{6}$

19. $5\frac{1}{8}\times \frac{1}{28}\times 6\frac{1}{3}\times 48$ **R.**19

20. $5\frac{2}{31}\times \frac{11}{157}\times \frac{62}{77}\times 21\times 1\frac{1}{6}$ **R.**7

EJERCICIOS

Simplificar estas combinaciones:

1. $\left(1\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)\times\frac{2}{3}$ **R.** $1\frac{1}{24}$

2. $\left(4+2\frac{3}{5}\right)\times\frac{1}{66}$ **R.** $\frac{1}{10}$

3. $16\times\left(14\frac{1}{16}\times5\frac{1}{6}\right)$ **R.** $1162\frac{1}{2}$

4. $\frac{2}{3}\times\left(10\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\right)$ **R.** $\frac{1107}{1280}$

5. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times6$ **R.** 1

6. $\left(16\frac{3}{5}-\frac{7}{10}\right)\times\frac{1}{159}$ **R.** $\frac{1}{10}$

7. $\left(2+\frac{1}{4}\right)\times\left(6-\frac{1}{30}\right)$ **R.** $13\frac{17}{40}$

8. $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{5}$ **R.** $\frac{1}{4}$

9. $72\times\left(\frac{7}{8}+\frac{2}{9}\right)$ **R.** 79

10. $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)$ **R.** $\frac{85}{144}$

11. $\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}\right)\times5\frac{1}{16}$ **R.** $1\frac{1}{80}$

12. $\left(5\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\right)\times3$ **R.** $16\frac{1}{2}$

13. $\left(8-\frac{2}{9}\right)\times\frac{1}{35}$ **R.** $\frac{2}{9}$

FRACCIÓN DE FRACCIÓN

La **fracción de fracción** es una o varias partes de un número entero, quebrado o mixto.

Ejemplo

$$\frac{2}{3}\text{ de }5\,;\ \frac{1}{4}\text{ de }\frac{3}{5}\,,\ \frac{2}{3}\text{ de }4\frac{1}{6}$$

1) Para encontrar $\frac{3}{5}$ de 40.

Diremos: $\frac{1}{5}$ de 40 es 40 ÷ 5 = 8 y $\frac{3}{5}$ serán 8 × 3 = 24

Aquí la palabra de equivale al **signo de multiplicar**: en este caso pudimos multiplicar por 40 y tendríamos:

$$\frac{3}{5}\times40=\frac{3\times40}{5}=\frac{3\times8}{1}=24$$

2) Hallar los $\frac{2}{3}$ de 5.

$\frac{1}{3}$ de 5 es $5\div3=\frac{5}{3}$ y los $\frac{2}{3}$ serán **:** $\frac{5}{3}\times2=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$

Si multiplicamos ambas cantidades obtendremos el mismo resultado.

$$\frac{2}{3}\times5=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$$

porque de equivale al signo de multiplicar.

3) Hallar los $\frac{5}{7}$ de $\frac{1}{2}$

$$\frac{5}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{5\times1}{7\times2}=\frac{5}{4}$$

4) Hallar los $\frac{7}{8}$ de $\frac{1}{6}$

$$\frac{7}{8}\times4\frac{1}{6}=\frac{7}{8}\times\frac{25}{6}=\frac{175}{48}=3\frac{31}{48}$$

EJERCICIOS

Encuentra las siguientes fracciones:

1. $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ **R.** $\frac{2}{5}$

2. $\frac{2}{3}$ de 12 **R.** 8

3. $\frac{7}{8}$ de 108 **R.** $94\frac{1}{2}$

4. $\frac{9}{17}$ de 51 **R.** 27

5. $\frac{2}{9}$ de 13 **R.** $2\frac{8}{9}$

6. $\frac{5}{6}$ de 42 **R.** 35

7. $\frac{11}{12}$ de 96 **R.** 88

8. $\frac{3}{4}$ de 81 **R.** $60\frac{3}{4}$

9. $\frac{6}{5}$ de $\frac{2}{9}$ **R.** $\frac{4}{15}$

10. $\frac{11}{7}$ de $\frac{35}{22}$ **R.** $2\frac{1}{2}$

11. $\frac{18}{41}$ de 164 **R.** 72

12. $\frac{5}{9}$ de $2\frac{1}{4}$ **R.** $1\frac{1}{4}$

13. $\frac{7}{10}$ de $9\frac{1}{7}$ **R.** $6\frac{2}{5}$

14. $\frac{10}{11}$ de $2\frac{4}{9}$ **R.** $2\frac{2}{9}$

15. $\frac{3}{8}$ de $3\frac{1}{3}$ **R.** $1\frac{1}{4}$

16. $\frac{5}{13}$ de $5\frac{5}{12}$ **R.** $2\frac{1}{12}$

FRACCIONES MÚLTIPLES

Las **fracciones múltiples** no son más que productos indicados y se resuelven multiplicando todos los números dados.

Ejemplos

1) Hallar los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{5}{6}$ de 10.

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{10}{1}=\frac{2\times5\times10}{3\times6}=\frac{5\times10}{3\times3}=\frac{50}{9}=5\frac{5}{9}$$

2) Hallar los $\frac{7}{9}$ de los $\frac{3}{5}$ de $\frac{8}{24}$

$$\frac{7}{9}\times\frac{3}{5}\times\frac{8}{24}=\frac{7\times3\times8}{9\times5\times24}=\frac{7}{3\times5\times3}=\frac{7}{45}$$

3) Hallar los $\frac{5}{9}$ de los $\frac{3}{17}$ de los $\frac{3}{7}$ del doble de 100

$$\frac{5}{9}\times\frac{3}{17}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{1}\times\frac{100}{1}=\frac{5\times3\times3\times2\times100}{9\times17\times7}$$

$$=\frac{5\times2\times100}{17\times7}=\frac{1000}{119}=8\frac{48}{119}$$

EJERCICIOS

Encuentra las siguientes fracciones:

1. $\frac{5}{11}$ de los $\frac{7}{9}$ de 33 **R.** $11\frac{2}{3}$

2. $\frac{3}{8}$ de los $\frac{3}{5}$ de 120 **R.**27

3. $\frac{3}{7}$ de $\frac{1}{10}$ de 140 **R.**6

4. $\frac{2}{7}$ de los $\frac{3}{8}$ de 112 **R.**12

5. $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{5}$ de 40 **R.**6

6. $\frac{5}{6}$ de la mitad de 84 **R.**35

7. $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de 12 **R.**4

8. $\frac{7}{11}$ de los $\frac{6}{5}$ de 440 **R.**336

9. $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{9}$ de 108 **R.**10

10. $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{9}$ de 108 **R.** 10

11. $\frac{3}{8}$ de los $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de 96 **R.**12

12. $\frac{5}{6}$ de los $\frac{3}{5}$ del triplo de 40 **R.** 60

13. $\frac{1}{4}$ de los $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{8}$ de 16 **R.** $\frac{5}{12}$

EJERCICIOS

1. La edad de Rosa es $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ de la edad de Elvira, quien tiene 24 años. Entonces, ¿cuál es la edad de María? **R.** 8 años.

2. Un auto avanza 60 km por hora, ¿cuánto recorrerá en $\frac{3}{5},\frac{1}{8},\frac{2}{11}$ y $\frac{7}{9}$ de hora? **R.** $36;7\frac{1}{2};10\frac{10}{11}$ y $46\frac{2}{3}$ kilómetros.

3. Un reloj se adelanta $\frac{3}{7}$ de minuto por cada hora. ¿Cuánto se adelantará en 5 horas; en medio día; en una semana?
R. $2\frac{1}{7}$ min.; $5\frac{1}{7}$ min.; 1 h.12 min.



Figura 69

4. Si me deben una cantidad igual a los $\frac{7}{8}$ de $96 y me pagan $\frac{3}{4}$ de esa cantidad, ¿cuánto me debe aún? **R.** $21.

5. Un señor compra tres sombreros a $ $2\frac{3}{5}$ cada uno y 6 camisas a $ $3\frac{3}{4}$ cada una. Si paga con un billete de $50, ¿cuánto le devuelven? **R.** $ $19\frac{7}{10}$.

6. ¿Cuántos litros hay que sacar de un tonel de 560 litros para que queden en él $\frac{6}{7}$ del contenido? **R.** 80 litros.

DIVISIÓN

Para **dividir dos quebrados** se multiplica el dividendo por el divisor invertido, se simplifica el resultado y se encuentran los enteros, si los hay. De ser posible, después de invertir el divisor debe cancelarse.

Ejemplo

Efectuar $\frac{14}{55}\div\frac{8}{35}$

$$\frac{14}{55}\div\frac{8}{35}=\frac{14}{55}\times\frac{35}{8}=\frac{14\times35}{55\times8}=\frac{7\times7}{11\times4}=\frac{49}{44}=1\frac{5}{44}$$

Para la **división de un entero por un quebrado o viceversa** se pone al entero como denominador la unidad y se dividen como quebrados.

Ejemplo

Efectuar $150\div\frac{16}{83}$

$$150\div\frac{16}{83}=\frac{150}{1}\div\frac{16}{83}=\frac{150}{1}\times\frac{83}{16}=\frac{150\times83}{16}=\frac{75\times83}{8}=\frac{6225}{8}=778\frac{1}{8}$$

Para **dividir números mixtos** se reducen a quebrados y se dividen como tales.

Ejemplo

Efectuar $14\frac{1}{12}\div5\frac{1}{9}$

$$14\frac{1}{12}\div5\frac{1}{9}=\frac{169}{12}\div\frac{46}{9}=\frac{169}{12}\times\frac{9}{46}=\frac{169\times9}{12\times46}=\frac{169\times3}{4\times46}=\frac{507}{184}=2\frac{139}{184}$$

EJERCICIOS

Simplificar las divisiones siguientes:

1. $\frac{3}{4}\div\frac{4}{3}$ **R.** $\frac{9}{16}$

2. $\frac{6}{11}\div\frac{5}{22}$ **R.** $2\frac{2}{5}$

3. $\frac{11}{14}\div\frac{7}{22}$ **R.** $2\frac{23}{49}$

4. $\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}$ **R.** $1\frac{1}{4}$

5. $\frac{7}{8}\div\frac{14}{9}$ **R.** $\frac{9}{16}$

6. $\frac{3}{8}\div\frac{5}{6}$ **R.** $\frac{9}{20}$

7. $\frac{8}{9}\div\frac{4}{3}$ **R.** $\frac{2}{3}$

8. $\frac{5}{12}\div\frac{3}{4}$ **R.** $\frac{5}{9}$

9. $\frac{19}{21}\div\frac{38}{7}$ **R.** $\frac{1}{6}$

EJERCICIOS

Simplifica las siguientes operaciones:

1. $\frac{30}{14} \div \frac{3}{82}$ **R.** 20
2. $\frac{21}{30} \div \frac{6}{7}$ **R.** $\frac{49}{60}$
3. $\frac{104}{105} \div \frac{75}{36}$ **R.** $\frac{416}{875}$
4. $\frac{50}{61} \div \frac{25}{183}$ **R.** 6
5. $\frac{72}{91} \div \frac{6}{13}$ **R.** $1\frac{5}{7}$
6. $8 \div \frac{1}{2}$ **R.** 16
7. $\frac{81}{97} \div 18$ **R.** $\frac{9}{194}$
8. $15 \div \frac{3}{4}$ **R.** 20
9. $\frac{11}{12} \div 44$ **R.** $\frac{1}{48}$
10. $9 \div \frac{2}{3}$ **R.** $13\frac{1}{2}$
11. $\frac{50}{73} \div 14$ **R.** $\frac{25}{511}$
12. $7 \div \frac{3}{5}$ **R.** $11\frac{2}{3}$
13. $26 \div \frac{1}{8}$ **R.** 208
14. $21 \div \frac{42}{5}$ **R.** $2\frac{1}{2}$
15. $\frac{3}{8} \div 5$ **R.** $\frac{3}{40}$
16. $\frac{16}{41} \div 16$ **R.** $\frac{1}{41}$
17. $\frac{13}{50} \div 39$ **R.** $\frac{1}{150}$
18. $1\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{3}$ **R.** $\frac{9}{14}$
19. $3\frac{1}{4} \div 4\frac{1}{3}$ **R.** $\frac{3}{4}$
20. $5\frac{1}{4} \div 6\frac{1}{5}$ **R.** $\frac{105}{124}$
21. $2\frac{3}{5} \div 3\frac{9}{10}$ **R.** $\frac{2}{3}$
22. $1\frac{6}{11} \div 1\frac{5}{6}$ **R.** $\frac{102}{121}$
23. $5\frac{2}{3} \div 8\frac{1}{2}$ **R.** $\frac{2}{3}$
24. $1\frac{8}{27} \div 1\frac{1}{9}$ **R.** $1\frac{1}{6}$
25. $8\frac{3}{4} \div 13\frac{1}{3}$ **R.** $\frac{21}{32}$
26. $5\frac{5}{9} \div 3\frac{7}{11}$ **R.** $1\frac{19}{36}$
27. $5\frac{6}{11} \div 2\frac{13}{22}$ **R.** $2\frac{8}{57}$
28. $1\frac{8}{109} \div 1\frac{133}{218}$ **R.** $\frac{2}{3}$
29. $1\frac{11}{52} \div 7\frac{7}{26}$ **R.** $\frac{1}{6}$
30. $1\frac{99}{716} \div 9\frac{19}{179}$ **R.** $\frac{1}{8}$
31. $\left(\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}\right) \div \frac{3}{2}$ **R.** $\frac{4}{9}$
32. $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{30}\right) \div \frac{1}{6}$ **R.** $2\frac{2}{5}$
33. $\left(8 + \frac{3}{4}\right) \div 4\frac{1}{5}$ **R.** $2\frac{1}{12}$
34. $\left(4 - \frac{1}{3}\right) \div \frac{11}{6}$ **R.** 2
35. $\left(5\frac{1}{4} - 4\right) \div 1\frac{1}{2}$ **R.** $\frac{5}{6}$
36. $\left(\frac{5}{6} \div 3\frac{1}{4}\right) \div 1\frac{2}{3}$ **R.** $\frac{2}{13}$
37. $\frac{3}{5} \div \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right)$ **R.** $\frac{2}{5}$
38. $\frac{9}{10} \div \left(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}\right)$ **R.** $\frac{54}{65}$
39. $\frac{5}{6} \div \left(\frac{2}{3} \times \frac{6}{5}\right)$ **R.** $1\frac{1}{24}$
40. $\left(-1\frac{1}{3}\right) \div \left(1 - \frac{1}{5}\right)$ **R.** $\frac{5}{6}$
41. $\left(2 + \frac{7}{8}\right) \div \left(2 - \frac{1}{9}\right)$ **R.** $1\frac{71}{136}$
42. $\left(7 + 3\frac{1}{8}\right) \div \left(14 + 6\frac{1}{4}\right)$ **R.** $\frac{1}{2}$
43. $\left(60 - \frac{1}{8}\right) \div \left(30 - \frac{1}{16}\right)$ **R.** 2
44. $\left(\frac{5}{8} \times \frac{10}{50}\right) \div 10\frac{1}{12}$ **R.** $\frac{3}{242}$
45. $\left(10 \div \frac{5}{6}\right) \div 10\frac{9}{32}$ **R.** $1\frac{55}{329}$
46. $\left(\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} \times \frac{3}{4}\right) \div 3\frac{1}{2}$ **R.** $\frac{1}{7}$
47. $\left(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{4} - 3\frac{1}{8}\right) \div \frac{1}{12}$ **R.** $29\frac{1}{2}$

EJERCICIOS

1. ¿A qué velocidad por hora avanza un automóvil que en $5\frac{2}{37}$ horas recorre $202\frac{6}{37}$ km? **R.** 40 kilómetros.

2. Un albañil hace una obra en $18\frac{7}{36}$ días. ¿Qué parte de la obra puede hacer en $5\frac{1}{3}$ días? **R.** $\frac{192}{655}$

3. La distancia entre dos ciudades es de 140 km. ¿Cuántas horas debe caminar una persona para recorrer los $\frac{3}{14}$ de dicha distancia en una hora? **R.** $4\frac{2}{3}$.



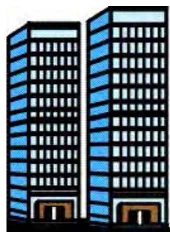


Figura 70

4. ¿Cuántas varillas de $\frac{1}{4}$ de metro de longitud se pueden sacar de una varilla de $\frac{5}{12}$ metros de largo?

R. $1\frac{1}{2}$ varillas.

5. Si una llave vierte $8\frac{1}{4}$ litros de agua por minuto, ¿en cuánto tiempo llenará un depósito de $90\frac{3}{4}$ litros de capacidad? **R.** 11 minutos.

6. ¿Por qué número hay que dividir $6\frac{2}{5}$ para obtener 3 de cociente? **R.** $2\frac{2}{15}$

FRACCIONES COMPLEJAS

Son aquellas cuyo numerador o denominador, o ambos, son quebrados.

Ejemplos

$$\frac{3/4}{2/5},\ \frac{4}{1/6},\ \frac{3/7}{6},\ \frac{4\,1/5}{2/9}$$

Para **reducir una fracción compleja a simple** se efectúa la división del numerador entre el denominador.

Ejemplos

1) Simplificar $\frac{3/17}{9/34}$

$$\frac{3/17}{9/34} = \frac{3}{17} \div \frac{9}{34} = \frac{3}{17} \times \frac{34}{9} = \frac{3 \times 34}{17 \times 9} = \frac{2}{3}$$

2) Simplificar $\frac{17}{3/11}$

$$\frac{17}{3/11} = \frac{17}{1} \div \frac{3}{11} = \frac{17}{1} \times \frac{11}{3} = \frac{187}{3} = 62\frac{1}{3}$$

3) Simplificar $\frac{5/12}{10}$

$$\frac{5/12}{10} = \frac{5}{12} \div \frac{10}{1} = \frac{5}{12} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{12 \times 10} = \frac{1}{24}$$

4) Simplificar $\dfrac{\dfrac{1/2}{2/3}}{\dfrac{1/5}{1/10}}$

$$\dfrac{\dfrac{1/2}{2/3}}{\dfrac{1/5}{1/10}}$$

INVERSO DE UN QUEBRADO

El **inverso de un quebrado** es otro quebrado que tiene como numerador el denominador del primero y como denominador el numerador del primero.

De este modo, el inverso de 4 ó $\frac{4}{1}$ es $\frac{1}{4}$; el inverso de $\frac{5}{6}$ es $\frac{6}{5}$; el de $\frac{7}{9}$ es $\frac{9}{7}$.

El inverso de un quebrado proviene de **dividir la unidad entre dicho quebrado**.

$$1 \div 5 = \frac{1}{1} \div \frac{5}{1} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$1 \div \frac{3}{8} = \frac{1}{1} \div \frac{3}{8} = \frac{1}{1} \times \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

Por lo tanto, siempre que tengamos una fracción compleja cuyo numerador sea la unidad, para reducirla a simple sólo hay que invertir el quebrado del denominador.

Ejemplo

$$\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \qquad \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{1} = 6$$

EJERCICIOS

1. $\dfrac{\frac{2/3}{3/5}}{\frac{1/6}{2/5}}$ **R.** $2\frac{2}{3}$

2. $\dfrac{\frac{1}{5\,3/4}}{\frac{1}{4\,1/5}}$ **R.** $\frac{84}{115}$

3. $\dfrac{\frac{3}{3/4}}{\frac{1}{1/6}}$ **R.** $\frac{2}{3}$

4. $\dfrac{\frac{6}{5/8}}{\frac{3/5}{2}}$ **R.** 32

EJERCICIOS

Simplificar:

1. $\dfrac{5/8}{3/16}$ **R.** $3\frac{1}{3}$

2. $\dfrac{2/3}{3/7}$ **R.** $1\frac{5}{9}$

3. $\dfrac{7/13}{10}$ **R.** $\frac{7}{30}$

4. $\dfrac{7\,3/4}{1/8}$ **R.** 62

5. $\dfrac{3/5}{1/10}$ **R.** 6

6. $\dfrac{4\,1/3}{6\,1/3}$ **R.** 13

7. $\dfrac{2/19}{6\,4/5}$ **R.** $\frac{5}{323}$

8. $\dfrac{5}{3/8}$ **R.** $13\frac{1}{3}$

9. $\dfrac{15}{\frac{1}{1/4}}$ **R.** $3\frac{1}{2}$

10. $\dfrac{16}{\frac{1}{1/4}}$ **R.** 4

11. $\dfrac{\frac{1}{1/5}}{15}$ **R.** $\frac{1}{3}$

12. $\dfrac{\frac{1}{5/6}}{15}$ **R.** $\frac{2}{25}$

13. $\dfrac{\frac{1}{3/5}}{\frac{1}{3/8}}$ **R.** $\frac{5}{8}$

EXPRESIÓN FRACCIONARIA COMPLEJA

Una **expresión fraccionaria compleja** es una fracción compleja en cuyo numerador o denominador, o en ambos, hay operaciones indicadas.

Ejemplo

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{8\times\frac{1}{5}} \qquad \frac{\left(6+\frac{2}{3}\right)\div 5}{\frac{2}{1/8}}$$

Para **simplificar una expresión fraccionaria compleja** se efectúan las operaciones del numerador y denominador hasta convertirlos en un solo quebrado, y luego se hace la división de estos dos quebrados.

Ejemplos

1) $$\frac{\left(1/6+1/9-1/12\right)\times 6/7}{8\div\frac{1}{1/4}}$$

$$\frac{\left(1/6+1/9-1/12\right)\times 6/7}{8\div\frac{1}{1/4}}$$

$$\frac{1/6}{2}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

2) $$\frac{\frac{2+2/5}{3}+\frac{5\,1/4}{3/2}}{\frac{3\,3/5}{1/2}-\frac{1/4}{1/2}}\times\left(235\frac{1}{5}\div 4\frac{1}{5}\right)$$

Efectuando el numerador:

$$\frac{2+2/5}{3}+\frac{5\,1/4}{3/2}=\frac{12/5}{3}+\frac{21/4}{3/2}=\frac{4}{5}+\frac{7}{2}=\mathbf{\frac{43}{10}}$$

Efectuando el denominador:

$$\frac{3\,3/5}{1/2}-\frac{1/4}{1/2}=\frac{18/5}{1/2}+\frac{1/4}{1/2}=$$

$$\frac{36}{5}-\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{67}{10}}$$

Efectuando el paréntesis:

$$235\frac{1}{5}\div 4\frac{1}{5}=\frac{1176}{5}\times\frac{5}{21}=\mathbf{56}$$

Tendremos:

$$\frac{43/10}{67/10}\times 56\;\frac{43}{67}\times 56=$$

$$\frac{2408}{67}=\mathbf{35\frac{63}{67}}$$

3) Simplificar

$$\frac{3}{2+\frac{1/5}{3-1/4}}$$

Esta clase de fracciones se reducen a simples realizando las operaciones indicadas de abajo hacia arriba, como se muestra en los cuadritos.

$$\frac{3}{2+\frac{1/5}{3-1/4}}=\frac{3}{2+\frac{1/5}{11/4}}=\frac{3}{2+\frac{4}{55}}$$

$$=\frac{3}{114/55}=\frac{3}{1}\times\frac{55}{114}=\frac{55}{38}=1\frac{17}{38}$$

EJERCICIOS

Simplificar

1. $\dfrac{\frac34+\frac56\times\frac35}{\frac12-\frac27\times\frac75}$ **R.** $12\frac12$

2. $\dfrac{\frac{2}{3/5}+\frac{4}{6/7}}{\frac{1}{1/5}-\frac{1}{1/3}}$ **R.** 4

3. $\dfrac{\frac13+\frac25+\frac1{30}}{23/30}$ **R.** 1

4. $\dfrac{\left(9\div\frac{1}{1/3}\times 4/15\right)\times 5/12}{6\div\frac{1}{1/2}}$ **R.** $\frac13$

5. $\dfrac{2/5+3/10-1/20}{2/3+1/9+5/6}$ **R.** $\frac{117}{290}$

6. $\dfrac{\frac78+1\frac14-\frac32\times\frac49}{2\frac12-1\frac1{10}+\frac1{14}\times\frac75}$ **R.** $\frac{35}{36}$

7. $\dfrac{1/10+1/100-1/1000}{10}$ **R.** $\frac{109}{1000}$

8. $\dfrac{\left(\frac35+\frac18-\frac7{24}\right)\times3\frac1{13}}{5-\frac23}$ **R.** $\frac4{13}$

9. $\dfrac{4\frac12-3\frac23+1/4}{2-1/5}$ **R.** $\frac{65}{108}$

10. $\dfrac{\left(\frac1{10}+2/25+3/40\right)\times 1/6}{1/8-1/12}$

R. $1\frac1{50}$

11. $\dfrac{\frac{1/2}{1/3}+\frac{1/4}{1/5}-\frac{1/5}{1/6}}{\frac{1/6}{1/7}+\frac{1/4}{1/8}-\frac{1/8}{1/9}}$ **R.** $\frac{186}{245}$

12. $\dfrac{\left(5\frac7{36}-4\frac1{18}+1\frac1{72}\right)\times36}{78-\frac12}$ **R.** 1

13. $\dfrac{\left(6\frac18-1/20-1/55\right)\div 2/7}{\left(1/3-1/12\right)\times 4\,4/5}$

R. $17\frac{703}{1056}$

14. $\dfrac{\frac{2-\frac35}{4/5}+\frac{3-1/3}{4/3}}{\frac{4-1/4}{1/2}+\frac{5-1/5}{24}}\times\left(\frac7{20}\times\frac{11}2\right)$

R. 1

15. $\dfrac{\frac{3/4}{1/6}+\frac{5\,2/3}{1/12}+3}{6+\left(8-\frac14\right)}$ **R.** $8\frac3{11}$

16. $\dfrac{\frac{1}{1/3}-\frac{1}{1/2}}{\frac{2}{1/5}+\frac{4}{1/10}}$ **R.** $\frac1{50}$

17. $\dfrac{4\frac17-2\frac1{14}+3\frac12}{6\frac23+5\frac59-10\frac1{18}}$ **R.** $2\frac42$

18. $1+\dfrac{3}{2+\dfrac{4}{1-1/4}}$ **R.** $1\frac9{22}$

19. $\dfrac{\frac{2-1/3}{8}+\frac{5/6}{3}}{\left(5\div1/8\right)\times\left(1/5\div1/10\right)}$ **R.** $21\frac13$

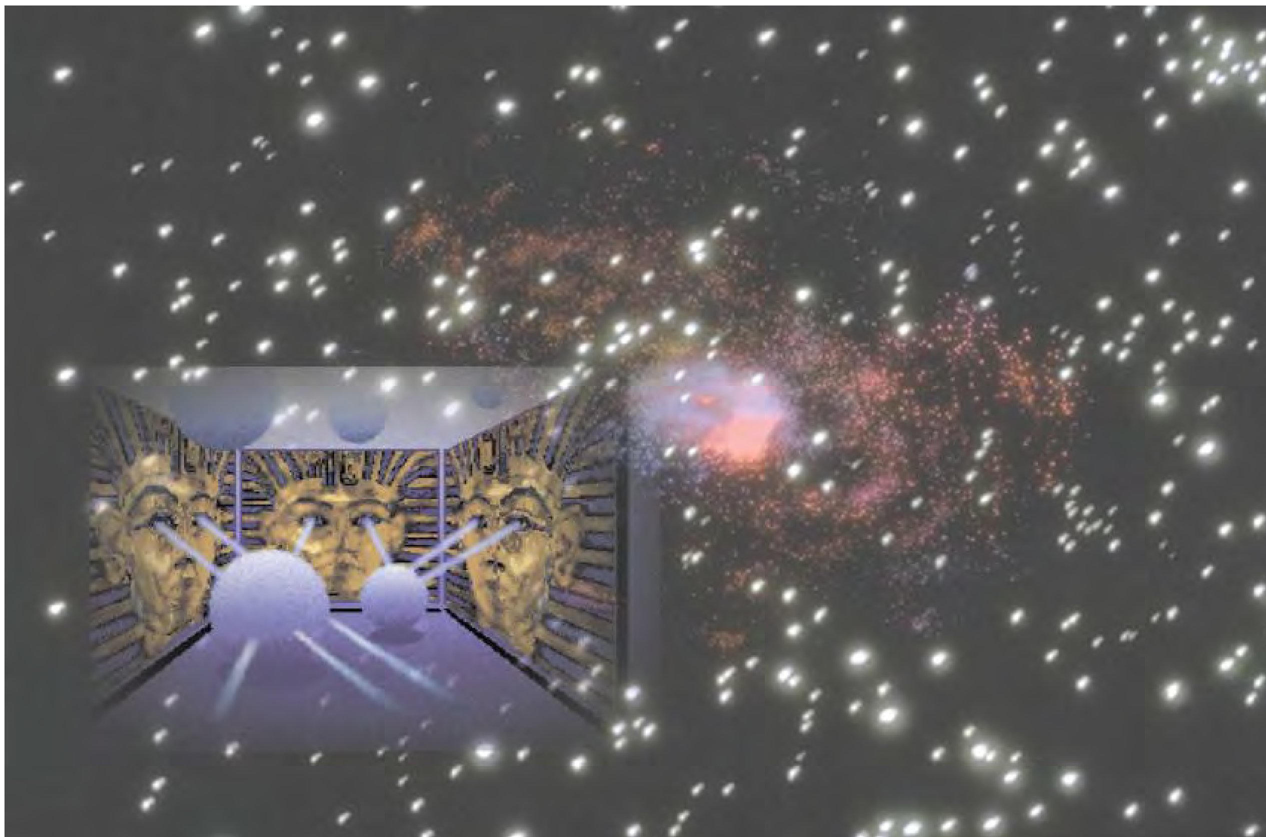
20. $\dfrac{\frac{8}{1/4}+2-\frac{1/2}{1/4}}{3\div\left(\frac53\times\frac65\right)}$ **R.** $21\frac13$

21. $\dfrac{\frac{1+\frac12}{3}+\frac{1-\frac13}{2}}{\frac{2\,1/2}{5/6}-\frac{1/3}{1/6}}\times\left(23\,1/2\div\frac{47}{12}\right)$

R. 5

22. $2+\dfrac{5}{2+\dfrac{1}{3+1/8}}$ **R.** $4\frac9{58}$

23. $3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{1-1/3}}$ **R.** $3\frac29$



Los números fraccionarios (quebrados) han sido utilizados desde la antigüedad. Por ejemplo, el pueblo egipcio realizaba estas operaciones utilizando la unidad como numerador.

CAPÍTULO XXVII

QUEBRADOS COMUNES

Las operaciones fraccionarias son utilizadas constantemente en la mayor parte de las actividades de una persona.

En este capítulo se presentarán diversos ejemplos de cómo solucionar este tipo de problemas basándose en leyes y teoremas que facilitarán su resolución.

Los problemas presentados abarcarán aspectos básicos de los quebrados (adición, sustracción, multiplicación y división), transacciones comerciales, inversiones, cuestiones relacionadas con el tiempo, la velocidad, el peso específico, problemas de física, de química, etc.

PROBLEMA 1

Si añadimos 1 al numerador y 3 al denominador de $\frac{3}{4}$, ¿aumenta o disminuye este quebrado y cuánto?

Al añadir 1 al numerador y 3 al denominador, $\frac{3}{4}$ se convierte en $\frac{3+1}{4+3}=\frac{4}{7}$. Para saber si el quebrado $\frac{3}{4}$ aumenta o disminuye al convertirse en $\frac{4}{7}$, tenemos que reducir ambos a un común denominador.

$$\boxed{\frac{3}{4}=\frac{3\times 7}{4\times 7}=\frac{21}{28}} \qquad \boxed{\frac{4}{7}=\frac{4\times 4}{7\times 4}=\frac{16}{28}}$$

Aquí vemos que $\frac{3}{4}$ disminuye $\frac{5}{28}$, porque su valor era $\frac{21}{28}$ y se ha convertido en $\frac{16}{28}$.

Asi:

$$\boxed{\frac{21}{28}-\frac{16}{28}=\frac{5}{28}}$$

EJERCICIOS

1. ¿Aumenta o disminuye $\frac{8}{9}$ al restar 5 a sus dos términos y cuánto? **R.** Disminuye $\frac{5}{36}$

2. ¿Aumenta o disminuye $\frac{7}{9}$ al añadir 1 al numerador y 4 al denominador y cuánto? **R.** Disminuye $\frac{19}{117}$

3. ¿Qué alteración sufre $\frac{7}{11}$ al añadir 5 al numerador y 3 al denominador? **R.** Aumenta $\frac{17}{77}$

4. Qué será más ventajoso, ¿vender 50 clips de colores a **$**$5\frac{3}{8}$ o a **$**$5\frac{4}{9}$ y cuál sería la diferencia de precio en la venta total? **R.** Venderlos a **$**$5\frac{4}{9}$; la diferencia es **$**$3\frac{17}{36}$

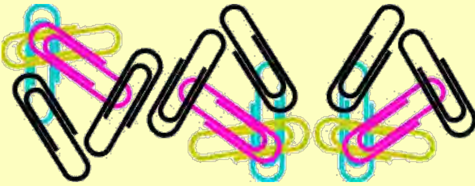


Figura 71

5. ¿Aumenta o disminuye $\frac{9}{7}$ y cuánto al restar 3 a sus dos términos? **R.** Aumenta $\frac{3}{14}$

6. ¿Qué variación sufre $\frac{13}{8}$ al añadir 7 al numerador y 4 al denominador? **R.** Aumenta $\frac{1}{24}$

7. ¿Qué variación sufre $\frac{10}{9}$ al añadir 2 al numerador y 5 al denominador? **R.** Disminuye $\frac{16}{63}$

8. ¿Aumenta o disminuye $\frac{5}{6}$ al añadir 3 a sus dos términos y cuánto? **R.** Aumenta $\frac{1}{18}$

9. ¿Aumenta o disminuye $\frac{8}{7}$ al añadir 4 a sus dos términos y cuánto? **R.** Disminuye $\frac{4}{77}$

PROBLEMA 2

¿Por qué número se multiplica $\frac{5}{6}$ cuando se convierte en $2\frac{3}{7}$? $2\frac{3}{7}$ es el producto y $\frac{5}{6}$ un factor. Para hallar el otro factor sólo se divide el producto entre el factor conocido:

$$2\frac{3}{7} \div \frac{5}{6} = \frac{17}{7} \times \frac{6}{5} = \frac{102}{35} = 2\frac{32}{35}$$

Luego se multiplica por $2\frac{32}{35}$

EJERCICIOS

1. ¿Por cuál número se multiplica $\frac{7}{8}$ cuando se añade 5 al numerador y 3 al denominador? ¿Y cuándo se resta 3 de 7 y se cambia el 8 por 10? **R.** $1\frac{96}{77}$ y $\frac{16}{35}$

2. ¿Por cuál número se multiplica $\frac{1}{2}$ cuando se convierte en $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{8}$ cuando se convierte en $\frac{3}{7}$**,** o $\frac{3}{5}$ cuando se convierte en 6? **R.** Por. $\frac{3}{2}$**;** $\frac{24}{7}$ y 10

3. ¿Por cuál número hay que multiplicar 7 para que dé 8; 9 para que dé 10; 14 para obtener 3? **R.** Por $\frac{8}{7}$**;** $\frac{10}{9}$ y $\frac{3}{14}$

4. ¿Por cuál número hay que multiplicar $14\frac{2}{9}$ para obtener $5\frac{1}{6}$? **R.** Por $\frac{93}{256}$

5. ¿Por qué número se multiplica $\frac{5}{6}$ cuando se añade 2 a sus dos términos? ¿Y cuando se resta 2 a sus dos términos?
R. Por $\frac{21}{20}$ y $\frac{9}{10}$

6. ¿Por cuál número se multiplica el precio de compra de una plancha que costó $ 15 y se vende en $20? **R.** Por $1\frac{1}{3}$



Figura 72

7. ¿Por cuál número se multiplica 6 cuando se convierte en 4; 3 cuando se convierte en 1 y 11 cuando se convierte en 12? **R.** Por $\frac{2}{3}$**;** $\frac{1}{3}$ y $1\frac{1}{11}$

PROBLEMA 3

¿Por cuál número se divide 80 cuando se convierte en $\frac{3}{5}$?

80 es el dividendo y $\frac{3}{5}$ el cociente. Para hallar el divisor sólo se divide el dividendo entre el cociente:

$$80 \div \frac{3}{5} = \frac{80}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{400}{3} = 133\frac{1}{3}$$

Luego se divide por $133\frac{1}{3}$

EJERCICIOS

1. ¿Por cuál número hay que dividir $5\frac{2}{5}$ para tener $6\frac{1}{3}$? **R.** Por $\frac{81}{95}$

2. ¿Por cuál número se divide $\frac{7}{8}$ cuando se añade 5 al numerador y 3 al denominador? ¿Y cuándo se resta 3 de 7 y se cambia el 8 por 10?
R. Por $\frac{77}{96}$ y $2\frac{3}{16}$

3. ¿Por cuál número se divide 8 cuando se convierte en 6; 9 cuando se convierte en 7 y 11 cuando se convierte en 19? **R.** $\frac{4}{3}$; $1\frac{2}{7}$ y $\frac{11}{19}$

4. ¿Por cuál número hay que dividir 7 para obtener 8; 9 para que dé 10; 14 para que dé 3 y 50 para tener $\frac{1}{4}$?
R. Por $\frac{7}{8}$; $\frac{9}{10}$; $4\frac{2}{3}$ y 200

5. ¿Por cuál número se divide $\frac{5}{6}$ cuando se añade 2 a cada uno de sus términos?

¿Y cuándo se resta 2 a cada uno de sus términos?
R. Por $\frac{20}{21}$ y $1\frac{1}{9}$

PROBLEMA 4

¿Qué parte de 10 es 4?

1 es $\frac{1}{10}$ de 10; luego, 4 será cuatro veces mayor, o sea,

$$\frac{1}{10} \times 4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Por tanto, 4 es $\frac{2}{5}$ de 10.

Aquí vemos que tan sólo se dividieron las dos cantidades dadas, poniendo como divisor o denominador la cantidad que lleva el de adelante.

PROBLEMA 5

¿Qué parte de $\frac{2}{3}$ es $\frac{7}{8}$?

Se hace la división poniendo a $\frac{2}{3}$ como divisor:

$$\frac{7}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{7}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{21}{16}$$

Por tanto, $\frac{7}{8}$ es $\frac{21}{16}$ de $\frac{2}{3}$

EJERCICIOS

1. ¿Qué parte de un peso son 6 cts.; 18 cts.; 40 cts.? **R.** $\frac{3}{50}$; $\frac{5}{90}$ y $\frac{2}{5}$

2. ¿Qué parte de $\frac{5}{6}$ es $\frac{2}{7}$; de $\frac{1}{2}$ es $3\frac{1}{5}$? **R.** $\frac{12}{35}$ y $\frac{32}{5}$

3. ¿Qué parte de 15 es 20; de 12 es 18; de 24 es 30? **R.** $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{4}$

4. ¿Qué parte de 20 es 5; de 18 es 4; de 5 es 6?

R. $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{9}$ y $\frac{6}{5}$

PROBLEMA 6

Un hacendado compra un caballo en 1,250 dólares y lo vende después por los $\frac{2}{5}$ del costo. ¿Cuánto pierde?

Para saber en cuánto se vendió el caballo hay que encontrar los $\frac{2}{5}$ de 1,250 dólares:

$\frac{1}{5}$ de 1,250 será 1,250 ÷ 5 = 250 y los $\frac{2}{5}$ serán 250 × 2 = 500 dólares.

Si vendió el caballo en 500 dólares, perdió: 1,250 - 500 = 750 dólares.



Figura 73

PROBLEMA 7

De \$90 que tenía perdí los $\frac{3}{5}$ y presté $\frac{5}{6}$ del resto. ¿Cuánto me queda?

Perdí $\frac{3}{5}$ de \$90. $\frac{1}{5}$ de \$90 es \$90 ÷ 5 = 18 y los $\frac{3}{5}$ son \$18 × 3 = \$54. El resto es \$90 - \$54 = \$36.

Presté $\frac{5}{6}$ del resto, o sea $\frac{5}{6}$ de \$36:

$\frac{1}{6}$ de \$36 es \$36 ÷ 6 = \$6 y los $\frac{5}{6}$ serán \$6 × 5 = \$30

Si perdí \$54 y presté \$30, me quedan:

\$90 - (\$54 + \$30) =
\$90 - \$84 = \$6

EJERCICIOS

1. ¿Cuánto gano al vender por los $\frac{13}{9}$ de su valor algo que me costó 108 dólares? **R.** 48 dólares.

2. ¿Cuánto gano o pierdo al vender por los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{7}{2}$ de su valor algo que me costó 40 dólares? **R.** Gano $44.

3. Al vender un caballo en 910 dólares gano los $\frac{5}{13}$ de la venta. ¿Cuál fue el 13 costo? **R.** 560 dólares.

4. La distancia de una ciudad a otra es de 210 km. El primer día recorro los $\frac{3}{7}$ de esa distancia, el segundo los $\frac{2}{21}$ y el tercero los $\frac{7}{30}$. ¿A qué distancia estoy del punto de llegada?
R. 51 km

5. De una finca de 500 hectáreas se cultivan $\frac{3}{20}$, se alquila $\frac{1}{10}$ y lo restante se vende a 5,000 dólares la hectárea. ¿Cuánto importa la venta? **R.** 1'875,000 dólares.



Figura 74

6. Tenía ahorrados 1,120 dólares. En enero invertí la mitad de esta cantidad; en febrero la mitad de lo que me quedaba; en marzo la mitad de lo que tenía después de los gastos anteriores, y en abril la mitad de lo que tenía después de los gastos anteriores. Si con lo que me quedaba compré en mayo un caballo, ¿cuánto me costó? **R.** 70 dólares.

PROBLEMA 8

¿Qué hora es cuando el reloj señala los $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ del doble de las 6 de la mañana?

Aquí se trata de una fracción múltiple, por lo que sólo hay que multiplicar todas las cantidades:

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{1}\times\frac{6}{1}=4$$

Y nos da como resultado las 4 de la mañana.



Figura 75

PROBLEMA 9

Los $\frac{3}{4}$ de un número son 60. ¿Cuál es ese número?

Si los $\frac{3}{4}$ del número que se busca son 60, $\frac{1}{4}$ del número será 60 ÷ 3 = 20, y los $\frac{4}{4}$, o sea el número buscado, será 20 × 4 = 80

EJERCICIOS

1. ¿Qué hora es cuando el reloj señala los $\frac{5}{4}$ de $\frac{1}{2}$ del triplo de las 8 a.m.? **R.** 3 p.m.

2. Si me debían los $\frac{3}{8}$ de 840 dólares y me pagan los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{14}$ de 840, ¿cuánto me deben? **R.** 90 dólares.

3. De una finca de 4,200 hectáreas se venden los $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{7}$ y se alquilan los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{4}{5}$. ¿Cuántas hectáreas quedan? **R.** 1,280 ha.

4. Si vendo un mueble por los $\frac{3}{8}$ de los $\frac{5}{9}$ de $7,200 y un aparato por $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ de $2,400, ¿cuánto recibiré en total? **R.** $1,600.

5. ¿Cuánto pierdo al vender por los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{9}{10}$ de su valor algo que me costó 5,000 dólares. **R.** 3,200 dólares.

6. Una persona cobrará los $\frac{7}{20}$ de $2,000. Si cobra $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ de $2,000, ¿cuánto le deben? **R.** $450.

7. ¿Cuál es el número cuyos $\frac{2}{5}$ equivalen a 50? **R.** 125.

8. Los $\frac{3}{4}$ de un número son 120. ¿Cuál es ese número? **R.** 160.

9. José tiene 9 años y su edad es los $\frac{3}{2}$ de la de Enrique. ¿Qué edad tiene éste? **R.** 6 años.

10. Con los 65 dólares que tengo sólo puedo pagar los $\frac{13}{14}$ de mis deudas. ¿Cuánto debo? **R.** 70 dólares.

11. Compré un traje y un anillo. El traje me costó 45 dólares y esta cantidad es los $\frac{5}{9}$ del precio del anillo. ¿Cuánto costó el anillo? **R.** 81 dólares.

12. Si los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de un número equivalen a 24, ¿cuál es ese número? **R.** 48.

PROBLEMA 10

$\frac{2}{3}$ de la edad de Ricardo son 24 años y la edad de Antonio es $\frac{4}{9}$ de la de Ricardo. Encontrar ambas edades.

$\frac{2}{3}$ de la edad de Ricardo son 24 años, $\frac{1}{3}$ de su edad será 24 ÷ 2 = 12 años, y los $\frac{3}{3}$ de su edad, o sea su edad, será 12 × 3 = 36 años.

La edad de Antonio es $\frac{4}{9}$ de la de Ricardo, o sea, $\frac{4}{9}$ de 36 años. $\frac{1}{9}$ de 36 años es 36 ÷ 9 = 4 años, y los $\frac{4}{9}$ serán 4 × 4 = 16 años.

Ricardo tiene 36 y Antonio 16 años.

EJERCICIOS

1. ¿Cuánto son los $\frac{3}{8}$ de un número cuyos $\frac{5}{7}$ equivalen a 80? **R.** 42.

2. Los $\frac{4}{5}$ de un número son 40. ¿Cuánto serán los $\frac{3}{10}$ de ese número? **R.** 15.

3. 180 dólares representan $\frac{2}{3}$ de los $\frac{5}{6}$ de mi dinero. ¿Cuánto me costará una grabadora si la compro con $\frac{7}{18}$ de mi dinero? **R.** 126 dólares.

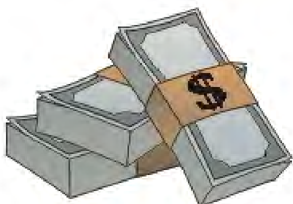


Figura 76

PROBLEMA 11

¿Cuál es el número que tiene 28 de diferencia entre sus $\frac{2}{3}$ y sus $\frac{3}{8}$?

28 será los $\frac{2}{3} - \frac{3}{8} = \frac{7}{24}$ del número; luego, $\frac{1}{24}$ del número será 28 ÷ 7 = 4 y los $\frac{24}{24}$, o sea, el número buscado:

4 × 24 = 96

PROBLEMA 12

Una pecera con sus peces costó 48 dólares. Sabiendo que el precio de la pecera es de $\frac{5}{11}$ del precio de los peces, encontrar el precio de los peces y la pecera.

El precio de los peces lo representamos por sus $\frac{11}{11}$. Si el precio de la pecera es de $\frac{5}{11}$ del precio de los peces y por ambas cosas se pagaron $48, tendremos que:

$$\frac{11}{11} + \frac{5}{11} = \frac{16}{11}$$

del precio de los peces = 48 dólares.

Si $\frac{16}{11}$ del precio de los peces equivalen a 48 dólares, $\frac{1}{11}$ de dicho precio será 48 ÷ 16 = 3, y los $\frac{11}{11}$, o sea el precio de los peces, será 3 × 11 = 33 dólares.

Si el precio de la pecera es $\frac{5}{11}$ del precio de los peces y sabemos que $\frac{1}{11}$ de los peces equivale a 3 dólares, los $\frac{5}{11}$ precio de la pecera, serán 3 × 5 = 15 dólares.



Figura 77

EJERCICIOS

1. Al cortar $\frac{2}{9}$ y $\frac{3}{7}$ de una varilla su longitud disminuye en 82 cm. ¿Cuál era la longitud de la varilla?
R. 126 cm

2. Los $\frac{3}{7}$ más los $\frac{2}{9}$ de una pieza de tela suman 164 metros. ¿Cuál es la longitud de la pieza?
R. 252 metros.

3. La suma de la sexta, la novena y la duodécima partes de un número es 26. Hallar el número. **R.** 72.

4. ¿Cuál es el número cuyos $\frac{3}{13}$ aumentados en sus $\frac{5}{26}$ y disminuidos en sus $\frac{5}{13}$ equivalen a 120? **R.** 3,120.

5. ¿Cuál es el número que tiene 22 de diferencia entre sus $\frac{5}{6}$ y sus $\frac{2}{9}$? **R.** 36.

6. Los $\frac{7}{11}$ de un número exceden en 207 a los $\frac{2}{13}$. ¿Cuál es el número?
R. 429.

7. Si en lugar de recibir $\frac{3}{8}$ de una cantidad me entregan $\frac{2}{7}$, pierdo 50 dólares. ¿Qué cantidad me deben?
R. 560 dólares.

8. Si en lugar de comprar un traje con los $\frac{3}{5}$ de lo que tengo, invierto en otro los $\frac{2}{7}$ de mi dinero, ahorro $33. ¿Cuánto tengo?
R. 105 dólares.

9. Un pedazo equivalente a los $\frac{5}{11}$ de una varilla excede en 68 centímetros a otro equivalente a $\frac{1}{9}$ de la varilla. Hallar la longitud de la varilla.
R. 198 cm

PROBLEMA 13

¿De qué número es 84 dos quintos más?

Se representa el número desconocido por sus $\frac{5}{5}$. Si 84 es $\frac{2}{5}$ más que dicho número, 84 será los $\frac{5}{5}+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$ del número; luego, $\frac{1}{5}$ del número será 84 ÷ 7 = 12, y los $\frac{5}{5}$, o sea el número buscado, será 12 × 5 = 60

PROBLEMA 14

¿De qué número es 50 dos séptimos menos?

50 será los $\frac{7}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$ del número buscado; luego, $\frac{1}{7}$ del número buscado será 50 ÷ 5 = 10, y los $\frac{7}{7}$, o sea el número buscado, será:

10 × 7 = 70

EJERCICIOS

1. ¿De qué número es 56 dos novenos menos? **R.** De 72.

2. ¿De qué número es 49 un sexto más? **R.** De 42.

3. ¿De qué número es 1,050 siete doceavos menos? **R.** De 2,520.

4. ¿De qué número es 98 cinco novenos más? **R.** De 63.

5. ¿De qué número es 108 un décimo menos? **R.** De 120.

6. ¿De qué número es 96 un onceavo más? **R.** De 88.

7. $33 es 4 más que el dinero de Pedro. ¿Cuánto tiene Pedro? **R.** $21.

PROBLEMA 15

Después de gastar $\frac{1}{3}$ de mi dinero me quedan $42. ¿Cuánto tenía?

Lo que tenía antes de gastar lo represento por sus $\frac{3}{3}$. Si ya gasté $\frac{1}{3}$ me quedan $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$; luego, $42 es $\frac{2}{3}$ de mi dinero. Por tanto, $\frac{1}{3}$ de mi dinero será $ 42 ÷ 2 = $21, y los $\frac{3}{3}$, o sea todo el dinero: $21 × 3 = $63



Figura 78

PROBLEMA 16

Después de gastar $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$ de mi dinero me quedan $60. ¿Cuánto tenía y cuanto gasté?

Gasté $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{29}{35}$. Lo que tenía, antes de gastar, lo represento por sus $\frac{35}{35}$ luego, me quedan $\frac{35}{35}-\frac{29}{35}=\frac{6}{35}$. Por lo tanto, $60 es $\frac{6}{35}$ de mi dinero.

Si $60 es $\frac{6}{35}$ de mi dinero, $\frac{1}{35}$ será $60 ÷ 6 = $10 y los 35 , o sea todo mi dinero, será $10 × 35 = $350.

Gasté $\frac{29}{35}$ de $350. $\frac{1}{35}$ de $350 es $350 ÷ 35 = $10, y los $\frac{29}{35}$ serán:

$10 × 29 = $290

EJERCICIOS

1. $\frac{7}{9}$ de la superficie de un terreno están construidos y los 84 metros cuadrados restantes son un patio. ¿Cuál es la superficie del terreno? **R.** 378 m^2

2. Perdí $\frac{3}{8}$ de mi dinero y me quedan $40. ¿Cuánto tenía y cuánto gasté? **R.** Tenía $64 y gasté $24.

3. $\frac{2}{9}$ de mis lápices son blancos y los 21 restantes azules. ¿Cuántos lápices tengo en total y cuántos son blancos? **R.** 27 lápices; 6 son blancos.

PROBLEMA 17

$\frac{1}{5}$ de los alumnos de un colegio está en clase, $\frac{2}{9}$ en recreo y los 68 alumnos restantes en el comedor. ¿Cuántos alumnos son en total?

Tenemos que hay $\frac{1}{5}$ del total en clase.

En recreo hay $\frac{2}{9}$ de $\frac{1}{5}$ del total, o sea $\frac{2}{45}$ del total.

Sumamos la parte que está en clase con la que está en recreo:

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{45}=\frac{9+2}{45}=\frac{11}{45}$$

El número total de alumnos se representa por sus $\frac{45}{45}$. Si los que hay en clase y en recreo son $\frac{11}{45}$ del total, quedarán:

$$\frac{45}{45}-\frac{11}{45}=\frac{34}{45}$$

Por tanto, los 68 alumnos restantes serán los $\frac{34}{45}$ del total; luego, $\frac{1}{45}$ del total será 68 ÷ 34 = 2, y los $\frac{45}{45}$, o sea el total de alumnos, será: 2 × 45 = 90 alumnos.

EJERCICIOS

1. El lunes leí los $\frac{3}{11}$ de un libro, el martes una parte igual a los $\frac{3}{5}$ de lo anterior y aún me faltan por leer 93 páginas. ¿Cuántas páginas tiene el libro y cuántas leí el lunes?
R. 165; 45



Figura 79

2. Si le doy a Pedro $\frac{1}{6}$ de mi dinero, a Juan $\frac{2}{5}$ y me quedo con 26 dólares, ¿cuánto tenía? **R.** 60 dólares.

3. Gasté $\frac{3}{8}$ de lo que tenía e invertí una parte igual a los $\frac{2}{5}$ de lo anterior. Si tengo aún $57, ¿cuánto tenía al principio? **R.** $120.

4. De una pieza de tela primero vendo $\frac{2}{9}$ y luego una parte igual a los $\frac{5}{6}$ de lo anterior. Si aún quedan 80 metros, ¿cuál era la longitud de la pieza?
R. 135 metros.

5. Un comerciante vendió los $\frac{7}{22}$ de los sacos de frijoles que había comprado; se le picaron y tuvo que desechar una parte igual a los $\frac{11}{7}$ de lo anterior y aún le quedan 16 sacos para vender. ¿Cuántos sacos había comprado y cuántos vendió? **R.** 88; 28

PROBLEMA 18

Un padre deja a su hijo mayor $\frac{1}{3}$ de su herencia; al segundo, $\frac{2}{5}$ del resto, y al tercero 2,000 dólares. ¿A cuánto ascendía la herencia?

El mayor recibe $\frac{1}{3}$ de la herencia.

El resto será lo que queda después de haber dado al hijo mayor $\frac{1}{3}$ de la herencia, o sea $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

El segundo recibe $\frac{2}{5}$ de $\frac{2}{3}$, o sea, $\frac{4}{15}$ de la herencia.

El primero y el segundo juntos han recibido $\frac{1}{3}+\frac{4}{15}=\frac{3}{5}$; luego, la parte que queda será $\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

Por lo tanto, los 2,000 dólares que recibe el tercero son los $\frac{2}{5}$ de la herencia.

Si $\frac{2}{5}$ de la herencia equivalen a 2,000, $\frac{1}{5}$ de la herencia será 2,000 ÷ 2 = 1,000, y los $\frac{5}{5}$, o sea la herencia total, será: 1,000 × 5 = 5,000 dólares.

PROBLEMA 19

Un hombre deposita en un banco $\frac{2}{3}$ de su dinero y en otro banco 500 dólares. Si lo que depositó representa $\frac{6}{7}$ de su dinero, ¿cuánto dinero tiene?

Deposita $\frac{2}{3}$ del dinero + 500 dólares y esto equivale a $\frac{6}{7}$ de su dinero; luego, 500 dólares representa la diferencia entre los $\frac{6}{7}$ y los $\frac{2}{3}$, o sea, $\frac{6}{7}-\frac{2}{3}=\frac{4}{21}$ de su dinero.

Si 500 dólares son $\frac{4}{21}$ de su dinero, $\frac{1}{21}$ serán 500 ÷ 4 = 125, y los $\frac{21}{21}$, o sea el total de su dinero, será: 125 × 21 = 2,625 dólares.

PROBLEMA 20

En su testamento un hombre dispone lo siguiente: A su amigo Pedro le deja $\frac{1}{5}$ de su capital; a Juan le deja $\frac{2}{7}$ del resto, y para un asilo deja 3,400 dólares. Si la cantidad así repartida representa $\frac{5}{6}$ de su capital, ¿a cuánto ascendía su fortuna?

A Pedro le deja $\frac{1}{5}$ de su capital.

A Juan le deja $\frac{2}{7}$ del resto, o sea,

$$\frac{2}{7}+\frac{4}{5}=\frac{8}{35}$$

Por lo tanto, a Pedro y Juan les dejó:

$$\frac{1}{5}+\frac{8}{35}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$$

Esta cantidad más los 3,400 dólares que dona al asilo son los $\frac{5}{6}$ de su capital, o sea $\frac{3}{7}$ del capital + 3,400 = $\frac{5}{6}$

Los 3,400 serán la diferencia entre los $\frac{5}{6}$ y los $\frac{3}{7}$, o sea, $\frac{5}{6}-\frac{3}{7}=\frac{17}{42}$ de su capital.

Si 3,400 representa los $\frac{17}{42}$ de su capital, $\frac{1}{42}$ será 3,400 ÷ 17 = 200, y los $\frac{42}{42}$, o sea todo el capital, que es lo que se busca, será:

200 × 42 = 8,400 dólares



Figura 80

EJERCICIOS

1. Un cartero dejó en una oficina $\frac{1}{6}$ de las cartas que llevaba; en un banco $\frac{2}{9}$ del resto y todavía tiene 70 para repartir. ¿Cuántas cartas debía entregar?
R. 108 cartas.


Figura 81

2. Una epidemia mató $\frac{5}{8}$ de las reses de un ganadero y después él vendió $\frac{2}{3}$ de las que quedaban. Si aún tiene 16 reses, ¿cuántas tenía al principio, cuántas murieron y cuántas vendió? **R.** Tenía 128; murieron 80 y vendió 32.

3. Compro un caballo con los $\frac{3}{8}$ de mi dinero y un reloj de 20 dólares. Si en esto gasté $\frac{2}{5}$ de mi dinero, ¿cuánto tenía? **R.** 800 dólares.

4. La edad de julia es los $\frac{3}{7}$ de la mía y la hermana de Julia tiene 8 años. La suma de las edades de Julia y su hermana equivale a los $\frac{5}{9}$ de mi edad. ¿Cuál es mi edad y cuál la de Julia? **R.** 63 a; J, 27 a.

5. Después de vender los $\frac{3}{4}$ de un rollo de alambre y 30 cm más, queda $\frac{1}{6}$ del alambre que había al principio. ¿Cuál era la longitud del rollo de alambre antes de vender nada?
R. 360 m

PROBLEMA 21

Si Arturo hace un trabajo en 5 días y José en 8, ¿en cuántos días harán el trabajo juntos?

Arturo hace todo el trabajo en 5 días; luego, en un día hará $\frac{1}{5}$ del trabajo.

José hará en un día $\frac{1}{8}$ del trabajo.

Los dos juntos harán en un día

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{13}{40}$$

Si en un día los dos hacen $\frac{13}{40}$, para hacer $\frac{1}{40}$ tardarán $1\div 13=\frac{1}{13}$ de día y para hacer los $\frac{40}{40}$, o sea todo el trabajo, tardarán:

$$\frac{1}{13}\times 40=\frac{40}{13}=3\frac{1}{13}\text{ días}$$

PROBLEMA 22

Al abrir simultáneamente dos llaves llenan un estanque en 5 horas, y una sola de ellas lo puede llenar en 8 horas. ¿En cuánto tiempo llenaría el estanque la otra llave?

Las dos llaves llenan el estanque en 5 horas; luego, en 1 hora llenarán $\frac{1}{5}$ del estanque.

Una sola llave lo llena en 8 horas; luego, en una hora llena $\frac{1}{8}$ del estanque.

Por lo tanto, la otra llave llenará en una hora $\frac{1}{5}-\frac{1}{8}=\frac{3}{40}$ del estanque.

Si en una hora, o sea 60 minutos, esta llave llena $\frac{3}{40}$ del estanque, para llenar $\frac{1}{40}$ del mismo tardará 60 ÷ 3 = 20 minutos, y para llenar los $\frac{40}{40}$, o sea todo el estanque, tardará:

$20 \times 40 = 800$ minutos $= 13\frac{1}{3}$ horas

EJERCICIOS

1. *A* puede hacer una obra en 6 horas y *B* en 7, ¿en cuánto tiempo la harán juntos? **R.** $3\frac{3}{13}$ horas

2. *A* puede hacer una obra en 5 días, *B* en 6 y *C* en 7, ¿en cuánto tiempo la harían juntos? **R.** $1\frac{103}{107}$ días.

3. Un estanque tiene dos pilas de agua. Si estando vacío con el desagüe cerrado abro sólo la llave de la derecha tarda 5 horas en llenarse y si hubiera abierto sólo la de la izquierda tardaría 6 horas en llenarse, con el desagüe cerrado y el estanque lleno hasta $\frac{3}{7}$ de su capacidad, ¿en cuánto tiempo se llenará abriendo las dos llaves al mismo tiempo? **R.** $1\frac{43}{77}$ horas

4. Un estanque se puede llenar por tres llaves. La 1a. lo puede llenar en 5 horas, la 2a. en 10 horas y la 3a. en 8 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el estanque, si estando vacío y cerrado el desagüe, se abren al mismo tiempo las tres llaves? **R.** $2\frac{6}{17}$ h

PROBLEMA 23

¿Qué número aumentado en $\frac{2}{5}$ y disminuido en $\frac{3}{7}$ equivale a 102?

Representamos el número que buscamos por sus $\frac{5}{5}$. Luego, $\frac{5}{5}$ del número $+\frac{2}{5}-\frac{3}{7}=\frac{5}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{7}=\frac{34}{35}$ del número = 102.

Por lo tanto, $\frac{1}{35}$ del número será 102 ÷ 34 = 3 y los $\frac{35}{35}$, o sea el número buscado: 3 × 35 = 105

PROBLEMA 24

Al preguntarle a Carlos su edad, responde: "Mi edad, aumentada en $\frac{5}{6}$ y en 10 años, equivale a 43 años." ¿Cuál es su edad real?

Representamos la edad de Carlos por sus $\frac{6}{6}$. Luego, $\frac{6}{6}+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$ de la edad de Carlos, más 10 años, equivalen a 43 años.

Si los $\frac{11}{6}$ de la edad de Carlos, más 10 años, equivalen a 43 años, es evidente que los $\frac{11}{6}$ solos serán 33 años, es decir:

$\frac{11}{6}$ de la edad = 33 años.

Por lo tanto, $\frac{1}{6}$ de la edad de Carlos será 33 ÷ 11 = 3 años y los $\frac{6}{6}$, o sea la edad real será 3 × 6 = 18 años.

EJERCICIOS

1. Si ganara 20 dólares después de perder la sexta parte de lo que tengo me quedaría con 60. ¿Cuánto tengo?
R. 48 dólares

2. El número de alumnos de una escuela, aumentado en $\frac{2}{5}$, disminuido en $\frac{2}{3}$ y añadiéndole 20 da por resultado 152. ¿Cuántos alumnos son en total?
R. 180.

3. ¿Qué número aumentado en $\frac{3}{5}$ y disminuido en $\frac{5}{7}$ equivale a 93?
R. 105.

4. Si comprara un traje con los $\frac{3}{8}$ del dinero que tengo y me pagaran una cantidad que me deben que equivale a los $\frac{2}{3}$ de lo que tengo, tendría $93. ¿Cuánto tengo? **R.** 48 dólares.

PROBLEMA 25

Los $\frac{3}{4}$ más los $\frac{2}{5}$ exceden en 36 a un número. ¿Cuál es ese número?

$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{23}{20}$ del número.

Representaremos el número que buscamos por sus $\frac{20}{20}$. Por lo tanto, la suma de los $\frac{3}{4}$ y los $\frac{2}{5}$ del número excede al número en $\frac{23}{20}-\frac{20}{20}=3$ Luego, $\frac{3}{20}$ del número equivalen a 36, que es el excedente de dicha suma sobre el número que se busca.

Si $\frac{3}{20}$ del número equivalen a 36, $\frac{1}{20}$ será 36 ÷ 3 = 12 y los $\frac{20}{20}$, o sea el número buscado, será: 12 × 20 = 240.

EJERCICIOS

1. Al preguntarle a un pastor por el número de sus ovejas, responde: "La mitad, más los tres cuartos, más la quinta parte de mis ovejas equivale al número de ellas más 36". ¿Cuántas ovejas tiene? **R.** 80.

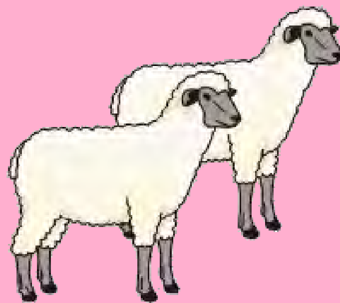


Figura 82

2. Los $\frac{2}{3}$ más los $\frac{5}{6}$ exceden en 9 a un número. ¿Cuál es ese número?
R. 18.

3. Los 15 menos su cuarta parte exceden en 30 unidades a un número. ¿Cuál es ese número? **R.** 48.

4. Las reses de Emilio son los $\frac{9}{7}$ de las reses que tiene Pedro. Emilio puede vender una parte de sus reses igual a $\frac{x}{8}$ de las que tiene Pedro y entonces tendrá 36 reses más que éste. ¿Cuántas reses tiene cada uno?
R. Emilio 288; Pedro 224.

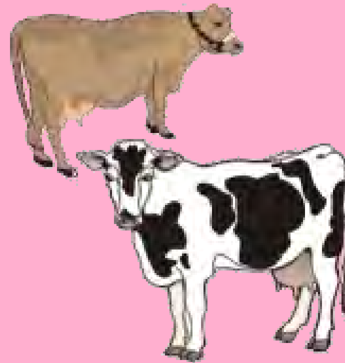


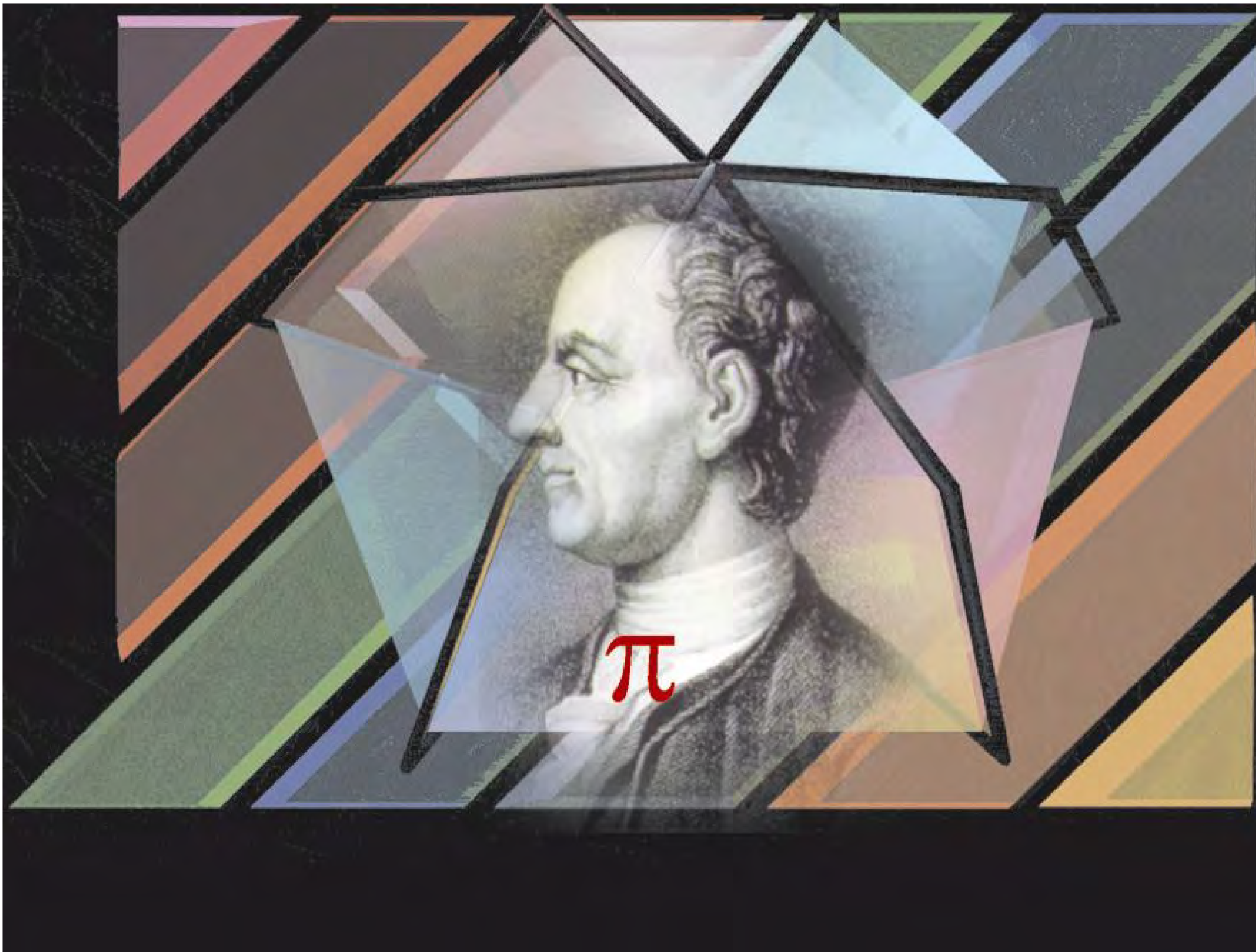
Figura 83

5. Vendo los $\frac{2}{3}$ de una pieza de tela y luego me hacen un pedido equivalente a los $\frac{7}{9}$ de la longitud que tenía la pieza antes de vender lo que ya vendí. Si para servir este pedido necesitaría que la pieza hubiera tenido 8 metros más de longitud, ¿cuál es la longitud de la pieza? **R.** 18 metros.

6. Si adquiero un reloj cuyo costo es los $\frac{2}{5}$ de lo que tengo y un mueble cuyo costo es los $\frac{5}{6}$ de los que tengo, quedaría debiendo 28 dólares. ¿Cuánto tengo? **R.** 120 dólares.

7. La suma de los $\frac{3}{4}$ de un número con sus 3 excede en 40 al número. Hallar el número. **R.** 320

8. Si se aumentara en su sexta parte el dinero que tengo y recibiera después 20 dólares, tendría 69. ¿Cuánto tengo?
R. 48 dólares.



En 1837, el matemático suizo Euler estudió las raíces cuadradas inexactas, continuando los estudios que había realizado Bombelli en años anteriores.

CAPÍTULO XXVIII

FRACCIONES CONTINUAS

Los seguidores de la teoría de Pitágoras, aproximaban las raíces cuadradas inexactas o números irracionales mediante fracciones continuas.

En 1572 Bombelli aproximó las raíces cuadradas por medio de fracciones continuas. Cataldi, en 1613 las estudió y en 1658, Brouncker desarrolló 4p en fracción continua infinita.

Euler, en 1837 realizó el primer estudio sistemático sobre las raíces cuadradas inexactas.

FRACCIÓN CONTINUA

Una fracción continua se escribe de esta forma

$$0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{1}{4}}}$$

$$2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8+\frac{1}{4}}}}$$

FRACCIÓN INTEGRANTE

Por otro lado, una fracción integrante es cada fracción que tiene por numerador la unidad y por denominador un entero. De acuerdo con esto y aplicando los ejemplos anteriores, las fracciones integrantes del primer ejemplo son $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ y las del segundo $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$

COCIENTE INCOMPLETO

El cociente incompleto es la parte entera de una fracción así como los denominadores de las fracciones integrantes.

En la fracción

$$4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6}}}$$

los cocientes incompletos son 4, 3, 5 y 6.

EJERCICIOS

Reduce a fracción continua:

1. $\frac{31}{2040}$ **R.** $\frac{1}{65+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{6}$

2. $\frac{131}{2880}$ **R.** $\frac{1}{21+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{16}$

3. $\frac{7}{1050}$ **R.** $\frac{1}{55+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4}$

4. $\frac{8}{17}$ **R.** $\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3}$

5. $\frac{67}{19}$ **R.** $\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{11}$

6. $\frac{23}{79}$ **R.** $\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{3}$

7. $\frac{15}{131}$ **R.** $\frac{1}{8+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3}$

REDUCCIÓN DE FRACCIÓN ORDINARIA O DECIMAL A CONTINUA

Para **reducir** una fracción ordinaria o decimal a continua, primero hay que buscar el m.c.d., por divisiones sucesivas, del numerador y el denominador de la fracción. La parte entera de la fracción continua será cero y los denominadores de las fracciones integrantes serán los cocientes de las divisiones.

Reducir a fracción continua $\frac{35}{137}$

Buscamos el m.c.d. de 35 y 157:

	4	2	17
157	35	17	1
17	1	0	

Tendremos: $135 = 0 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{17}}}$

Para **reducir una fracción ordinaria impropia a continua** el procedimiento es similar al caso anterior, sólo que la parte entera de la fracción continua será el primer cociente.

Reducir a fracción continua $\frac{237}{101}$

Se busca el m.c.d. de 237 y 101:

	2	2	1	7	1	3
237	101	35	31	4	3	1
35	31	4	3	1	0	

La parte entera de la fracción continua a formar será 2, porque 2 es el primer cociente de las divisiones. Por lo tanto tendremos:

$$\frac{237}{101} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

Para **reducir una fracción decimal a fracción continua** se reduce la fracción decimal a quebrado y a éste se le aplican los procedimientos de los dos casos anteriores.

FRACCIÓN REDUCIDA

A la **fracción ordinaria equivalente a una parte de la fracción continua**, comprendida entre el primer cociente incompleto y cada uno de los demás cocientes incompletos, se le llama **fracción reducida** o **convergente**.

Las fracciones primera y segunda reducidas de una fracción continua se pueden encontrar fácilmente por simple inspección, pero a partir de la tercera fracción, las reducidas se forman multiplicando el último cociente incompleto de la parte de fracción continua por los dos términos de la fracción anterior; al numerador de este quebrado se le suma el numerador de la reducida antepreceدente y al denominador de la reducida ante precedente.

Formar todas las fracciones *reducidas* de

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}$$

La *primera reducida* es la parte entera $2=\frac{2}{1}$

La *segunda reducida* o fracción ordinaria equivalente a:

$$2+\frac{1}{3} \text{ es } \frac{7}{3}$$

La *tercera reducida* o fracción ordinaria equivalente a:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}$$

se forma multiplicando el último cociente incompleto 4 por los dos términos de la reducida anterior $\frac{7}{3}$ y tendremos $\frac{4\times7}{4\times3}$, al numerador de este quebrado se le suma el numerador 2 de la primera reducida y al denominador se le suma el denominador 1 de la primera reducida, con lo cual tendremos:

$$2+\cfrac{1=\frac{4\times7+2}{4\times3+1}=\frac{30}{13}}{3+\cfrac{1}{4}}$$

La cuarta reducida o fracción ordinaria equivalente a:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}$$

se forma multiplicando el último cociente incompleto 5 por los dos términos de la tercera reducida $\frac{30}{13}$ y tendremos $\frac{50\times30}{5\times13}$, al numerador de este quebrado se le suma el numerador 7 de la segunda reducida y al denominador se le suma el denominador 3 de la segunda reducida con lo cual tendremos:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}=\frac{50\times30+7}{50\times13+3}=\frac{157}{68}$$

La quinta reducida a fracción ordinaria equivale a la fracción continua dada

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}$$

se forma multiplicando el último cociente incompleto 6 por los dos términos de la cuarta reducida $\frac{157}{68}$ y tendremos $\frac{6\times157}{6\times68}$; al numerador de este quebrado se le suma el numerador 30 de la *tercera* reducida y al denominador se le suma el denominador 13 de la tercera reducida, con esto tendremos el resultado final:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}=\frac{6\times157+30}{6\times68+13}=\frac{972}{421}$$

EJERCICIOS

Reduce a fracción ordinaria las fracciones continuas, encontrando todas las reducidas:

1. $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$ **R.** $\frac{1}{1};\frac{3}{2};\frac{7}{5}$

2. $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$ **R.** $\frac{3}{1};\frac{3}{1};\frac{5}{2};\frac{13}{5}$

3. $0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}$ **R.** $\frac{1}{1};\frac{2}{3};\frac{7}{10}$

4. $0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}$

R. $\frac{1}{2};\frac{3}{7};\frac{13}{30};\frac{29}{67}$



Simon Stevin que nació en la ciudad de Brujas fue el que propició la discusión sobre las fracciones decimales. Publicó en 1585 su obra La Thiende, que fue traducida al inglés en 1608.

CAPÍTULO XXIX

FRACCIONES DECIMALES

Se denominan fracciones decimales a las que tienen como denominador la unidad seguida de ceros. Así por ejemplo, 3/10 y 73/100 son fracciones decimales.

Toda fracción decimal equivale a un número decimal con un número limitado de cifras. En los ejemplos anteriores tenemos que 3/10 = 0.3 y 73/100 = 0.73.

El número que aparece a la izquierda del punto representa la parte entera, mientras que la parte decimal viene representada por el número que aparece a la derecha de la misma.

FRACCIÓN DECIMAL

Un **quebrado o fracción decimal** es cualquier quebrado cuyo denominador es la unidad seguida de ceros, como se muestra enseguida:

$$\frac{5}{10'}, \frac{89}{100'}, \frac{432}{1000}$$

Para escribir un quebrado decimal en **notación decimal** hay que seguir el principio fundamental de la numeración decimal escrita según el cual **toda cifra escrita a la derecha de otra representa unidades diez veces menores que las que representa la anterior.**

Así, $\frac{5}{10}$ se escribirá 0.5; $\frac{89}{100}$ 0.89 y $\frac{432}{1000}$ 0.432.

REGLAS

De acuerdo con lo anterior se puede enunciar una **regla para escribir un decimal**:

Se escribe la parte entera, si la hay, de lo contrario se escribe un cero y en seguida el punto decimal. Después las cifras decimales, cuidando de que cada una ocupe el lugar que le corresponde.

1) Setenta y cinco milésimas: $\frac{75}{1000}$

Escribimos la parte entera cero y en seguida el punto decimal, luego ponemos un cero en el lugar de las décimas, porque no hay décimas en el número dado; a continuación las centésimas que hay en 75 milésimas, que son 7, después las cinco milésimas, con lo que resultará 0.075.

2) 6 unidades 817 diezmilésimas:

$$6\frac{817}{1000}$$

Escribimos la parte entera 6 y en seguida el punto decimal. Ponemos cero en el lugar de las décimas; 8 en el lugar de las centésimas; 1 en el lugar de las milésimas y 7 en el lugar de las diezmilésimas, con lo que resultará: 6.0817.

EJERCICIOS

Escribe en notación decimal:

1. 5 centésimas
2. 23 milésimas
3. 345 diezmilésimas
4. 2357 diezmilésimas
5. 4 cienmilésimas
6. 246 cienmilésimas
7. 5686 millonésimas
8. 4 millonésimas
9. 455 diezmillonésimas
10. 45678 cienmillonésimas
11. 13 décimas
12. 345 centésimas
13. 4567 milésimas
14. 32456 diezmilésimas
15. 133346 cienmilésimas

EJERCICIOS

Escribe en notación decimal:

1. $\frac{5}{100}$

2. $\frac{45}{100}$

3. $\frac{25}{1000}$

4. $\frac{396}{10000}$

5. $\frac{852}{10000}$

6. $\frac{12}{100000}$

7. $4\frac{6}{10}$

8. $8\frac{520}{1000}$

9. $6\frac{11}{1000}$

10. $3\frac{58}{1000}$

11. $5\frac{20}{10000}$

12. $458\frac{213}{100000}$

13. $315\frac{23}{1000}$

14. $789\frac{426}{10000}$

15. $6972\frac{16}{10000000}$

16. $369\frac{111}{100000000}$

17. $455\frac{43859}{1000000}$

NOMENCLATURA

Para leer un número decimal primero se enuncia la parte entera (si la hay) y a continuación la parte decimal, asignándole el nombre de las unidades inferiores.

Las siguientes notaciones decimales se leen así:

1) 3.18: tres unidades, dieciocho centésimas.

2) 4.0019: cuatro unidades, diecinueve diezmilésimas.

3) 0.08769: ocho mil setecientos sesenta y nueve cienmilésimas.

EJERCICIOS

Lee estas notaciones decimales:

1. 0.8
2. 0.15
3. 0.09
4. 0.003
5. 0.0015
6. 0.00015
7. 0.000003
8. 0.0000135
9. 1.015
10. 7.0123
11. 8.00723
12. 1.15678
13. 2.000016
14. 4.0098765
15. 15.000186
16. 19 000000018
17. 14598.147
18. 14798632.3699
19. 10000.5588462
20. 42812335.1783
21. 874268.174777
22. 78425.2333
23. 12598.9876543
24. 25893.12345678
25. 789635.125963

PROPIEDADES GENERALES DE LAS FRACCIONES DECIMALES

1) Un decimal no se altera porque se añadan o supriman ceros a su derecha, pues con ello no varía el valor relativo de las cifras. De tal modo, es lo mismo 0.34 ó 0.3400.

2) Si en un número se corre el punto decimal a la derecha uno o más lugares, el decimal queda multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se haya corrido el punto a la derecha, porque al correr el punto decimal a la derecha un lugar, el valor relativo de cada cifra se hace diez veces mayor; por tanto, el número queda multiplicado por 190; al correrlo dos lugares a la derecha, el valor relativo de cada cifra se hace cien veces mayor; por tanto, el número queda multiplicado por 100, y así sucesivamente.

De este modo, para multiplicar 0.876 por 10 se corre el punto decimal a la derecha un lugar y nos queda 8.76; para multiplicar 0.93245 por 100, se corre el punto decimal a la derecha dos lugares y queda 93.245; para multiplicar 7.54 por 1000, se corre el punto decimal a la derecha tres lugares, pero como sólo hay dos cifras decimales, se quita el punto decimal y se añade un cero a la derecha, con lo que quedará 7540; para multiplicar 0.789 por 100000, tendríamos 78900.

3) Si en un número se corre el punto decimal a la izquierda uno o más lugares, el decimal queda dividido por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se haya corrido el punto a la izquierda, porque al correr el punto decimal a la izquierda uno, dos, tres o más lugares, el valor relativo de cada cifra se hace diez, cien, mil o más veces menor; por tanto, el número quedará dividido por 10, 100, 1000 o más.

De este modo, para dividir 4.5 por 10 se corre el punto decimal a la izquierda un lugar y queda 0.45; para dividir 0.567 por 100 se corre el punto decimal a la izquierda dos lugares y queda 0.00567; para dividir 15.43 por 1000 se corre el punto decimal a la izquierda tres lugares y queda 0.01543.

EJERCICIOS

Efectúa estas fracciones decimales:

1. 0.8 × 10
2. 0.258 × 10
3. 0.369 × 10
4. 0.1234 × 100
5. 4.54 × 100
6. 0.14803 × 100
7. 0.45987 × 100
8. 15.789 × 1000
9. 13.34 × 1000
10. 0.2569 × 1000
11. 0.4877 × 1000
12. 0.1475 × 1000
13. 0.125 × 10000
14. 45.78 × 10000
15. 8.259 × 10000
16. 14.00258 × 10000
17. 0.1258 × 100000
18. 8.78888 × 100000
19. 0.1236 × 10000000
20. 5.98765 × 10000000
21. 0.5 ÷ 10
22. 0.00 ÷ 10
23. 0.25899 ÷ 10
24. 16.53 ÷ 10
25. 0.4777 ÷ 100
26. 174.147 ÷ 100
27. 16.1258 ÷ 100
28. 0.78978 ÷ 100
29. 368.5000 ÷ 1000
30. 0.147 ÷ 1000
31. 0.10101 ÷ 1000
32. 14.899 ÷ 1000
33. 666.6 ÷ 10000
34. 1.2339 ÷ 10000
35. 4.1236 ÷ 10000
36. 1.7895 ÷ 10000
37. 0.489 ÷ 100000
38. 0.1583 ÷ 100000
39. 856.158 ÷ 1000000
40. 145.125 ÷ 10000000

SUMA CON FRACCIONES DECIMALES

Se colocan los sumandos unos debajo de los otros, de modo que los puntos decimales queden alineados. Luego se suman como número enteros, poniendo en el resultado el punto para que quede alineado con los puntos de los sumandos.

Sumar 0.03, 15.0005, 0.56431 y 8.0345.

	0. 03
	15. 005
+	0. 56431
	8. 0345
Suma. . .	23. 63381

EJERCICIOS

Efectúa estas sumas:

1. 0.123 + 0.8 + 3.15
2. 0.19 + 3.81+0.723+0.1314
3. 0.005 + 0.1326 + 8.5432
4. 0.99 + 95.999 + 0.999999
5. 16.05 + 0.005 + 81.005 + 0.00005
6. 5.67 + 0.3
7. 2.66 + 0.14
8. 18 + 0.54
9. 216 + 0.1936
10. 175 + 0.07
11. 831 + 0.003
12. 115 + 0.0056
13. 809.0 + 0.00318
14. 0.19 + 0.84+7
15. 93.25 + 15.132 + 31
16. 108.333 + 1345.007 + 235
17. 0.00350 + 9.36 + 0.00015 + 32
18. 19.75 + 301 + 831 + 831.019
19. 1360 + 93.72 + 81 + 0.0000007
20. 857 + 0.00000001
21. 1583.11 + 366 + 2.33 + 1
22. 2.3699 + 147 + 899 + 0
23. 123 + 654 + 789
24. 7989.25 + 2.2 + 1.1

RESTA CON FRACCIONES DECIMALES

Se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de modo que los puntos decimales queden alineados; se añaden ceros, si fuese necesario, para que el minuendo y el sustraendo tengan igual número de cifras decimales. En seguida se restan como números enteros, colocando en la resta el punto decimal alineado con los puntos decimales del minuendo y el sustraendo.

Restar 24.069 de 334.5

```
              334.500
         -     24.069
              -------
Resta. . .    310.431
```

EJERCICIOS

Efectúa las restas siguientes:

1. 0.78 - 0.17
2. 0.14 - 0.184
3. 0.147 - 0.5999
4. 10 - 0.3
5. 85 - 0.114
6. 896 - 0.786
7. 123 - 0.00388
8. 16 - 0.147 - 6.19
9. 837 - 14.136 - 0.756432
10. 1229.72 - 11.184

MULTIPLICACIÓN CON FRACCIONES DECIMALES

Para multiplicar dos decimales o un entero por un decimal, se multiplican como si fueran enteros, separando con un punto decimal de la derecha del producto tantas cifras decimales como haya en el multiplicando y en el multiplicador.

```
   14.25          1894
 ×  3.05        × 0.05
 -------        ------
    7125         94.70
  4275
 -------
 43.4625
```

EJERCICIOS

Resuelve las combinaciones siguientes:

1. 15 + 18.36 - 71 + 80.1987 - 0.000132 **R.** 42.558568
2. (8 + 5.19) + (15 - 0.03) + (80 - 14.784) **R.** 93.376
3. 5.13 + 8.932 + 31.786 + 40.1567 - 63 **R.** 23.0047
4. 3.18 + 14 - 15.723 **R.** 1.457
5. (75 - 0.003) - (19.351 - 14) + 0.00005 **R.** 69.64605
6. 8 - 0.3 + 5 - 0.16 - 3 + 14.324 **R.** 23.864
7. 0.3 + 0.5 + 0.17 **R.** 0.63
8. 9.374 + 380 - 193.50783 **R.** 195.86617
9. 0.76 + 31.893 - 14 **R.** 18.653
10. 1351 - (8.79 + 5.728) **R.** 1336.482
11. 15.876 + 32 - 14 **R.** 33.876
12. 31 + 14.76 + 17 - 8.35 - 0.003 **R.** 0.6354.407
13. 14.782 - 13 + 325.73006 - 81.574325 + 53 **R.** 298.937735
14. 56.32 - 51 - 0.00325 - 0.764328 + 32.976 **R.** 37.528422
15. 50 - (6.31 + 14) **R.** 29.69
16. (16.32 - 0.045) - (5.25 + 0.0987 + 0.1 + 0.03) **R.** 10.7963
17. 0.184 + 0.9345 - 0.54436 **R.** 0.57414

EJERCICIOS

Realiza estas multiplicaciones:

1. (0.75 - 0.3) × 5 **R.** 2.25
2. 314.008 × 31 **R.** 9734.248
3. 134 × 0.873 **R.** 116.982
4. 1976.325 × 0.762438 **R.** 1506.82528035
5. (14 - 0.1) × 31 **R.** 430.9
6. 3184 × 3.726 **R.** 11863.584
7. (0.5 + 0.76) × 5 **R.** 6.3
8. 35 × 0.0009 **R.** 0.0315
9. (0.978 - 0.0013) × 8.01 **R.** 7.823367
10. 8.34 × 14.35 **R.** 119.679
11. 0.000001 × 8939 **R.** 0.008939
12. (131 + 0.01 + 0.0001) × 14.1 **R.** 1847.24241
13. 16.84 × 0.003 **R.** 0.05052
14. 134.786 × 0.1987 **R.** 26.7819782
15. 5 × 0.7 **R.** 3.5
16. 14 × 0.08 **R.** 1.12
17. 1897 × 0.132 **R.** 250.404
18. 0.187 × 19 **R.** 3.553
19. (8.35 + 6.003 + 0.01) × 0.7 **R.** 110.0541
20. 0.001 × 0.0001 **R.** 0.0000001
21. 143 × 0.00001 **R.** 0.00143

DIVISIÓN CON FRACCIONES DECIMALES

Para **dividir dos decimales**, si no son homogéneos, es decir, si no tienen el mismo número de cifras decimales, se añaden ceros al que tenga menos cifras decimales para hacer homogéneos el dividendo y el divisor, entonces se suprimen los puntos y se dividen como enteros.

Dividir 5.678 entre 0.546. Como son homogéneos, suprimiremos los puntos decimales y quedará 5678 entre 546:

```
5678    546
0218    10 -
```

Siempre que la división no sea exacta, como en este caso, debe *aproximarse*, para lo cual se pone punto decimal en el cociente, se añade un cero a cada residuo y se divide entre el divisor, hasta tener *cuatro* cifras decimales en el cociente. De este modo, en el caso anterior tendremos:

```
5678        546
02180       10.3992
  5420
    5060
      1460
        368
```

Basta expresar el *cociente con 3 cifras decimales,* pero hay que verificar si *la cuarta cifra decimal es menor, igual o mayor que 5.*

Si la cuarta cifra *decimal es menor que 5,* se desprecia esa cifra decimal. Así, en la división anterior el cociente será 10.399, porque la cuarta cifra decimal 2, por ser menor que 5, se desprecia. 10.399 es el *cociente de esta división por defecto*, ya que es *menor* que el verdadero cociente.

Si la cuarta cifra decimal es mayor que 5, se aumenta una unidad a la cifra de las milésimas, De tal modo, en la división de 0.89 tendremos:

```
89          81
  800       1.0987
    710
      620
        53
```

Como la cuarta cifra decimal es 7, que es mayor que 5, se suprime, pero se *añade* una unidad a la cifra de las milésimas 8, y quedará 1.099 que es el *cociente por exceso* de esta división, ya que es mayor que el cociente verdadero.

Si la cuarta cifra decimal es 5, se suprime y se añade una unidad a las milésimas. Si el cociente de una división es 07635, lo expresaremos como 0.764, que es el cociente *por exceso.*

Para **dividir un entero por un decimal o viceversa** se pone punto decimal al entero y se le añaden tantos ceros como cifras decimales tenga el decimal. Una vez homogéneos dividendo y divisor, se suprimen los puntos decimales y se dividen como enteros.

1) Dividir 56 entre 0.114. Se pone punto decimal al 56 y se le añaden tres ceros, porque el decimal tiene tres cifras decimales, y queda 56.000 ÷ 0.114. Se suprimen los puntos y se dividen como enteros:

```
56000          114
1040           491.22807
  0140
    0260
      0320
        0920      El cociente por defecto es
          00800       491.228
            002
```

2) Dividir 56.03 entre 19. Se pone punto decimal a 19 y se le añaden dos ceros, con lo que queda 56.03 ÷ 19.00. Se suprimen los puntos decimales y se dividen como enteros:

```
5603        1900
18030       2.9489
09300
17000       El cociente por exceso es 2.949
18000
0900
```

EJERCICIOS

Resuelve estas divisiones:

1. 14.6 ÷ 3.156	**R.** 4.626
2. 0.32 ÷ 0.2	**R.** 1.6
3. 0.86 ÷ 0.0043	**R.** 200
4. 0.81 ÷ 0.27	**R.** 3
5. 0.89356 ÷ 0.314	**R.** 2.840
6. 0.64 ÷ 0.04	**R.** 16
7. 0.27 ÷ 0.0009	**R.** 300
8. 0.125 ÷ 0.005	**R.** 25
9. 0.5 ÷ 0.001	**R.** 500
10. 0.729 ÷ 0.009	**R.** 81
11. 31.63 ÷ 8.184	**R.** 3.865
12. 0.243 ÷ 0.081	**R.** 3
13. 8.3256 ÷ 14.3	**R.** 0.582
14. 0.1284 ÷ 0.4	**R.** 0.321
15. 0.7777 ÷ 0.11	**R.** 7.07

EJERCICIOS

Resuelve las divisiones siguientes:

1. 0.7356 ÷ 0.1 **R.** 7.356
2. 0.7248 ÷ 0.184 **R.** 3.939
3. 12.78 ÷ 123.1001 **R.** 0.104
4. 9.183 ÷ 0.00012 **R.** 76525
5. 5 ÷ 0.5 **R.** 10
6. 19.14 ÷ 175 **R.** 0.109
7. 16 ÷ 0.64 **R.** 25
8. 12 ÷ 0.003 **R.** 4000
9. 0.132 ÷ 132 **R.** 0.001
10. 93 ÷ 0.0186 **R.** 5000
11. 500 ÷ 0.00125 **R.** 400000
12. 17 ÷ 0.143 **R.** 118.881
13. 154 ÷ 0.1415 **R.** 1088.339
14. 1318 ÷ 0.24567 **R.** 5364.9204
15. 0.6 ÷ 6 **R.** 0.1
16. 0.21 ÷ 21 **R.** 0.01
17. 0.64 ÷ 16 **R.** 0.04
18. 0.729 ÷ 9 **R.** 0.081
19. 8 ÷ 0.512 **R.** 15.625
20. 0.003 ÷ 12 **R.** 0.00025
21. 0.00125 ÷ 500 **R.** 0.0000025
22. 0.8976 ÷ 19 **R.** 0.047

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES COMPLEJAS CON DECIMALES

Para **simplificar fracciones complejas con decimales** se efectúan todas las operaciones indicadas en el numerador y el denominador hasta convertir cada uno de ellos en un solo decimal, y luego se efectúa la división de estos dos decimales.

1) Simplificar $\frac{(2+0.16-0.115)\times 3}{(0.336+1.5-0.609)\div 0.4}$

$$\frac{(2+0.16-0.115)\times 3}{(0.336+1.5-0.609)\div 0.4}=\frac{2.045\times 3}{1.227\div 0.4}=\frac{6.135}{3.0675}=2$$

2) Simplificar $\frac{\left(\frac{0.05}{0.15}+\frac{3}{0.4}+2\right)\times 3.20}{\left(\frac{0.16}{0.4/0.1}+0.532\right)\div 7.15}$

Tendremos:

$$\frac{\left(\frac{0.05}{0.15}+\frac{3}{0.4}+2\right)\times 3.20}{\left(\frac{0.16}{0.4/0.1}+0.532\right)\div 7.15}=\frac{(0.33+7.50+2)\times 3.20}{(0.44+0.532\div 7.15)}$$

$$=\frac{9.83\times 3.20}{0.572\div 7.15}=\frac{31.456}{0.08}=393.2$$

EJERCICIOS

Simplifica estas fracciones:

1. $\frac{(0.03+0.456+8)\times 6}{25.458}$ **R.** 2

2. $\frac{(8.006+0.452+0.15)\div 0.1}{(8-0.1+0.32)\times 4}$ **R.** 2.618

3. $\frac{0.5\times 3+0.6\div 0.03+0.5}{0.08\div 8+0.1\div 0.1-001}$ **R.** 22

4. $\frac{(8.3-0.05)-(4.25-3.15)}{0.04\div 0.4+0.006\div 0.6+7.04}$ **R.** 1

5. $\frac{4\div 0.01+3\div 0.001+0.1\div 0.01}{4\times 0.01+3\times 0.001+1704.957}$ **R.** 2

6. $\left(\frac{1}{0.1}+\frac{1}{0.01}+\frac{1}{0.001}\right)\times 0.3$ **R.** 333

7. $\left(\frac{8}{0.16}+\frac{0.15}{05}\right)+0.01$ **R.** 49.71

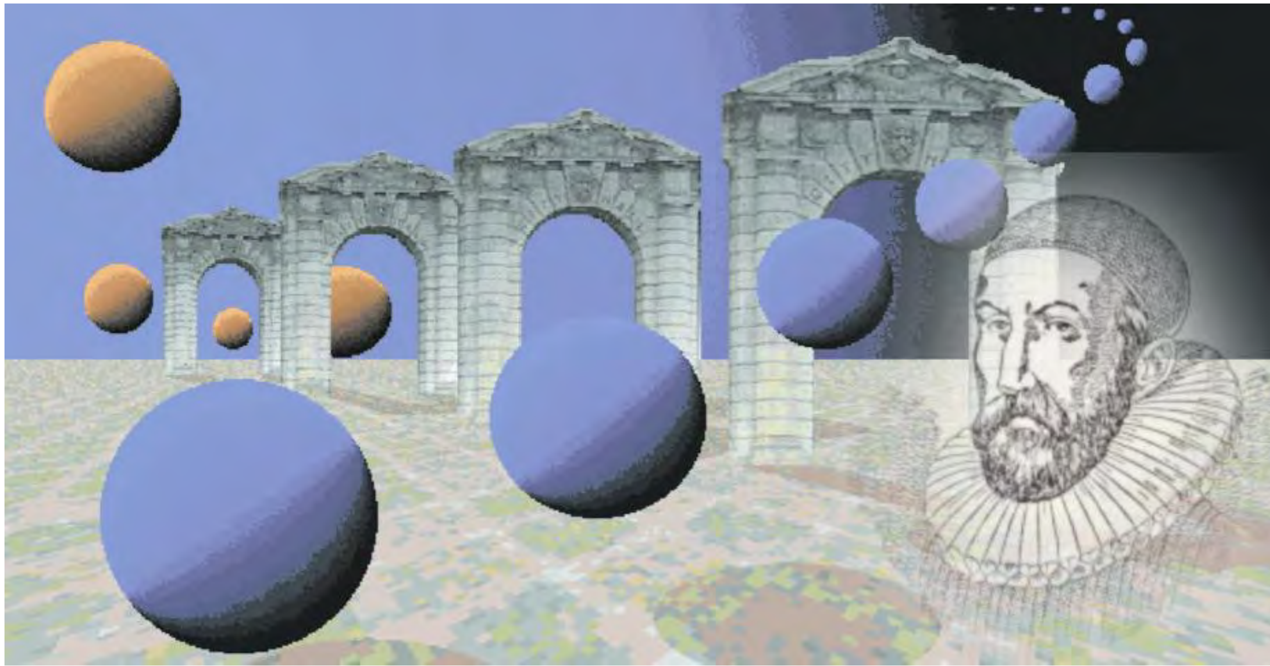
8. $\left(\frac{0.06}{0.3}+\frac{0.052}{2}\right)\div\frac{6}{0.36/3}$ **R.** 0.00452

9. $0.0056+\frac{0.03/3}{0.564/3}+\frac{0.56}{32/0.16}$ **R.** 0.616

10. $\frac{5}{0.32/2}+\frac{0.3/0.5}{0.001}$ **R.** 631.25

11. $\frac{0.4/4}{4/0.4}+\frac{0.05/5}{5/0.05}+\frac{0.006/6}{6/0.006}$ **R.** 0.010101

12. $\frac{16/0.01}{0.1}+\frac{0.1}{0.02/16}+\frac{0.001/0.1}{0.1/0.001}$ **R.** 16079.9999



El punto decimal se utiliza para separar los números enteros de las fracciones. El primero que las utilizó fue Simon Stevin, quien para expresarlas dibujó un cero dentro de un círculo; posteriormente Neper las indicó sólo con un punto.

CAPÍTULO XXX

CONVERSIÓN DE FRACCIONES

Todo quebrado es el cociente de la división indicada de su numerador entre su denominador; por lo tanto, para **convertir fracciones comunes a fracciones decimales** hay que dividir el numerador entre el denominador, aproximando la división hasta que dé un cociente exacto o se repita en el cociente de manera indefinida una cifra o grupo de cifras.

FRACCIÓN COMÚN A FRACCIÓN DECIMAL

1) Convertir $\frac{1}{3}$ *y* $\frac{4}{33}$ en fracciones decimales.

10 |3
10   0.0333...
10
1
⋮

$\frac{1}{3} = 0.333...$

40 |33
70   0.1212...
40
70
4
⋮

$\frac{4}{33} = 0.1212..$

2) Convertir en fracciones decimales $\frac{1}{12}$ y $\frac{233}{990}$

100 |12
40   0.0833...
40
⋮

$\frac{1}{12} = 0.0833...$

2330 |990
3500   0.23535...
5300
3500
5300
⋮

$\frac{233}{990} = 0.23535...$

De estos ejemplos se deduce que al reducir un quebrado común a decimal puede ocurrir que la división sea exacta, **originando las fracciones decimales exactas**, pero también que haya una cifra o grupo de cifras que se repite en el mismo orden indefinidamente, lo que **originará las fracciones decimales inexactas.**

CLASES DE FRACCIONES DECIMALES

Existen distintas clases de fracciones decimales a las que dan origen las fracciones comunes:

Fracciones decimales que originan los quebrados comunes. . .
- exactas
- inexactas periódicas
  - periódicas puras
  - periódicas mixtas

Una **fracción decimal exacta** tiene un número limitado de cifras decimales:

0.6	0.9	0.47	0.15

Una **fracción decimal inexacta periódica** tiene una cifra o un grupo de cifras que se repiten indefinidamente y en el mismo orden:

0.333... y 0.1212...
0.08333... y 0.23535...

En un **periodo** la cifra o grupo de cifras que se repiten indefinidamente y en el mismo orden, de modo que en la fracción periódica 0.333. . . el periodo es 3; en 0.1212. . . el periodo es 12 y en 0.23535. . . es 35. En la **fracción decimal periódica pura** el periodo **empieza en las décimas:**

0.(3)333. . . , 0:(12)12 . . . , 0:(786)786 . . .

Por otra parte, en la **fracción decimal periódica mixta** el periodo **no empieza en las décimas:**

0.08(3)3. . . 0.2(35)35 . . . 0.00(171)171. . .

La **parte no periódica** o **parte irregular** de una fracción periódica mixta es la cifra o grupo de cifras entre el punto decimal y el periodo:

en la fracción 0.0833. . . la parte no periódica es 08;
en la fracción 0.23535. . . la parte no periódica es 2;
en la fracción 0.00171171. . . la parte no periódica es 00.

Las fracciones ordinarias sólo pueden dar origen a *fracciones decimales exactas, periódicas puras o periódicas mixtas.*

Una **fracción decimal inexacta no periódica** tiene un número ilimitado de cifras decimales, pero no siempre se repiten en el mismo orden, o sea que **no hay periodo.**

$\pi = 3.1415926535...$

$\frac{1}{\pi} = 0.3183098861...$

$e = 2.7182818285...$

Son números notables del Cálculo.

Estas fracciones decimales *inexactas no periódicas* no provienen de quebrados comunes, pues éstos sólo dan origen a las tres clases de fracciones mencionadas.

EJERCICIOS

Encuentra la fracción decimal equivalente y menciona, en cada caso, de qué clase es la fracción decimal obtenida:

1. $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{2}{3}$

3. $\frac{1}{3}$ **4.** $\frac{4}{5}$

5. $\frac{1}{4}$ **6.** $\frac{5}{12}$

7. $\frac{1}{5}$ **8.** $\frac{7}{11}$

9. $\frac{1}{6}$ **10.** $\frac{24}{96}$

11. $\frac{1}{7}$ **12.** $\frac{105}{140}$

13. $\frac{1}{8}$ **14.** $\frac{1}{500}$

15. $\frac{1}{6}$ **16.** $\frac{1}{633}$

17. $\frac{4}{5}$ **18.** $\frac{4}{222}$

19. $\frac{8}{5}$ **20.** $\frac{11}{700}$

EJERCICIOS

Menciona qué clase de fracciones decimales son las siguientes:

1. 0.048
2. 0.5443
3. 0.1333
4. 0.14896
5. 0.04852
6. 0.17817888
7. 0.45110014
8. 0.1987
9. 0.0767
10. 0.001818
11. 0.765765

SIMPLIFICACIÓN

A continuación se presenta un ejemplo de simplificación de una expresión fraccionaria compleja reduciendo los quebrados comunes a fracciones decimales:

Simplificar $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{1}{4}}{1\frac{4}{5}-\frac{9}{20}}$ reduciendo los quebrados comunes a decimales.

Así: $\frac{1}{2}=0.5$ $\frac{3}{5}=0.6$ $\frac{1}{4}=0.25$ $1\frac{4}{5}=18$ $\frac{9}{20}=0.45$

Con lo que tendremos:

$$\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{1}{4}}{1\frac{4}{5}-\frac{9}{20}}=\frac{0.5+0.6+0.25}{1.8-0.45}=\frac{1.35}{1.35}=1$$

REGLA 1

Para conocer qué clase de fracción decimal dará una fracción ordinaria deben considerarse las siguientes reglas:

a) Si el denominador de una fracción irreducible sólo es divisible por los factores primos 2 ó 5, o por ambos a la vez, el quebrado dará una fracción decimal exacta.

Ejemplos

1) La fracción $\frac{3}{8}$ será equivalente a una fracción decimal exacta porque es irreducible y su denominador 8 sólo es divisible por el factor primo 2.

30	8
60	0.375
40	
0	

luego $\frac{3}{8}=0.375$

$\frac{3}{8}$ es la *fracción generatriz* de 0.375, porque genera o produce el decimal 0.375 al dividirse 3 entre 8.

2) La fracción $\frac{11}{40}$ será equivalente a una fracción decimal exacta, porque es irreducible y su denominador 40 sólo es divisible por los factores primos 2 y 5.

110	40
300	0.275
200	
0	

luego $\frac{11}{40}=0.275$

$\frac{11}{40}$ es la fracción generatriz de 0.275.

EJERCICIOS

Simplifica, convirtiendo los quebrados comunes en decimales:

1. $\dfrac{\frac{1/16}{0.5}+\frac{1/20}{0.4}}{\frac{1/25}{0.04}+\frac{1/50}{0.02}}$ **R.** 0.125

2. $\dfrac{\left(\frac{7}{20}+\frac{1}{50}\right)+3\frac{3}{4}}{\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{10}\right)+3\frac{7}{10}}$ **R.** 0.25

3. $\dfrac{\frac{7}{8}+5\frac{2}{5}-\frac{1}{4}}{1\frac{1}{10}+2\frac{3}{5}-1\frac{3}{16}}$ **R.** 2

4. $\dfrac{\left(\frac{9}{50}+1\frac{19}{25}-\frac{1}{500}\right)\div\frac{1}{500}}{\left(\frac{1}{8}+\frac{27}{250}+\frac{9}{100}\right)\div\frac{1}{1000}}$ **R.** 3

5. $\dfrac{\left(3\frac{1}{2}-2\frac{1}{8}+0.16\right)\times1\frac{1}{2}}{\left(1\frac{3}{4}+1\frac{3}{5}-1\frac{1}{10}\right)+\frac{21}{400}}$ **R.** 1

REGLA 2

a) Si el denominador de una fracción irreducible no es divisible por los factores primos 2 ó 5, el quebrado dará una fracción decimal periódica pura.

Ejemplos

1) El quebrado $\frac{1}{3}$ será equivalente a una fracción decimal periódica pura porque es irreducible y su denominador 3 no es divisible por los factores primos 2 ni 5.

```
10   |3
 10   0.333…
  10
   1
```

luego $\frac{1}{3} 0.(3)33\ldots$

$\frac{1}{3}$ es la fracción generatriz de 0.333 . .

2) El quebrado $\frac{2}{7}$ dará una fracción decimal periódica pura, porque es irreducible y su denominador 7 no es divisible por los factores primos 2 ni 5.

```
20      |7
 60      0.285714285714…
  40
   50
    10
     30
      20
       60
        40
         50
          10
           30
            2
```

luego $\frac{2}{7} = 0.(285714)285714\ldots$

$\frac{2}{7}$ es la generatriz de 0.(285714)285714. . .

REGLA 3

a) Si el denominador de una fracción irreducible es divisible por los factores primos 2 ó 5, o por ambos a la vez, y además por algún otro factor primo, el quebrado dará una fracción decimal periódica mixta.

Ejemplos

1) El quebrado $\frac{1}{6}$ dará una fracción decimal periódica mixta porque es irreducible y su denominador 6 es divisible por 2 y además por 3.

```
10   |6
 40   0.166…
  40
   4
```

luego $\frac{1}{6} = 0.1(6)6$

2) La fracción ordinaria $\frac{1}{110}$ dará fracción decimal periódica mixta porque es irreducible y su denominador 110 es divisible por los factores primos 2 y 5 y además por el factor primo 11.

```
1000      |110
  1000     0.009090
    100
```

luego $\frac{1}{110} = 0.00(90)90\ldots$

$\frac{1}{110}$ es la fracción generatriz de 0.00(90)90. . .

Es importante destacar que estas reglas se refieren únicamente a fracciones irreductibles. Por otra parte, para saber qué clase de fracción decimal dará una fracción no irreducible, primero hay que simplificarla hasta hacerla irreducible para poder aplicar las reglas anteriores.

Ejemplo

¿Qué clase de fracción decimal dará $\frac{105}{165}$?

Primero se hace irreducible: $\frac{105}{165} = \frac{35}{55} = \frac{7}{11}$

Como el denominador de $\frac{7}{11}$ no es divisible ni por 2 ni por 5, dará una fracción decimal periódica pura.

```
70   |11
 40   0.6363…
  70
   40
```

luego $\frac{105}{165} = \frac{7}{11} = 0.(63)63..$

EJERCICIOS

Indica qué clase de fracción decimal darán los siguientes quebrados y por qué:

1. $\frac{1}{4}$ **2.** $\frac{5}{14}$

3. $\frac{1}{5}$ **4.** $\frac{13}{121}$

5. $\frac{1}{6}$ **6.** $\frac{2}{6}$

7. $\frac{1}{7}$ **8.** $\frac{3}{30}$

9. $\frac{1}{8}$ **10.** $\frac{5}{35}$

11. $\frac{1}{9}$ **12.** $\frac{6}{18}$

13. $\frac{1}{10}$ **14.** $\frac{33}{55}$

15. $\frac{1}{11}$ **16.** $\frac{16}{46}$

17. $\frac{1}{12}$ **18.** $\frac{140}{820}$

19. $\frac{1}{15}$ **20.** $\frac{36}{108}$

21. $\frac{2}{11}$ **22.** $\frac{3000}{4500}$

23. $\frac{3}{13}$ **24.** $\frac{1000}{14000}$

25. $\frac{5}{17}$ **26.** $\frac{158}{237}$

27. $\frac{7}{55}$ **28.** $\frac{4784}{478}$

29. $\frac{11}{30}$ **30.** $\frac{2589}{89}$

CONVERSIÓN DE DECIMALES A QUEBRADOS

Ahora bien, para la **conversión de fracciones decimales a quebrados comunes** debe tomarse en cuenta la **fracción generatriz** de una fracción decimal, que es el quebrado común irreducible equivalente a la fracción decimal.

Para hallar la generatriz de una fracción decimal exacta se sigue esta regla:

Siendo la fracción 0.*abc*, llamamos *f* a la fracción generatriz y tendremos:

$$f = 0.abc$$

Al multiplicar ambos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fracción (en este caso 1000) tendremos:

$$1000 \times f = abc$$

Dividimos ambos miembros por 1000 y simplificamos:

$$\frac{1000 \times f}{1000} = \frac{abc}{1000} \therefore \quad f = \frac{abc}{1000}$$

Para hallar la generatriz de una fracción decimal exacta se pone como numerador la fracción decimal, prescindiendo del punto, y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya.

1) Hallar la generatriz de 0.564 $0.564 = \frac{564}{1000} = \frac{141}{250}$

2) Hallar la generatriz de 0.0034 $0.0034 = \frac{34}{1000} = \frac{17}{5000}$

Si la fracción decimal tiene parte entera, se coloca delante del quebrado equivalente a la parte decimal, formando un número mixto, que después se reduce a quebrado, como se indica:

Hallar la generatriz de 5.675 $5.675 = 5\frac{27}{40} = \frac{227}{40}$

EJERCICIOS

Encuentra la generatriz o quebrado irreducible equivalente a:

1. 0.4 **R.** $\frac{2}{5}$ **2.** 0.0008 **R.** $\frac{1}{1250}$ **3.** 1.0036 **R.** $\frac{2509}{2500}$

4. 0.05 **R.** $\frac{1}{20}$ **5.** 0.00009 **R.** $\frac{9}{100000}$ **6.** 2.00048 **R.** $\frac{12503}{6250}$

7. 0.06 **R.** $\frac{3}{50}$ **8.** 0.000004 **R.** $\frac{1}{250000}$ **9.** 3.000058 **R.** $\frac{1500029}{500000}$

10. 0.007 **R.** $\frac{7}{1000}$ **11.** 0.018 **R.** $\frac{9}{500}$ **12.** 4.00124 **R.** $\frac{100031}{25000}$

GENERATRIZ DE UNA FRACCIÓN DECIMAL PURA

Para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica pura se sigue la regla:

Siendo la fracción 0.*abab*. . . llamamos *f* a la generatriz y tendremos:

$$f = 0.(ab)ab \ldots (1)$$

Al multiplicar ambos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el periodo (en este caso por 100) tendremos:

$$100 \times f = ab.abab \ldots (2)$$

De esta igualdad (2) restamos la igualdad (1):

$$\begin{aligned} 100 \times f &= ab.abab \ldots \\ - f &= 0.abab \\ \hline 99 \times f &= ab \end{aligned}$$

Dividimos ambos miembros por 99 y simplificamos:

$$\boxed{\frac{99 \times f}{99} = \frac{ab}{99} \therefore f = \frac{ab}{99}}$$

Para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica pura se pone como numerador un periodo y como denominador tantos nueves como cifras tenga el periodo.

1) Hallar la generatriz de 0.4545 . . .

$$0.4545\ldots = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

2) Hallar la generatriz de 0.00360036 . . .

$$0.00360036\ldots = \frac{36}{9999} = \frac{4}{1111}$$

Si la fracción decimal periódica pura tiene parte entera, se coloca delante del quebrado equivalente a la parte decimal, formando un número mixto y después se reduce a quebrado, como se muestra a continuación:

Hallar la generatriz de 7.135135. . .

$$7.135135\ldots = 7\frac{135}{999} = 7\frac{5}{37} = \frac{264}{37}$$

EJERCICIOS

Encuentra la generatriz o quebrado irreducible equivalente a:

1. 4.186186 **R.** $\frac{1394}{333}$

2. 5.018018 **R.** $\frac{557}{111}$

3. 6.00060006 **R.** $\frac{20000}{3333}$

4. 0.33 **R.** $\frac{1}{3}$

5. 0.44 **R.** $\frac{4}{9}$

6. 0.66 **R.** $\frac{2}{3}$

7. 0.1212 **R.** $\frac{4}{33}$

8. 0.1515 **R.** $\frac{5}{33}$

9. 0.1818 **R.** $\frac{2}{11}$

10. 0.2020 **R.** $\frac{20}{99}$

11. 0.8181 **R.** $\frac{9}{11}$

12. 0.123123 **R.** $\frac{41}{333}$

13. 0.156156 **R.** $\frac{52}{333}$

14. 0.143143 **R.** $\frac{143}{999}$

15. 3.00450045 **R.** $\frac{3338}{1111}$

16. 0.18961896 **R.** $\frac{632}{3333}$

17. 0.003003 **R.** $\frac{1}{333}$

GENERATRIZ DE UNA FRACCIÓN DECIMAL PERIÓDICA MIXTA

Para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica mixta rige esta regla:

Siendo la fracción 0.*ab* (*cd*)*cd* . . . llamamos *f* a la generatriz y tendremos:

$f = 0.ab\,(cd\,)cd\ldots$ (1)

Al multiplicar ambos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica y el periodo (en este caso por 10000, porque son cuatro esas cifras) tendremos:

$10000 \times f = abcd.cdcd\ldots$ (2)

Multiplicamos ambos miembros de la primera igualdad (1) por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica (en este caso 100), y tendremos:

$100 \times f = ab.cdcd\ldots$ (3)

Al restar de la igualdad (2) la igualdad (3), tendremos:

$$\begin{array}{r} 10000 \times f = abcd.cdcd\ldots \\ 100 \times f = ab.cdcd\ldots \\ \hline 9900 \times f = abcd - ab \end{array}$$

Dividimos ambos miembros de esta igualdad por 9900 y simplificamos:

$$\frac{9900 \times f}{9900} = \frac{abcd - ab}{9900} \therefore f = \frac{abcd - ab}{9900}$$

Para hallar la generatriz de una fracción decimal periódica mixta se pone como numerador la parte no periódica seguida de un periodo, menos la parte no periódica, y como denominador tantos nueves como cifras tenga el periodo y tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica, como se muestra aquí:

1) Hallar la generatriz de 0.56777...

$$0.56777\ldots = \frac{567 - 56}{900} = \frac{511}{900}$$

2) Hallar la generatriz de 0.0056767...

$$0.0056767\ldots = \frac{567 - 5}{99000} = \frac{562}{99000} = \frac{281}{49500}$$

Si la fracción tiene parte entera, se pone delante del quebrado equivalente a la parte decimal, formando un número mixto y luego se reduce a quebrado, como se indica:

Hallar la generatriz de 8.535656...

$$8.535656\ldots = 8\frac{5356 - 53}{9900} = 8\frac{5303}{9900} = \frac{84503}{9900}$$

EJERCICIOS

Encuentra la generatriz o quebrado irreducible equivalente a:

1. 0.355 **R.** $\frac{16}{45}$

2. 0.644 **R.** $\frac{29}{45}$

3. 0.988 **R.** $\frac{89}{90}$

4. 0.133 **R.** $\frac{2}{15}$

5. 0.6655 **R.** $\frac{599}{900}$

6. 0.1244 **R.** $\frac{28}{255}$

7. 0.3622 **R.** $\frac{163}{450}$

8. 0.1844 **R.** $\frac{83}{450}$

9. 0.2366 **R.** $\frac{71}{300}$

10. 0.51919 **R.** $\frac{257}{495}$

11. 0.012323 **R.** $\frac{61}{4950}$

12. 0.0011818 **R.** $\frac{13}{11000}$

13. 0.124356356 **R.** $\frac{15529}{124875}$

14. 0.451201201 **R.** $\frac{601}{1332}$

15. 1.033 **R.** $\frac{31}{30}$

16. 1.766 **R.** $\frac{53}{30}$

17. 1.031515 **R.** $\frac{851}{825}$

18. 2.014545 **R.** $\frac{554}{275}$

19. 3.6112112 **R.** $\frac{18038}{4995}$

20. 4.09912912 **R.** $\frac{136501}{33300}$

EJERCICIOS

Encuentra la generatriz o quebrado irreducible equivalente a:

1. 15.075 **R.** $\frac{603}{40}$

2. 0.02 **R.** $\frac{1}{50}$

3. 0.185 **R.** $\frac{37}{200}$

4. 0.146 **R.** $\frac{73}{500}$

5. 0.4646 **R.** $\frac{6}{99}$

6. 3.05 **R.** $\frac{61}{20}$

7. 0.3636 **R.** $\frac{4}{11}$

8. 0.0036 **R.** $\frac{9}{2500}$

9. 5.1515 **R.** $\frac{170}{33}$

10. 0.544 **R.** $\frac{49}{90}$

11. 14.66 **R.** $\frac{44}{3}$

12. 0.32 **R.** $\frac{8}{25}$

13. 0.086363 **R.** $\frac{19}{220}$

14. 3.55 **R.** $\frac{32}{9}$

15. 6.018018 **R.** $\frac{668}{111}$

16. 0.143636 **R.** $\frac{79}{550}$

17. 0.87611 **R.** $\frac{1577}{1800}$

18. 0.17333 **R.** $\frac{13}{75}$

19. 0.01369346934 **R.** $\frac{36921}{9999000}$

20. 0.00540054 **R.** $\frac{6}{1111}$

21. 0.060060 **R.** $\frac{20}{333}$

22. 0.2047666 **R.** $\frac{6143}{30000}$

23. 0.0000014 **R.** $\frac{7}{5000000}$

24. 0.144144 **R.** $\frac{16}{111}$

25. 0.0001515 **R.** $\frac{1}{6600}$

26. 0.15169169 **R.** $\frac{7577}{49950}$

27. 18.0326 **R.** $\frac{90163}{5000}$

28. 0.00564 **R.** $\frac{141}{25000}$

29. 0.008 **R.** $\frac{1}{125}$

30. 4.1344 **R.** $\frac{3721}{900}$

31. 8.03210321 **R.** $\frac{26771}{3333}$

32. 0.894894 **R.** $\frac{298}{333}$

33. 6.891616 **R.** $\frac{68227}{9900}$

34. 0.096055 **R.** $\frac{1729}{18000}$

35. 0.0885608856 **R.** $\frac{984}{11111}$

36. 0.1868 **R.** $\frac{467}{2500}$

37. 0.000018 **R.** $\frac{9}{500000}$

38. 5.165165 **R.** $\frac{1720}{333}$

39. 0.056893893 **R.** $\frac{56837}{999000}$

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES

En seguida se presenta un ejemplo de simplificación de una expresión compleja encontrando la generatriz de los decimales:

Simplificar $\frac{(0.5+0.66\ldots-0.055\ldots)\times 9/10}{3.11\ldots-2.066\ldots}$ hallando la generatriz de los decimales.

Así:

$$0.5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2} \quad 0.66\ldots=\frac{6}{9}=\frac{2}{3} \quad 0.055\ldots=\frac{05-0}{90}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$$

$$3.11\ldots=3\frac{1}{9}=\frac{28}{9} \quad 2.066\ldots=2\frac{06-0}{90}=2\frac{6}{90}=2\frac{1}{15}=\frac{31}{15}$$

Con lo que tendremos:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{18}\right)\times\frac{9}{10}}{\frac{28}{9}-\frac{31}{15}}=\frac{\frac{10}{9}\times\frac{9}{10}}{\frac{47}{45}}=\frac{1}{\frac{47}{45}}=\frac{45}{47}$$

EJERCICIOS

Simplifica las expresiones siguientes encontrando la generatriz de los decimales:

1. $0.5+0.002+\frac{1}{2}$

R. $1\frac{1}{50}$

2. $0.16+4\frac{1}{5}-0.666\ldots$

R. $3\frac{52}{75}$

3. $\left(0.1515\ldots-\frac{1}{33}\right)+\left(0.0909\ldots+\frac{1}{3}\right)$

R. $\frac{6}{11}$

4. $\left(\frac{1}{4}+0.04+\frac{1}{5}\right)\times 0.03$

R. $\frac{147}{10000}$

5. $\dfrac{0.005\ldots+\frac{5}{6}-0.111\ldots}{3\frac{1}{6}}$

R. $\frac{14}{57}$

6. $\frac{0.25}{0.55}+\frac{1}{9}+0.56565\ldots$

R. $1\frac{13}{99}$

7. $\dfrac{\left(0.3636\ldots+\frac{1}{22}+1\frac{1}{2}\right)\div 0.3}{0.333\ldots}$

R. $19\frac{1}{11}$

8. $\dfrac{\left(0.1818\ldots-\frac{1}{15}\right)+\left(0.036-\frac{1}{500}\right)}{\frac{1}{2}}$

R. $\frac{2461}{8250}$

9. $\dfrac{(0.244\ldots+1/3+0.22\ldots)\times 1\ 1/4}{3+0.153153\ldots}$

R. $\frac{111}{350}$

10 $\dfrac{\frac{0.18}{0.6}+\frac{0.1515\ldots}{0.1010\ldots}-\frac{1}{15}}{0.01818\ldots}$

R. $95\frac{1}{3}$

11. $\dfrac{3.2-2.11\ldots+3.066\ldots}{2.2-1.166\ldots+2.033\ldots}$

R. $1\frac{49}{138}$

FRACCIONES DECIMALES PERIÓDICAS

Cuando una cantidad experimenta variaciones que cambian su valor, haciéndola aumentar o disminuir de modo regular, se dice que es una **variable**, y si tiene un valor fijo se le llama **constante**. Por otra parte, cuando los diversos valores que recibe una cantidad variable se aproximan cada vez más a una cantidad fija, constante, de modo que la diferencia entre la variable y la constante, **sin llegar a anularse**, pueda ser tan pequeña como se quiera, se dice que **la constante es el límite de la variable** o que **la variable tiende a un límite que es la constante.**

Las fracciones decimales periódicas son cantidades variables: la fracción 0.111... es una variable, porque a medida que aumentamos el número de periodos, aumenta cada vez más su valor y se aproxima más al valor de su generatriz $\frac{1}{9}$ y nunca llega a alcanzar este valor, pero la diferencia entre 0.111... y su generatriz $\frac{1}{9}$ cada vez se hace menor, pero sin llegar a cero.

Si tomamos un solo periodo tenemos $0.1=\frac{1}{10}$ y la diferencia entre la generatriz y esta fracción es: $\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=\frac{10-9}{90}=\frac{1}{90}$

Al tomar dos periodos tenemos $0.11=\frac{11}{100}$ y la diferencia entre la generatriz y esta fracción es: $\frac{1}{9}-\frac{11}{100}=\frac{100-99}{900}=\frac{1}{900}$

Tomando tres periodos tenemos $0.111=\frac{111}{1000}$ y la diferencia con la generatriz es: $\frac{1}{9}-\frac{111}{1000}=\frac{1000-999}{9000}=\frac{1}{9000}$

Aquí vemos que la diferencia entre la fracción periódica 0.111... y su generatriz $\frac{1}{9}$ se hace cada vez menor a medida que aumentamos el número de periodos, porque de varios quebrados con igual numerador, el que tiene mayor denominador es menor.

Por lo tanto, al tomar cada vez mayor número de periodos, la diferencia entre la fracción 0.111... y su generatriz $\frac{1}{9}$ puede llegar a ser tan pequeña como se quiera, aunque nunca llega a anularse; luego, 0.111... es una variable que tiende al límite $\frac{1}{9}$ cuando el número de periodos aumenta indefinidamente.

Igualmente, 0.1818... es una variable porque a medida que aumentamos el número de periodos su valor se hace cada vez mayor, acercándose cada vez más al valor de su generatriz $\frac{18}{99}=\frac{2}{11}$, pero nunca llega a tener este valor; no obstante, la diferencia entre 0.1818... y su generatriz $\frac{2}{11}$ puede ser tan pequeña como se quiera, sin anularse nunca; luego, 0.1818... es una variable que tiende al límite $\frac{2}{11}$ cuando el número de periodos aumenta indefinidamente.

En conclusión, las fracciones periódicas pueden interpretarse como cantidades variables que tienden al límite representado por su generatriz, cuando el número de periodos crece indefinidamente.

FRACCIONES PERIÓDICAS DE PERIODO 9

La fracción periódica pura 0.999... y las fracciones periódicas mixtas de periodo 9, tales como 0.0999..., 0.1999..., 0.2999..., 0.01999..., 0.02999..., etc., no son originadas por quebrados comunes; esto significa que no existe ningún quebrado común tal que, dividiendo su numerador entre su denominador, se obtengan dichas fracciones.

La fracción 0.999... difiere de 1 en 1 milésima; 0.9999... difiere de 1 en 1 diezmilésima; 0.99999... difiere de 1 en 1 cienmilésima, etc. A media que aumentamos el número de periodos, el valor de esta fracción 0.999... se aproxima indefinidamente a 1, aunque nunca llega a tener este valor; luego, la diferencia entre 0.999... y 1 puede ser tan pequeña como se quiera, pero sin llegar a valer 0; por tanto, la fracción 0.999... es una variable que tiende al límite 1 cuando el número de periodos aumenta indefinidamente. Por esta razón, al buscar su generatriz se encuentra que es

$$\frac{9}{9} = 1$$

La fracción periódica mixta 0.0999... difiere de 0.1 en una diezmilésima; 0.09999... difiere de 0.1 en una cienmilésima, etc.; luego, la diferencia entre esta fracción 0.0999... y 0.1 puede ser tan pequeña como se quiera, lo cual significa que la fracción 0.0999... es una variable que tiende al límite 0.1 cuando el número de periodos aumenta indefinidamente.

Por ello, al buscar su generatriz se encuentra que es

$$\frac{09-0}{90} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10} = 0.1$$

Del mismo modo, 0.1999....., 0.2999..., 0.3999..., etc., son variables que tienden respectivamente a los límites 0.01, 0.02, 0.03..., etc., cuando el número de periodos crece indefinidamente, y las fracciones 0.10999..., 0.11999..., 0.12999..., etc., son variables que tienden respectivamente a los límites 0.11, 0.12, 0.13..., etc., cuando el número de periodos crece indefinidamente.

Asimismo, las fracciones 0.00999..., 0.0199..., 0.02999..., etc. son cantidades variables que tienden respectivamente a los límites 0.01, 0.02, 0.03..., etc., cuando el número de periodos crece indefinidamente, y las fracciones 0.10999..., 0.11999..., 0.12999..., etc., son variables que tienden respectivamente a los límites 0.11, 0.12, 0.13..., etc., cuando el número de periodos crece indefinidamente.



Los griegos se interesaban especialmente por los cuadrados y los cubos. Diofanto ideó la yuxtaposición adhesiva para la notación de las potencias. Así, *x*, *xx*, *xxx* expresa la primera, segunda y tercera potencias de *x*. René Descartes introdujo la notación x, xx, x^3, x^4, etc

CAPÍTULO XXXI

POTENCIACIÓN

La potenciación es la operación que consiste en multiplicar por sí mismo un número llamado base tantas veces como indica otro número denominado exponente. Así, si se escribe 2^5, 2 es la base y 5 es el exponente. El resultado de la operación será $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, o sea, 32 es la quinta potencia de 2.

Cuando el exponente es 2, se dice que se está calculando el cuadrado de la base. Así, el cuadrado de 3 será $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$. Cuando el exponente es 3, se dice que estamos determinando el cubo de la base.

LEYES DE LA POTENCIACIÓN

Se conocen tres leyes de la potenciación: ley de uniformidad, ley de monotonía y ley distributiva.

Aquí no se cumple la ley conmutativa.

En algunos casos, al permutar la base por el exponente se obtiene el mismo resultado:

$$4^2 = 16 \text{ y } 2^4 = 16$$

pero esto casi nunca sucede, como se demuestra con este ejemplo:

$$3^2 = 9 \quad \text{y} \quad 2^3 = 8$$
$$5^3 = 125 \quad \text{y} \quad 3^5 = 243$$

LEY DE UNIFORMIDAD

La **ley de uniformidad** puede enunciarse de dos modos equivalentes:

1) Cualquier potencia de un número tiene un valor único o siempre igual.

$2^4 = 4$ siempre,

$5^3 = 125$ siempre

2) Como los números iguales son el mismo número, se verifica que si los dos miembros de una igualdad se elevan a una misma potencia, resulta otra igualdad.

Siendo $a = 3$ se verifica que:

$a^2 = 3^2$ o sea $a^2 = 9$
$a^3 = 3^3$ o sea $a^3 = 27$
$a^4 = 3^4$ o sea $a^4 = 81$, etc

Y en general $a^n = 3^n$

Según la **ley distributiva**, la potenciación es distributiva respecto de la multiplicación y de la división exacta.

Para elevar un producto a una potencia, se eleva cada uno de los factores a dicha potencia y se multiplican:

Siendo el producto *abc*, probaremos que

$(abc)^n = a^n \bullet b^n \bullet c^n$

Elevar el producto *abc* a la enésima potencia equivale a tomar este producto como factor *n* veces; por tanto:

$(abc)^n = (abc)(abc)(abc)\ldots n$ veces
$= abc \bullet abc \bullet abc \ldots\ldots n$ veces
$= (a \bullet a \bullet a \ldots n$ veces$) \times$
$(b \bullet b \bullet b \ldots n$ veces$) \times$
$(c \bullet c \bullet c \ldots n$ veces$)$
$= a^n \bullet b^n \bullet c^n$

que es lo que queríamos demostrar.

Esta propiedad constituye la ley distributiva de la potenciación respecto de la multiplicación.

1) $(3 \times 4 \times 5)^2 = 3^2 \bullet 4^2 \bullet 5^2 = 9 \times 16 \times 25 = 3600$

2) $(5ab)^3 = 5^3 \bullet a^3 \bullet b^3 = 125a^3b^3$

EJERCICIOS

Aplicando la regla anterior, desarrolla estas potencias:

1. $\left(6 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)^2$ **R.** 4

2. $\left(\frac{5}{6} \times 1\frac{1}{5} \times 0. \times 6\frac{2}{3}\right)^6$ **R.** 64

3. $(0.1 \times 0.3)^2$ **R.** 0.0009

4. $\left(\frac{1}{4} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 6\right)^4$ **R.** 81

5. $\left(\frac{2}{3} \times 1\frac{1}{2} \times \frac{10}{3} \times 0.01\right)^5$ **R.** $\frac{1}{24300000}$

POTENCIA DE UN NÚMERO FRACCIONARIO

Para elevar un cociente exacto o una fracción a una potencia cualquiera, se eleva su numerador y su denominador a dicha potencia: a

Siendo la fracción $\frac{a}{b}$, demostraremos que $\left(\frac{a}{b}\right)^n$

Según la definición de potencia, elevar $\frac{a}{b}$ a la potencia *n* significa tomarlo como factor *n* veces; por tanto:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \ldots n \text{ veces}$$

$$= \frac{a \times a \times a \times a \times a \ldots n \text{ veces}}{b \times b \times b \times b \times b \ldots n \text{ veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Esta propiedad constituye la ley distributiva de la potenciación respecto de la división exacta.

Ejemplos

1) Elevar $\left(\frac{4}{5}\right)^5$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{4^4}{5^5} = \frac{1024}{3125}$$

Si se trata de elevar un *número mixto* a una potencia cualquiera, se reduce el número mixto a quebrado y se aplica la regla anterior.

2) Desarrollar $\left(3\frac{1}{2}\right)^4$

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{7}{2}\right)^4 = \frac{7^4}{2^4} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{2401}{16} = 150\frac{1}{16}$$

EJERCICIOS

Desarrollar:

1. $\left(1\frac{1}{2}\right)^8$ **R.** $25\frac{161}{256}$

2. $\left(\frac{5}{7}\right)^2$ **R.** $\frac{25}{49}$

3. $\left(1\frac{1}{5}\right)^6$ **R.** $2\frac{15406}{15625}$

4. $\left(2\frac{1}{4}\right)^4$ **R.** $25\frac{161}{256}$

5. $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ **R.** $\frac{1}{27}$

6. $\left(\frac{1}{3}\right)^6$ **R.** $\frac{1}{729}$

7. $\left(\frac{2}{5}\right)^5$ **R.** $\frac{32}{3125}$

8. $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ **R.** $\frac{1}{1048576}$

9. $\left(\frac{1}{5}\right)^7$ **R.** $\frac{1}{78125}$

10. $\left(\frac{3}{7}\right)^5$ **R.** $\frac{243}{16807}$

11. $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$ **R.** $2\frac{1}{4}$

12. $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$ **R.** $12\frac{19}{27}$

13. $\left(2\frac{1}{2}\right)^5$ **R.** $97\frac{21}{32}$

14. $\left(4\frac{2}{3}\right)^3$ **R.** $101\frac{17}{27}$

15. $\left(1\frac{2}{5}\right)^4$ **R.** $3\frac{526}{625}$

16. $\left(1\frac{1}{8}\right)^5$ **R.** $1\frac{26281}{32768}$

LEY DE MONOTONÍA

De acuerdo con la **ley de monotonía,** si los dos miembros de una desigualdad se elevan a una misma potencia que no sea cero, resulta una desigualdad del mismo sentido que la dada.

1) Siendo 7 > 5 resulta: $7^2 > 5^2$ o sea 49 > 25,
$7^3 > 5^3$ o sea 343 > 125,
$7^4 > 5^4$ o sea 2401 > 625, etc.
y en general $7^n > 5^n$

2) Siendo 3 < 8 resulta: $3^2 > 8^2$ o sea 9 > 64,
$3^3 > 8^3$ o sea 27 > 512,
$3^4 > 8^4$ o sea 81 > 4096, etc.
y en general $3^n > 8^n$

EJERCICIOS

Aplicar la ley de uniformidad en:

1. $x = 5$ **2.** $8 = 4 \times 2$ **3.** $10 \times 2 = 20 \times 1$

Aplica la ley distributiva en:

4. $(7 \times 2)^2$ **5.** $(9 \times 4)^3$ **6.** $(5 \times 3 \times 4)^4$ **7.** $(m \bullet n \bullet p)^5$

8. $(c \div d)^2$ **9.** $\left(\frac{x}{3}\right)^4$ **10.** $\left(\frac{a}{b}\right)^p$

11. Siendo $a > b$ se verifica por la ley de monotonía que . . . (escribe dos ejemplos).

12. Siendo 5 < 9 se verifica por la ley de monotonía que . . . (escribe dos ejemplos).

13. $(3a)^2$ **20.** $\left(\frac{1}{x}\right)^8$ **25.** $\left(\frac{2\times 2}{3\times 4}\right)^4$

14. $(8ab)^3$ **21.** $\left(\frac{2\times 8}{4}\right)^2$ **26.** $\left(\frac{6\times 7}{5\times 7}\right)^3$

15. $(amx)^4$

16. $(bcde)^n$ **22.** $\left(\frac{3\times 6}{9\times 2}\right)^2$ **27.** $\left(\frac{a\times 9}{b\times 6}\right)^3$

17. $(2.3.b)^5$

18. $\left(\frac{15}{3}\right)^2$ **23.** $\left(\frac{ab}{5cd}\right)^4$ **28.** $\left(\frac{a\times c}{b\times d}\right)^n$

19. $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ **24.** $\left(\frac{8\times 5\times 6}{10\times 2\times 3}\right)^2$ **29.** $\left(\frac{xy}{2pq}\right)^3$

TEOREMA DEL CUADRADO DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS

El cuadrado de la suma indicada de dos números es igual al cuadrado del primero, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Siendo la suma ($a + b$), demostraremos que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Según la definición de potencia, elevar una cantidad cualquiera al cuadrado equivale a multiplicarla por sí misma:

(a + b)2 = (a + b)(a + b)

Al hacer la multiplicación de estas dos sumas indicadas tendremos:

(a + b)2 = (a + b)(a + b) = a • a + a • b + b • a + b • b = a 2 + 2ab + b 2,

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplos

1) Elevar al cuadrado (3 + 5)

$(3 + 5)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 5 + 5^2 = 9 + 30 + 25 = 64$

2) Desarrollar $(0.25 + 3.41)^2$

$(0.25 + 3.41)^2 = 0.25^2 + 2 \times 0.25 \times 3.41 + 3.41^2 =$
$0.0625 + 1.705 + 11.6281 = 13.3956$

3) Desarrollar $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)^2$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{16} = \frac{49}{144}$$

ENTEROS ELEVADOS AL CUADRADO DESCOMPONIÉNDOLOS POR MEDIO DE DECENAS Y CENTENAS

Se puede decir que el cuadrado de un número entero descompuesto en decenas y unidades es igual al cuadrado de las decenas, más el duplo de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades.

Ejemplos

1) $56^2 = (50 + 6)^2 =$

$50^2 + 2 \times 50 \times 6 + 6^2 =$

$2500 + 600 + 36 = 3136$

2) $123^2 = (120 + 3)^2 =$

1202 + 2 × 120 × 3 + 33 =

14400 + 720 + 9 = 15129

3) $25^2 = (20 + 5)^2 =$

202 + 2 × 20 × 5 + 52 =

400 + 200 + 25 =

625

EJERCICIOS

Aplicando la regla anterior, desarrolla:

1. $(12 + 15)^2$ — **R.** 729

2. $(2 + 2)^2$ — **R.** 16

3. $(1 + 2)^3$ — **R.** 27

4. $(5 + 11)^2$ — **R.** 256

5. $(30 + 42)^2$ — **R.** 5184

6. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2$ — **R.** $\frac{25}{36}$

7. $(0.5 + 3.8)^2$ — **R.** 18.49

8. $\left(5+\frac{1}{5}\right)^2$ — **R.** $27\frac{1}{25}$

9. $\left(6+\frac{1}{6}\right)^2$ — **R.** $38\frac{1}{36}$

10. $\left(0.1+\frac{5}{6}\right)^2$ — **R.** $\frac{196}{225}$

11. $\left(0.3+\frac{2}{3}\right)^2$ — **R.** $\frac{841}{900}$

12. $\left(3\frac{1}{2}+5\frac{1}{4}\right)^2$ — **R.** $76\frac{9}{16}$

13. $\left(1\frac{1}{3}+2\frac{3}{5}\right)^2$ — **R.** $15\frac{106}{225}$

14. $\left(8\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)^2$ — **R.** $85\frac{9}{16}$

15. $\left(0.001+\frac{3}{100}\right)^2$ — **R.** $\frac{9}{1000}$

16. $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\right)^2$ — **R.** $\frac{49}{100}$

17. $\left(1\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)^2$ — **R.** $2\frac{1}{144}$

18. $\left(0.5+2\frac{1}{2}\right)^2$ — **R.** 9

19. $\left(3\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)^2$ — **R.** 16

20. $\left(1+\frac{1}{10}\right)^2$ — **R.** 1.21

EJERCICIOS

Eleva al cuadrado estos números, descomponiéndolos en decenas y unidades.

1. 16 **R.** 256
2. 27 **R.** 729
3. 48 **R.** 2304
4. 91 **R.** 8281
5. 93 **R.** 8649
6. 97 **R.** 9409

EJERCICIOS

Aplicando la regla del cubo, desarrolla:

1. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^3$ **R.** $\frac{125}{216}$

2. $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)^3$ **R.** $\frac{343}{1728}$

3. $\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)^3$ **R.** $10\frac{37}{216}$

4. $\left(\frac{1}{5}+0.3\right)^3$ **R.** $\frac{1}{8}$

5. $\left(2\frac{1}{4}+1\frac{2}{5}\right)^3$ **R.** $48\frac{5017}{8000}$

6. $\left(3\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)^3$ **R.** $52\frac{47}{64}$

TEOREMA DEL CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS NÚMEROS

El cuadrado de la diferencia indicada de dos números es igual al cuadrado del primero, menos el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Siendo la diferencia (*a* -*b*), demostraremos que

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Según la definición de potencia, elevar la diferencia (*a* -*b*) al cuadrado equivale a multiplicarla por sí misma:

(a -b)2 = (a -b)(a -b)

Al efectuar la multiplicación de estas dos diferencias indicadas tendremos:

(a -b)2 = (a -b)(a -b) = a • a -a • b -b • a + b • b = a 2 -2ab + b 2,

que era lo que queríamos demostrar.

Ejemplos

1) Desarrollar $(8 - 6)^2$

$$(8 - 6)^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times 6 + 6^2 = 64 - 96 + 36 = 64 + 36 - 96 = 4$$

2) Desarrollar $(0.2 - 0.04)^2$

$$(0.2 - 0.04)^2 = 0.2^2 - 2 \times 0.2 \times 0.04 + 0.04^2 = 0.04 - 0.016 + 0.0016 = 0.0256$$

3) Desarrollar $\left(5\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)^2$ $\quad \left(5\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{17}{3}-\frac{1}{6}\right)^2$

$$= \left(\frac{17}{3}\right)^2 - 2\times\frac{17}{3}\times\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{289}{9}-\frac{17}{9}+\frac{1}{36}=\frac{121}{4}=30\frac{1}{4}$$

TEOREMA DEL CUBO DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS

El cubo de la suma indicada de dos números es igual al cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

Siendo la suma (*a* + *b*) probaremos que

(a + b)3 = a 3 + 3a 2b + 3ab 2 + b 3

Según la definición de potencia, elevar una cantidad al cubo equivale a tomarla como factor tres veces:

(a + b)3 = (a + b)(a + b)(a + b)

Si consideramos que $(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, tendremos:

(a + b)3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)2 (a + b) =
(a 2 + 2ab + b 2)(a + b)

efectuando la multiplicación de estas sumas indicadas

$$= a^2 \bullet a + 2a^2 \bullet b + b^2 \bullet a + a^2 \bullet b + 2a \bullet b^2 + b^2 \bullet b$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplos

1) Desarrollar $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\right)^3$

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 + 3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{1}{6}+3\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$= \frac{27}{125}+\frac{9}{50}+\frac{1}{20}+\frac{1}{216}=\frac{12167}{27000}$$

CUBOS AL CUADRADO POR DESCOMPOSICIÓN DE DECENAS Y UNIDADES

Se puede decir que el cubo de un número entero descompuesto en decenas y unidades es igual al cubo de las decenas, más el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades.

Ejemplos

1) $24^3 = (20 + 4)^3 = 20^3 + 3 \times 20^2 \times 4 + 3 \times 20 \times 4^2 + 4^3$

$= 8000 + 4800 + 960 + 64 = 13824$

2) $152^3 = (150 + 2)^3 = 150^3 + 3 \times 150^2 \times 2 + 3 \times 150 \times 2^2 + 2^3$

$= 3375000 + 135000 + 1800 + 8 = 3511808$

EJERCICIOS

Descomponiendo en decenas y unidades, eleva al cubo:

1. 385	**R.** 57066625
2. 97	**R.** 912673
3. 56	**R.** 175616
4. 162	**R.** 4251528
5. 4131	**R.** 70547387968
6. 89	**R.** 704969
7. 131	**R.** 2248091
8. 153	**R.** 3581577
9. 281	**R.** 22188041
10. 536	**R.** 153990656

CUBO DE LA DIFERENCIA DE DOS NÚMEROS

El cubo de la diferencia indicada de dos números es igual al cubo del primero, menos el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo.

Siendo la diferencia ($a - b$), demostraremos que

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Según la definición de potencia, elevar ($a - b$) al cubo equivale a tomar esta diferencia tres veces como factor:

$$(a - b)3 = (a - b)(a - b)(a - b)$$

Si consideramos que

$$(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\text{, tendremos:}$$

$$(a - b)3 = (a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)2(a - b) = (a 2 - 2ab + b 2)(a - b)$$

efectuando esta multiplicación indicada

$$= a^2 \bullet a - 2a^2 \bullet b + b^2 \bullet a - a^2 \bullet b + 2a \bullet b^2 - b^2 \bullet b = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplos

1) Elevar al cubo (10 - 4)

$$(10 - 4)^3 = 10^3 - 3 \times 10^2 \times 4 + 3 \times 10 \times 4^2 - 4^3 = 1000 - 1200 + 480 - 64 = 216$$

2) Desarrollar $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = 1^3 - 3 \times 1^2 \times \frac{1}{2} + 3 \times 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

EJERCICIOS

Aplicando la regla del cubo, desarrolla:

1. $(20 - 3)^3$	**R.** 4913
2. $(6 - 0.03)^3$	**R.** 212.776173
3. $\left(3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{6}\right)^3$	**R.** $10\frac{37}{216}$
4. $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)^3$	**R.** $\frac{8}{3375}$
5. $\left(7\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^3$	**R.** $307\frac{35}{64}$
6. $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)^3$	**R.** $\frac{125}{1728}$
7. $\left(4\frac{3}{4} - \frac{19}{4}\right)^3$	**R.** 0
8. $\left(\frac{7}{4} - \frac{2}{3}\right)^3$	**R.** $1\frac{469}{1728}$
9. $\left(\frac{3}{5} - 0.3\right)^3$	**R.** $\frac{27}{1000}$
10. $\left(5 - \frac{5}{7}\right)^3$	**R.** $78\frac{240}{343}$
11. $\left(4\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right)^3$	**R.** 64
12. $(15 - 7)^3$	**R.** 512

TEOREMA SOBRE LA DIFERENCIA DE CUADRADOS DE DOS NÚMEROS ENTEROS CONSECUTIVOS

La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual al duplo del menor, más la unidad.

Siendo los números enteros consecutivos N y $N + 1$, probaremos que

$$(N + 1)2 - N\ 2 = 2N + 1$$

En efecto: $(N + 1)^2 - N^2 =$

$$(N\ 2 + 2 \bullet N \bullet 1 + 12) - N\ 2 = 2N + 1$$

que es lo que queríamos demostrar.

Hallar la diferencia de los cuadrados de 12 y 11:

$$12^2 - 11^2 = 2 \times 11 + 1 = 23$$

EJERCICIOS

Encuentra la diferencia de los cuadrados de estos números:

1. 8 y 10
2. 23 y 24
2. 2 y 5
4. 30 y 31
3. 4 y 8
6. 50 y 51
4. 10 y 11
8. 62 y 63
5. 12 y 13
10. 301 y 402
6. 15 y 16
12. 550 y 251
7. 25 y 31
14. 720 y 691

CUADRADO DE UN NÚMERO CONOCIENDO EL CUADRADO DEL NÚMERO ANTERIOR

Para **averiguar el cuadrado de un número conociendo el cuadrado del anterior**, bastará añadirle a este cuadrado el duplo de ese número anterior más una unidad. De esta forma, para encontrar el cuadrado de 13, sabiendo que $12^2 = 144$, se procede así:

$$13^2 = 144 + 2 \times 12 + 1 = 144 + (24 + 1) = 169$$

EJERCICIOS

1. Encuentra el cuadrado de 8 sabiendo que $7^2 = 49$

2. Encuentra el cuadrado de 12 sabiendo que $11^2 = 121$

3. Encuentra el cuadrado de 15 sabiendo que $14^2 = 196$

4. Encuentra el cuadrado de 21 sabiendo que $20^2 = 400$

5. Encuentra el cuadrado de 18 sabiendo que $17^2 = 289$

6. Encuentra el cuadrado de 32 sabiendo que $31^2 = 961$

7. Encuentra el cuadrado de 57 sabiendo que $56^2 = 3136$

8. Encuentra el cuadrado de 74 sabiendo que $73^2 = 5329$

TEOREMA SOBRE LA DIFERENCIA DE CUBOS DE DOS NÚMEROS ENTEROS CONSECUTIVOS

La diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo del menor, más la unidad.

Siendo los números enteros consecutivos N y $N + 1$, demostraremos que:

$$(N + 1)^3 - N^3 = 3N^2 + 3N + 1$$

En efecto:

$$(N + 1)3 - N\ 3 = (N\ 3 + 3 \bullet N\ 2 \bullet 1 + 3 \bullet N \bullet 12 + 13) - N\ 3 = 3N\ 2 + 3N + 1$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

Hallar la diferencia de los cubos de 7 y 8:

$$8^3 - 7^3 = 3 \times 7^2 + 3 \times 7 + 1 = 147 + 21 + 1 = 169$$

Para **averiguar el cubo de un número cuando se conoce el cubo del número anterior**, bastará sumarle a este cubo el triplo del cuadrado de ese número anterior, más el triplo del mismo número, más la unidad. De esta manera, si queremos hallar el cubo de 14, sabiendo que $13^3 = 2197$, procederemos así:

$$14^3 = 2197 + 3 \times 13^2 + 3 \times 13 + 1 = 2197 + (507 + 39 + 1) = 2744$$

EJERCICIOS

Aplicando la regla anterior, encuentra la diferencia de los cubos de estos números:

1. 2 y 3
2. 20 y 21
3. 4 y 5
4. 9 y 10
5. 50 y 51
6. 10 y 11
7. 100 y 101
8. 13 y 14
9. 201 y 202
10. 17 y 19
11. 500 y 501
12. 30 y 31
13. 30 y 74
14. 85 y 186
15. 939 y 1299
16. 49 y 839
17. 369 y 7893
18. 4669 y 9093

EJERCICIOS

1. Encuentra el cubo de 3 sabiendo que $2^3 = 8$

2. Encuentra el cubo de 4 sabiendo que $3^3 = 27$

3. Encuentra el cubo de 7 sabiendo que $6^3 = 216$

4. Encuentra el cubo de 10 sabiendo que $9^3 = 729$

5. Encuentra el cubo de 11 sabiendo que $10^3 = 1000$

6. Encuentra el cubo de 14 sabiendo que $13^3 = 2197$

7. Encuentra el cubo de 18 sabiendo que $17^3 = 4913$

8. Encuentra el cubo de 20 sabiendo que $19^3 = 6859$

9. Encuentra el cubo de 25 sabiendo que $24^3 = 13824$

10. Encuentra el cubo de 31 sabiendo que $30^3 = 27000$

11. Encuentra el cubo de 40 sabiendo que $39^3 = 59319$

ELEVACIÓN DE UNA POTENCIA A OTRA POTENCIA

Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base, poniéndole por exponente el producto de los exponentes.

Siendo la potencia a^m demostraremos que $(a^m)^n = a^{mn}$

Elevar a^m a la potencia n significa que a^m se toma como factor n veces; luego, $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \ldots$ n veces $= a^{m \times m \times m \ldots n \text{ veces}} = a^{mn}$ que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo

Desarrollar $(2^3)^4$

$$(2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12} = 4096$$

AGRUPACIÓN

En algunas expresiones **pueden reunirse dos o más de los casos de elevación a potencias** estudiados, así que por ser de interés resolveremos los siguientes:

Ejemplos

1) Desarrollar $\left(\frac{2\times 0.3\times 5}{0.1\times 3\times 0.2}\right)^2$

$$\left(\frac{2\times 0.3\times 5}{0.1\times 3\times 0.2}\right)^2 = \frac{(2\times 0.3\times 5)^2}{(0.1\times 3\times 0.2)^2} = \frac{2^2\times 0.3^2\times 5^2}{0.1^2\times 3^2\times 0.2^2} = \frac{4\times 0.09\times 25}{0.01\times 9\times 0.04} = \frac{9}{0.0036} = 2500$$

2) Desarrollar $\left(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}}\right)^2$

$$\left(\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{4}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{16}{9}\times\frac{1}{25}}{\frac{4}{25}\times\frac{16}{25}} = \frac{\frac{16}{900}}{\frac{64}{625}} = \frac{25}{144}$$

3) Desarrollar $\left[\frac{2^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^2$

$$\left[\frac{2^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^2 = \frac{\left[2^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2}{\left[3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2} = \frac{(2^3)^2\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2}{(3^2)^2\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2} = \frac{2^6\times\left(\frac{1}{2}\right)^6}{3^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{64\times\frac{1}{64}}{81\times\frac{16}{81}} = \frac{1}{16}$$

EJERCICIOS

Desarrollar

1. $(2^3)^4$ **R.** 4096

2. $(5^2)^3$ **R.** 15625

3. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$ **R.** $\frac{1}{64}$

4. $(0.01^2)^3$ **R.** 0.000000000001

5. $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^4$ **R.** $\frac{1}{65536}$

6. $[(3^2)^3]^2$ **R.** 531441

7. $(a^3)^x$ **R.** a^{3x}

8. $(x^a)^2$ **R.** x^{2a}

9. $[(abc)^3]^4$ **R.** $a^{12}b^{12}c^{12}$

10. $\left[\left(\frac{m}{n}\right)^4\right]^5$ **R.** $\frac{m^{20}}{n^{20}}$

11. $[(0.3^2)^3]^2$ **R.** 0.000000531441

12. $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^3$ **R.** $\frac{729}{15625}$

13. $\left[\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2\right]^2$ **R.** $\frac{256}{6561}$

14. $\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right)^2$ **R.** 4

15. $\left(\frac{0.2\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\right)^3$ **R.** $\frac{64}{125}$

16. $\left(\frac{2^2\times 3^5\times 4^2}{2^4\times 3^2}\right)$ **R.** 11664

17. $\left[\left(\frac{ab}{c}\right)^5\right]^6$ **R.** $\frac{a^{30}b^{30}}{c^{30}}$

18. $\left[\left(\frac{ax}{bm}\right)^4\right]^3$ **R.** $\frac{a^{12}x^{12}}{b^{12}m^{12}}$

19. $\frac{(2^2)^3\times(3^5)^2}{(3^2)^3\times(2^3)^4}$ **R.** $\frac{81}{64}$

7. $\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right]^2$ **R.** 4

8 $\frac{\left[(2^3)^3\right]^2}{(4^3)^2}$ **R.** 64

9. $\left(\frac{2a^2b^2}{x^3}\right)^2$ **R.** $\frac{4a^4b^4}{x^6}$

10. $\left(\frac{3\times 0.3\times 10}{2\times 0.2\times 20}\right)^2$ **R.** $1\frac{17}{64}$

11. $\left(\frac{\frac{3}{4}\times 4\times\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}\times 6\times\frac{1}{10}}\right)$ **R.** 1

12. $\left[\frac{3^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3}{2^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right]^2$ **R.** 81

CUADRADO PERFECTO

Se dice que un número es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de otro número: 9 es cuadrado perfecto porque $3^2 = 9$; 81 es cuadrado perfecto porque $9^2 = 81$. El único número cuadrado de él mismo es el 1.

Todo número cuadrado perfecto tiene una raíz cuadrada exacta, que será el número del cual él es el cuadrado.

Para que un número sea cuadrado perfecto es necesario que todos sus factores primos estén elevados a exponentes pares.

Elevar un número al cuadrado es lo mismo que elevar al cuadrado el producto de sus factores primos, y con esta operación el exponente de cada factor primo se multiplica por 2, por tanto, queda par.

Así, al elevar $24 = 2^3 \bullet 3$ al cuadrado, tenemos:
$24^2 = (2^3 \bullet 3)^2 = (2^3)^2 \bullet 3^2 = 2^6 \bullet 3^2$, con exponentes pares.

Al elevar $60 = 2^2 \bullet 3 \bullet 5$ al cuadrado, tenemos:

$60^2 = (2^2 \bullet 3 \bullet 5)^2 = (2^2)^2 \bullet 3^2 \bullet 5^2 = 2^4 \bullet 3^2 \bullet 5^2$, con exponentes pares.

Sin embargo, hay ciertas señales de los números que permiten afirmar, por simple inspección, que un número **no es cuadrado perfecto**, es decir, que **no tiene raíz cuadrada exacta.**

En los siguientes casos no hay cuadrados perfectos:

1) Los números que contengan algún factor primo elevado a un exponente impar.

El número 108 no es cuadrado perfecto porque al descomponerse en sus factores primos da $108 = 2^2 \times 3^3$, y el exponente del factor primo 3 es impar.

2) Los números terminados en 2, 3, 7 u 8.

Los números 152, 273, 867 y 1048 no son cuadrados perfectos porque terminan, respectivamente, en 2, 3, 7 y 8.

3) Los números terminados en 5 cuya cifra de las decenas no es 2.

345 no es cuadrado perfecto, porque termina en 5 y la cifra de las decenas no es 2, sino 4.

4) Los números divisibles por un factor primo pero que no lo son por su cuadrado.

134 no es cuadrado perfecto porque es divisible por 2 y no lo es por el cuadrado de 2, que es el 4; 567 no tiene raíz cuadrada exacta porque es divisible por 7 y no lo es por el cuadrado de 7, que es el 49.

5) Los números enteros terminados en un número impar de ceros.

5000 no es cuadrado perfecto porque termina en tres ceros.

6) Los números pares no divisibles por 4.

1262 no tiene raíz cuadrada exacta porque es par y no es divisible por 4.

7) Los números impares que, disminuidos en una unidad, no son divisibles por 4.

1131 no es cuadrado perfecto porque disminuyéndolo en una unidad queda 1130, y este número no es divisible por 4.

8) Los números decimales terminados en un número impar de cifras decimales.

3.786 no es cuadrado perfecto porque tiene tres cifras decimales.

ESCOLIO

Las señales anteriores indican que el número con alguna de ellas *no es cuadrado perfecto*, pero por el solo hecho de que un número no tenga ninguna de estas señales, con excepción de la primera, *no podemos afirmar que sea cuadrado perfecto.* No obstante, un número que no tenga ninguna de estas señales será cuadrado perfecto si cumple la *condición general de racionalidad* de que al descomponerse en sus factores primos, *todos los exponentes de estos factores sean pares.*

Así, 425 termina en 5 y la cifra de sus decenas es 2; sin embargo no es cuadrado perfecto, porque $425 = 5^2 \times 17$. Aquí vemos que el exponente del factor primo 17 es impar, la unidad.

CUBO PERFECTO

Se dice que un número es cubo perfecto cuando es el cubo de otro número: 64 es cubo perfecto porque 44 = 64; 729 es cubo perfecto porque $9^3 = 729$. El único número cubo de él mismo es el 1.

Todo número cubo perfecto tiene una raíz cúbica exacta.

Para que un número dado sea cubo perfecto es necesario que todos sus factores estén elevados a exponentes múltiplos de 3.

Elevar un número al cubo es lo mismo que elevar al cubo el producto de sus factores primos, y con esta operación el exponente de cada factor primo se multiplica por 3; por tanto queda múltiplo de 3.

Así, al elevar $12 = 2^2 \bullet 3$ al cubo tenemos:

$12^3 = (2^2 \bullet 3)^3 = (2^2)^3 \bullet 3^3 = 2^6 \bullet 3^3$, con exponentes múltiplos de 3.

Sin embargo, en este caso también hay ciertas señales de los números que permiten afirmar, por simple inspección, que un número **no es cubo perfecto**, es decir, que **no tiene raíz cúbica exacta**.

No hay cubos perfectos en los casos siguientes:

1) Los números que contengan algún factor primo elevado a un exponente que no sea múltiplo de 3.

El número 5400 no es cubo perfecto porque al descomponerse en sus factores primos da $5400 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$, y el exponente del factor primo 5 no es múltiplo de 3.

2) Los números divisibles por un factor primo pero que no lo son por su cubo.

El número 3124 no es cubo perfecto porque es divisible por 2 y no lo es por el cubo de 2, que es el 8; 8600 no es cubo perfecto porque es divisible por el factor primo 5 y no lo es por el cubo de 5, que es el 125.

3) Los números enteros terminados en un número de ceros que no es múltiplo de 3.

400 no es cubo perfecto porque termina en un número de ceros que no es múltiplo de 3.

4) Los números pares divisibles por 8.

116 no es cubo perfecto porque es par y no es divisible por 8.

5) Los números impares que, disminuidos en una unidad, no son divisibles por 8.

2135 no es cubo perfecto, porque disminuyéndolo en una unidad queda 2134, y este número no es divisible por 8.

6) Los números decimales terminados en un número de cifras decimales que no sea múltiplo de 3.

0.0067 no es cubo perfecto porque tiene cuatro cifras decimales y este número de cifras no es múltiplo de 3.

ESCOLIO

Estas señales indican que el número con alguna de ellas *no es cubo perfecto*, pero por el solo hecho de que un número no tenga ninguna de estas señales, con excepción de la primera, *no podemos afirmar que sea cubo perfecto*. No obstante, un número que no tenga ninguna de estas señales será cubo perfecto si cumple la **condición general de racionalidad** de que al descomponerse en sus factores primos, todos los exponentes de estos factores sean múltiplos de 3.

Así, 5000 es divisible por 2 y por el cubo de 2, que es el 8, y termina en un número de ceros múltiplo de 3, pero no es cubo perfecto porque al descomponerse en sus factores primos da $5000 = 2^3 \bullet 5^4$. Aquí vemos que el exponente del factor primo 5 no es múltiplo de 3.

EJERCICIOS

Menciona si los números siguientes son cuadrados perfectos o no y explica por qué:

1. 258	**7.** 7800
2. 589	**8.** 7888
3. 2000	**9.** 00.2963
4. 11.12	**10.** 1500
5. 310	**11.** 25900
6. 260	**12.** 3691

Menciona si los números siguientes son cubos perfectos o no y explica por qué:

1. 333	**10.** 21
2. 3000	**11.** 8181
3. 0.548	**12.** 27000
4. 927	**13.** 13334
5. 24700	**14.** 5893
6. 45698	**15.** 33369
7. 1111	**16.** 272730
8. 640	**17.** 996633
9. 2597	**18.** 336699



La radicación era conocida mucho antes de que los romanos inventaran una palabra para nombrarla (*radix*). Los árabes la tomaron de los hindúes y la nombraron *gidr*, cuya traducción significa "vegetal".

CAPÍTULO XXXII

RADICACIÓN

La radicación es la operación inversa de la potenciación y consiste en hallar la base conocidos el exponente y la potencia. Así, si $2^4 = 16$, se tiene que $2 = \sqrt[4]{16}$ donde el signo $\sqrt{\ }$ se denomina signo radical, 16 es la cantidad subradical, 2 es la raíz cuarta y el número 4 que aparece en el signo radical recibe el nombre de índice de la raíz.

Cuando el índice de la raíz es 2, se dice que la raíz es cuadrada y el índice suele omitirse. Así pues, la raíz de un número es otro número que elevado a la potencia que indica el índice coincide con la cantidad subradical.

Una raíz es exacta cuando al elevarla a una potencia que indica el índice coincide con la cantidad subradical.

LA RADICACIÓN Y SUS LEYES

Se conocen dos leyes de la radicación: ley de uniformidad y ley distributiva.

La **ley de uniformidad** puede enunciarse de dos formas:

1) La raíz de un grado dado para un número tiene un valor único o siempre es igual.

$\sqrt{49} = 7$ solamente, porque 7 es el único número que elevado al cuadrado da 49.

2) Como los números iguales son el mismo número, podemos decir que si a los dos miembros de una igualdad se les extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

a) Siendo $a = 25$ se tendrá $\sqrt{a} = \sqrt{25}$ o sea $\sqrt{a} = 5$

b) Siendo $m = n$ se tendrá $\sqrt{m} = \sqrt{n}$

c) Siendo $x^2 = 81$ se tendrá $\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$ o sea $x = 9$

De acuerdo con la **ley distributiva**, la radicación no es distributiva con relación a la suma y la resta. Así,

$\sqrt{36 + 64}$ no es igual a $\sqrt{36} + \sqrt{64}$

porque: $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ y $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$

Del mismo modo: $\sqrt{25 - 9}$ no es igual a $\sqrt{25} - \sqrt{9}$

porque $\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$

Vemos que la radicación es distributiva con relación a la multiplicación y la división.

La raíz de cualquier grado de un producto indicado de varios factores es igual al producto de las raíces del mismo grado de cada uno de los factores.

Siendo el producto a • b • c, demostraremos que

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

Según la definición de la raíz, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$ será la raíz enésima de a • b • c si elevada a la potencia n reproduce el producto a • b • c

Si elevamos la raíz a la enésima potencia, tendremos:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \times \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \times \left(\sqrt[n]{c}\right)^n = a \cdot b \cdot c$$

De este modo queda demostrado lo que nos proponíamos.

Esta propiedad es la ley distributiva de la radicación con relación a la multiplicación.

a) $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$

b) $\sqrt{1 \times 16 \times 25} = \sqrt{1} \times \sqrt{16} \times \sqrt{25} = 1 \times 4 \times 5 = 20$

EJERCICIOS

Efectuar:

1. $\sqrt{64 \times 81 \times 100}$ **R.** 720

2. $\sqrt{1 \times 64 \times 125}$ **R.** 20

3. $\sqrt{9 \times 16}$ **R.** 12

4. $\sqrt{36 \times 49}$ **R.** 42

5. $\sqrt{8 \times 27}$ **R.** 6

6. $\sqrt{8 \times 27 \times 216}$ **R.** 36

7. $\sqrt{4 \times 25}$ **R.** 10

8. $\sqrt{4 \times 25 \times 36}$ **R.** 60

TEOREMA DE LA RAÍZ DE UN NÚMERO FRACCIONARIO

La raíz de cualquier grado de un cociente exacto o un quebrado es igual a la raíz de dicho grado del numerador partida por la raíz del mismo grado del denominador.

Siendo la fracción *a* , probaremos que

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Según la definición de raíz, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ será la raíz enésima de $\frac{a}{b}$, si elevada a la potencia *n* reproduce el quebrado *a* .

Si elevamos $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ a la potencia enésima, tendremos:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$$

por tanto $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ es la raíz enésima de $\frac{a}{b}$

Esta propiedad es la ley distributiva de la radicación con relación a la división exacta.

Ejemplos **1)** $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

2) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

EJERCICIOS

Aplica la ley distributiva:

1. $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ **R.** $\frac{1}{4}$
2. $\sqrt{9 \div 4}$ **R.** $\frac{3}{2}$
3. $\sqrt{\frac{6}{25}}$ **R.** $\frac{4}{5}$
4. $\sqrt{1 \div 36}$ **R.** $\frac{1}{6}$
5. $\sqrt[3]{8 \div 27}$ **R.** $\frac{2}{3}$

EJERCICIOS

Efectuar:

1. $\sqrt[3]{2^9 \times 3^{12}}$ **R.** 648
2. $\sqrt{2^6 \times 3^4}$ **R.** 72
3. $\sqrt[5]{2^{10} \times 3^{15}}$ **R.** 108
4. $\sqrt[3]{2^6 \times 3^3 \times 5^6}$ **R.** 300
5. $\sqrt[3]{2^6 \times 3^9}$ **R.** 108
6. $\sqrt{2^6}$ **R.** 8
7. $\sqrt{5^6}$ **R.** 125
8. $\sqrt{2^8}$ **R.** 16
9. $\sqrt{3^{12}}$ **R.** 729
10. $\sqrt[3]{4^3}$ **R.** 4
11. $\sqrt[3]{2^6}$ **R.** 4
12. $\sqrt[3]{5^9}$ **R.** 125
13. $\sqrt[3]{2^{15}}$ **R.** 32
14. $\sqrt[4]{2^8}$ **R.** 4
15. $\sqrt[5]{3^{15}}$ **R.** 27
16. $\sqrt[6]{5^{24}}$ **R.** 625
17. $\sqrt{3^4}$ **R.** 9
18. $\sqrt{2^2 \times 3^2}$ **R.** 6
19. $\sqrt{2^4 \times 3^4}$ **R.** 36
20. $\sqrt{2^8 \times 3^6}$ **R.** 432
21. $\sqrt{5^2 \times 6^2 \times 3^4}$ **R.** 270
22. $\sqrt{2^{10} \times 3^2 \times 5^4}$ **R.** 2400
23. $\sqrt[4]{2^8 \times 3^4}$ **R.** 12
24. $\sqrt[6]{2^{18} \times 3^{24}}$ **R.** 648

TEOREMA DE LA RAÍZ DE UNA POTENCIA

La raíz de cualquier grado de una potencia se obtiene al dividir el exponente de la potencia por el índice de la raíz.

Siendo la potencia a^m, demostraremos que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Según la definición de raíz, $a^{\frac{m}{n}}$ será la raíz enésima de a m si elevada a la potencia n reproduce la cantidad subradical a^m.

Al elevar $a^{\frac{m}{n}}$ a la potencia n (según lo demostrado en **potencia de potencia**) tendremos:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\times n} = a^m$$

entonces queda demostrado lo que nos proponíamos.

1) $\sqrt{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$ **2)** $\sqrt[3]{2^9} = 2^3 = 2^{\frac{9}{3}} = 8$

3) $\sqrt{2^4 \times 5^4} = \sqrt{2^4} \times \sqrt{5^4} = 2^{\frac{4}{2}} \times 5^{\frac{4}{2}} = 2^2 \times 5^2 = 100$

ORIGEN DEL EXPONENTE FRACCIONARIO

Ya vimos que para extraer una raíz a una potencia, se divide el exponente de la potencia por el índice de la raíz. Si el exponente no es divisible por el índice, hay que dejar indicada la división, con lo que se origina el **exponente fraccionario**.

1) $\sqrt{2} = \sqrt{2^1} = 2^{\frac{1}{2}}$ **2)** $\sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$

3) $\sqrt[4]{3^2 \times 5^3} = \sqrt[4]{3^2} \times \sqrt[4]{5^3} = 3^{\frac{2}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{3}{4}}$

Como también ya vimos, el exponente fraccionario proviene de extraer una raíz a una potencia, cuando el exponente de la potencia no es divisible por el índice de la raíz, $a^{\frac{2}{3}}$ así que a^3 proviene de extraer la raíz cúbica de a^2. Por lo tanto, podemos decir que una cantidad elevada a un exponente fraccionario equivale a una raíz cuyo índice es el denominador del exponente, y la cantidad subradical es la base de la potencia elevada al exponente que indica el numerador de su exponente.

Ejemplos

1) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

2) $3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81}$

3) $2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{8}} = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{3}$

EJERCICIOS

Expresar con exponente fraccionario:

1. $\sqrt[6]{3^3}$ **R.** $3^{\frac{1}{2}}$

2. $\sqrt{3\times 5}$ **R.** $3^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{1}{2}}$

3. $\sqrt{3}$ **R.** $3^{\frac{1}{2}}$

4. $\sqrt[5]{2^4}$ **R.** $2^{\frac{4}{5}}$

5. $\sqrt{5}\times\sqrt[3]{3^2}$ **R.** $5^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

6. $\sqrt[3]{5^2}$ **R.** $5^{\frac{2}{3}}$

7. $\sqrt[8]{2^4}$ **R.** $2^{\frac{1}{2}}$

8. $\sqrt[4]{2^3}$ **R.** $2^{\frac{3}{4}}$

9. $\sqrt[11]{7^5}$ **R.** $7^{\frac{5}{11}}$

10. $\sqrt[3]{2\times 3^2}$ **R.** $2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

11. $\sqrt[7]{2^5}$ **R.** $2^{\frac{5}{7}}$

INTERPRETACIÓN DEL EXPONENTE FRACCIONARIO

Como también ya vimos, el exponente fraccionario proviene de extraer una raíz a una potencia, cuando el exponente de la potencia no es divisible por el índice de la raíz, así que $a^{\frac{2}{3}}$ proviene de extraer la raíz cúbica de a^2. Por lo tanto, podemos decir que una cantidad elevada a un exponente fraccionario equivale a una raíz cuyo índice es el de-nominador del exponente, y la cantidad subradical es la base de la potencia elevada al exponente que indica el numerador de su exponente.

Ejemplos

1) $2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$

2) $3^{\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{3^4}=\sqrt[5]{81}$

3) $2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{8}}=\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}$

TEOREMA DE RAÍZ DE UNA RAÍZ

La raíz de cualquier grado de una raíz se obtiene al multiplicar los índices de ambas raíces.

En este caso se trata de extraer la raíz cúbica de $\sqrt{a}$ y probaremos que

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}=\sqrt[3\times 2]{a}=\sqrt[6]{a}$$

Según la definición de la raíz, $\sqrt[6]{a}$ será la raíz cúbica de $\sqrt{a}$ si elevada al cubo reproduce la cantidad subradical $\sqrt{a}$, y así es:

$$\left(\sqrt[6]{a}\right)^3=\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3=a^{\frac{1}{6}\times 3}=a^{\frac{3}{6}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$$

por tanto, queda demostrado lo que nos proponíamos.

EJERCICIOS

Expresar con signo radical:

1. $3^{\frac{1}{3}}$ **R.** $\sqrt[3]{3}$

2. $2^{\frac{2}{5}}$ **R.** $\sqrt[5]{4}$

3. $5^{\frac{2}{3}}$ **R.** $\sqrt[3]{25}$

4. $2^{\frac{3}{4}}$ **R.** $\sqrt[4]{8}$

5. $3^{\frac{1}{2}}$ **R.** $\sqrt{3}$

6. $7^{\frac{2}{5}}$ **R.** $\sqrt[5]{49}$

7. $5^{\frac{2}{3}}$ **R.** $\sqrt[3]{25}$

8. $6^{\frac{3}{4}}$ **R.** $\sqrt[4]{216}$

9. $11^{\frac{2}{5}}$ **R.** $\sqrt[5]{121}$

10. $2^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}$ **R.** $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{3}$

11. $5^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{2}{3}}$ **R.** $\sqrt{5}\times\sqrt[3]{9}$

EJERCICIOS

Efectuar:

1. $\sqrt{\sqrt[5]{3}}$ **R.** $\sqrt[10]{3}$

2. $\sqrt{\sqrt[4]{5}}$ **R.** $\sqrt[8]{5}$

3. $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ **R.** $\sqrt[6]{7}$

4. $\sqrt{\sqrt[3]{3}}$ **R.** $\sqrt[6]{3}$

5. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}$ **R.** $\sqrt[12]{7}$

6. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{13}}$ **R.** $\sqrt[15]{13}$

7. $\sqrt{\sqrt{2}}$ **R.** $\sqrt[4]{2}$

8. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{11}}$ **R.** $\sqrt[9]{11}$

RAÍZ INVERSA

Esta propiedad, a la inversa, nos permite extraer la **raíz cuarta** extrayendo dos veces la raíz cuadrada; la **raíz sexta** extrayendo la raíz cuadrada y la cúbica, etc. Así:

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

EJERCICIOS

1. $\sqrt[10]{1024}$ **R.** 2

2. $\sqrt[6]{64}$ **R.** 2

3. $\sqrt[6]{729}$ **R.** 3

4. $\sqrt[4]{625}$ **R.** 5

5. $\sqrt[8]{256}$ **R.** 2

6. $\sqrt[4]{81}$ **R.** 3

7. $\sqrt[3]{1000}$ **R.** 10

8. $\sqrt[6]{4096}$ **R.** 4

9. $\sqrt[2]{16}$ **R.** 4

10. $\sqrt[9]{512}$ **R.** 2

11. $\sqrt[2]{81}$ **R.** 9

12. $\sqrt[5]{243}$ **R.** 3

TEOREMA

Todo número entero que no tiene raíz exacta entera, tampoco la tiene fraccionaria.

Siendo el número entero *P*, que no tiene raíz exacta entera de grado *n*, demostraremos que la raíz enésima exacta de *P* no puede ser un quebrado.

Supongamos que la raíz enésima exacta de *P* fuera un quebrado irreducible, por ejemplo $\frac{a}{b}$, es decir, supongamos que $\sqrt[n]{P} = \frac{a}{b}$.

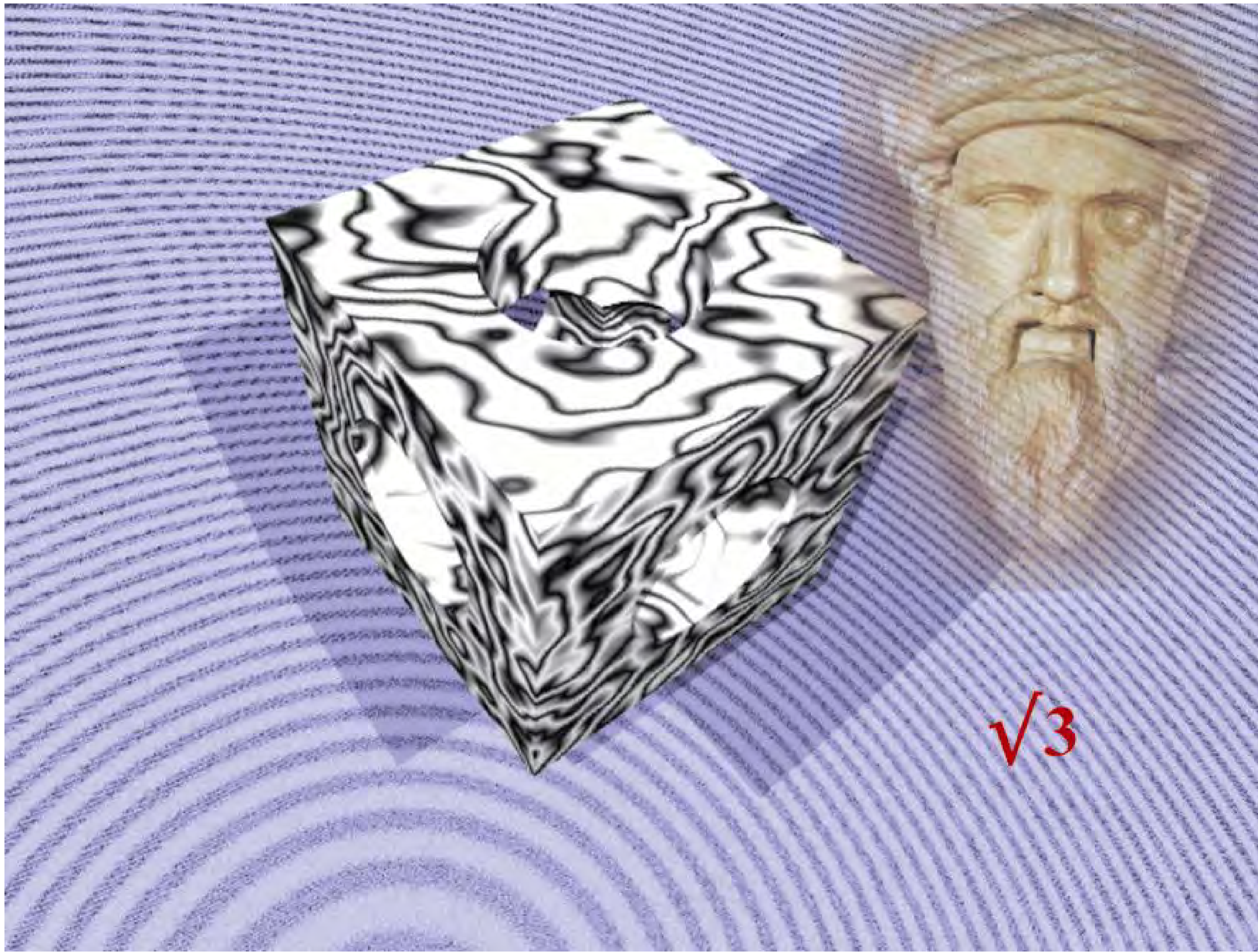
Si el quebrado *a* fuera la raíz enésima exacta de *P*, este quebrado elevado a la potencia *n* tendría que dar *P*, porque toda raíz exacta, elevada a la potencia que indica el índice de la raíz, tiene que reproducir la cantidad subradical; luego tendríamos que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = P \text{ o sea } \frac{a^n}{b^n} = P$$

lo cual es imposible, porque *a* es un quebrado irreducible que, elevado a *n*, dará otro quebrado irreducible, porque cualquier potencia de un quebrado irreducible es otro quebrado irreducible, y un quebrado no puede ser igual a un entero; por tanto queda demostrado que la raíz enésima exacta de *P* no puede ser un quebrado.

De este modo, 5 no tiene raíz cuadrada exacta entera y tampoco puede tener raíz cuadrada exacta fraccionaria; 7 no tiene raíz cuadrada exacta entera y tampoco puede tener raíz cuadrada exacta fraccionaria; 9 no tiene raíz cúbica exacta entera y tampoco puede tener raíz cúbica exacta fraccionaria.

A estas raíces que no pueden expresarse exactamente por ningún número entero ni fraccionario, y que son **inconmensurables con la unidad**, y se les llama **raíces inconmensurables** o **números irracionales**.



Ya para concluir el siglo V a.C., en Grecia los seguidores de Pitágoras utilizaban la irracionalidad del radical $\sqrt{2}$ (números inconmensurables). Algunos estudiantes de la Escuela de Crotona buscaron valores aproximados a este radical mediante soluciones sucesivas.

CAPÍTULO XXXIII

RADICALES

Son los **números irracionales** o raíces indicadas que no pueden expresarse exactamente por ningún número entero ni fraccionario, como son los ejemplos siguientes:

El índice de la raíz indica el **grado** de un radical. Así $\sqrt{2}$ es un radical de segundo grado y $\sqrt[3]{5}$ es un radical de tercer grado.

Por otra parte, los **radicales semejantes** tienen el mismo grado y la misma cantidad bajo el signo radical: $\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$ **son semejantes** pero $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ **no son semejantes**.

COEFICIENTE

El **coeficiente** es el número que precede a un radical y que está multiplicado por él:

$$3\sqrt{2}$$

el coeficiente es 3, en $5\sqrt{3}$ el coeficiente es 5.

El coeficiente indica las veces que se toma como sumando el radical.

Así $3\sqrt{2}$ equivale a

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

y $5\sqrt{3}$ equivale a

$$\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$$

CÓMO SIMPLIFICAR RADICALES

Para reducir o simplificar un radical a su más simple expresión se descompone en sus factores primos la cantidad subradical y se observa que todos los factores primos están elevados a **exponentes menores que el índice del radical**.

Así, $\sqrt{30}$ está reducido a su más simple expresión, porque al descomponer 30 en sus factores primos se tiene: $\sqrt{30} = \sqrt{2 \times 3 \times 5}$, donde los exponentes de los factores primos son menores que el índice del radical 2.

$\sqrt{24}$ no está reducido a su más simple expresión, porque al descomponer 24 en sus factores primos tenemos: $\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \times 3}$, donde el exponente del factor primo 2 es 3, mayor que el índice del radical.

En conclusión, para **reducir un radical a su más simple expresión** se descompone la cantidad subradical en factores primos con los que se hacen los arreglos de los siguientes:

Ejemplos

1) Simplificar $\sqrt{72}$

$$\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 23\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

2) Simplificar $3\sqrt{720}$

$$3\sqrt{720} = 3\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 3 \cdot 2^2 \cdot 3\sqrt{5} = 36\sqrt{5}$$

3) Simplificar $\frac{2}{3}\sqrt{45}$

$$\frac{2}{3}\sqrt{45} = \frac{2}{3}\sqrt{3^2 \cdot 5} = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{6}{3}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

4) Simplificar $\sqrt[3]{24}$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

5) Simplificar $\sqrt{18}$

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 2} = \sqrt{3^2}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

6) Simplificar $\sqrt[3]{432}$

$$\sqrt[3]{432} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$$

7) Simplificar $2\sqrt[3]{2187}$

$$2\sqrt[3]{2187} = 2\sqrt[3]{2187} = 2\sqrt[3]{3^6 \cdot 3} = 2 \cdot 3^2\sqrt[3]{3} = 18\sqrt[3]{3}$$

8) Simplificar $\frac{3}{5}\sqrt[3]{375}$

$$\frac{3}{5}\sqrt[3]{375} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{5^3 \cdot 3} = \frac{3}{5} \cdot 5\sqrt[3]{3} = \frac{15}{5}\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

EJERCICIOS

Simplificar:

1. $\sqrt{160}$ **R.** $4\sqrt{10}$

2. $\sqrt{180}$ **R.** $6\sqrt{5}$

3. $\sqrt{300}$ **R.** $10\sqrt{3}$

4. $2\sqrt{180}$ **R.** $12\sqrt{3}$

5. $5\sqrt{490}$ **R.** $35\sqrt{10}$

6. $3\sqrt{243}$ **R.** $27\sqrt{3}$

7. $7\sqrt{432}$ **R.** $84\sqrt{3}$

8. $\frac{1}{2}\sqrt{8}$ **R.** $\sqrt{2}$

9. $\frac{2}{3}\sqrt{18}$ **R.** $2\sqrt{2}$

10. $\frac{3}{4}\sqrt{48}$ **R.** $3\sqrt{3}$

11. $\frac{1}{5}\sqrt{50}$ **R** $\sqrt{2}$

12. $\frac{1}{5}\sqrt{50}$ **R.** $\sqrt{2}$

13. $\frac{1}{6}\sqrt{72}$ **R.** $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

14. $\sqrt[3]{81}$ **R.** $3\sqrt[3]{3}$

15. $\sqrt[3]{56}$ **R.** $2\sqrt[3]{7}$

16. $\sqrt[3]{250}$ **R.** $5\sqrt[3]{2}$

17. $\sqrt[3]{162}$ **R.** $3\sqrt[3]{6}$

18. $\sqrt[3]{375}$ **R.** $5\sqrt[3]{3}$

19. $\sqrt[3]{48}$ **R.** $2\sqrt[3]{6}$

20. $\sqrt[3]{144}$ **R.** $2\sqrt[3]{18}$

21. $\sqrt[3]{192}$ **R.** $4\sqrt[3]{3}$

22. $2\sqrt[3]{360}$ **R.** $4\sqrt[3]{45}$

23. $7\sqrt[3]{5488}$ **R.** $98\sqrt[3]{2}$

24. $6\sqrt[3]{16000}$ **R.** $120\sqrt[3]{2}$

25. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$ **R.** $2\sqrt[3]{2}$

26. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{128}$ **R.** $3\sqrt[3]{2}$

27. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{375}$ **R.** $\sqrt[3]{3}$

SUMA Y RESTA DE RADICALES

Para sumar y restar los radicales, hay que simplificar los radicales dados, si esto es posible, y efectuar las operaciones indicadas.

1) Efectuar $\sqrt{45}+\sqrt{80}$

Primero se descomponen en factores primos las cantidades subradicales para simplificar, con lo que tendremos:

$$\sqrt{45}=\sqrt{3^2\cdot 5}=3\sqrt{5}$$
$$\sqrt{80}=\sqrt{2^4\cdot 5}=2^2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$$

Por tanto: $\sqrt{45}+\sqrt{80}=3\sqrt{5}+4\sqrt{5}=7\sqrt{5}$

porque es evidente que tres veces $\sqrt{5}$ más cuatro veces $\sqrt{5}$ equivale a siete veces $\sqrt{5}$

2) Efectuar $2\sqrt{3}+5\sqrt{27}-\sqrt{48}$

Al simplificar los radicales tenemos:

$$2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$
$$5\sqrt{27}=5\sqrt{3^2\cdot 3}=5\cdot 3\sqrt{3}=15\sqrt{3}$$
$$\sqrt{48}=\sqrt{2^4\times 3}=2^2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

Entonces: $2\sqrt{3}+5\sqrt{27}-\sqrt{48}=$

$$2\sqrt{3}+15\sqrt{3}-4\sqrt{3}=(2+15-4)\sqrt{3}=13\sqrt{3}$$

3) Efectuar $2\sqrt{75}+\sqrt{28}-\sqrt{12}$

$$2\sqrt{75}=2\sqrt{5^2\cdot 3}=2\cdot 5\sqrt{3}=10\sqrt{3}$$
$$\sqrt{28}=\sqrt{2^2\cdot 7}=2\sqrt{7}$$
$$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3}$$

Entonces: $2\sqrt{75}+\sqrt{28}-\sqrt{12}=$

$$10\sqrt{3}+2\sqrt{7}-2\sqrt{3}=10\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2\sqrt{7}=$$
$$(10-2)\sqrt{3}+2\sqrt{7}=8\sqrt{3}+2\sqrt{7}$$

$2\sqrt{7}$ no se puede sumar con $8\sqrt{3}$ porque estos radicales no son semejantes.

4) Efectuar $\frac{2}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{5}\sqrt{50}-\frac{1}{3}\sqrt{45}$

Simplificando: $\frac{2}{3}\sqrt{18}=\frac{2}{3}\sqrt{3^2\cdot 2}=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$$\frac{3}{5}\sqrt{50}=\frac{3}{5}\sqrt{5^2\cdot 2}=\frac{3}{5}\cdot 5\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{45}=\frac{1}{3}\sqrt{3^2\cdot 5}=\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

Entonces:
$$\frac{2}{3}\sqrt{8}+\frac{3}{5}\sqrt{50}-\frac{1}{3}\sqrt{45}=$$
$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{5}=5\sqrt{2}-\sqrt{5}$$

5) Efectuar $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}$

Al simplificar los radicales, tenemos:

$$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=2\sqrt[3]{3}$$
$$\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}$$

Entonces:

$$\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}=2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{3}$$

6) Efectuar $3\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{625}$

Simplificando:

$$3\sqrt[3]{40}=3\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=3\cdot 2\sqrt[3]{5}=6\sqrt[3]{5}$$
$$\sqrt[3]{135}=\sqrt[3]{3^3\cdot 5}=3\sqrt[3]{5}$$
$$\sqrt[3]{625}=\sqrt[3]{5^3\cdot 5}=5\sqrt[3]{5}$$

Entonces:

$$3\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{625}=6\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{5}-5\sqrt[3]{5^3}=4\sqrt[3]{5}$$

7) Efectuar $5\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{128}$

Simplificando:

$$5\sqrt[3]{16}=5\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=10\sqrt[3]{2}$$
$$\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3}=3\sqrt[3]{3}$$
$$\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{2^6\cdot 2}=2^2\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}$$

Entonces:

$$5\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{128}=10\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{2}$$
$$=10\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}=6\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}$$

8) Efectuar $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{250}$

Simplificando:

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$$
$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$$
$$\frac{2}{5}\sqrt[3]{250}=\frac{2}{5}\sqrt[3]{5^3\cdot 2}=\frac{2}{5}\cdot 5\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{250}=$$
$$\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$$

EJERCICIOS

Efectuar:

1. $2\sqrt[3]{1024}-\sqrt[3]{2000}$ **R.** $6\sqrt[3]{2}$
2. $3\sqrt[3]{189}+6\sqrt[3]{448}$ **R.** $33\sqrt[3]{7}$
3. $\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}$ **R.** $9\sqrt[3]{2}$
4. $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}$ **R.** $5\sqrt[3]{3}$
5. $2\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{432}-\sqrt[3]{384}$ **R.** $6\sqrt[3]{2}$
6. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}$ **R.** $7\sqrt[3]{2}$
7. $\sqrt[3]{648}+\sqrt[3]{1029}$ **R.** $13\sqrt[3]{3}$
8. $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{1715}+\sqrt[3]{320}$ **R.** $13\sqrt[3]{5}$
9. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{250}$ **R.** $\frac{8}{3}\sqrt[3]{2}$

DIVISIÓN DE RADICALES

Para **dividir radicales del mismo índice** se dividen los coeficientes entre sí y luego las cantidades subradicales entre sí, y el cociente de las cantidades subradicales se coloca bajo el signo radical común.

1) Efectuar $\sqrt{150}\div\sqrt{2}$

Tendremos:

$$\sqrt{150}\div\sqrt{2}=\sqrt{150\div 2}=\sqrt{75}=\sqrt{3\cdot 5^2}=5\sqrt{3}$$

En el número anterior probamos que

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{75}=\sqrt{2\cdot 75}=\sqrt{150}$$

Si dividimos el producto $\sqrt{150}$ por uno de los factores $\sqrt{2}$ evidentemente obtendremos el otro factor, $\sqrt{75}$ y tendremos:

$$\sqrt{150}\div\sqrt{2}=\sqrt{75}$$

que es la regla aplicada.

2) Efectuar $10\sqrt{10}\div 5\sqrt{2}$

$$10\sqrt{10}\div 5\sqrt{2}=\frac{10}{5}\sqrt{10\div 2}=2\sqrt{5}$$

3) Efectuar $3\sqrt[3]{108}\div 4\sqrt[3]{4}$

$$3\sqrt[3]{108}\div 4\sqrt[3]{4}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{108\div 4}=\sqrt[3]{27}=$$

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{3^3}=\frac{3}{4}\cdot 3=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$$

4) Efectuar $\frac{2}{3}\sqrt{350}\div\frac{3}{4}\sqrt{7}$

$$\frac{2}{3}\sqrt{350}\div\frac{3}{4}\sqrt{7}=\frac{2/3}{3/4}\sqrt{350\div 7}=\frac{8}{9}\sqrt{50}=$$

$$\frac{8}{9}\sqrt{2\cdot 5^2}=\frac{8}{9}\cdot 5\sqrt{2}=\frac{40}{9}\sqrt{2}=4\frac{4}{9}\sqrt{2}$$

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES

Para **multiplicar radicales del mismo índice** se multiplican los coeficientes entre sí y luego las cantidades subradicales entre sí, y el producto de las cantidades subradicales se coloca bajo el signo radical común.

1) Efectuar $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}$

Tendremos:

$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{6\cdot 10}=\sqrt{60}=\sqrt{2^2\cdot 3\cdot 5}=2\sqrt{15}$$

Se ha demostrado que para extraer la raíz de cualquier grado de un producto se extrae la raíz de cada factor y los resultados se multiplican entre sí, luego:

$$\sqrt{6\cdot 10}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}$$

o lo que es lo mismo $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{6\cdot 10}$

que es la regla aplicada.

(El resultado debe reducirse a su más simple expresión).

2) Efectuar $2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{18}$

$$2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{18}=2\cdot 5\sqrt{3\cdot 18}=10\sqrt{54}=$$

$$10\sqrt{3^2\cdot 3\cdot 2}=30\sqrt{6}$$

3) Efectuar $3\sqrt[3]{10}\cdot 5\sqrt[3]{12}$

$$3\sqrt[3]{10}\cdot 5\sqrt[3]{12}=3\cdot 5\sqrt[3]{10\cdot 12}=15\sqrt[3]{120}=$$

$$15\sqrt[3]{2^3\cdot 3\cdot 5}=30\sqrt[3]{15}$$

4) Efectuar $\frac{2}{3}\sqrt{15}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{30}\cdot\frac{5}{6}\sqrt{8}$

$$\frac{2}{3}\sqrt{15}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{30}\cdot\frac{5}{6}\sqrt{8}=$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\sqrt{15\cdot 30\cdot 8}=\frac{5}{12}\sqrt{3600}$$

$$=\frac{5}{12}\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}=\frac{5}{12}2^2\cdot 3\cdot 5=$$

$$\frac{5}{12}4\cdot 3\cdot 5=25$$

EJERCICIOS

1. $2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{20}$ **R.** 60
2. $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}$ **R.** $2\sqrt[3]{3}$
3. $3\sqrt[3]{6}\cdot 2\sqrt[3]{36}$ **R.** 36

POTENCIA DE RADICALES

Para **elevar un radical a una potencia** cualquiera se debe elevar la cantidad subradical a esa potencia.

1) Elevar $\sqrt{2}$ al cubo.

Tendremos:

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \bullet 2} = 2\sqrt{2}$$

Al recordar que $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ tendremos:

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$$

por tanto queda justificada la regla aplicada.

2) Elevar $\sqrt{2}$ a la cuarta potencia.

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \bullet 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

EJERCICIOS

Efectuar:

1. $\left(\sqrt[3]{15}\right)^2$ — **R.** $\sqrt[3]{225}$
2. $\left(\sqrt[4]{20}\right)^2$ — **R.** $2\sqrt[4]{25}$
3. $\left(\sqrt[5]{50}\right)^3$ — **R.** $5\sqrt[5]{40}$
4. $\sqrt{\sqrt{16}}$ — **R.** 2
5. $\sqrt{\sqrt{32}}$ — **R.** $2\sqrt[4]{2}$
6. $\sqrt{\sqrt{80}}$ — **R.** $2\sqrt[4]{5}$
7. $\sqrt{\sqrt[3]{256}}$ — **R.** $2\sqrt[6]{4}$
8. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{1024}}$ — **R.** $2\sqrt[9]{2}$
9. $\sqrt[4]{\sqrt{6561}}$ — **R.** 3
10. $\left(\sqrt{5}\right)^2$ — **R.** 5
11. $\left(\sqrt{3}\right)^3$ — **R.** $3\sqrt{3}$
12. $\left(\sqrt{5}\right)^4$ — **R.** 25
13. $\left(\sqrt{10}\right)^2$ — **R.** 10
14. $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$ — **R.** $2\sqrt[3]{2}$
15. $\left(\sqrt[3]{18}\right)^2$ — **R.** $3\sqrt[3]{12}$
16. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{20}}$ — **R.** $\sqrt[12]{20}$

RAÍCES DE RADICALES

Para **extraer las raíces de un radical** se multiplican los índices de los radicales y se coloca la cantidad subradical bajo un radical que tenga por índice el producto de los índices de los radicales.

Extraer la raíz cúbica de $\sqrt{128}$

Tendremos:

$$\sqrt[3]{\sqrt{128}} = \sqrt[6]{2^6 \bullet 2} = 2\sqrt[6]{2}$$

Para **racionalizar el denominador de un quebrado** se transforma un quebrado que tenga por denominador un número irracional en otro quebrado equivalente cuyo denominador sea racional, es decir, que tenga raíz exacta, a fin de extraer esta raíz y que desaparezca el signo radical del denominador.

Para racionalizar el denominador de un quebrado cuando el denominador es un radical de segundo grado se multiplican los dos términos del quebrado por el radical mismo que, multiplicando por el denominador, lo convierte en cuadrado perfecto y se simplifica así el resultado.

1) Racionalizar el denominador $\frac{2}{\sqrt{2}}$

Se multiplican los dos términos del quebrado por $\sqrt{2}$ y se efectúan las operaciones:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \bullet \sqrt{2}}{\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

2) Racionalizar el denominador de $\frac{5}{2\sqrt{3}}$

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5 \bullet \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \bullet \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \bullet 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

3) Racionalizar el denominador de $\frac{2}{\sqrt{18}}$

Como $18 = 2 \bullet 3^2$ multiplicamos ambos términos del quebrado por $\sqrt{2}$ para que el exponente del 2 se haga par:

$$\frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 \bullet 3^2 \bullet \sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2^2 \bullet 3^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2 \bullet 3} = \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

EJERCICIOS

Racionalizar el denominador de:

1. $\frac{7}{\sqrt{10}}$ — **R.** $\frac{7}{10}\sqrt{10}$
2. $\frac{11}{\sqrt{6}}$ — **R.** $1\frac{5}{6}\sqrt{6}$
3. $\frac{2}{\sqrt{12}}$ — **R.** $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
4. $\frac{3}{\sqrt{27}}$ — **R.** $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
5. $\frac{14}{\sqrt{5}}$ — **R.** $\frac{14}{15}\sqrt{15}$
6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ — **R.** $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
7. $\frac{3}{\sqrt{2}}$ — **R.** $1\frac{1}{2}\sqrt{2}$
8. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ — **R.** $\frac{2}{5}\sqrt{5}$
9. $\frac{3}{\sqrt{7}}$ — **R.** $\frac{3}{7}\sqrt{7}$
10. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ — **R.** $\frac{1}{9}\sqrt{3}$
11. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ — **R.** $\frac{3}{4}\sqrt{2}$
12. $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ — **R.** $\frac{4}{9}\sqrt{3}$
13. $\frac{7}{4\sqrt{7}}$ — **R.** $\frac{1}{4}\sqrt{7}$
14. $\frac{5}{\sqrt{90}}$ — **R.** $\frac{1}{6}\sqrt{10}$
15. $\frac{9}{\sqrt{32}}$ — **R.** $1\frac{1}{8}\sqrt{2}$
16. $\frac{6}{\sqrt{128}}$ — **R.** $\frac{3}{8}\sqrt{2}$
17. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ — **R.** $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

RACIONALIZACIÓN DEL DENOMINADOR DE UN QUEBRADO CUANDO ESTE ES UN RADICAL DE TERCER GRADO

Para racionalizar el denominador de un quebrado cuando el denominador es un radical de tercer grado se multiplican los dos términos del quebrado por el radical, el cual al ser multiplicado por el denominador lo convierte en cubo perfecto y se multiplica así el resultado.

1) Racionalizar el denominador de $\frac{2}{\sqrt[3]{7}}$

Se multiplican ambos términos del quebrado por $\sqrt[3]{2^2}$ y se efectúan las operaciones:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2 \bullet \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \bullet \sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$$

2) Racionalizar el denominador de $\frac{2}{3\sqrt[3]{3}}$

Se multiplican ambos términos del quebrado por $\sqrt[3]{3^2}$ y tenemos:

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{3}} = \frac{2 \bullet \sqrt[3]{3^2}}{3\sqrt[3]{3} \bullet \sqrt[3]{3^2}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3\sqrt[3]{3^3}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3 \bullet 3} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{9} = \frac{2}{9}\sqrt[3]{9}$$

3) Racionalizar el denominador de $\frac{3}{\sqrt[3]{12}}$

Como $12 = 2^2 \bullet 3$ hay que multiplicar ambos términos por $\sqrt[3]{2 \bullet 3^2}$ para que los exponentes queden múltiplos de 3, y tenemos:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{12}} = \frac{3 \bullet \sqrt[3]{2 \bullet 3^2}}{\sqrt[3]{2^2 \bullet 3} \bullet \sqrt[3]{2 \bullet 3^2}} = \frac{3\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{2^3 \bullet 3^3}} = \frac{3 \bullet \sqrt[3]{18}}{2 \bullet 3} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{18}$$

EJERCICIOS

Racionalizar el denominador de:

1. $\frac{5}{2\sqrt[3]{4}}$ **R.** $1\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}$

2. $\frac{3}{5\sqrt[3]{10}}$ **R.** $\frac{3}{50}\sqrt[3]{100}$

3. $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$ **R.** $\sqrt[3]{9}$

4. $\frac{3}{\sqrt[3]{6}}$ **R.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{36}$

5. $\frac{7}{\sqrt[3]{5}}$ **R.** $1\frac{2}{5}\sqrt[3]{25}$

6. $\frac{4}{\sqrt[3]{16}}$ **R.** $\sqrt[3]{4}$

7. $\frac{7}{\sqrt[3]{11}}$ **R.** $\frac{7}{11}\sqrt[3]{121}$

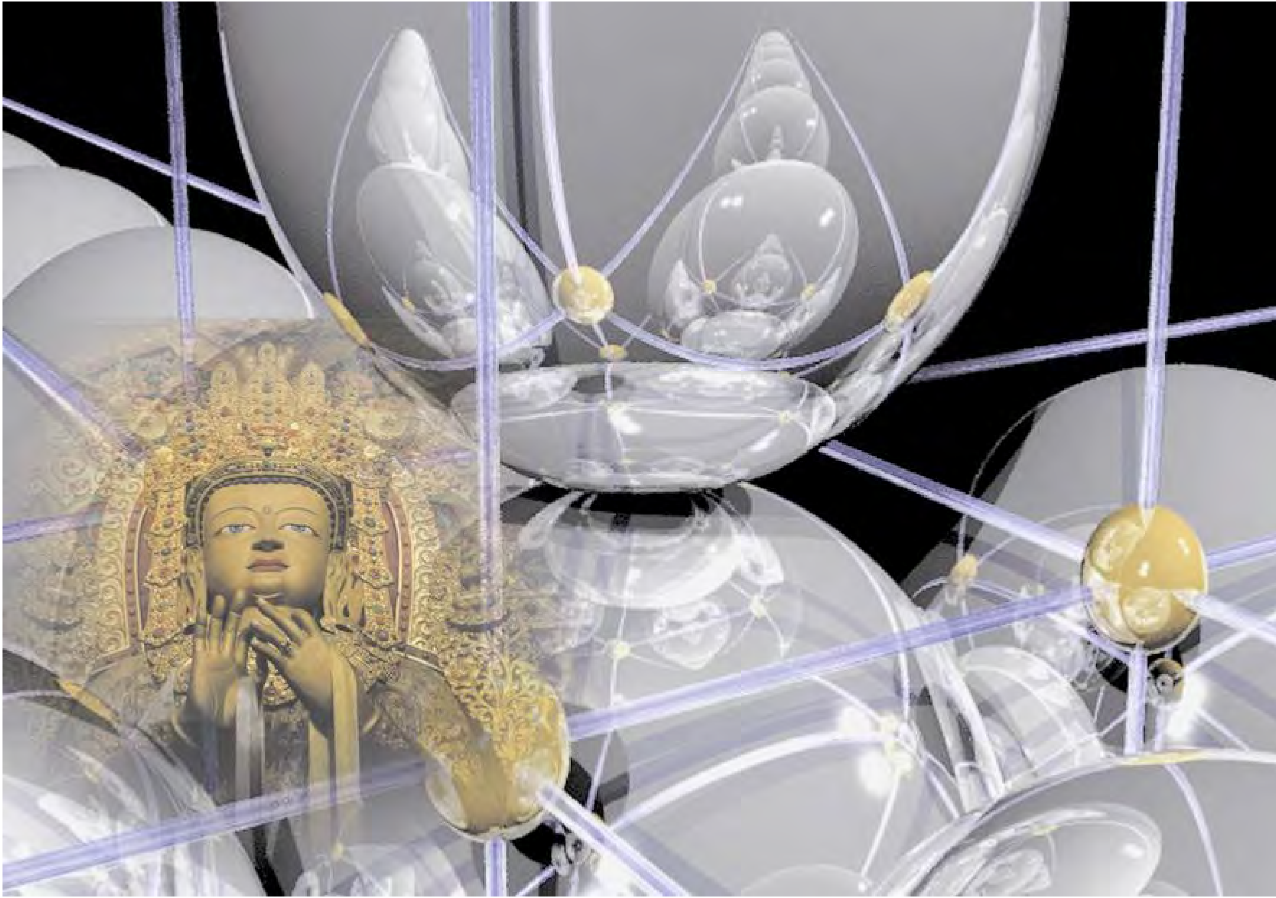
8. $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ **R.** $\sqrt[3]{2}$

9. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ **R.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$

10. $\frac{5}{\sqrt{2}}$ **R.** $2\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$

11. $\frac{9}{\sqrt[3]{9}}$ **R.** $3\sqrt[3]{3}$

12. $\frac{1}{2\sqrt[3]{3}}$ **R.** $\frac{1}{6}\sqrt[3]{9}$



Sin duda alguna, el pueblo de la antigüedad que más sobresalió en los estudios aritméticos fue el hindú. Aryabhata determinó la regla para extraer la raíz cuadrada y el valor aproximado de p (3.14159....).

CAPÍTULO XXXIV

RAÍZ CUADRADA

La **raíz cuadrada exacta** es el número elevado al cuadrado que reproduce exactamente el número dado: 3 es la raíz cuadrada exacta de 9, porque $3^2 = 9$ y 5 lo es de 25, porque

$$5^2 = 25$$

La **raíz cuadrada inexacta o entera** es el mayor número cuyo cuadrado está contenido en el número dado (**raíz cuadrada inexacta por defecto**) o excede en menos al número dado **(raíz cuadrada inexacta por exceso)**: por otro lado, 5 es la raíz cuadrada inexacta por defecto de 32, porque $5^2 = 25$ y 5 es el mayor número cuyo cuadrado está contenido en 32; por otro lado, cuadrada inexacta por exceso de 32, porque $6^2 = 36$, es el número cuyo cuadrado excede en menos a 32.

RAÍZ CUADRADA DE NÚMEROS ENTEROS

Cuando el número es menor que 100 se busca entre los primeros nueve números aquel cuyo cuadrado sea igual o se acerque más al número dado, y ese número será la raíz cuadrada.

$$\sqrt{36} = 6 \text{ porque } 6^2 = 36;$$

$$\sqrt{71} = 8 \text{ porque } 8^2 = 64$$

y es el que más se acerca.

Si el número es **mayor que 100** deben considerarse los siguientes teoremas.

Teorema 1

La **raíz cuadrada entera de las centenas** de un número es exactamente las decenas de la raíz cuadrada de dicho número.

Siendo el número N, cuya raíz cuadrada, que consta de decenas y unidades, la representamos por $d + u$, donde d son las decenas, u las unidades de la raíz y R el resto.

Según la definición de raíz cuadrada, tendremos:

$$N = (d + u)^2 + R = d^2 + 2du + u^2 + R \text{ (si hay resto)}$$

o sea $$N = d^2 + 2du + u^2 + R$$

es decir que el número N compuesto por el cuadrado de las decenas la raíz, más el duplo de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades, más por el resto (si lo hay).

Ahora bien: d^2 da centenas; por lo que estará contenido en las centenas de N, pero puede haber otras centenas además de las que provienen de d^2 de $2du$ o de R, luego, extrayendo la raíz cuadrada de las centenas de N, obtendremos un número que no será menor que las decenas de la raíz mayor, porque si lo fuera, habría además centenas en el cuadrado de las decenas de la raíz que en el número dado, lo cual es imposible. Entonces, si la raíz cuadrada de las centenas de N no es mayor ni menor que las decenas de la raíz, es exactamente dichas decenas, que es lo que queríamos demostrar.

Teorema 2

Si de un número se resta el cuadrado de las decenas de su raíz cuadrada y el resto, separando la primera cifra de la derecha, se divide por el duplo de dichas decenas, el cociente será la cifra de las unidades de la raíz o una cifra mayor.

Ya sabemos que $N = d^2 + 2du + u^2 + R$

Si de N, o sea, de su igual $d^2 + 2du + u^2 + R$ restamos d^2, tendremos:

$$N - d^2 = d^2 + 2du + u^2 + R - d^2 = 2du + u^2 + R,$$

o sea, $$N - d^2 = 2du + u^2 + R$$

Ahora bien: $2du$ produce decenas que estarán contenidas en las decenas del resto, pero *también* puede haber otras decenas que provengan de u^2 y de R. Por tanto, dividiendo las decenas del resto $N - d^2$ por $2d$, obtendremos u o una cifra mayor.

RESIDUO POR DEFECTO DE LA RAÍZ CUADRADA

Se conoce como **residuo por defecto de la raíz cuadrada inexacta de un número** a la diferencia entre el número y el cuadrado de su raíz cuadrada por defecto: la raíz cuadrada de 52 es 7 y el residuo es $52 - 7^2 = 52 - 49 = 3$; la raíz cuadrada de 130 es 11 y el residuo es

$$130 - 11^2 = 130 - 121 = 9$$

REGLA PRÁCTICA PARA EXTRAER LA RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO > 100

Se divide el número dado en grupo de dos cifras, empezando por la derecha; el último grupo, periodo o sección puede tener una o dos cifras. Se extrae la raíz cuadrada del primer grupo o periodo será la primera cifra de la raíz, la cual, se eleva al cuadrado y el resultado se resta del primer periodo. A la derecha de este se coloca la sección siguiente; se separa con una coma la primera cifra de la derecha y lo que queda a la izquierda se divide por el duplo de la raíz hallada. El cociente representará la cifra siguiente de la raíz o una cifra mayor. Para probar si esa cifra es correcta se escribe a la derecha del duplo de la raíz hallada, y el número formado se multiplica por la cifra que se comprueba. Si este producto se puede restar del número del cual separamos la primera cifra de la derecha, la cifra es correcta y se sube a la raíz; si no se puede restar, se le disminuye una unidad o más hasta que el producto se pueda restar. A continuación se resta dicho producto; a la derecha del resto se escribe la sección siguiente y se repiten las operaciones anteriores hasta bajar el último periodo.

Ejemplo

Extraer la raíz cuadrada de 103681

$\sqrt{10,36,81}$	321	
-9	$3\times = 6$	
13,6	$62\times 2 = 124$	$13 \div 6 = 12$
-124	$32\times 2 = 64$	
01 28,1	$642\times 2 = 1284$	
-641	$641\times 1 = 641$	
0 64 0		$128 \div 64 = 2$

EXPLICACIÓN DE LA REGLA PRÁCTICA

Ya dividimos el número dado en grupos de dos cifras, empezando por la derecha. Extraemos la raíz cuadrada del primer periodo de la raíz 10, que es 3, la elevamos al cuadrado y nos da 9; este 9 lo restamos del primer periodo y nos da 1 de resto. A la derecha de este 1 bajamos el segundo periodo 36 y se forma el número 136. Separamos la primera cifra de la derecha y queda 13,6. Lo que queda a la izquierda, 13, lo dividimos por el duplo de la raíz hallada que es 6 y nos da 2 de cociente. Para comprobar si esta cifra es correcta la escribimos al lado del duplo de la raíz y se forma el número 62 lo multiplicamos por la misma cifra 2 y el producto es 124.

Restamos este producto de 136 y subimos el 2 a la raíz. La resta nos da 12, le escribimos a la derecha la sección siguiente 81 y se forma el número 1281. Separamos su primera cifra de la derecha y queda 128,1 y dividimos 128 entre el duplo de la raíz 32, que es de 64 y nos da 2 de cociente. Para probar esta cifra la escribimos al lado del 64 y formamos el número 642, lo multiplicamos por 2 y nos da 1284. Como este producto no se puede restar de 1281, la cifra 2 no es correcta; la rebajamos como unidad y queda 1, probamos el 1 escribiéndolo al lado del 64 y formamos el 641, que multiplicado por 1 nos da 641, mismo que restamos de 1281 y subimos el 1 a la raíz, con lo que 640 será el resto de la raíz.

Observación

Si al separar la primera cifra de la derecha encontramos que lo que queda a la izquierda no se puede dividir por el duplo de la raíz, se pone cero en la raíz, se baja el periodo siguiente y continuamos la operación.

Para probar **la raíz cuadrada** se eleva el cuadrado, se le suma el residuo y la suma dará la cantidad subradical.

En el ejemplo anterior, tendremos: →

Cuadrado de la raíz: 321 × 321 =	103041
Residuo................................ +	640
Cantidad subradical:	103681

PRUEBA DEL 9 EN LA RAÍZ CUADRADA

Para realizar la **prueba del 9 en la raíz cuadrada** se halla el residuo entre 9 de la cantidad subradical y de la raíz. El residuo entre 9 de la raíz se eleva al cuadrado y se busca el residuo entre 9 y el resultado se suma con el residuo entre 9 del residuo de la raíz cuadrada, si lo hay. El residuo entre 9 de esta suma tiene que ser igual, si la operación esta correcta, al residuo entre 9 de la cantidad subradical.

En el ejemplo anterior tendremos: →

Residuo entre 9 de 103681............................	1
Residuo entre 9 de 321	6
Cuadrado de este residuo	36
Residuo entre 9 de este cuadrado	0
Residuo entre 9 del residuo 640	1
Suma de estos dos últimos residuos ...0 + 1 =	1
Residuo entre 9 de esta suma	1

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cuadrada:

1. 25	**R.** 5
2. 100	**R.** 10
3. 36	**R.** 6
4. 81	**R.** 9
5. 49	**R.** 7
6. 324	**R.** 18
7. 841	**R.** 29
8. 3969	**R.** 63
9. 9409	**R.** 97
10. 9801	**R.** 99
11. 10201	**R.** 101
12. 11881	**R.** 109
13. 254016	**R.** 504
14. 603729	**R.** 777
15. 641601	**R.** 801
16. 822649	**R.** 907
17. 870620	**R.** 933 Res. 131
18. 999437	**R.** 999 Res. 1436
19. 1003532	**R.** 1001 Res. 1531
20. 21487547	**R.** 4635 Res. 4322

TEOREMA

El residuo de **la raíz cuadrada de un número entero siempre es menor que el duplo de la raíz más 1.**

Siendo A un número entero, N su raíz cuadrada inexacta por defecto y R el residuo tendremos: $A = N^2 + R.$

Siendo N la raíz cuadrada inexacta por defecto de A, $N + 1$ será la raíz cuadrada por exceso y tendremos:

$$A < (N + 1)^2, \text{ o sea, } A < N^2 + 2N + 1$$

Ahora bien, como $A = N^2 + R$ en lugar de A podemos poner $N^2 + R$ y la última desigualdad se convierte en:

$$N^2 + R < N^2 + 2N + 1$$

Al suprimir N^2 en los dos miembros de la desigualdad anterior, ésta no varía y nos queda: $R < 2N + 1$ que es lo que queríamos demostrar.

RAÍZ CUADRADA DE DECIMALES

Para extraerla se separa el número decimal en grupos de dos cifras a derecha e izquierda del punto decimal, añadiendo un cero al último grupo de la derecha si quedara con una sola cifra decimal. A continuación se extrae la raíz como si fuera un número entero, poniendo punto decimal en la raíz al bajar el primer grupo decimal o separando con un punto decimal en la raíz, de derecha a izquierda, tantas cifras como sea la mitad de las cifras decimales del número dado.

Extraer la raíz cuadrada de 1703.725

```
√ 17,03,72,50 | 41.27
  −16         | 4× 2 = 8
    10,3      | 81×1 = 81          Prueba:
  − 81        | 41× 2 = 82         41.27× 41.27=
     2 27,2   | 822× 2 =1644              1703.2129
  − 164 2     | 412× 2 = 824         +       0.5121
      62 85,0 | 8247× 7 = 57729      1703.7250
  −   57 72 9 |
       5 121  |
```

Al dividir en grupos de dos cifras a partir del punto, el último grupo de la derecha, 5, quedaba con una sola cifra, por lo que le añadimos un cero. Se puso el punto decimal en la raíz al bajar 72, que es el primer grupo decimal.

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cuadrada de:

1. 25.1001	**R.** 5.01	
2. 0.0001	**R.** 0.01	
3. 5.29	**R.** 2.3	
4. 2.3409	**R.** 1.53	
5. 49.8436	**R.** 7.06	
6. 1.69	**R.** 1.3	
7. 0.001331	**R.** 0.036	Res. 0.000035
8. 9.8596	**R.** 3.14	
9. 9.503	**R.** 3.08	Res. 0.0166
10. 4021.143	**R.** 63.41	Res. 0.3149
11. 03256432	**R.** O.5706	Res. 0.00005884
12. 62.04251	**R.** 7.876	Res 0.011134
13. 4100.1617797	**R.** 64.0325	Res. 0.00072345
14. 17.89645	**R.** 4.230	Res. 0.003550
15. 100.201	**R.** 10.01	Res. 0.0009
16. 9663.49454	**R.** 98.303	Res. 0.014731
17. 11.9494069	**R.** 3.4567	Res. 0.00063201

RAÍZ CUADRADA DE QUEBRADOS

Para obtener la **raíz cuadrada de un quebrado cuando el denominador es cuadrado perfecto**, se extrae la raíz cuadrada del numerador y el denominador, si no es exacta.

1) $\sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

2) $\sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 5}}{5} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 5}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

o también $\sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} =$ con error $< \frac{1}{5}$

3) $\sqrt{\frac{75}{121}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{121}} = \frac{\sqrt{5^2 \cdot 3}}{11} = \frac{5\sqrt{3}}{11} = \frac{5}{11} = \sqrt{3}$

o también $\sqrt{\frac{75}{121}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{121}} = \frac{8}{11} =$ con error $< \frac{1}{11}$

En el ejemplo **2** decimos que $\frac{4}{5}$ es la raíz cuadrada de $\frac{20}{25}$ con error menor que $\frac{1}{5}$. En efecto: $\frac{4}{5}$ es menor que la raíz exacta de $\frac{20}{25}$ porque elevando $\frac{4}{5}$ al cuadrado se tiene $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} < \frac{20}{25}$. Sin embargo, lo que le falta a $\frac{4}{5}$ para ser la raíz exacta de $\frac{20}{25}$ es menos que $\frac{1}{5}$, porque si a $\frac{4}{5}$ le añadimos $\frac{1}{5}$ nos da $\frac{5}{5}$ y $\left(\frac{5}{5}\right)^2 = \frac{25}{25} < \frac{20}{25}$. Así que la verdadera raíz de $\frac{20}{25}$ es mayor que $\frac{4}{5}$ y menor que $\frac{5}{5}$ o sea que a $\frac{4}{5}$ le falta menos de $\frac{1}{5}$ para ser la raíz cuadrada exacta de $\frac{20}{25}$

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cuadrada de:

1. $\frac{30}{49}$ **R.** $\frac{1}{7}\sqrt{30}$ *o* $\frac{5}{7}$

2. $\frac{50}{36}$ **R.** $\frac{5}{6}\sqrt{2}$ *o* $1\frac{1}{6}$

3. $\frac{63}{100}$ **R.** $\frac{3}{10}\sqrt{7}$ *o* $\frac{7}{10}$

RAÍZ CUADRADA CUANDO EL CUADRADO NO ES PERFECTO

Para obtener la **raíz cuadrada de un quebrado cuando el denominador no es cuadrado perfecto** pueden presentarse dos casos:

a) Que simplificar el quebrado **se obtenga un denominador cuadrado perfecto,** con lo cual estaremos en el caso anterior.

Hallar la raíz cuadrada de $\frac{105}{560}$

simplificando el quebrado tenemos: $\frac{105}{560}=\frac{21}{112}=\frac{3}{16}$

El denominador de este último quebrado, 16 es cuadrado perfecto, por tanto podemos aplicar la regla al caso anterior:

$$\sqrt{\frac{105}{560}}=\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}=\sqrt{3}$$

b) El quebrado sea irreductible o que después de simplificar el denominador no sea cuadrado perfecto.

Hallar la raíz cuadrada de $\frac{35}{160}$

simplificamos: $\frac{35}{160}=\frac{7}{32}$

Como 32 no es cuadrado perfecto hay que racionalizar el denominador multiplicando los dos términos del quebrado por 2, porque de esa manera queda 32 × 2 = 64, cuadrado perfecto, y tendremos:

$$\sqrt{\frac{35}{160}}=\sqrt{\frac{7}{32}}=\frac{\sqrt{7\bullet 2}}{\sqrt{32\bullet 2}}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{64}}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{8}}=\frac{1}{18}\sqrt{4}$$

Hallar la raíz cuadrada de $\frac{4}{45}$

Este quebrado es irreductible. Hay que racionalizar el denominador, multiplicando los dos términos del quebrado por 5, porque de ese modo tenemos 45 × 5 = 225, cuadrado perfecto, y tendremos:

$$\sqrt{\frac{4}{45}}=\frac{\sqrt{4\bullet 5}}{\sqrt{45\bullet 5}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{225}}=\frac{\sqrt{2^2\bullet 5}}{\sqrt{15}}=\frac{2}{15}\sqrt{5}$$

Hallar la raíz cuadrada de $\frac{5}{252}$

Cuando el denominador es un número alto, como en este caso, no es fácil saber por cual factor hay que multiplicar los dos términos del quebrado para que el denominador se convierta en cuadrado perfecto. Así que debe descomponerse el denominador en factores primos, tendremos:

$$252 = 2^2 \bullet 3^2 \bullet 7$$

donde vemos que 252 no es cuadrado perfecto porque el exponente del factor primo 7 es impar. Para que se convierta en cuadrado perfecto es necesario que este exponente sea par y bastará multiplicar 252 × 7 = $2^2 \bullet 3^2 \bullet 7^2$. Se multiplican los dos términos del quebrado por 7 y tendremos:

$$\sqrt{\frac{5}{252}}=\frac{\sqrt{5\bullet 7}}{\sqrt{252\bullet 7}}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{2^2\bullet 3^2\bullet 7^2}}=$$
$$\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{2\bullet 3\bullet 7}}=\frac{\sqrt{35}}{42}=\frac{\sqrt{35}}{42}=1$$

Hallar la raíz cuadrada de $\frac{9}{7700}$

Al descomponer 7700 en sus factores primos tenemos: 7700 = $2^2 \bullet 5^2 \bullet 7 \bullet 11$. Para que 7700 se convierta en cuadrado perfecto hay que lograr que los exponentes de 7 y 11 sean pares: se multiplica 7700 por 7 y por 11, o sea por 77, y tendremos: 7700 × 77 = $2^2 \bullet 5^2 \bullet 7^2 \bullet 11^2$. Se multiplican los dos términos del quebrado por 77 y tendremos:

$$\sqrt{\frac{9}{7700}}=\frac{\sqrt{9\bullet 77}}{\sqrt{7700\bullet 77}}=\frac{\sqrt{693}}{\sqrt{2^2\bullet 5^2\bullet 7^2\bullet 11^2}}=$$
$$\frac{\sqrt{693}}{2\bullet 5\bullet 7\bullet 11}=\frac{\sqrt{693}}{770}=\frac{\sqrt{3^2\bullet 7\bullet 11}}{770}=\frac{3}{770}\sqrt{77}$$

Para obtener la **raíz cuadrada de los números mixtos** se reduce el mixto a quebrado y se extrae la raíz cuadrada de éste.

Hallar la raíz cuadrada de $1\frac{1}{8}$

$$\sqrt{1\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{\sqrt{9\bullet 2}}{\sqrt{8\bullet 2}}=\frac{\sqrt{18}}{16}=\frac{\sqrt{3^2\bullet 2}}{4}=\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cuadrada de:

1. $\frac{35}{80}$ **R.** $\frac{1}{4}\sqrt{7}$ *o* $\frac{1}{2}$

2. $\frac{18}{486}$ **R.** $\frac{1}{9}\sqrt{3}$ *o* $\frac{1}{9}$

RAÍZ CUADRADA MEDIANTE LA REDUCCIÓN DECIMAL

Cuando el denominador de una fracción no es cuadrado perfecto, puede obtenerse la raíz cuadrada de dicha fracción reduciéndola a fracción decimal y buscando la raíz cuadrada de ésta.

Hallar la raíz cuadrada de $\frac{5}{11}$

Reducimos a decimal:

```
50   |11
 60   0.454545...
  50
   60
    50
     60
```

$\frac{5}{11} = 0.454545...$

Ahora buscamos la raíz cuadrada de este decimal:

```
√0.45,45,45 | 0.674
   94,5     | 127 × 7 = 889
  -889      |  1344 × 4 = 5376
  -564,5    |
   -5376    |
    0269    |
```

luego $\sqrt{\frac{5}{11}} = 0.674$

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cuadrada de las fracciones siguientes mediante la reducción decimal:

1. $\frac{7}{20}$ **R.** 0.591 Residuo 0.000719

2. $\frac{5}{8}$ **R.** 0.79 Residuo 0.0009

3. $\frac{1}{5}$ **R.** 0.447 Residuo 0.000191

4. $\frac{2}{9}$ **R.** 0.471 Residuo 0.000381

5. $\frac{7}{40}$ **R.** 0.418 Residuo 0.000276

RAÍZ CUADRADA POR EL MÉTODO ABREVIADO

Si se desea encontrar la raíz cuadrada de un número de muchas cifras abreviando la operación, se busca **por el método ya explicado la mitad más de 1 de las cifras de la raíz.** Para hallar las cifras restantes se bajan todos los periodos que falten y el número así formado se divide entre el duplo de la raíz añadiéndole tantos ceros como periodos falten por bajar. El cociente de esta división será la parte faltante de la raíz cuadrada.

Si el número de cifras del cociente es menor que las que faltan en la raíz, se escriben entre la parte que se encontró por el método conocido y el cociente de la división los ceros necesarios para complementar las cifras requeridas.

El residuo de la raíz cuadrada se obtiene el cuadrado del cociente de la división del residuo de la división.

Hallar la raíz cuadrada de 18020516012314 por el método abreviado.

```
√18,02,05,16,01,23,14 | 4245057
 - 16                 |
   20,2               | 82 × 2 = 164
 - 164                |
    380,5             | 844 × 4 = 3376
  - 3376              |
     4291,6           | 8485 × 5 = 42425
  -  42425            |
     00491012314      |  8490000
         66512314     |  57

Residuo de la división         7082314
                   57²...................3249
     residuo de la raíz............7079065
```

Dado que la cantidad subradical tiene 7 periodos, en la raíz habrá 7 cifras. Ya encontramos las primeras 4 cifras (4245) por el método corriente y tenemos un residuo que es 491. Bajamos los tres periodos que faltan, 012314; los escribimos al lado de 491 y se forma el número 491012314. Lo dividimos por el duplo de la raíz hallada, 4245, que es 8490, añadiéndoles 3 ceros, porque faltaban tres periodos por bajar y se forma el número 8490000. Dividimos 491012314 entre 8490000 y nos da 57 de cociente. Las cifras que escribimos en la raíz son 057 porque faltaban tres cifras y el cociente de esta división sólo tiene dos.

Para hallar el residuo de la raíz elevamos el cociente de la división, 57, al cuadrado y nos dio 3249; este número lo restamos del residuo de la división 7082314 y la diferencia 7079065 es el residuo de la raíz cuadrada.

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cuadrada de los números siguientes por el método abreviado:

1. 403040512567832 **R.** 20075868 Residuo 36614408

2. 498143000001172314 **R.** 705792462 Residuo 585150870

3. 10002976543201023 **R.** 100014881 Residuo 121756862

APROXIMACIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA

Para extraer la raíz cuadrada de un entero con una aproximación decimal de 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, etc., se le pone punto decimal al entero y se añade doble número de ceros que las cifras decimales de la aproximación. A continuación se extrae la raíz cuadrada, poniendo el punto decimal al bajar el primer grupo decimal.

De aquí se deduce que para hallar la raíz cuadrada de un número entero con **aproximación de 0.1**, se pone punto decimal al entero y se le añaden **dos ceros**; para hallar la raíz con error menor de 0.01 añadiremos **cuatro ceros**; para la raíz con error menor de 0.001 se añaden **seis ceros**, y así sucesivamente.

1) $\sqrt{17}$ con aproximación de 0.1

$\sqrt{17.00}$	4.1
- 16	2 × 4 = 8
10,0	81 × 1 = 81
- 81	
19	

2) $\sqrt{31}$ con error < 0.001

$\sqrt{31.00,00,00}$	5.567
- 25	5 × 2 = 10
60,0	105 × 5 = 525
- 52 5	55 × 2 = 110
7 50,0	1106 × 6 = 6636
- 6 63 6	556 × 2 = 1112
86 40,0	11127 × 7 = 77889
- 77 88 9	
8 51 1	

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cuadrada de:

1. 6 con aprox. de 0.01	**R.** 2.44	Res. 0.0464
2. 7 con aprox. de 0.1	**R.** 2.6	Residuo 0.24
3. 14 con aprox. de 0.1	**R.** 3.7	Res. 0.31
4. 115 con aprox. de 0.1	**R.** 10.7	Res. 0.51
5. 1268 con aprox. de 0.1	**R.** 35.6	Res. 0.64
6. 185 con aprox. de 0.01	**R.** 13.60	Res. 0.04
7. 3001 con aprox. de 0.01	**R.** 54.78	Res. 0.1516
8. 6813 con aprox. de 0.0001	**R.** 82.5408	Residuo 0.01633536
9. 25325 con aprox. de 0.01	**R.** 159.13	Res. 2.6431
10. 2 con aprox. de 0.001	**R.** 1.414	Res. 0.000604
11. 186 con aprox. de 0.001	**R.** 13.638	Res. 0.004956
12. 8822 con aprox. de 0.001	**R.** 93.925	Residuo 0.094375

RAÍZ CUADRADA CON APROXIMACIÓN DECIMAL

Para extraer la raíz cuadrada de un decimal con aproximación de 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, etc., se añaden al decimal los ceros necesarios para que el número total de cifras decimales sea el doble de las cifras decimales de la aproximación. A continuación se extrae la raíz cuadrada, poniendo el punto decimal en la raíz al bajar el primer grupo decimal.

1) $\sqrt{0.6}$ con aproximación de 0.01.

Como la aproximación 0.01 tiene *dos cifras decimales*, el número deberá tener *cuatro*, y como ya tiene una cifra decimal, el 6, le añadimos *tres ceros* y quedará 0.6000. Ahora, extraemos la raíz cuadrada de 0.6000;

$\sqrt{0.60,00}$	0.77
- 49	7 × 2 = 14
110,0	147 × 7 = 1029
- 102 9	
7 1	

2) $\sqrt{8.72}$ en menos de 0.0001.

Como la aproximación 0.0001 tiene *cuatro cifras decimales,* el número deberá tener *ocho*, y como ya tiene dos cifras decimales, 72, le añadimos *seis ceros* y quedará 8.72000000. Ahora, extraemos la raíz cuadrada de 8.72000000:

$\sqrt{8.72,00,00,00}$	2.9529
- 4	2 × 2 = 4
47,2	49 × 9 = 441
- 44 1	29 × 2 = 58
3 10,0	585 × 5 = 2925
- 2 92 5	295 × 2 = 590
17 50,0	5902 × 2 = 11804
- 11 80 4	2952 × 2 = 5904
5 69 60,0	59049 × 9 = 531441
- 5 31 44 1	
38 15 9	

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cuadrada de:

1. 9.3 con error menor que 0.01	**R.** 3.04	Res. 0.0584
2. 0.3 con error menor que 0.01	**R.** 0.54	Res. 0.0084
3. 9.325 con error menor que 0.01	**R.** 3.05	Res. 0.0225
4. 117.623 con error menor que 0.01	**R.** 10.84	Res. 0.1174
5. 150.5 con error menor que 0.001	**R.** 12.267	Res. 0.020711
6. 7.3 con error menor que 0.01	**R.** 2.70	Res. 0.01

RAÍZ CUADRADA CON APROXIMACIÓN FRACCIONARIA

Para extraer la raíz cuadrada de un número con aproximación fraccionaria en menos de 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 ... se multiplica el número dado por el cuadrado del denominador de la aproximación buscada, se busca la raíz cuadrada de este producto y ésta se divide por el denominador de la aproximación buscada.

1) $\sqrt{19}$ en menos de $\frac{1}{5}$

Multiplicamos 19 por el cuadrado de 5: 19 × 25 = 475.

Extraemos la raíz cuadrada de 475: $\sqrt{475} = 21$

Dividimos entre $5: 21 \div 5 = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$

2) $\sqrt{3.25}$ en menos de $\frac{1}{7}$

Multiplicamos 3.25 por el cuadrado de 7: 3.25 × 49 = 159.25

Extraemos la raíz cuadrada de 159.25: $\sqrt{159.25} = 12.6$

Dividimos 12.6 entre 7: 12.6 ÷ 7 = 1.8

3) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ en menos de $\frac{1}{8}$

Multiplicamos $\frac{2}{3}$ por el cuadrado de $8: \frac{2}{3} \times 64 = \frac{128}{3}$

$$\sqrt{\frac{128}{3}} = \frac{\sqrt{128 \times 3}}{\sqrt{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{384}}{\sqrt{9}} = \frac{19}{3}$$

Dividimos $\frac{19}{3}$ entre $8: \frac{19}{3} \div 8 = \frac{19}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{19}{24}$

APLICACIONES DE LA RAÍZ CUADRADA

Problema 1

La suma de los cuadrados de dos números es 613 y el número mayor es 18. Hallar el menor.

613 contiene el cuadrado de 18 y el cuadrado del número buscado; luego, si a 613 le restamos el cuadrado de 18, obtendremos el cuadrado del número buscado:

$$613 - 18^2 = 613 - 324 = 289$$

Como 289 es el cuadrado, el número que se busca será $\sqrt{289} = 17$.

Problema 2

Se va a cercar un terreno cuadrado de 1369 m^2 de superficie y el costo del material es de $0.60 el metro. ¿Cuánto costará la obra?

La superficie de 1369 m^2 es el cuadrado del lado del terreno; por tanto el lado del terreno será:

$$\sqrt{1369 \text{ m2}} = 37 \text{ m}$$

Si un lado mide 37 metros, el perímetro del terreno será 37 × 4 = 148 metros. Si cada metro de material cuesta $0.60, el costo de la obra será: 148 m × 0.60 = $88.80.

Problema 3

Un comerciante compró cierto número de trajes por 625 dólares. Si sabemos que el número de trajes que compró es igual al número que representa el precio de un traje, ¿cuántos compró y cuánto costó cada uno?

Los 625 dólares son el producto del número de trajes por el precio de un traje, pero el número de trajes es igual al precio de un traje; luego 625 dólares es el cuadrado del número de trajes y del número que representa el precio de un traje; por tanto, $\sqrt{625} = 25$ representa el número de trajes comprados y el precio de un traje.

De este modo encontramos que el comerciante compró 25 trajes a 25 dólares cada uno.

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cuadrada de:

1. 21 con error $< \frac{1}{5}$ **R.** $4\frac{2}{5}$

2. 40 con error $< \frac{1}{6}$ **R.** $6\frac{1}{6}$

3. 75 con error $< \frac{1}{8}$ **R.** $8\frac{5}{8}$

4. 115 con error $< \frac{1}{9}$ **R.** $10\frac{2}{3}$

5. 120 con error $< \frac{1}{3}$ **R.** $10\frac{2}{3}$

6. 135 con error $< \frac{1}{11}$ **R.** $11\frac{6}{11}$

7. 128 con error $< \frac{1}{8}$ **R.** $11\frac{1}{4}$

8. 23 con error $< \frac{1}{9}$ **R.** $4\frac{7}{9}$

9. 0.5 con error $< \frac{1}{4}$ **R.** $\frac{1}{2}$

10. 0.13 con error $< \frac{1}{7}$ **R.** $\frac{5}{14}$

11. 3.16 con error $< \frac{1}{3}$ **R.** $1\frac{23}{30}$

12. $\frac{1}{2}$ con error $< \frac{1}{5}$ **R.** $\frac{7}{10}$

13. $\frac{3}{5}$ con error $< \frac{1}{4}$ **R.** $\frac{3}{4}$

14. $\frac{1}{3}$ con error $< \frac{1}{100}$ **R.** $\frac{173}{300}$



Los primeros que lograron extraer la raíz cuadrada y la raíz cúbica mediante reglas, fueron los hindúes. Los términos *varga mula* y *ghana mula* eran utilizados para indicar raíz cuadrada y raíz cúbica respectivamente.

CAPÍTULO XXXV

RAÍZ CÚBICA

Raíz cúbica exacta es el número que, elevado al cubo, reproduce exactamente el número dado.

Por ejemplo, 3 es la raíz cúbica exacta de 27, porque $3^3 = 27$ y 6 es la raíz cúbica exacta de 216, porque $6^3 = 216$.

La **raíz cúbica inexacta** o **entera** es el mayor número cuyo cubo está contenido en el número dado (raíz cúbica inexacta por defecto) o cuyo cubo excede en menos al número dado (raíz cúbica inexacta por exceso).

Así, 5 es la raíz cúbica inexacta por defecto de 130, porque $5^3 = 125$ y 5 es el mayor número cuyo cubo está contenido en 130; 6 es la raíz cúbica inexacta por exceso de 130, porque $6^3 = 216$ y es el número cuyo cubo excede en menos a 130.

RAÍZ CÚBICA DE NÚMEROS ENTEROS

Para obtener la raíz cúbica de un número menor que 1000, se busca entre los nueve primeros números aquel cuyo cubo sea igual o se acerque más al número dado, y éste será la raíz cúbica.

$$\sqrt[3]{347} = 7 \text{ por que } 7^3 = 343; \sqrt[3]{512} = 8, \text{ por que } 8^3 = 512$$

Para extraer la raíz cúbica de un número mayor que 1000 hay que basarse en los siguientes teoremas.

Teorema 1

La raíz cúbica de los millares de un número es exactamente las decenas de la raíz cúbica de dicho número.

Siendo el número N, cuya raíz cúbica, que consta de decenas y unidades, la representamos por $d + u$, donde d representa las decenas y u las unidades, y siendo R el resto.

Según la definición de raíz cúbica tendremos:

$$n = (d + u)^3 + R = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R,$$

o sea, $N = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R$; es decir, que el número N está compuesto del cubo de las decenas de la raíz, más el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades, más el resto (si lo hay).

Ahora bien: d^3 nos da millares, por lo que estará contenido en los millares de N; pero en estos puede haber otros millares además de los que provienen de d^3, ya sea de $3d^2u$, $3du^2$, u^3 y R; luego, al extraer la raíz cúbica de los millares de N obtendremos un número que no será menor que las decenas de la raíz, pero tampoco mayor, porque si lo fuera habría más millares en el cubo de las decenas de la raíz que en el número dado, lo cual es imposible. Entonces, si la raíz cúbica de los millares de N no es menor ni mayor que las decenas de la raíz, es exactamente dichas decenas, que es lo que queríamos demostrar.

Teorema 2

Si de un número se resta el cubo de las decenas de su raíz cúbica y el resto, separando las dos primeras cifras de la derecha, se divide por el triplo del cuadrado de estas decenas, el cociente será la cifra de las unidades o una cifra mayor.

Ya sabemos que $N = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R$

Si de N, o sea de su igual $d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R$, restamos d^3, tendremos:

$$N - d^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R - d^3 = 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R,$$

o sea,

$$N - d^3 = 3d^2u + 3du^2 + u^3 + R$$

Ahora bien: $3d^2u$ produce centenas que estarán contenidas en las centenas del resto, pero en éste puede haber otras centenas que provengan de $3d^2u$, u^3 y R. Entonces dividiendo las centenas del resto $N - d^3$ por $3d^2$ obtendremos el cociente u o una cifra mayor, que es lo que queríamos demostrar.

REGLA PRÁCTICA PARA EXTRAER LA RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO MAYOR QUE 1000

Se divide el número dado en grupos o periodos de tres cifras, empezando por la derecha; el último periodo puede tener una o dos cifras. Se extrae la raíz cúbica del primer periodo y ésta será la primera cifra de la raíz, misma que se eleva al cubo y el resultado se resta del primer periodo. A la derecha de este resto se coloca la sección siguiente; se separan con un coma las dos primeras cifras de la derecha y lo que queda a la izquierda se divide por el triplo del cuadrado de la raíz hallada. El cociente representará la cifra de las unidades o una cifra mayor. Para verificarla se forman tres sumandos: 1) Triplo del cuadrado de la raíz hallada por la cifra que se prueba, multiplicado por 100. 2) Triplo de la raíz hallada por el cuadrado de la cifra que se prueba por 10. 3) Cubo de la cifra que se prueba. Se efectúan estos productos y se suman. Si esta suma se puede restar del número del cual separamos las dos primeras cifras de la derecha, significa que es correcta y se sube a la raíz; si no se puede restar, se le disminuye una unidad o más hasta que se pueda restar. En seguida se resta dicho producto, a la derecha del resto se escribe la sección o periodo siguiente y se repiten las operaciones anteriores hasta bajar el último periodo.

Extraer la raíz cúbica 12910324:

$\sqrt[3]{12{,}910{,}324}$	234
8	$3 \times 2^2 = 12$
49,10	$49 \div 12 = 4$
- 41 67	$3 \times 23^2 = 1587$
07 433,24	$7433 \div 1587 = 4$
- 6 459 04	
0 974 20	

Prueba:

$3 \times 2^2 \times 4 \times 100 = 4800$
$3 \times 2 \times 4^2 \times 10 = 960$
$4^3 = 64$
5824

$3 \times 2^2 \times 3 \times 100 = 3600$
$3 \times 2 \times 3^2 \times 10 = 540$
$3^3 = 27$
4167

$3 \times 23^2 \times 4 \times 100 = 634800$
$3 \times 23 \times 4^2 \times 10 = 11040$
$4^3 = 64$
645904

EXPLICACIÓN

En el ejemplo anterior dividimos el número dado en grupos de tres cifras, empezando por la derecha.

Extraemos la raíz cúbica del primer periodo de la izquierda que es 12 y su raíz cúbica 2; este 2 lo escribimos en la raíz, lo elevamos al cubo y nos da 8, el cual restamos del primer periodo y nos da 4 de resto. A la derecha escribimos el siguiente periodo 910 y se forma el número 4910. Separamos las dos primeras cifras de la derecha y nos queda 49,10. El 49 de la izquierda los dividimos por el triplo del cuadrado de la raíz hallada, $3 \times 2^2 = 12$ y nos da 4 de cociente.

Para aprobar este 4 y verificar la cifra, formamos tres sumandos:

$$3 \times 2^2 \times 4 \times 100,\ 3 \times 2 \times 4^2 \times 10 \text{ y } 4^3,$$

los efectuamos, sumamos y vemos que nos da 5824, que es mayor que 4910, lo cual indica que la cifra 4 es muy grande. Bajamos una unidad y probamos el 3.

Como esta suma 4167 si se puede restar de 4910 significa que el 3 es buena cifra; la subimos a la raíz, restamos 4167 de 4910, y vemos que el resto es 743; a la derecha escribimos el siguiente periodo 324 y se forma el número 743324. Separamos sus dos primeras cifras de la derecha y queda 7433,24.

Dividimos lo que queda a la izquierda, 7433, por el triplo del cuadrado de la raíz que es $3 \times 23^2 = 1587$ y nos da 4 de cociente. Para probar este 4 formamos tres sumandos:

$$3 \times 23^2 \times 4 \times 100,\ 3 \times 23 \times 4^2 \times 10 \text{ y } 4^3,$$

los efectuamos, sumamos y nos da 645904; como esta suma sí se puede restar de 743324, significa que el 4 es buena cifra.

Lo subimos a la raíz y restamos la suma 645904 de 743324 y el resto de la raíz será 97420.

COMPROBACIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA

Si al separar las dos primeras cifras de la derecha, lo que queda a la izquierda no se puede dividir entre el triplo del cuadrado de la raíz, se pone cero en la raíz y se baja el periodo siguiente, continuando la operación. Si algún cociente resulta mayor que 9, se prueba el 9.

Para probar **la raíz cúbica** ésta se eleva al cubo y al resultado se le suma el residuo y la suma debe dar la cantidad subradical.

En el ejemplo anterior tendremos:

Cubo de la raíz:	$234 \times 234 \times 234 = 12812904$
	+ 97420
Cantidad subradical	12910324

Para **probar** el 9 en la **raíz cúbica** se busca el residuo entre 9 de la cantidad subradical y de la raíz. El residuo entre 9 de la raíz se eleva al cubo, al resultado se le busca el residuo entre 9 y se suma con el residuo entre 9 del residuo de la raíz cúbica, si lo hay. El residuo entre 9 de esta suma tiene que ser igual, si la operación está correcta, al residuo entre 9 de la cantidad subradical.

De esta forma, en la raíz cúbica siguiente:

Pruebas

$\sqrt{1,953,264}$	125	
− 1	$3 \times 1^2 = 3$	$3 \times 1^2 \times 2 \times 100 = 600$
09,53		$3 \times 1 \times 2^2 \times 10 = 120$
− 7 28		$2^3 = 8$
		728
2 252,64		
− 2 251 25	$3 \times 12^2 = 432$	$3 \times 12^2 \times 5 \times 100 = 216000$
− 0 001 39		$3 \times 12 \times 5^2 \times 10 = 9000$
		$5^3 = 125$
		225125

la prueba del 9 sería:

Residuo entre 9 de 1953264	3
Residuo entre 9 de 125	8
Cubo de este residuo	512
Residuo entre 9 de este cubo	8
Residuo entre 9 de 139	4
Suma de estos dos últimos residuos	12
Residuo entre 9 de esta suma	3

RESIDUO POR DEFECTO DE LA RAÍZ CÚBICA

El **residuo por defecto de la raíz cúbica** es la diferencia entre el número y el cubo de su raíz cúbica por defecto.

La raíz cúbica de 40 es 3 y el residuo es $40 - 3^3 = 40 - 27 = 13$; la raíz cúbica de 350 es 7 y el residuo es $350 - 7^3 = 350 - 343 = 7$.

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cúbica de:

1. 1250 **R.** 10 Res. 250
2. 12167 **R.** 23
3. 19103 **R.** 26 Res. 1527
4. 91125 **R.** 45
5. 912673 **R.** 97
6. 5832 **R.** 18
7. 186345 **R.** 57 Res. 1152
8. 28372625 **R.** 305
9. 77308776 **R.** 426
10. 181321496 **R.** 566
11. 876532784 **R.** 957 Res. 65291
12. 41278242816 **R.** 3456

EJERCICIOS

Encuentra

1. 0.05
R. 0.3 Residuo 0.023
2. 6.03
R. 1.8 Residuo 0.198
3. 14.003
R. 2.4 Residuo 0.179
4. 0.000064
R. 0.04
5. 0.00018
R. 0.05 Residuo 0.000055
6. 912.98
R. 9.7 Residuo 0.307
7. 1.04027
R. 1.01 Residuo 0.009969
8. 221.44516
R. 6.05 Residuo 0.000035
9. 874.00356
R. 0.280744
10. 187.1536
R. 5.72 Residuo 0.004352
11. 0.0082505
R. 0.202 Residuo 0.000008092
12. 4.0056325
R. 1.588 Residuo 0.001103028
13. 70240.51778
R. 41.26 Residuo 0.0.005404
14. 343.44121388
R. 7.003 Residuo 0.000024853

TEOREMA

El residuo de la raíz cúbica de un número entero siempre es menor que el triplo del cuadrado de la raíz, más el triplo de la raíz, más 1.

Siendo *A* un número entero, *N* su raíz cúbica inexacta por defecto y *R* el residuo tendremos:

$$A = N^3 + R$$

Siendo *N* la raíz cúbica inexacta por defecto de *A*, *N* + 1 será la raíz cúbica por exceso y tendremos:

A < (N + 1) 3, o sea, A < N 3 + 3N 3 + 3N 2 + 3N 2 + 3N + 1

Ahora bien, como $A = N^3 + R$, en lugar de *A* podemos poner $N^3 + R$ y la última desigualdad se convierte en:

N 3 + R < N 3 + 3N 2 + 3N + 1

Al suprimir N^3 en los dos miembros de la desigualdad anterior, ésta no varía y nos queda:

R < 3N 2 + 3N + 1

que es lo que queríamos demostrar.

REGLA PARA EXTRAER LA RAÍZ CÚBICA DE DECIMALES

Para extraer la raíz cúbica de decimales se separa el número decimal en grupos de tres cifras a la derecha y a la izquierda del punto decimal, añadiendo uno o dos ceros al último grupo de la derecha, si quedara con dos o una cifra decimal. En seguida se extrae la raíz cúbica como si fuera un entero, poniendo punto decimal en la raíz al bajar el primer grupo decimal o separando de derecha a izquierda en la raíz, con un punto decimal, tantas cifras como sea la tercera parte de las cifras decimales del número dado.

Extraer la raíz cúbica de 143.0003

$\sqrt{143.00,300}$ | 5.22
−125 | $3 \times 5^2 = 75$
180,00 | $180 \div 75 = 2$
− 156 08 | $3 \times 52^2 = 8112$
23 923,00 | $23923 \div 8112 = 2$
− 16 286 48
7 636 52

Prueba

$3 \times 5^2 \times 2 \times 100 = 15000$
$3 \times 5 \times 2^2 \times 10 = 600$
$2^3 = 8$
15608

$3 \times 52^2 \times 2 \times 100 = 1622400$
$3 \times 52 \times 2^2 \times 10 = 6240$
$2^3 = 8$
1628648

Prueba

$5.22^3 = 142.236648$
$+ 0.763652$
143.000300

Vemos que al dividir en grupos de tres cifras, partir del punto decimal, como el último grupo de la derecha, 3, quedaba con una sola cifra, le añadimos dos ceros. Además pusimos el punto decimal en la raíz al bajar 000, que es el primer grupo decimal.

RAÍZ CÚBICA DE QUEBRADOS

Para sacar la **raíz cúbica de un quebrado cuando el denominador es cubo perfecto**, se extrae la raíz cúbica del numerador y el denominador, simplificando la raíz del numerador si no es exacta.

1) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$

2) $\sqrt[3]{\frac{16}{125}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}}{5} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt[3]{2}$

o también $\sqrt[3]{\frac{16}{125}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$ con error $< \frac{1}{5}$

En el ejemplo 2 decimos que $\frac{2}{5}$ es la raíz cúbica de $\frac{16}{125}$ con error menor que $\frac{1}{5}$. En efecto: $\frac{2}{5}$ es menor que la raíz cúbica exacta de $\frac{16}{125}$ porque al elevar $\frac{2}{5}$ al cubo se tiene $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$. Sin embargo, lo que falta a $\frac{2}{5}$ para ser la raíz cúbica exacta de $\frac{16}{125}$ es menos que $\frac{1}{5}$, porque si a $\frac{2}{5}$ le añadimos $\frac{1}{5}$ nos da $\frac{3}{5}$ y $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} > \frac{16}{125}$. Así que la verdadera raíz de $\frac{16}{125}$ es mayor que $\frac{2}{5}$ y menor que $\frac{3}{5}$, o sea que a $\frac{2}{5}$ le falta menos de $\frac{1}{5}$ para ser la raíz cúbica exacta de $\frac{16}{125}$.

CASOS DE QUEBRADOS NO PERFECTOS

Por otra parte, cuando **el denominador del quebrado no es cubo perfecto**, pueden suceder dos cosas:

a) Que al simplificar el quebrado obtengamos un denominador cubo perfecto, con lo cual estaremos en el caso anterior.

Hallar la raíz cúbica de $\frac{108}{250}$

Simplificando el quebrado, tenemos: $\frac{108}{250} = \frac{54}{125}$

El denominador de este último quebrado, 125, es cubo perfecto, luego podemos aplicar la regla del caso anterior:

$$\sqrt[3]{\frac{108}{250}} = \sqrt[3]{\frac{54}{125}} = \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{54}}{5} = \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{2}$$

b) Que el quebrado sea irreducible o que, después de simplificado, el denominador no sea cubo perfecto.

Encontrar la raíz cúbica de $\frac{15}{20}$

Simplificando el quebrado tenemos $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Como el denominador 4 no es cubo perfecto, hay que racionalizar el denominador, multiplicando los dos términos del quebrado por 2, porque de esa manera queda 4 × 2 = 8, cubo perfecto, y tendremos:

$$\sqrt[3]{\frac{15}{20}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 2}}{\sqrt[3]{4 \cdot 2}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$$

Encontrar la raíz cúbica de $\frac{8}{25}$

Este quebrado es irreducible. Hay que racionalizar el denominador, multiplicando los dos términos del quebrado por 5, porque con ello queda 25 × 5 = 125, cubo perfecto, y tendremos:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{25}} = \frac{\sqrt[3]{8 \cdot 5}}{\sqrt[3]{25 \cdot 5}} = \frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}}{5} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt[3]{5}$$

Encontrar la raíz cúbica de $\frac{7}{675}$

Cuando el denominador es un número alto no es fácil saber por qué número hay que multiplicar los dos términos del quebrado para que el denominador se convierta en cubo perfecto. En casos como éste debe descomponerse el denominador en factores primos y tendremos:

$$675 = 3^3 \cdot 5^2$$

Aquí vemos que 675 no es cubo perfecto porque el exponente del factor primo 5 no es múltiplo de 3. Para que se convierta en cubo perfecto es necesario que este exponente sea múltiplo de 3 y bastará multiplicar: $675 \times 5 = 3^3 \times 5^3$. De modo que al multiplicar los dos términos del quebrado por 5 tendremos:

$$\sqrt[3]{\frac{7}{675}} = \frac{\sqrt[3]{7 \cdot 5}}{\sqrt[3]{675 \cdot 5}} = \frac{\sqrt[3]{35}}{\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3}} = \frac{\sqrt[3]{35}}{3 \cdot 5} = \frac{\sqrt[3]{35}}{15} = \frac{1}{15}\sqrt[3]{35}$$

Encontrar la raíz cúbica de $\frac{11}{900}$

Al descomponer 900 en sus factores primos tenemos: $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Para que 900 se convierta en cubo perfecto hay que lograr que los exponentes de 2, 3 y 5 sean múltiplos de 3; así que multiplicamos 900 por 2, por 3 y por 5 (o sea por 30) y tendremos: $900 \times 30 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$.

Al multiplicar los dos términos del quebrado por 30 tendremos:

$$\sqrt[3]{\frac{11}{900}} = \frac{\sqrt[3]{11 \times 30}}{\sqrt[3]{900 \times 30}} = \frac{\sqrt[3]{330}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3}} = \frac{\sqrt[3]{330}}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{\sqrt[3]{330}}{30} = \frac{1}{30}\sqrt[3]{330}$$

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cúbica de:

1. $\frac{24}{343}$ **R.** $\frac{2}{7}\sqrt[3]{3}$ *o* $\frac{2}{7}$

2. $\frac{32}{729}$ **R.** $\frac{2}{9}\sqrt[3]{4}$ *o* $\frac{1}{3}$

3. $\frac{375}{1000}$ **R.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$ *o* $\frac{7}{10}$

4. $\frac{54}{1331}$ **R.** $\frac{3}{11}\sqrt[3]{2}$ *o* $\frac{3}{11}$

5. $\frac{160}{2197}$ **R.** $\frac{2}{13}\sqrt[3]{20}$ *o* $\frac{5}{13}$

6. $\frac{24}{2744}$ **R.** $\frac{1}{7}\sqrt[3]{3}$ *o* $\frac{1}{7}$

7. $\frac{135}{320}$ **R.** $\frac{3}{4}$

8. $\frac{160}{1250}$ **R.** $\frac{2}{5}\sqrt[3]{2}$ *o* $\frac{2}{5}$

9. $\frac{43}{3037}$ **R.** $\frac{3}{7}$

10. $\frac{321}{2048}$ **R.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{3}$ *o* $\frac{1}{2}$

11. $\frac{9}{16}$ **R.** $\frac{1}{4}\sqrt[3]{36}$

12. $\frac{3}{25}$ **R.** $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

13. $\frac{3}{64}$ **R.** $\frac{1}{4}\sqrt[3]{3}$

14. $\frac{8}{81}$ **R.** $\frac{2}{9}\sqrt[3]{9}$

15. $\frac{5}{36}$ **R.** $\frac{1}{6}\sqrt[3]{30}$

16. $\frac{5}{13}$ **R.** $\frac{1}{13}\sqrt[3]{845}$

17. $\frac{1}{20}$ **R.** $\frac{1}{10}\sqrt[3]{50}$

RAÍZ CÚBICA DE NÚMEROS MIXTOS

Para hallar la raíz cúbica de números mixtos primero se reduce el mixto a quebrado y luego se extrae la raíz cúbica de este quebrado.

$$\sqrt[3]{5\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{\frac{46}{9}} = \frac{\sqrt[3]{46 \bullet 3}}{\sqrt[3]{9 \bullet 3}} = \frac{\sqrt[3]{138}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{138}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{138}$$

EJERCICIOS

1. $6\frac{2}{3}$ **R.** $\frac{1}{3}\sqrt[3]{180}$

2. $4\frac{7}{81}$ **R.** $\frac{1}{9}\sqrt[3]{2979}$

3. $2\frac{43}{373}$ **R.** $1\frac{1}{2}$

4. $1\frac{43}{200}$ **R.** $\frac{3}{10}\sqrt[3]{45}$

RAÍZ CÚBICA MEDIANTE REDUCCIÓN DECIMAL

Cuando el denominador de una fracción común no es cubo perfecto, también puede hallarse la raíz cúbica de dicha fracción **reduciéndola a fracción decimal** obteniendo la raíz cúbica de ésta.

Encontrar la raíz cúbica de $\frac{5}{7}$

Reduciendo a decimal:

```
50      |7
 10      0.714285...
  30
   20
    60
     40
      5
      ⋮
```

$$\frac{5}{7} = 0.714285\ldots$$

Ahora obtenemos la raíz cúbica de este decimal:

```
∛0.714,285 |    0.89
-    512   |3 × 8² = 192
   2022,85 | 2022÷ = 9
   1929 69 |
   009316  |
```

luego $\sqrt[3]{\frac{5}{7}} = 0.89$

Prueba

$3 \times 8^2 \times 9 \times 100 = 172800$

$3 \times 8 \times 9^2 \quad 10 = \quad 19440$

$9^2 = \quad 729$

192969

EJERCICIOS

Busca la raíz cúbica de estas fracciones mediante la reducción a decimal:

1. $\frac{2}{3}$ **R.** 0.873 Residuo 0.001328049

2. $\frac{3}{14}$ **R.** 0.598 Residuo 0.000438522

3. $\frac{7}{13}$ **R.** 0.813 Residuo 0.001093741

4. $\frac{11}{40}$ **R.** 0.65 Residuo 0.000375

5. $\frac{17}{5}$ **R.** 1.503 Residuo 0.004709473

EJERCICIOS

Por el método abreviado, encuentra la raíz cúbica de:

1. 1000300030001
R. 10001
2. 8244856482408
R. 20202
3. 27000810008100027
R. 300003
4. 1371775034556928
R. 111112
5. 10973933607682085048
R. 2222222
6. 1866459733247500606
R. 1231231 Residuo 1215

MÉTODO ABREVIADO PARA EXTRAER LA RAÍZ CÚBICA

Para buscar la raíz cúbica de un número de muchas cifras abreviando la operación, primero se localizan, por el método ya explicado, la mitad más 1 de las cifras de la raíz. Para hallar las cifras restantes, se bajan todos los periodos y el número así formado se divide por el triplo del cuadrado de la parte de raíz seguido de tantos grupos de dos ceros como periodos se deben bajar. El cociente de esta división será la parte faltante de la raíz cúbica. Si el número de cifras de este cociente es menor que las que faltan en la raíz, se escriben entre la parte localizada por el método conocido y el cociente de esta división los ceros necesarios para completar las cifras requeridas.

El residuo de la raíz cúbica se obtiene restándole al residuo de la división la suma del cubo del cociente, más el triplo del cuadrado del cociente multiplicado por la parte de raíz obtenida por el método conocido, reducida a unidades.

Extraer la raíz cúbica de 1009063243757297728 por el método abreviado:

```
 3/‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾‾
  √ 1,009,063,243,757,297,728 | 1003012
                              |------------------
   -1                         | 3×1² = 3
   0 0 090632,43              | 3×10² = 300
     - 90270 27               | 3×100² = 3000
       00362 16757297728      | 3×1003² = 3018027
          060 36487297728     |------------------
Residuo de la div.................00 00433297728 | 3018027000000
12³ + 3×12² ×1003000............... - 433297728   |------------------
Residuo de la raiz...............................0 | 12

Prueba de la cifra 3        3×100² × 3×100 =   900000
                            3×100× 3² × 10 =    27000
                                      3³ =         27
                                           ----------
                                              9027027
```

EXPLICACIÓN

Dado que la cantidad subradical tiene 7 periodos, en la raíz habrá siete cifras. Ya encontramos las primeras cuatro cifras (1003) por el método corriente y tenemos el residuo 36216. Bajamos los 3 periodos que faltan y se forma el número 36216757297728, mismo que dividimos por el triplo del cuadrado de la parte de raíz hallada, 1003, que es 3018027, añadiéndole tres grupos de dos ceros, porque faltaban por bajar tres periodos, y tenemos 3018027000000.

Dividimos 36216757297728 entre 3018027000000 y nos da 12 de cociente. En la raíz escribimos 012 porque faltaban tres cifras y el cociente de esta división sólo tiene dos.

Para hallar el residuo de la raíz, elevamos el cociente 12 al cubo,

$$12^3 = 1728$$

le sumamos $3 \times 12^2 \times 1003000 = 433296000$ y esta suma nos da 433297728, misma que restamos de la división y vemos que la diferencia es 0, luego la raíz es exacta.

APROXIMACIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA

Para extraer la raíz cúbica de un entero con una aproximación decimal de 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, etc., se le pone punto decimal al entero y se añade triple número de ceros que las cifras decimales de la aproximación. Después se extrae la raíz cúbica, colocando el punto decimal al bajar el primer grupo decimal.

De esto se deduce que para hallar la raíz cúbica de un entero con aproximación de 0.1, se pone punto decimal al entero y se le añaden tres ceros; para hallar la raíz con error menor de 0.01, se agregan seis ceros; para la raíz de menos de 0.001 se añaden nueve ceros, y así sucesivamente.

$\sqrt[3]{17}$ con aproximación de 0.001

$\sqrt[3]{17.000,000}$	2.57
-8	$3\times 2^3 = 12$
9 0,00	$90 \div 12 = 7$
$-7\ 6\ 25$	$3\times 25^2 = 1875$
1 3 75 0,00	
1 3 49 5 93	
$-25\ 4\ 07$	

Prueba

$3\times 2^2\times 4\times 100 = 6000$

$3\times 2\times 5^2\times 10 = 1500$

$5^3 = 125$

7625

$3\times 25^2\times 7\times 100 = 1312500$

$3\times 25\times 7^2\times 10 = 36750$

$7^3 = 343$

1349593

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cúbica de:

1. 542 con aproximación de 0.01 **R.** 8.15 Residuo 0.656625
2. 251 con aproximación de 0.1 **R.** 6.3 Residuo 0.953
3. 520 con aproximación de 0.01 **R.** 8.04 Residuo 0.281536
4. 874 con aproximación de 0.01 **R.** 9.56 Residuo 0.277184
5. 54 con aproximación de 0.001 **R.** 3.779 Residuo 0.032701861

RAÍZ CÚBICA DECIMAL CON APROXIMACIÓN DECIMAL

Para extraer la raíz cúbica de un decimal con aproximación decimal de 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, etc., se le añade al decimal los ceros necesarios para que el total de cifras sea el triplo de las cifras decimales de la aproximación. A continuación se extrae la raíz cúbica, poniendo el punto decimal en la raíz al bajar el primer grupo decimal.

$\sqrt[3]{5.03}$ con aproximación de 0.01

$\sqrt[3]{5.030,000}$	1.71
$-\ 1$	$3\times 1^2 = 3$
40, 30	$40 \div 3 = 13$
$-\ 3913$	$3\times 17^2 = 867$
01170, 00	$1170 \div 867 = 1$
$-\ 87211$	
297 89	

Prueba

$3\times 1^2\times 7\times 100 = 2100$

$3\times 1\times 7^2\times 10 = 1470$

$7^3 = 343$

3913

$3\times 17^2\times 1\times 100 = 86700$

$3\times 17\times 1^2\times 10 = 510$

$1^3 = 1$

87211

RAÍZ CÚBICA CON APROXIMACIÓN FRACCIONARIA

Para extraer la raíz cúbica de un número con aproximación fraccionaria de menos de $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$..., se multiplica el número dado por el cubo del denominador de la aproximación buscada; se halla la raíz cúbica de este producto y se divide por el denominador de la aproximación buscada.

1) $\sqrt[3]{56}$ con error < $\frac{1}{3}$

Se multiplica 56 por el cubo de 3:

$$56 \times 27 = 1512$$

Se busca la raíz cúbica de 1512:

$$\sqrt[3]{1512} = 11$$

11 se divide entre 3: $11 \div 3 = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$

2) $\sqrt[3]{0.16}$ en menos de $< \frac{1}{5}$

Se multiplica 0.16 por el cubo de 5:

$$0.16 \times 125 = 20$$

Se extrae la raíz cúbica de 20: $\sqrt[3]{20} = 2$

Este 2 se divide entre 5: $2 \div 5 = \frac{2}{5} = 0.4$

3) $\sqrt[3]{\frac{5}{27}}$ en menos de $\frac{1}{4}$

Se multiplica $\frac{5}{27}$ por el cubo de 4:

$$\frac{5}{27} \times 64 = \frac{320}{27}$$

Se extrae la raíz cúbica de $\frac{320}{27}$

$$\sqrt[3]{\frac{320}{27}} = \frac{\sqrt[3]{320}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{6}{3} = 2$$

Este 2 se divide por 4:

$$2 \div 4 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIOS

Busca la raíz cúbica de:

1. $\frac{1}{5}$ con error $< \frac{1}{4}$ **R.** $\frac{11}{20}$

2. 60 con error $< \frac{1}{5}$ **R.** $3\frac{4}{5}$

3. 19 con error $< \frac{1}{9}$ **R.** $2\frac{2}{3}$

4. 96 con error $< \frac{1}{6}$ **R.** $4\frac{1}{2}$

5. 120 con error $< \frac{1}{7}$ **R.** $4\frac{6}{7}$

6. 185 con error $< \frac{1}{8}$ **R.** $5\frac{5}{8}$

7. 25 con error $< \frac{1}{4}$ **R.** $2\frac{3}{4}$

8. 300 con error $< \frac{1}{9}$ **R.** $6\frac{2}{3}$

9. 2000 con error $< \frac{1}{4}$ **R.** $12\frac{1}{2}$

10. 800 con error $< \frac{1}{10}$ **R.** $9\frac{1}{5}$

11. 1050 con error $< \frac{1}{8}$ **R.** $10\frac{1}{8}$

12. 0.6 con error $< \frac{1}{3}$ **R.** $\frac{5}{6}$

13. $3\frac{1}{2}$ con error $< \frac{1}{4}$ **R.** $1\frac{1}{2}$

14. 3.83 con error $< \frac{1}{9}$ **R.** $1\frac{5}{9}$

15. 0.04 con error $< \frac{1}{5}$ **R.** $\frac{1}{5}$

16. $\frac{1}{18}$ con error $< \frac{1}{6}$ **R.** $\frac{1}{6}$

17. $\frac{3}{4}$ con error $< \frac{1}{10}$ **R.** $\frac{9}{10}$

APLICACIONES DE LA RAÍZ CÚBICA

El volumen de una caja cúbica es de 27000 cm^3. ¿Cuál es su arista?

Si la caja es cúbica, el largo es igual al ancho e igual a la altura, y como el volumen se obtiene multiplicando entre sí las tres dimensiones de la caja, 27000 cm^3 es el producto de tres factores iguales, o sea el cubo de la arista; por tanto, la arista será: $\sqrt[3]{27000\ cm^3} = 30$ cm

El volumen de una caja cúbica es de 216000 cm^3. Si se corta la mitad superior, ¿cuáles serán las dimensiones de la nueva caja?

$\sqrt[3]{216000\ cm^3} = 60$ cm; por tanto, esta caja tiene 60 cm de largo, 60 cm de ancho y 60 cm de altura. Cortando la mitad superior resulta una caja de 60 cm de largo, 60 cm de ancho y 30 cm de altura.

EJERCICIOS

1. Una sala de forma cúbica tiene 3375 m^3. ¿Cuáles son sus dimensiones?
R. 15 m

2. Un cubo tiene 1728 dm^3. ¿Cuál es la longitud de su arista?
R. 12 dm

3. ¿Cuáles serán las dimensiones de un depósito cúbico cuya capacidad es igual a la de otro depósito de 45 m de largo, 24 de ancho y 25 de alto?
R. 30 m de arista.

4. Un comerciante compró cierto número de cajas grandes de madera, las que contenían cajas de corbatas. En cada caja de madera hay 1024 cajas de corbatas. Si el número de cajas de corbatas de cada caja de madera es el doble del cubo del número de cajas de madera, ¿cuántas cajas de madera compró el comerciante y cuántas cajas de corbatas?
R. 8 cajas de madera; 8192 cajas de corbatas.

5. Se ha comprado cierto número de caballos pagando por cada uno una cantidad igual al cuadrado del número de caballos comprados. Si hubiera comprado dos caballos más y hubiera pagado por cada uno una cantidad igual al cuadrado de este número nuevo de caballos hubiera pagado por ellos $2197. ¿Cuántos caballos he comprado y cuánto pagué por cada uno?
R. 11 caballos; $121 c/u.

6. ¿Cuál es el número cuyo cubo aumentado en 4; disminuyendo esta suma en 41; multiplicando esta diferencia por 2 y dividiendo el producto entre 74 da por resultado 1368? **R.** 37.

7. A un depósito de 49 metros de largo, 21 metros de profundidad y 72 metros de ancho se le quiere dar forma cúbica, sin que varíe su capacidad. ¿Qué alteración sufrirán sus dimensiones?
R. El largo disminuye 7 metros; el ancho 30 metros y la profundidad aumenta 21 metros.

8. El quinto de un número multiplicado por el cuadrado del mismo número da por resultado 200. Hallar el número. **R.** 10.



Simon Stevin fue quien desarrolló el sistema decimal para las medidas. En 1790, Talleyrand junto con la Asamblea Francesa adoptaron oficialmente el Sistema Métrico Decimal.

CAPÍTULO XXXVI

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

Delambre y Mechain diseñaron un sistema de medidas universal que pudiera ser aceptado por todos los países del mundo. Para ello se decidió elegir como unidad fundamental la unidad de longitud de modo que dicha unidad estuviera relacionada con el globo terráqueo y que sus múltiplos y submúltiplos fueran potencias de diez.

Para determinar la unidad de longitud se midió el arco del meridiano terrestre comprendido entre Dunkerque y Barcelona. A la diezmillonésima parte del cuadrante de dicho meridiano terrestre se le dio el nombre de metro.

El metro es la unidad fundamental de longitud y se representa con el símbolo m. Los múltiplos del metro se forman anteponiendo a la palabra metro, los prefijos griegos deca, hecto y kilo entre otros, que significan diez, cien y mil respectivamente.

DEFINICIÓN DE MAGNITUD

Magnitud es todo lo abstracto que puede compararse y sumarse; y cantidad es cualquier estado de una magnitud.

Según esto, la longitud es una magnitud: también la longitud de una regla o de una sala son **cantidades**; el **peso** también es una magnitud: el peso de una persona o de un libro son cantidades; la **velocidad** es otra magnitud: la velocidad de un auto o de un tren son cantidades.

Las cantidades mensurables son aquellas que se **pueden medir** y se conocen como **cantidades continuas.**

La comparación de cantidades homogéneas (de la misma magnitud) puede **verificarse directamente.**

Se puede comparar la longitud de una regla con la longitud de un libro junto a la regla de modo que uno de sus extremos coincidan, con lo que se puede ver si tienen la misma longitud o una es más larga que el otro. Un procedimiento similar funciona para comparar el peso de dos objetos.

MEDICIONES

La comparación de cantidades de la misma magnitud no siempre es posible, pues podría comparar de ese modo la longitud de la sala de una casa con la longitud de una sala, en otro lugar, por lo que recurre a la **comparación indirecta**, que consiste en comparar cada una de las cantidades dadas con otra cantidad de la misma magnitud elegida como **unidad de medida**; a esta operación se le llama **medición**.

Por ejemplo, si se toma el metro como unidad de medida, se puede ver cuántas veces la cantidad (longitud de la sala) contiene a la unidad (el metro). Supongamos que la contiene 5 veces, entonces la sala mide 5 **metros**. Luego se mide la otra sala, supongamos que la longitud es de 4 metros. Con esto se sabe que la longitud de la sala de una casa es mayor que la longitud de la otra sala.

UNIDADES DE MEDIDA

Unidades de medida son aquellas cantidades elegidas para comparar otras cantidades de su misma magnitud. Se mide una cantidad al compararla con la unidad de medida para saber cuántas veces contiene la unidad, y el resultado seguido del **nombre** de la unidad expresa la medida.

Se conocen distintas clases de unidades de medida: el metro, la vara, la yarda miden longitudes; el metro cuadrado, la vara cuadrada y la yarda cuadrada sirven para medir superficies; el metro cúbico y el pie cúbico son unidades de medida para el volumen; el gramo y la libra sirven para medir el peso y el litro es una medida de capacidad.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

Es el conjunto de medidas derivadas del metro cuyas medidas aumentan y disminuyen como las potencias de 10.

La gran variedad de medidas utilizadas en los distintos países, y aun en las provincias o regiones de un mismo país dificultaban las transacciones comerciales, y fue a raíz de esto que en Francia surgió la idea de crear un sistema de medidas cuya unidad fundamental fuera la unidad de longitud, que ésta tuviera relación con las dimensiones de la Tierra y que sus diversas medidas guardan entre sí la relación que guardan las potencias de 10.

Así, en 1792 la Academia de Ciencias de París encomendó a los profesores Mechain y Delambre que midieran el arco del meridiano terrestre no tiene diez millones de metros, sino 10$_{1}$002,208 metro, por lo tanto, el metro no es exacta sino sólo **aproximadamente** la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre; es decir, un tanto menor.

Por su parte, la Conferencia Internacional de Pesas o medidas de París acordó en 1889 que el **metro legal, padrón o tipo,** fuera la longitud a 0°, de la distancia entre las dos marcas que tiene cerca de sus extremos una regla de platino irradiado construida por el físico Borda. Este **metro legal internacional** se conserva en la Oficina de Pesas y Medidas de Sevres.

Este sistema ha sido aceptado oficialmente por casi todas las naciones del mundo, excepto Inglaterra y Estados Unidos.

MEDIDAS DE LONGITUD

La unidad de las medidas de longitud es el **metro** y se representa con la letra m. Como se dijo, equivale aproximadamente a la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre y se le define como la distancia entre las dos marcas de la regla de platino construida por Borda, a la temperatura de 0°.

Los múltiplos del metro se forman anteponiéndole las raíces o palabras griegas **Deca, Hecto, Kilo y Miria, respectivamente,** y los submúltiplos anteponiéndole las palabras griegas **deci, centi** y **mili**, que significan **décima, centésima** y **milésima** partes, respectivamente.

Dichas medidas **aumentan y disminuyen de diez en diez.**

Los múltiplos y submúltiplos del metro son:

Mm	10,000 m
Km	1000 m
Hm	100 m
Dm	10 m
m	1
dm	0.1 m
cm	0.01 m
mm	0.001 m

Cuando se trata de medidas de precisión muy pequeñas se usa la micra o milésima de milímetro.

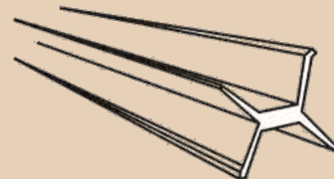
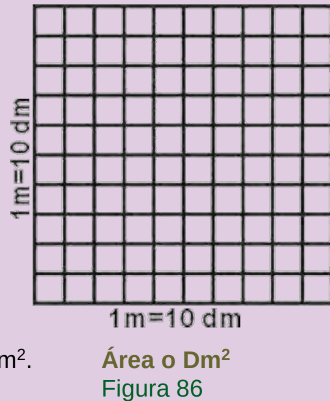


Figura 84

MEDIDAS AGRARIAS

Las medidas de superficie aplicadas a la medición de tierras se conocen como medidas agrarias y su unidad es el área (figura 86), que equivale a un Dm^2 y se representa abreviadamente por á.

Su múltiplo es la **hectárea** (há), que equivale al **Hm^2** y su submúltiplo es la centiárea (cá), que equivale al m^2.



Área o Dm^2
Figura 86

MEDIDAS DE SUPERFICIE

El metro cuadrado es la unidad de las medidas de superficie (figura 85) y se representa como un cuadrado de un metro lineal por lado. Se escribe **m^2.**

Tales medidas aumentan y disminuyen de **cien** en **cien.**

Los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado son:

Mm^2 1	00000000 m^2
Km^2	1000000 m^2
Hm^2	10000 m^2
Dm^2	100 m^2
m^2	1
dm^2	0.01 m^2
cm^2	0.0001 m^2
mm^2	0.000001 m^2

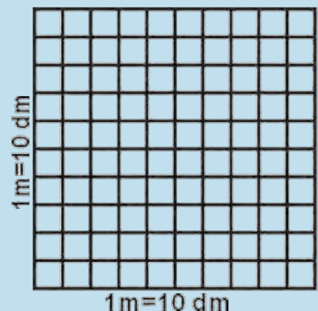


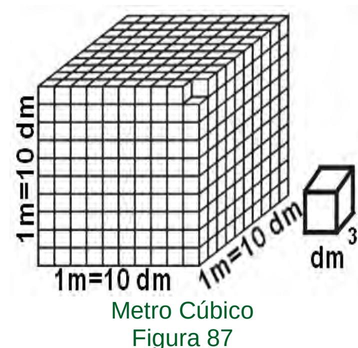
Figura 85

MEDIDAS DE VOLUMEN

Su unidad es el metro cúbico (figura 87), que es un cubo arista de un metro lineal y se representa abreviadamente por m^3. Sus medidas aumentan y disminuyen de mil en mil.

Mm^3	1000000000000 m^3
Km^3	1000000000 m^3
Hm^3	1000000 m^3
Dm^3	1000 m^3
m^3	1 m^3
dm^3	0.001 m^3
cm^3	0.000001 m^3
mm^3	0.00000001 m^3

El metro cúbico utilizado para medir leña recibe el nombre de estéreo cuyo múltiplo es el **decaestéreo,** que vale 10 metros cúbicos, y su submúltiplo el **deciestéreo**, la décima parte de un metro cúbico.



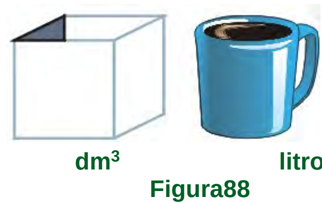
Metro Cúbico
Figura 87

MEDIDAS DE CAPACIDAD

Su unidad de medida es el litro (figura 88), cuya capacidad es igual a un dm^3. Sus medidas aumentan y disminuyen de diez en diez.

Los múltiplos y submúltiplos son:

Ml	10000 l
Kl	1000 l
Hl	100 l
Dl	10 l
l	1 l
dl	0.1 l
cl	0.01 l
ml	0.001 l



dm^3 **litro**
Figura88

MEDIDAS EFECTIVAS

Las **medidas efectivas** son aquellas que existen en la realidad, pues se construyen objetos o instrumentos que las representan, llamados **patrones**, que se utilizan en la industria y el comercio.

Por el contrario, **no efectivas** conocen como **ficticias**; es decir, no existen en la realidad, pero se emplean en el cálculo.

Son **medidas de longitud efectivas** el Hm, doble Dm, Dm, medio Dm, doble metro, metro, medio metro, doble dm, dm, cm, mm y se construyen en forma de cintas de tela o metal, cadenas de agrimensor y reglas de madera o metal.

Son **medidas de capacidad efectivas** el Hl, medio Hl, doble Dl, Dl, medio Dl, doble litro, doble dl, dl, medio dl, doble cl y cl y se construyen en forma de depósitos cilíndricos, generalmente de metal.

Medidas de peso efectivas son las pesas de 50 kg, 20 kg, 10 kg, (mg), 2 kg, 1 kg, medio kg, 2 Hg, 1 Hg y medio Hg, y se construyen en forma de una pirámide truncada de hierro con un anillo para sostenerlas las de 20 g, 10 g (Dg), 5 g, 2 g y 1 g, y se construyen en forma de cilindros de latón que terminan por la parte superior en una especie de botón para tomarlas, y las de 5 dg, 2 dg, 1 dg, 5 cg, 2 cg, 1cg, 5 mg, 2mg y 1 mg, y se fabrican en forma de chapas cuadradas de latón, plata o platino, con una punta doblada para tomarlas.

Las **medidas de superficie y de volumen son ficticias** y no se suelen construir instrumentos que las representen, para medirlas nos valemos de las fórmulas que da la geometría basadas en las medidas de longitud.

MEDIDAS DE PESO

Su unidad de medida es el **gramo** (figura 89), que es el peso de la masa de un centímetro cúbico de agua destilada, pesado en el vació, a la temperatura de 4° del termómetro centígrado y se representa por g.

Dado que un decímetro cúbico de agua destilada contiene 1000 cm^3 de agua destilada, se nombró **kilogramo** al peso de la masa de un dm^3 de agua destilada.

Para representar el kilogramo teórico, el físico Borda construyó un cilindro de platino cuyo peso debería ser el peso de la masa de un kilogramo teórico, o sea, el peso de la masa de un dm^3, de agua destilada. Este cilindro, el **kilogramo tipo**, se halla depositado en los archivos de Sevres, pero su masa es ligeramente superior a la del kilogramo teórico.

Actualmente el **gramo** se define como el peso de la milésima parte de la masa del kilogramo tipo de Borda.

Las medidas de peso aumentan y disminuyen de **diez en diez** y los múltiplos y submúltiplos del gramo son:

Tm	1000000 g
Qm	100000 g
Mg	10000 g
Kg	1000 g
Hg	100 g
Dg	10 g
g	1 g
dg	0.1 g
cg	0.01 g
mg	0.001 g

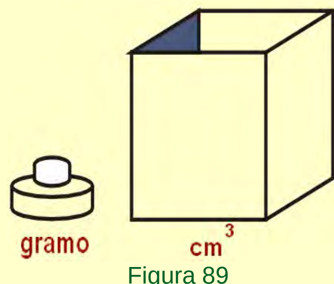


Figura 89

REDUCCIÓN DE UN NÚMERO MÉTRICO QUE EXPRESE UNIDADES DE LONGITUD, CAPACIDAD O PESO A OTRA ESPECIE DADA

Estas tres clases de medidas aumentan o disminuyen de **diez en diez**, y para reducir de una especie superior a otra inferior se multiplica el número dado, y de especie inferior a superior se divide el número dado por la unidad seguida de tantos ceros como lugares separen a la medida dada de aquella a la que se reducirá.

1) Reducir 123 km a m.

Al tratarse de mayor a menor, hay que multiplicar. Contemos los lugares que separan las dos medidas: De km a Hm uno, a Dm dos, a m tres; luego tendremos que multiplicar por la unidad seguida de tres ceros, o sea por 1000 y tendremos:

123 km = 123 × 1000 = 123000 m

2) Reducir 456.789 cm a m.

Tratándose de menor a mayor, hay que dividir. De cm a dm uno, a m dos, luego dividimos por 100 tendremos:

456.789 cm = 456.789 ÷ 100 = 4.56789 m

3) Reducir 12.003 Ml a dl.

Al ser de mayor a menor hay que multiplicar. De Ml a Kl uno, a Hl dos a Dl tres, a l cuatro, a dl cinco, luego multiplicamos por 100000 y tendremos:

12.003 ml = 12.003 × 100000 = 1200300 dl

4) Reducir 114.05 Dg a Qm.

Como es de menor a mayor, hay que dividir. De Dg a Hg uno, a kg dos, a Mg tres, a Qm cuatro, luego dividimos por 10000 y tendremos:

114.05 Dg = 114.05 ÷ 10000 = 0.011405 Qm

EJERCICIOS

Reduce las medidas siguientes:

1. 7.05 Hm a cm	**R**. 70500 cm l	**11.** 1915 g a Tm	**R**. 0.001915 Tm
2. 9 cm a m	**R**. 0,09 m l	**12.** 13 ml a l	**R**. 0.013
3. 193456.8 hm a mm	**R**. 1934.568 mm	**13.** 12 cl a l	**R**. 0.12
4. 9 l a ml	**R**. 9000 ml	**14.** 215 dl a hl	**R**. 0.215 hl
5. 219 hg a dg	**R**. 219000 dg	**15.** 89.89 dl a Kl	**R**. 08989 kl
6. 18.07 dl a dl	**R**. 1807 dl	**16.** 201.201 dl a ml	**R**. 0.00201201 ml
7. 94.56 mg a hg	**R**. 9456	**17.** 14 g a cg	**R**. 1400 cg
8. 125.007 kl a dl	**R**. 12500.7 dl	**18.** 8 dg a mg	**R**. 800 mg
9. 1001001 cg a Kg	**R**. 10.01001 Kg	**19.** 7.001 kg a g	**R**. 7001 g
10. 87.723 ml a l	**R**. 877230 l	**20.** 81 Qm a hg	**R**. 81000 hg
		21. 7 Tm a mg	**R**. 700 mg
		22. 35.762 dg a Qm	**R**. 0.0035762 Qm
		23. 15 Dm a cm	**R**. 15000 cm

REDUCCIÓN DE UN NÚMERO MÉTRICO A OTRA EXPRESIÓN

Para reducir un número métrico que exprese unidades de superficie a otra especie dada, de superior a inferior se multiplica; y de inferior a superior se divide el número dado por la unidad seguida tantas veces dos ceros como lugares separen a la medida dada a aquella a la que se va a reducir.

1) Reducir 18 Hm^2 a m^2.

Al ser de mayor a menor hay que multiplicar. De Hm^2 Dm^2 uno, a m^2, dos; luego multiplicamos por la unidad seguida de dos grupos de dos ceros y tendremos:

18 Hm^2 = 18 × 10000 = 180000 m^2

2) Reducir 3456.789 mm^2 a Dm^2.

Se trata de mayor a menor, por lo que hay que dividir, De mm^2 a cm^2 uno, a dm^2 dos, a m^2 tres, a dm^2 cuatro; luego dividimos por la unidad seguida de cuatro grupos de dos ceros, o sea por 100000000 y tendremos:

3456.789 mm2 = 3456.789 ÷ 100000000 0.00003456789 Dm2

3) Reducir 14.32 há a cá.

Como la há es igual al Hm^2 y la cá igual al m^2 tendremos que multiplicar, porque es de mayor a menor. De há a área uno, a cá dos; luego multiplicamos por 10000 y tendremos:

14.32 há = 14.32 × 10000 = 143200 cá

EJERCICIOS

Reduce las medidas siguientes:

1. 57 mm^2 a dm^2	**R**. 0.0057 dm^2
2. 9 hm^2 a m^2	**R**. 90000 cm^2
3. 56 km^2 a m^2	**R**. 56000000 m^2
4. 7.8965 Km^2 a dm^2	**R**. 78965 dm^2
5. 7 há a á	**R**. 700 á
6. 15 á a cá	**R**. 150000 cá
7. 23 á a ca	**R**.2300 cá
8. 37 dm^2 a dm^2	**R**. 370000 dm^2
9. 123-45 há a á	**R**. 1234500 cá
10. 89.003 á a cá	**R**. 8900.3 cá
11. 19876543 á a Km^2	**R**. 1987.6543 Km
12. 7.001 Km^2 a há	**R**. 700.1 há
13. 9 mm^2 a cm^2	**R**. 0.09 cm^2
14. 1224 cm^2 a dm^2	**R**. 0.001224 dm^2
15. 1089 m^2 a hm^2	**R**. 0.1089 hm^2
16. 8.7 m^2 a dm^2	**R**. 0.087 dm^2
17. 9 cá a á	**R**. 0.09 á
18. 115 cá a á	**R**. 1.15 á
19. 9 m^2 a dm^2	**R**. 900 dm^2
20. 345 á a há	**R**. 3.45 há
21. 1234 há a km^2	**R**. 12.34 Km^2
22. 6 á a há	**R**. 0.06 há

EJERCICIOS

Reduce las medidas siguientes:

1. 14 hm^3 a dm^3
R. 14000000000 dm^3

2. 14.567 km^3 a m^3
R. 14567000000 m^3

3. 23.7657 mm^3 a m^3
R. 23765700000000 m^3

4. 23.789876 km^3 a cm^3
R. 23789876000000000 cm^3

5. 8765 dm^3 a hm^3
R. 0.000008765 hm^3

6. 123456789 dm^3 a km^3
R. 0.000123456789 km^3

7. 1215 dm^3 a mm^3
R. 0.000001215 mm^3

8. 876 m^3 a mm^3
R. 0.000000000876 mm^3

9. 76895.7345 cm^3 a km^3
R. 0.0000000000768957345 km^3

10. 3457689.003 dm^3 a mm^2
R. 0.003457689003 hm^3

REDUCCIÓN DE UN NÚMERO MÉTRICO DE VOLUMEN

Para reducir **un número métrico** que exprese **unidades de volumen a otra especie dada**, de inferior a superior se multiplica de inferior a superior se divide el número dado por la unidad seguida de tantas veces tres ceros como lugares separen a la medida dada que aquella a la que se va a reducir.

1) Reducir 345.76 m^3 a cm^3.

Es de mayor a menor por lo que, hay que multiplicar. De m^3 a dm^3 uno, a cm^3 dos; luego multiplicamos por la unidad seguida de dos grupos de tres ceros, o sea por 100000 y tendremos:

345.76 m3 = 345.76 × 100000 = 345760000 cm3

2) Reducir 85.72 m^3 a Mm^3.

Como es de menor a mayor hay que dividir. De m^3 a Dm^3 uno, Hm^3 dos, a km^3 tres, a Mm^3 cuatro; luego hay que dividir por la unidad seguida de cuatro grupos de tres ceros, o sea por 1000000000000 y tendremos:

85.72 m3 = 85.72 ÷ 1000000000000 = 0.0000000008572 Mm3

EJERCICIOS

Miscelánea, reduce estas medidas:

1. 0.56 Hg a Tm	**R.** 0.000056 Tm
2. 14 hm^2 a m^2	**R.** 140000 m^2
3. 2 cm^3 a m^3	**R**. 0.000002 m^3
4. 1850 km a m	**R**. 1850000 m
5. 16 Dm a Hm	**R**. 1.6 Hm
6. 18 Dl a cl	**R**. 18000 cl
7. 186.325 mm^2 a m^2	**R**. 0.000186325 m^2
8. 54 Hm a m	**R**. 5400 m
9. 0.0806 Hm a dm	**R.** 80.6 dm
10. 180.056 m^2 a á	**R.** 1.80056 á
11. 16.50 Mm a Hm	**R.** 1650 Hm
12. 128.003 kg a Dg	**R**. 12800.3 Dg
13. 195.03 Mm^2 a Dm^2	**R**.195030000 Dm^2
14. 165.345 m a cm	**R.** 16543.5 cm
15. 1832 Tm a g	**R.** 1832000000 g
16. 14.0056 cm^2 a á	**R.** 0.0000140056 á
17. 18 m^2 a há	**R.** 0.0018 há
18. 85.003 dm a mm	**R.** 850030 mm
19. 1230.05 cl a ml	**R.** 0.00123005 ml
20. 1/8 qm a hg	**R.** 125 hg
21. 2/9 cm^3 a dm^3	**R.** 0.00022 dm^3
22. 5 1/8 cá a á	**R.** 0.05125 á
23. 5 1/2 dl a ml	**R.** 55000 ml
24. 5063.0032 ml a hl	**R.** 0.050630032 hl
25. 1936 m^3 a dm^3	**R.** 1936000 dm^3
26. 19336 cm^2 a dm^2	**R.** 0.019336 dm
27. 18.0035 m a mm	**R.** 18003.5 mm
28. 0.832 á a cá	**R.** 83.2 cá
29. 1832 cl a dl	**R.** 1.832 dl
30. 0.0506 m^3 a dm^3	**R.** 0.0000506 dm^3
31. 1864.003 m a mm	**R.** 0.1864003 mm
32. 123.056 kl a ml	**R.** 123056000 ml
33. 0.05 m^3 a hm^3	**R.** 0.00000005 hm^3
34. 8 g a tm	**R.** 0.000008 tm
35. 5 1/4 há a cá	**R.** 52500 cá
36. 6 2/3 m^3 a dm^3	**R.** 6666 2/3 dm^3
37. 3/5 l a cl	**R.** 60 cl
38. 7 3/4 cm^2 a dm^2	**R.** 0.00000775 dm^3
39. 11 1/5 g a mg	**R.** 11200 mg
40. 156.003 dm^3 a dm^3	**R.** 156003000 dm^3
41. 143.056 dm a km	**R.** 1.43056 km
42. 19932 mm^2 a há	**R.** 199320000 há
43. 98035005 dm^3 a m^3	**R.** 98035.005 m^3

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO MÉTRICO DECIMAL

Para reducir un incomplejo métrico que exprese unidades de longitud, peso o capacidad a complejos, se considera la última cifra entera como la especie dada. Hacia su izquierda cada cifra representa una especie superior, y hacia la derecha una especie inferior.

1) Reducir a complejo 345.78 Hm.

La última cifra entera, el 5, expresará Hm. Hacia su izquierda, la cifra siguiente representa la especie superior a Hm o sea km, y el 3 representa Mm. Hacia su derecha el 7 representa la especie inferior a Hm, o sea Dm y el 8 m, y tendremos:

345,78 Hm = 3 Mm 4 km 5 Hm 7 Dm 8m

2) Descomponer 98006 dm.

La última cifra entera, el 6, son dm y hacia su izquierda el primer 0 son m el otro 0 son Dm, el 8 Hm y el 9 km, y tendremos:

98006 dm = 9 km, 8 Hm, 6 dm

3) Descomponer 7004.89 kg.

Tendremos:

7004.89 kg = 7 Tm, 4 kg, 8 Hg, 9 Dg

4) Reducir a complejo 23456.71 Hl

Tendremos:

23456.71 Hl = 234 Ml, 5 Kl, 6 Hl, 7 Dl, 1 l

En este caso, al llegar a Ml se terminaban las medidas y quedaba todavía dos cifras, por tanto las referimos todas a la especie Ml.

REDUCCIÓN DE UN INCOMPLEJO MÉTRICO DE SUPERFICIE

Para reducir un incomplejo métrico que exprese unidades de superficie a complejo, se considera el número que forman las dos últimas cifras enteras como la especie dada. Hacia la izquierda de este grupo, cada grupo de dos cifras representa una especie superior y hacia la derecha una especie inferior. Si a la derecha queda una sola cifra, se le añade un cero para completar el grupo de dos cifras.

1) Reducir a complejo 567.897 km^2.

Las dos últimas cifras enteras 67 son km^2, hacia su izquierda, 5 son Mm^2 y hacia su derecha, 89 son Hm^2 y 70 (se añade un cero) Dm^2, y tendremos:

567.897 km2 = 5 Mm2, 67 km2, 89 Hm2, 70 Dm2

2) Descomponer 560034.654 há.

Las dos últimas cifras enteras 34 son há; hacia su izquierda tenemos 00 km^2, 56 Mm^2 y hacia la derecha 65 á y 40 cá, o sea

560034.654 há = 56 mm2, 34 há, 65 á, 40 cá

REDUCCIÓN DE UN INCOMPLEJO MÉTRICO DE VOLUMEN

Para reducir un **incomplejo métrico** que exprese **unidades de volumen a complejo** se toma el número que forma las tres últimas cifras enteras como la especie dada. Hacia la izquierda de este grupo, cada grupo de tres cifras representa una especie superior y hacia la derecha una especie inferior. Si a la derecha queda una cifra, se le añaden dos ceros, y se quedan dos, se le añade un cero para completar el grupo de tres cifras.

Reducir a complejo 56789.0045 m^3.

Las tres últimas cifras enteras 789 son m^3, hacia su izquierda 56 son Dm^3 y hacia su derecha 004 son dm^3 y 500 cm^3 y tendremos:

56789.0045 m^3 = 56 Dm^3, 789 m^2, 4 dm^2, 500 cm^3

EJERCICIOS

Reduce a complejo:

1. 116 há	**R.** 1 km^2 16 há
2. 1603 m^3	**R.** 1 dm^3 603 m^3
3. 189.003 dm	**R.** 1 km 8 hg 9 dg 3 cg
4. 1803564 dm^3	**R.** 1 km^3 803 hm^3 564 dm^3
5. 1803.05 hm^3	**R.** 1 km^3 803 hm^3 50 dm^3
6. 1234.056 ml	**R.** 1234 ml 5 hl 6 dl
7. 89325 m^2	**R.**8 hm^2 93 dmm^2 25 mm^2
8. 0.00013 hm^2	**R**. 1 m^2 30 dm^2
9. 98.003 Mm	**R**. 98 Mm 3 dm
10. 1890.00003 á	**R**. 18 há 90 á 30 cm^2
11. 186432.007 há	**R**. 18 Mm^2 64 Km^2 32 há 70 cá
12. 0.0013 dm^3	**R**.1 cm^3 300 mm^3
13. 1403.564 Kg.	**R**.1 Tm 4 Qm 3 Kg 5 hg 6 dg 4 g
14. 0.05 cm^3	**R**.50 mm^3
15. 1056.00432 hl	**R**.10 ml 5 Kl 6 hl 4 dl 3 ol 2 ml
16. 0.00356 Qm	**R**.3 hg 5 dg 6 g
17. 285 $\frac{3}{4}$ dm	**R**.2 Km 8 hm 5 dm 7 m 5 dm
18. 108.0035 dm	**R**. 1 á 8 cá 35 cm^2
19. 0.56896 Tm	**R**. 5 Qm 6 Mg 8 Kg 9 HG 6 hg
20. 879 $\frac{4}{5}$ Tm	**R**. 879 Tm 8 Qm

REDUCCIÓN DE UN COMPLEJO MÉTRICO A INCOMPLEJO

Para **reducir** un **complejo métrico** a **incomplejo** se reduce cada una de la especie pedida y se suman esos resultados.

1) Reducir 5 kl, 14 l y 34 dl a Hl.

5 Kl a Hl = 5 × 10 = 50 Hl
14 l a Hl = 14 ÷ 100 = 0.14 Hl
34 dl a Hl = 34 ÷ 1000 = 0.034 Hl
50.174 Hl

2) Reducir 3 Km^2, 16 há, 6 cá a m^2.

3 Km^2 a m^2 = 3 × 1000000	=	3000000 m^2
16 há a m^2 = 16 × 10000	=	160000 m^2
6 cá =	=	6 m^2
345 mm^2 a m^2 = 345 ÷ 1000000 =		0.000345 m^2
		3160006.000345 m^2

3) Reducir 14 Hm^3, 45 Dm^3, 6 cm^2 a Hm^3.

14 Hm^3	=	14 Hm^3
45 Dm^3 a Hm^3 = 45 ÷ 1000	=	0.045 Hm^3
6 cm^3 a Hm^3 = 1000000000000	=	0.000000000006 Hm^3
		14.045000000006 Hm^3

EJERCICIOS

Reduce a la especie indicada:

1. 19 Mm, 16 m, 1142 dm a Hm	**R.** 1901.302 Hm
2. 14 Km, 10 Dm, 8 cm a mm	**R.** 14100080 mm
3. 8 Dm, 6 dm, 114 mm a m	**R.** 80.714 m
4. 8 Tm, 105 Hg, 12 cg a mg	**R.** 8010500120 mg
5. 14 Hl, 18 Dl, 115 l a cl	**R.** 169500 cl
6. 14 Dm^3, 13.5 m^3, 9.4 mm^3 a Dm^3	**R.** 14.09135000000094 Dm^3
7. 19 l, 8 dl, 6 cl a Hl	**R.** 0.01986 Hl
8. 14 m, 5 dm, 8 cm a Dm	**R.** 1.458 Dm
9. 9 Km^2, 6 Dm^2, 8 m^2 a m^2	**R.** 9001608 m^2
10. 9 Kg, 12 g, 16 mg a dg	**R.** 90120.16 dg
11. 8 Hm^2, 9 m^2, 114 cm^2 a dm^2	**R.** 8000901.14 dm^2
12. 14 há, 8 á, 16.2 cá a á	**R.** 1408.162 á
13. 15 Km^2, 16 á, 8 cá, 9 dm^2 a há	**R.** 1500.160809 há
14. 9 m^3, 143 dm^3, 114 mm^3 a mm^3	**R.** 9143000114 mm^3
15. 8 Km^3, 19 Dm^3, 112 cm^3 a m^3	**R.** 8000019000.000112 m^3
16. 6.2 mm^3, 19 m^3 a Dm^3	**R.** 0.0190000000062 Dm^3
17. 8.6 Kl^3, 1024 l, 10.56 dl a Hl	**R.** 96.25056 Hl

PROBLEMAS RELACIONADOS CON MEDIDAS DE LONGITUD

1. Las ruedas de un automóvil tienen una circunferencia de 2 m 62 cm ¿Cuántas vueltas dará cada rueda si el auto recorre una distancia de 2 Km, 132 m, 68 cm?

Cada vez que las ruedas dan una vuelta, el auto avanza 2 m 62 cm; luego, el número de vueltas que da cada rueda será las veces que 2 m 62 cm esté contenido en la distancia recorrida.

Si reducimos la distancia a m: 2 km, 68 cm = 2132.68 m.

Al reducir la circunferencia de las ruedas a m.

2m 62 cm = 2.62 m

Cada rueda dará:

2132.68 m ÷ 2.62 m = 814 vueltas

2. ¿Cuánto costará cercar un potrero rectangular de 8 Hm, 6 m, 14 cm de largo por 316 m, 28 cm de ancho, si el metro de cerca, incluyendo la mano de obra, se cobra a $0.60?

Tenemos que hallar el perímetro del potrero. Como es rectangular tiene dos lados que miden 8 Hm, 6 m 14 cm = 806.14 cada uno, y otros dos lados que miden 316 m, 28 cm = 316.28 m cada uno.

Luego, el perímetro del potrero será:
(806.14 m + 319.28 m) × 2 = 2244.84 m

Por lo tanto, la longitud de la cerca debe ser de 2244.84 m.

Como cada metro se cobra a $0.60, el costo del trabajo será:

2244.84 m × $0.60 = 1346.90

PROBLEMAS RELACIONADOS CON MEDIDAS DE SUPERFICIE

1. Un terreno rectangular de 14 Dm de largo por 8.50 m de ancho se vende a $7.50 el m^2. ¿Cuánto importará la venta?

Primero hay que averiguar cuántos metros tiene el terreno. Para buscar la superficie se multiplica el largo por el ancho, y como se busca la superficie en m^2, hay que reducir el largo y el ancho a m y después multiplicar:

14 Dm a m = 14 × 10 = 140 m
8.50 m = = 8.50 m
140 m × 8.50 m = 1190 m^2

Como cada m^2 se vende a $7.50, se multiplica la superficie en m^2 por $7.50 y tendremos:

1190 m2 × $7.50 = $8925

2. Una sala rectangular de 4.6 Dm por 35.4 dm se pavimenta con losas de 20 cm por 16 cm. ¿Cuántas losas se requerirán?

Primero se busca la superficie de la sala y la superficie de una losa para después dividir la superficie de la sala por la de una losa y así saber cuántas losas caben.

Para conocer la superficie de la sala multiplicamos su largo por su ancho, pero previamente hay que reducirlos a una misma medida, por ejemplo a m y tendremos:

4.6 Dm a m = 4.6 × 10 = 46 m
35.4 dm a m = 35.4 ÷ 10 = 3.54 m

Superficie de la sala:

46 m × 3.54 m = 162.84 m2

Para hallar la superficie de una losa, multiplicamos su largo por su ancho.

Superficie de una losa:

20 cm × 16 cm = 320 cm2

A continuación dividimos la superficie de la sala 162.84 m^2, entre la superficie de una losa, pero antes reducimos las dos a una misma medida, por ejemplo 162.84 m^2 a cm^2, y tendremos:

162.84 m^2 a cm^2 =
162.84 × 10000 = 1628400 cm^2

Para pavimentar la sala se requerirán:

$1628400 \div 320 = 5088\frac{3}{4}$ losas

3. Un terreno rectangular de 14 há, 8 cá mide 45.6 Dm. ¿Cuántos metros tiene de ancho?

Si se conoce la extensión o superficie y una de las dimensiones, para hallar la otra se divide la superficie por la dimensión conocida, pero es necesario reducirlas previamente a una misma medida.

Reducimos la superficie 14 há 8 cá a una sola medida, por ejemplo cá:

14 há a cá = 14 × 10000 = 140000 cá
8 cá = = 8 cá
140008 cá

En seguida dividimos 140008 cá o m^2 entre lo largo 45.6 Dm, pero antes reducimos los 45.6 Dm a m.

45.6 Dm a m = 45.6 × 10 = 456 m

El ancho del terreno será:

140008 m2 ÷ 456 m = $307\frac{2}{57}$ m.

4. Un terreno cuadrado de 3 Hm, 6 Dm de lado se vende a 500 dólares el área. ¿Cuál es su precio total?

Se busca la superficie del terreno en áreas y se multiplica por 500 dólares, pero como el terreno es cuadrado, de largo será igual al ancho; por tanto la superficie será:

3 Hm 6 Dm =
36 Dm 36 Dm × 36 Dm =
1296 Dm^2 o á

El terreno cuesta:

1296 × 500 = 648000 dólares

PROBLEMAS RELACIONADOS CON MEDIDAS DE VOLUMEN

1. ¿Cuál será el volumen de una caja de 35 dm de largo, 16 dm de ancho y 140 cm de altura?

Para hallar el volumen se multiplican las tres dimensiones, pero reduciéndolas previamente a una misma medida, por ejemplo a dm.

Sólo hay que reducir los 140 cm de alto a dm, porque las otras dimensiones ya están expresadas en dm:

140 cm a dm = 140 ÷ 10 = 14 dm

El volumen de la caja será:

$35 \text{ dm} \times 16 \text{ dm} \times 14 \text{ dm} = 7840 \text{ dm}^3$

2. En una columna de ladrillos de 48 m^3, ¿cuántos ladrillos habrá si cada uno tiene 4 dm de largo, 10 cm de ancho y 6 cm de alto?

Se divide el volumen de la columna por el volumen de un ladrillo? Para hallar el volumen de un ladrillo se multiplican sus tres dimensiones, reduciéndolas previamente a una misma medida, por ejemplo a m:

4 dm a m = 4 ÷ 10 = 0.4 m
10 cm a m = 10 ÷ 100 = 0.1 m
6 cm a m = 6 ÷ 100 = 0.06 m

El volumen de un ladrillo será:

0.4 m × 0.1 m × 0.06 m = 0.0024 m3

Y la columna tendrá:

48 m3 ÷ 0.0024 m3 = 20000 ladrillos.



Figura 90

PROBLEMAS RELACIONADOS CON MEDIDAS DE CAPACIDAD

1. Si el Dl de vino se paga a 20 dólares, ¿cuánto valdrá cada botella de 65 cl si las botellas vacías se pagan a 5 dólares el ciento?

Si un Dl ó 10 litros de vino cuestan 20 dólares, un litro costará

$20 ÷ 10 = $2

Como 1 litro o 100 cl cuestan 2 dólares, 1 cl costará

$2 ÷ 100 = $0.02

y si cada botella contiene 65 cl de vino, el vino de cada botella costará

$0.02 × 65 = 1.30 dólares

Si las botellas se pagan a 5 dólares el ciento, 1 botella vale

$5 ÷ 100 = $0.05

por tanto, una botella llena de vino vale:

$1.30 + $0.05 = 1.35 dólares

PROBLEMAS RELACIONADOS CON MEDIDAS DE PESO

1. La mitad del agua que puede contener un depósito pesa 123 kg.

¿Cuántos Dg pesarán los $\frac{2}{5}$ del agua contenida en el depósito cuando está lleno?

Si la mitad del agua pesa 123 kg, cuando el depósito esté lleno contendrá una cantidad de agua que pesará 123 kg × 2 = 246 kg = 24600 Dg. Luego, $\frac{1}{5}$ del agua que contiene el depósito cuando está lleno pesa 24600 dg ÷ 5 = 4920 dg y los $\frac{2}{5}$ pesarán 4920 Dg × 2 = 9840 dg.

EQUIVALENCIAS DE MEDIDAS

PESO	CAPACIDAD	VOLUMEN
m……….......	Kl....................	m^3.......
Kg……….......	l................	dm^3.....
g……….......	ml...........	cm^3.....

Las equivalencias entre las medidas de capacidad y volumen son válidas para todos los cuerpos, pero entre éstas las de peso sólo son exactas para el agua destilada. Para los demás cuerpos hay que tomar en cuenta su densidad. Si se trata de cuerpos más densos que el agua destilada sucederá que 1 Kl o 1 m^3 de estos cuerpos pesará más de 1 Tm; 1 litro o 1 dm^3 más de 1 kg y 1 ml o 1 cm^3 más de 1 g, y si se trata de cuerpos menos densos que el agua destilada, sucederá que 1 Kl o 1 m^3 de estos cuerpos pesará menos de 1 Tm, 1 litro o 1 dm^3 menos de 1 Kg y 1 ml o 1 cm^3 menos de 1 g.

EJERCICIOS

1. A un cuadro rectangular de 80 cm por 60 cm se le pone un marco que cuesta, incluyendo la mano de obra, a 3 dólares el dm. ¿Cuánto importará el marco? **R.** $84.

2. ¿Cuántas varillas de 28 cm de longitud se pueden sacar de una vara de madera de 5 m 6 dm? **R.** 20.

3. ¿Cuánto costará pavimentar un cuarto cuadrado de 4 m por 4 m con losas de 20 cm por 20 cm que se compran a $50 el millar? **R.** 20.

4. La casa tiene 400 m^2 y mide de largo 40 m. ¿Cuántos dm tiene de ancho? **R.** 100 dm

5. Una sala tiene 12 m de largo, 5 m de ancho y 4 m de altura. ¿Cuánto más alta que esta sala es otra sala del mismo largo y ancho en la cual, entrando 30 personas corresponden 9 m de aire a cada una? **R.** 50 cm

6. Si un litro de ron cuesta $1.50, ¿a cómo hay que vender el vasito de 5 cl para que la ganancia de un litro sea igual al costo? **R.** $0.15.

7. Se hace una aleación de 3 kg 5 Hg de plata con 45 g de níquel. ¿Cuánto se obtendrá de la aleación si el Dg se vende a bs 42.50? **R.** bs 15066.25

EJERCICIOS CON EQUIVALENCIAS

Los ejercicios siguientes toman como base el agua destilada.

1) Si el agua de un depósito pesa 12.56 kg, ¿cuántos litros de agua contiene?

1 litro de agua pesa 1 kg, por tanto en el depósito habrá 12.56 l de agua.

2) ¿Cuál es el volumen en dm^3 de una masa de agua que pesa 345.32 g?

345.32 g = 0.34532 kg y como un dm^3 de agua pesa un 1 kg, el volumen de esa masa de agua será 0.34532 dm^3.

3) ¿Cuántos ml de agua pesan 3 Qm y 4 kg?

1 ml de agua pesa 1 g por lo que debemos reducir el complejo a g:

3 Qm a g = 3 × 100000 = 300000 g
4 Kg a g = 4 × 1000 = 4000 g
304000 g o ml

4) El agua de un depósito pesa 13.45 Hg, ¿cuántos dl de agua contiene?

El agua pesa 13.45 Hg = 1.345 kg y como un litro de agua pesa 1 kg, en el depósito habrá 1.345 l de agua = 0.1345 Dl.

5) ¿Cuántos Qm pesan 14 m^3 13 mm^3 de agua?

Primero se reduce el volumen del agua a dm^3.

14 m3 = 14 ÷ 1000 = 14000 dm3
13 mm3 = 13 ÷ 1000000 = 0.000013 dm^3
= 14000.000013 dm^3

1 dm^3 de agua pesa 1 kg, por tanto, el peso del agua será
14000.000013 Kg = 140.00000013 Qm

EJERCICIOS

1. 165 cm^3 a l	**R.** 0.165 l
2. 20356 dm^3 a g	**R.** 20356400 g
3. 10.45 ml a m^3	**R.** 0.00001045 m^3
4. 20.345 l a g	**R.** 20345 g
5. 8.65 m3 a kg	**R.** 8650 kg
6. 156.34 kg a cm^3	**R.** 156340 cm^3
7. 195 Kl a dm^3	**R.** 195000 dm^3
8. 1834.563 m^3 a l	**R.** 1834563 l
9. 51.032 Dg a m^3	**R.** 0.00051032 m^3
10. 1142.003 mm^3 a Hl	**R.** 0.00001142003 Hl
11. 18134 Hg a Hl	**R.** 18.134 Hl
12. 103.54 Hm^3 a Hg	**R.** 1035400000000 Hg
13. 8 kg 6 Dg a dm^3	**R.** 8.06 dm^3
14. 8 Dm^3 14m^3 6 cm a Dl	**R.** 801400.0006 Dl
15. 14 Ml 8 Dl 16 cl a Dg	**R.** 14008016 Dg
16. 8 Qm 14 g 16 dg 6 cg a cl	**R.** 80001.566 cl
17. 19 Ml 14 Dl 8 dl 14 cl a Dm^3	**R.** 0.19014094 Ml

PROBLEMAS SOBRE EQUIVALENCIAS ENTRE MEDIDAS DE PESO, CAPACIDAD Y VOLUMEN

¿Cuántos litros de agua caben en un depósito de 10 m de largo, 6.5 de ancho y 45 dm de altura?

Se busca el volumen del depósito, y gracias a las equivalencias que conocemos, buscamos la capacidad.

El volumen del depósito es:

10 m × 6.5 m × 4.5 m = 292.5 m3 = 292500 dm3

1 dm3 equivale a 1 litro por lo que en el depósito caben 292500 l.

Un cubo lleno de agua pesa 9 kg, 6 Hg, y vacío pesa 1.2 kg. ¿Cuántos litros de agua contiene el cubo lleno?

El cubo lleno pesa 9 kg, 6 Hg = 9.6 kg, y vacío, 1.2 kg; luego, la diferencia

9.6 kg - 1.2 kg = 8.4 kg

es el peso del agua. Si un litro de agua pesa 1 kg, el cubo contiene 8.4 litros de agua.

EJERCICIOS

1. La capacidad de un estanque es de 14 m^3 16 dm^3. ¿Cuántos dl de agua contendrá si se llena hasta la mitad? **R.** 70080 dl.

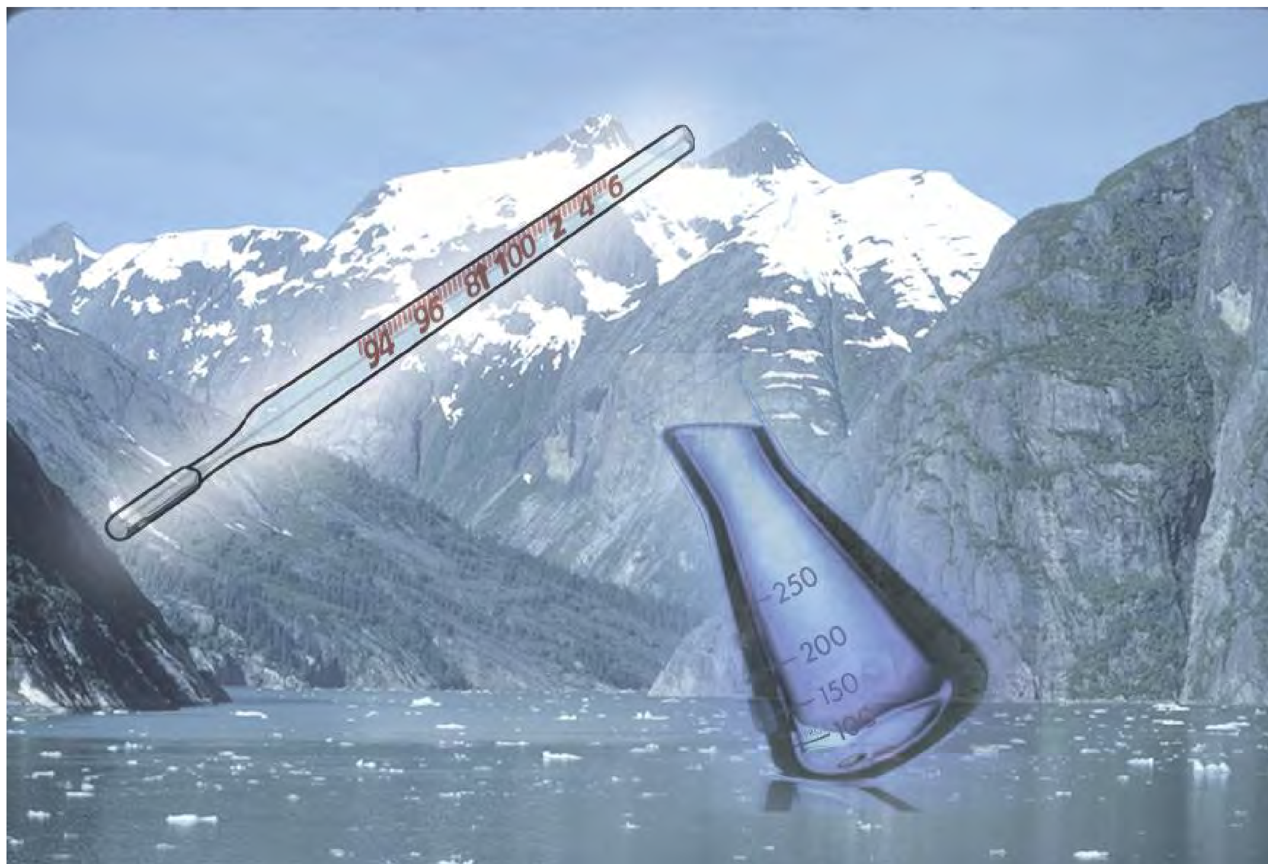
2. Un cubo lleno de agua pesa 14 kg 5 Hg y vacío 4 Dg. ¿Cuántos litros contiene lleno? **R.** 14.46 l.

3. ¿Cuántos litros de agua contiene lleno un tanque de 80 cm × 60 cm × 50 cm? **R.** 240 l.

4. Si un tanque de 1 m de altura por 90 cm de ancho por 1.20 m de largo contiene 534 litros de agua, ¿cuánta agua habrá que echarle para llenarlo? **R.** 546 l.

5. Un depósito de 3 m de largo, 2 m de ancho y 1.50 m de altura está lleno hasta sus tres cuartas partes. ¿En cuanto tiempo acabará de llenarlo un grifo que vierte 50 litros de agua por minuto? **R.** 45 minutos.

6. Se compran 4 Dl 6 litros de agua destilada por $9.20. ¿A cómo sale el gramo de agua? **R.** $0.0002.



La densidad de los cuerpos viene del Principio de Arquímedes. Lefevre-Gineau y Gineau y Giovanni V. Matías Fabroni, quienes investigaban el valor del gramo, descubrieron que el mínimo volumen del agua destilada se produce a los 4° C.

CAPÍTULO XXXVII

DENSIDAD

La **densidad** es el número que representa el peso, en gramos, de un centímetro cúbico de un cuerpo determinado.

Por ejemplo, 1 cm^3 de alcohol pesa 0.79 gramos; por tanto, la densidad del alcohol es 0.79; 1 cm^3 de agua de mar pesa, en término medio, 1.03 g, por lo que su densidad es 1.03.

Si un cm^3 de alcohol pesa 0.79 g es evidente que 1 dm^3, 1000 veces mayor, pesará mil veces más: 790 gr = 0.79 Kg, y 1m^3 de alcohol, un millón de veces mayor que el cm^3, pesará un millón de veces más; 7900000 g = 0.79 Tm.

Por lo mismo podemos decir también que la **densidad** de un cuerpo es el número que representa el peso en Kg de 1 dm^3 del cuerpo o el peso en Tm de m^3 del cuerpo.

CUERPOS MÁS Y MENOS DENSOS QUE EL AGUA

Si 1 cm^3 de un cuerpo pesa más de un gramo, es más denso que el agua destilada, porque 1 cm^3 de agua destilada, a 4° centígrados, pesa un gramo, que se toma como **unidad** para determinar las densidades; por el contrario, si 1 cm^3 de un cuerpo pesa menos de un gramo, es **menos denso que el agua destilada**.

En conclusión, los cuerpos **más densos** que el agua destilada son aquellos cuya **densidad es mayor que 1**, y los menos densos aquellos cuya **densidad es menor que 1**.

CUERPOS	DENSIDAD	CUERPOS	DENSIDAD	CUERPOS	DENSIDAD
Aceite de oliva	0.91	Cedro	0.52	Leche	1.03
Acero	7.7	Cerveza	1.02	Marfil	1.87
Agua destilada	1	Cobre	8.9	Mármol	2.7
Agua de mar	0.00129	Corcho	0.24	Mercurio	13.59
Aire	0.00129	Diamante	3.5	Níquel	8.67
Alcohol	0.79	Estaño	7.3	Oro	19.36
Aluminio	2.58	Éter	0.72	Plata fundida	10.6
Arena	2.3	Gasolina	0.73	Platino	21.5
Azúcar	1.6	Glicerina	1.26	Petróleo	0.80
Bencina	0.90	Hielo	0.92	Plomo	11.35
Bronce	8.8	Hierro	7.8	Vino	0.99

ENCONTRAR LA DENSIDAD DE UN CUERPO

Conociendo el peso y volumen de un cuerpo sólo hay que dividir el peso entre el volumen para conocer su densidad:

1) Si sabemos que 90 cm^3 de aceite de oliva pesan 81.9 g, ¿cuál es su densidad?

Al ser la densidad el peso en gramos de 1 cm^3 del cuerpo, se divide el peso total que son 81.9 g, por el volumen de 90 cm^3 y así obtendremos el peso en g de 1 cm^3 del cuerpo:

$\frac{81.9 \text{ g}}{90 \text{ cm}^3} = 0.91$, esta es la densidad del aceite de oliva.

2) Si 3 dm^3 de oro pesan 58.08 kg, ¿cuál es su densidad?

Siendo la densidad el peso en kg de 1 dm^3 del cuerpo, se divide el peso, que son 58.08 kg, por los 3 dm^3 del cuerpo y así obtendremos el peso en kg de 1 dm^3 del cuerpo:

$\frac{58.08 \text{ kg}}{3 \text{ dm}^3} = 19.36$, esta es la densidad del oro.

3) Si 3 litros de leche pesan 3.09 Kg, ¿cuál es su densidad?

3 litros = 3 dm^3 de leche, y como la densidad es el peso en Kg de 1 dm^3 de leche, tendremos:

$\frac{3.09 \text{ kg}}{3 \text{ dm}^3} = 1.03$, esta es la densidad de la leche.

EJERCICIOS

Encuentra la densidad de estos cuerpos comprobando los resultados con la tabla anterior de densidades:

ELEMENTO DENSIDAD			
1. Platino	sabiendo que	8 cm^3	pesan 172 g
2. Cobre	sabiendo que	20 cm^3	pesan 178 g
3. Hierro	sabiendo que	30 cm^3	pesan 234 g
4. Diamante	sabiendo que	0.4 cm^3	pesan 1.4 g
5. Corcho	sabiendo que	2 dm^3	pesan 0.48 kg
6. Cedro	sabiendo que	0.05 dm^3	pesan 0.026 kg
7. Caucho	sabiendo que	0.01 dm^3	pesan 0.0093 kg
8. Leche	sabiendo que	1 litro	pesan 1.03 kg
9. Éter	sabiendo que	2 cl	pesan 14.4 g
10. Cerveza	sabiendo que	3 l	pesan 3 Kg 60 g
11. Aire	sabiendo que	9m^3	pesan 0.01164Tm
12. Vino	sabiendo que	300 ml	pesan 297 g
13. Gasolina	sabiendo que	30 l	pesan 18.2 g
14. Mármol	sabiendo que	43 cm^3	pesan 116.1 g

PESO DE UN CUERPO

Si se conoce el volumen y densidad de un cuerpo sólo hay que multiplicar el volumen por la densidad para conocer su peso:

$$P = V \times D$$

Cuando el volumen se da en cm^3, el peso resulta en g; si se da en dm^3, resulta en kg, y en m^3, resulta en Tm.

1) ¿Cuánto pesa una barra de hierro de 800 cm^3?

La densidad del hierro, según la tabla, es 7.8, esto significa que 1 cm^3 de hierro pesa 7.8 g, por tanto 800 cm^3 de hierro pesarán 800 veces más:

$$800 \text{ cm3} \times 7.8 \text{ g} = 6240 \text{ g} = 6.24 \text{ kg}$$

2) ¿Cuánto pesan 5 litros de vino?

La densidad de vino es 0.99, lo cual significa que 1 dm^3 (1 litro de vino) pesa 0.99 kg, por tanto 5 litros de vino pesarán 5 veces más: 5 × 0.99 kg = 4.95 kg.

3) ¿Cuánto pesan 8 m^3 de aire?

La densidad del aire es 0.00129, es decir que 1 m^3 de aire pesa 0.00129 Tm, por lo que 8 m^3 de aire pesarán 0.00129 Tm. × 8 = 0.01032 Tm = 10.32 kg.

VOLUMEN DE UN CUERPO

Si se conoce el peso y densidad de un cuerpo sólo se divide el peso por la densidad para saber su volumen.

$$V = \frac{P}{D}$$

Cuando el peso se da en g, el volumen resulta en cm^3; si se da en kg, resulta en dm^3, y en Tm, resulta en m^3.

1) ¿Cuál es el volumen de una barra de hierro que pesa 390 g?

La densidad del hierro, según la tabla, es 7.8, esto significa que 1 cm^3 de hierro pesa 7.8 g, dividiendo los 390 g por el peso de 1 cm^3 de hierro, que es 7.8 g, obtendremos el volumen en centímetros cúbicos:

$$\frac{390 \text{ g}}{7.8 \text{ g}} = 50\text{cm}^3$$

2) Una masa de plata fundida pesa 0.4558 Tm., ¿cuántos m^3 de plata contiene?

La densidad de la plata fundida es 10.6, esto significa que 1 m^3 de plata fundida pesa 10.6 Tm; dividiendo el peso de 0.4558 Tm entre el peso de 1 m^3, 10.6 Tm, obtendremos el volumen de la plata en m^3.

$$\frac{0.4558 \text{ Tm}}{10.6 \text{ Tm}} = 0.043 \text{ m}^3$$

PROBLEMAS SOBRE DENSIDADES

1. Una vasija vacía pesa 1.5 kg y llena de alcohol 6.24 kg. ¿Cuál es su capacidad?

El alcohol de la vasija pesa 6.24 kg - 1.5 kg = 4.74 kg Siendo la densidad del alcohol 0.79, 1 dm^3 de alcohol (1 litro) pesará 0.79 kg; se divide el peso del alcohol, 4.74 kg por el peso de 1 litro, 0.79 kg:

$$\frac{4.74 \text{ kg}}{0.79 \text{ kg}} = 6 \text{ litros es la capacidad de la vasija}$$

2. Al meter un pedazo de bronce en una vasija llena de agua se derraman 2 l, 6 dl de agua. ¿Cuánto pesa el bronce?

Al meter el bronce se derraman 2 l, 6 dl = 2.6 l = 2.6 dm^3, que es el volumen del bronce.

La densidad del bronce es 8.8, o sea que 1 dm^3 pesa 8.8 kg por lo tanto 2.6 dm^3 de bronce pesarán:

$$2.6 \text{ dm3} \times 8.8 \text{ kg} = 22.88 \text{ kg}$$

3. Un lechero vende 8 litros que pesan 8.18 kg. Si la densidad de la leche es 1.03, averiguar si es pura, y de ser impura, ¿con qué cantidad de agua se adulteró la leche?

Siendo 1.03 la densidad de la leche, 1 dm^3 (1 litro) pesa 1.03 kg: luego, los 8 litros deberían pesar 8 × 1.03 = 8.24 kg, así que la leche vendida (8.18 kg) no es pura, porque hay una diferencia de peso de 8.24 - 8.18 = 0.06 kg.

Como la densidad de la leche es 1.03, 1 litro pesa 1.03 kg, y como 1 litro de agua pesa 1 kg, cada vez que se sustituya 1 litro de leche por uno de agua el peso bajará 1.03 - 1 = 0.03 kg; como la diferencia total de peso es 0.06 kg, dividiendo 0.06 por 0.03 se obtienen los litros de agua añadidos, o sea:

$$0.06 \text{ Kg} \div 0.03 \text{ kg} = 2 \text{ litros de agua}$$

De esta forma resulta que en los 8 litros vendidos hay 6 litros de leche y 2 de agua.

EJERCICIOS

Hallar el peso de los cuerpos siguientes (busque sus densidades en la tabla):

1. 20 dm^3 de aceite. **R.** 18.2 kg

2. 890 cm^3 de leche **R.** 916.7 g

3. 1 litro de alcohol **R.** 0.79 kg

4. 30 l de cerveza. **R.** 30.6 kg

5. 10 cm^3 de platino **R.** 215 g

6. 30 dm^3 de petróleo **R.** 24 kg



Contar y medir fueron las primeras actividades matemáticas del hombre. El pueblo egipcio utilizó las proporciones del cuerpo humano para establecer las primeras unidades de medida; así aparecieron medidas como el palmo, el pie, el cubito, entre otras.

CAPÍTULO XXXVIII

MEDIDAS ANGLOAMERICANAS

De los sistemas de medidas distintos al sistema métrico decimal (que es el sistema más exacto que se conoce), el más utilizado en la práctica es el sistema anglosajón o angloamericano de medidas, esto se debe al gran poder económico que éstos países tienen en el mundo.

Debido a que en la actualidad las estrechas relaciones comerciales entre Estados Unidos de América y los países latinoamericanos se han incrementado, es muy conveniente conocer las unidades que utiliza este sistema y su equivalencia con otras unidades del sistema métrico decimal.

MEDIDAS LINEALES

1 milla	= 8 furlongs
1 furlong	= 40 poles
1 pole	= 5.5 yardas
1 yarda	= 3 pies = 0.914 m
1 pie	= 12 pulgadas
1 pulg	= 12 líneas

MEDIDAS DE SUPERFICIE

1 milla^2	= 640 acres
1 acre	= 160 rods^2 = 4046.8 m^2
1 rod^2	= 30 $\frac{1}{4}$ yardas^2
1 yarda^2	= 9 pies^2
1 pie^2	= 144 pulg^2

MEDIDAS DE CAPACIDAD

Para líquidos	Para áridos
1 galón = 4 cuartos	1 bushel = 4pecks
1 cuarto = 2 pintas	1 peck = 8cuartos
1 pinta = 4 gills	1 cuarto = 2pintas

MEDIDAS CÚBICAS

1 cord = 128 pies^3

1 yard^3 = 27 pies^3

1 pie^3 = 1728 pulg^3

EJERCICIOS

1. ¿Cuánto cuestan 5 galones de gasolina a $0.07 el litro?
R. $1.32

2. ¿Cuánto importan 5 litros de gasolina a $0.28 el galón?
R. $0.37

3. ¿Cuántos dm^3 de volumen tiene un depósito en el que caben 50 botellas de agua?
R. 36.25 dm^3

4. Si se compran a 8 Qm de una mercancía por $320, ¿a cómo sale la libra?
R. $0.18

5. Si se compran 3 arrobas de una mercancía por $45, ¿a cómo sale la libra?
R. $1.30

6. ¿Qué distancia es mayor, 100 yardas o 90 m?
R. 100 yardas.

7. ¿Qué velocidad es mayor, 50 millas por hora u 80 km por hora?
R. 50 millas.

MEDIDAS DE PESO

Pesos Avoirdupois para toda clase de artículos menos oro y plata

1 ton	= 20 qq. (hundred-weight)
1 qq	= 100 libras
1 libra	= 16 onzas = 453.6 g
1 onza	= 16 dracmas

Pesos Troy para oro, plata y piedras preciosas

1 libra Troy	= 12 onzas = 373.24 g
1 onza Troy	= 20 pennyweights
1 pennyweight	= 24 granos

Pesos para medicina y farmacia

1 libra	= 12 onzas = 373.24 g
1 onza	= 8 dracmas
1 dracma	= 3 escrúpulos
1 escrúpulo	= 20 granos

Para pesar carbón en las minas y otros artículos pesados se usa la tonelada larga de 2240 libras inglesas, que equivale a 1016 Kg, y en este caso el quintal tiene 112 libras.

MEDIDAS ANGULARES

División centesimal de la circunferencia

1 circunf. = 400º C

1º C = 100´ C

1´ C = 100´´ C

División sexagesimal de la circunferencia

1 Circunf. = 360º S

1º S = 60´ S

1´S = 60´´ S

Medidas de tiempo

1 siglo = 10 décadas

1 década = 2 lustros

1 lustro = 5 años

1 año = 12 meses

1 mes = 30 días

1 día = 24 horas

1 hora = 60 minutos

1 min = 60 segundos

Medidas geográficas

1 legua marina a geográfica = 5555 m

1 legua terrestre = 4444 m

1 milla marina = 1852 m

1 nudo = 1 milla marina por hora

La legua marina es de 20 al grado, esto significa que en la longitud de un grado que es 111111 m hay 20 leguas marinas, luego la legua marina vale:

$$111111 \text{ m} \div 20 = 5555.55 \text{ m}$$

La legua terrestre es de 25 al grado, luego una legua terrestre mide:

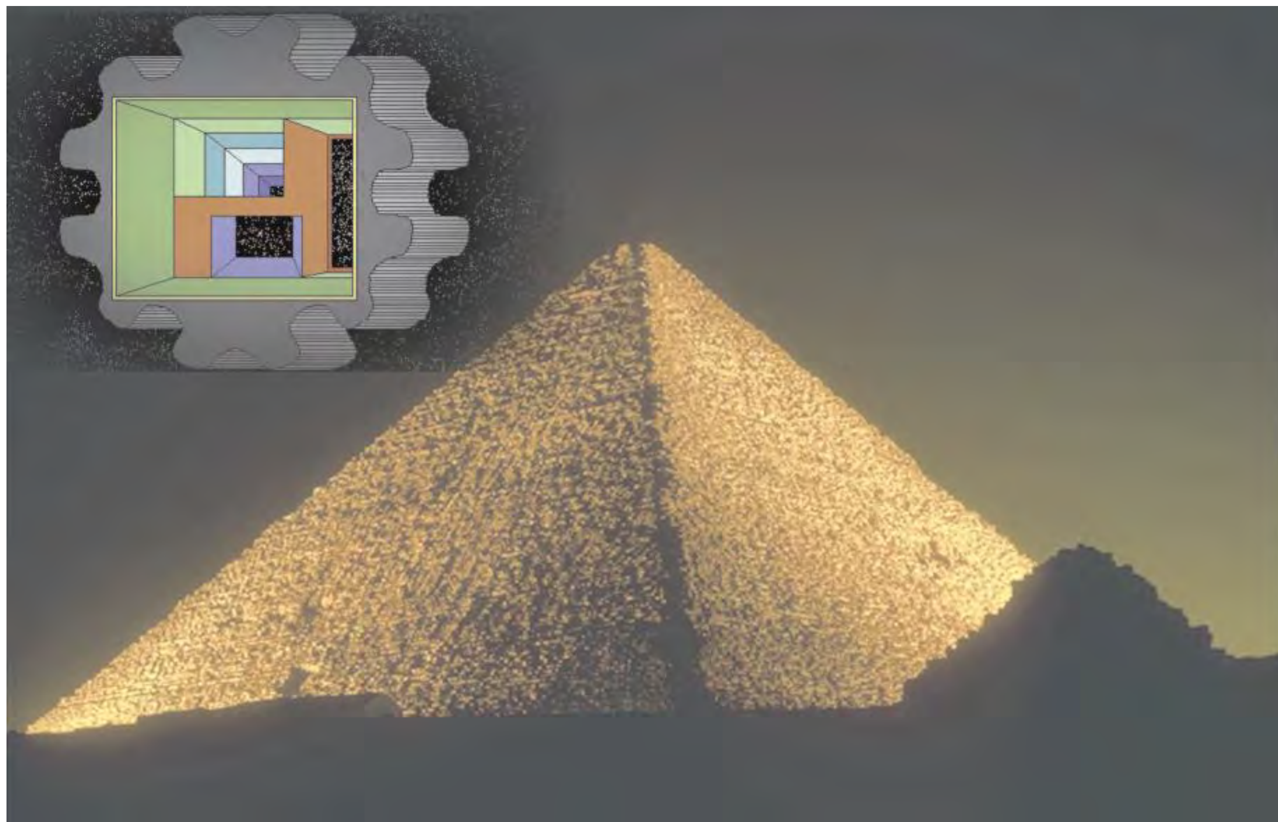
$$111111 \text{ m} \div 25 = 4444.44 \text{ m}$$

La milla marina mide de la legua marina y es la longitud de un arco de un minuto; vale 55555.55 m ÷3 = 1851.85 m = 1852 m prácticamente.

El nudo se emplea para medir la velocidad de los buques y equivale a una milla marina por hora, un buque que navega, por ejemplo, a 30 nudos, quiere decir que navega a 30 *millas marinas por hora*.

TABLA DE CONVERSIÓN DE MEDIDAS DEL SISTEMA ANGLOAMERICANO AL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

MEDIDAS LINEALES	
1 milla = 1609.35 m	1 m = 0.0006214 milla
1 furlong = 201.1644 m	1 m = 0.004971 furlong
1 pole = 5.029 m	1 m = 0.19885 pole
1 yarda = 0.9144 m	1 m = 1.0936 yardas
1 pie = 0.3048 m	1 m = 3.2808 pies
1 pulgada = 0.0254 m	1 m = 39.37 pulgadas
MEDIDAS SUPERFICIALES	
1 milla2 = 2589900 m2	1 m2 = 0.0000003861 milla2
1 acre = 4046.8 m^2	1 m^2 = 0.0002471 acre
1 rod^2 = 25.293 m^2	1 m^2 = 0.03954 rod^2
1 $yarda^2$ = 0.8361 m^2	1 m^2 = 1.196 $yarda^2$
1 pie^2 = 0.0929 m^2	1 m^2 = 10.7638 $pies^2$
1 $pulgada^2$ = 0.000645 m^2	1 m^2 = 1550 $pulgadas^2$
MEDIDAS CÚBICAS	
1 cord = 3.624 m^3	1 m^3 = 0.276 cord
1 $yarda^3$ = 0.7645 m^3	1 m^3 = 1.308 $yarda^3$
1 pie^3 = 0.028317 m^3	1 m^3 = 35.3145 $pies^3$
1 $pulgada^3$ = 0.00001639 m^3	1 m^3 = 61012.81 $pulgadas^3$
MEDIDAS DE CAPACIDAD	
PARA LÍQUIDOS	
1 galón U. S. = 3.7854 litros	1 litro = 0.26418 galón U. S.
1 cuarto U. S. = 0.94636 litro	1 litro = 1.05671 cuartos U. S.
1 pinta U. S. = 0.47312 litro	1 litro = 2.11345 pintas U. S.
1 gill U. S. = 0.11828 litro	1 litro = 8.4538 gills U. S.
PARA ÁRIDOS	
1 burshel U. S. = 35.237 litros	1 litro = 0.02838 bushel U. S.
1 peck U. S. = 8,80925 litros	1 litro = 0.1135 peck U. S.
1 cuarto U. S. = 1.1012 litros	1 litro = 0.908 cuarto U. S.
MEDIDAS DE PESO	
1 tonelada U. S = 907.18 kg	1 kg = 0.00110232 toneladas U.S.
1 quintal U. S. = 45.359 kg	1 kg = 0.0220463 quintal U.S.
1 libra U. S. = 0.45359 kg	1 kg = 2.2046 libras U.S.
1 onza U. S. = 0.028349 kg	1 kg = 35.2736 onzas U.S.



Empíricamente, fue en Egipto donde surgió la geometría, su forma teórica corresponde a los griegos. La estructura geométrica fue creada por Euclides. En 1850 un egipcio determinó la fórmula 1/3 $a(a^2 - ab + b^2)$ para obtener el volumen de una pirámide.

CAPÍTULO XXXIX

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS Y VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

Una superficie plana es una parte del plano limitada por una línea cerrada. A toda superficie plana se le asigna un número real no negativo que varía de acuerdo con la unidad de superficie elegida y el cual llamamos **área de la superficie**.

Cada superficie tiene una propiedad que llamamos **área**. El área de una superficie es un número no negativo que varía de acuerdo con la unidad de superficie escogida. Como unidad se elige el área de la superficie de un cuadrado cuyo lado tiene por longitud, la unidad de longitud.

Para determinar el volumen de un cuerpo geométrico (prismas, pirámides, conos, cilindros, esferas) se utilizan unidades de volumen que tienen como unidad básica el metro cúbico.

TRIÁNGULOS

Un **triángulo** es la porción de un plano limitada por tres segmentos de recta, y sus lados son los segmentos que lo limitan; en la figura 91, *AB, BC* y *CA* son los lados, mismos que suelen representarse por la misma letra minúscula que el vértice opuesto.

La **base** de un triángulo puede ser cualquiera de sus lados.

La **altura** del lado de un triángulo es la perpendicular a dicho lado bajada desde el vértice opuesto. En la figura 91 se trazan las tres alturas del triángulo, y se expresan como h_a, h_b, h_c, según el lado al que corresponden.

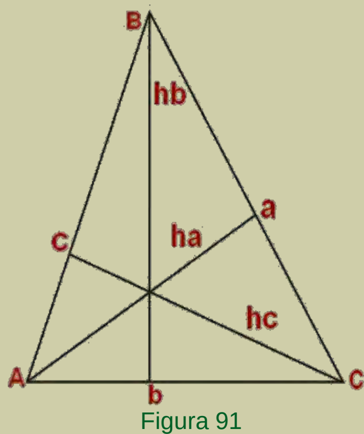


Figura 91

El **área** o **superficie** de un triángulo es **la mitad del producto de base por la altura**.
Siendo *A* = área del triángulo, *b* = base y *h* = altura, tendremos:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Hallar el área de un triángulo si uno de sus lados mide 20 cm y su altura es de 14 cm. Aquí *b* = 20 cm, *h* = 14 cm, luego:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

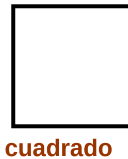
$$\frac{20 \text{ cm} \times 14 \text{ cm}}{2} = 140 \text{ cm}^2$$

PARALELOGRAMOS

Los **paralelogramos** son cuadriláteros con sus lados opuestos iguales y paralelos, y se clasifican de la manera siguiente: (figura 92) el **cuadrado**, cuando sus cuatro lados son iguales y sus ángulos rectos; el **rombo**, con sus cuatro lados iguales, pero sus ángulos no son rectos; el **rectángulo**, con sus lados opuestos iguales y sus ángulos rectos, y el **romboide** que tiene sus lados opuestos iguales pero sus ángulos no son rectos.

El **área de un paralelogramo** cualquiera es igual al producto de su **base por su altura.**

Siendo *A* = área del paralelogramo, *b* = base y *h* = altura, tendremos:

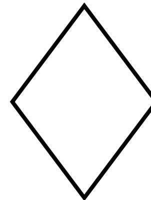


cuadrado



rectángulo

$$A = b \times h$$



rombo



romboide

Figura 92

Hallar el **área de un rectángulo** sabiendo que dos de sus lados desiguales miden 18 cm y 15 cm, respectivamente. Como los lados desiguales de un rectángulo son perpendiculares entre sí, podemos considerar uno de ellos como la base y el otro la altura.

Entonces, siendo *b* = 18 cm y *h* = 15 cm, tendremos:

$$A = b \times h = 18 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} = 270 \text{ cm}^2$$

CUADRADO

Como sus cuatro lados (figura 93) son iguales y perpendiculares entre sí, tomando un lado cualquiera como base, la altura será otro lado igual; luego, siendo *A* = área del cuadrado y *l* = lado del cuadrado, tendremos:

$$A = l \times l = l^2$$

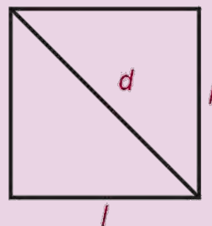


Figura 93

Esto significa que el área de un cuadrado es igual al **cuadrado de su lado**.

Por otra parte, el área de un cuadrado (figura 93) también es igual a la **mitad del cuadrado de su diagonal.**

Siendo:
A = área del cuadrado
d = diagonal del cuadrado

tendremos, la siguiente fórmula:

$$A = \frac{d^2}{2}$$

ROMBOS

El **área de un rombo** (figura 94) es igual al producto de la base por su altura, pero también es igual al **semiproducto de sus diagonales**.

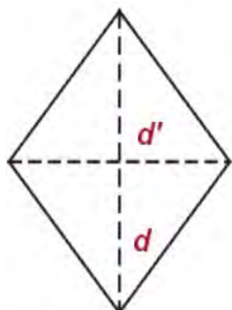


Figura 94

Siendo A = área del rombo, d y d' sus diagonales tendremos:

$$A = \frac{d \times d}{2}$$

Hallar el área de un rombo sabiendo que una de sus diagonales mide 8 yardas y la otra 2 cordeles.

Aquí d = 8 yardas, d' = 2 cordeles.

Reduciendo las 8 yardas a metros:

$$8 \times 0.914 = 7.312 \text{ m}$$

Reduciendo los 2 cordeles a metros:

$$2 \times 20.352 = 40.704 \text{ m}$$

Entonces:

$$A = \frac{d \times d'}{2} =$$

$$\frac{7.312 \times 40.704}{2} = 148.813 \text{ m}^2$$

TRAPECIOS

Un **trapecio es el cuadrilátero** con sólo dos de sus lados paralelos. En la figura 95 vemos que sus bases son los lados paralelos, (b y b').

Su **altura** es la perpendicular bajada de una base a la otra (h), y **su base media o paralela** media es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos.

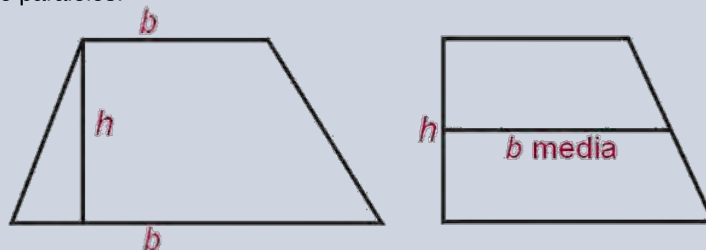


Figura 95

El área de un trapecio se puede expresar de tres formas:

a) El área de un trapecio es igual a la mitad de su altura por la suma de las bases.

Siendo A = área del trapecio, h = altura, b y b' las bases, tendremos:

$$A = \frac{h}{2}(b + b')$$

b) En la fórmula anterior el segundo miembro no se altera si quitamos el divisor 2 al factor h para colocarlo en el factor ($b + b'$), con lo que quedará:

$$A = h\left(\frac{b + b'}{2}\right)$$

Esto significa que el área de un trapecio es igual a la altura multiplicada por la semisuma de las bases.

c) Dado que la semisuma de las bases de un trapecio es igual a la base media, tendremos también que

$$A = h \times \text{base media}$$

lo cual nos dice que el área de un trapecio también es igual a la altura multiplicada por la base media.

Ejemplo

1) Buscar el área de un trapecio cuyas bases miden 10 y 12 cm y su altura 6 cm

b = 10 cm, b' = 12 cm, h = 6 cm, luego:

$$A = \frac{h}{2}(b + b') = \frac{6}{2}(10+12) = 3 \times 22 = 66 \text{ cm}^2$$

POLÍGONOS

El **polígono** es la porción de un plano limitada por segmentos de recta. Según el número de sus lados se clasifican en: **pentágono**, de 5 lados; **hexágono**, de 6; **heptágono**, de 7; **octagono**, de 8.

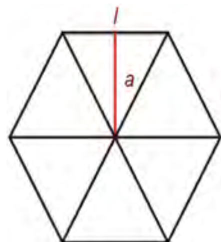


Figura 97

El **polígono regular** tiene todos sus lados y ángulos iguales, y obviamente el irregular no cumple estas condiciones.

El **perímetro** de un polígono está formado por la suma de sus lados. En un polígono regular, como todos sus lados son iguales, el perímetro es igual a un lado multiplicado por el número de lados, *ln*.

El **centro** de un polígono regular es su punto interior donde se cortan las diagonales, y equidista de todos los vértices y los lados.

El **apotema** de un polígono regular es la perpendicular bajada desde el centro a cualquiera de sus lados (a en la figura 96), o sea la altura de uno de los triángulos iguales en que se puede descomponer el polígono, considerando el lado como base:

El **área de un polígono regular** es igual a la mitad del producto del apotema por el perímetro.

Siendo A = área del polígono, a = apotema, l = lado, n = número de lados y, por tanto, ln = perímetro, tendremos:

$$A = \frac{a \times ln}{2}$$

Hallar el área de un octágono regular cuyo lado mide 6 cm y el apotema 4 cm.

a = 4 cm, l = 6 cm, n = 8, luego:

$$A = \frac{a \times ln}{2} = \frac{4 \times 6 \times 8}{2} = 96 \text{ cm}^2$$

Para hallar el área de un polígono irregular se divide en triángulos; se busca el área de cada triángulo y la suma de las áreas será el área del polígono.

CIRCUNFERENCIAS

La **circunferencia** es una línea curva (figura 97) plana y cerrada donde todos los puntos equidistan de un punto interior llamado **centro**.

El **círculo** es la porción de un plano limitada por la circunferencia.

El **radio** es el segmento de recta que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia, y el **diámetro** es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.

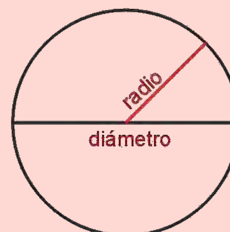


Figura 97

La **longitud** de la circunferencia es igual a p (cantidad constante que vale 3.1416) **multiplicada** por el **diámetro**.

Siendo C = longitud de la circunferencia, r = radio y por tanto 2r = diámetro, tendremos:

$$C = \pi \times 2r = 2\pi r$$

Cabe aclarar que la constante p = 3.1416 es el cociente que se obtiene de dividir la longitud de cualquier circunferencia entre la longitud de su diámetro.

El **área del círculo** es igual a p multiplicada por el cuadrado del radio.

Siendo A = área del círculo y r = radio, tendremos:

$$A = \pi r\ 2$$

1) ¿Cuántos **metros de largo** tendrá la cerca de un gallinero circular de 5 metros de radio?

Se busca la longitud de la circunferencia cuyo radio es 5 metros:

$$C = 2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 5 = 31.416 \text{ metros}$$

De este modo, la cerca tendrá 31.614 metros de longitud.

2) ¿Cuál será la superficie ocupada por ese mismo gallinero?

Se busca la superficie del círculo cuyo radio es 5 metros:

$$A = \pi r\ 2 = 3.1416 \times 52 = 78.54 \text{ m2}$$

Por tanto, la superficie que ocupa el gallinero es 78.54 m2.

EJERCICIOS

1. Se compró un terreno semicircular de 10 m de radio a $2 la cá, y se le puso una cerca por la que se pagó a $0.50 el m. ¿Cuánto costó en total el terreno y su cerca?
R. $339.87.

2. Encuentra el área de un triángulo cuya base es 10 cm y su altura 42 cm. R. 210 cm^2

3. La base de un triángulo es 8 cm 6 mm y su altura 0.84 dm, ¿cuál es el área en metros cuadrados. **R.** 0.003612 m^2.

4. La base de un triángulo es $\frac{1}{2}$ Hm y su altura $\frac{3}{8}$ de km. Expresa la superficie en complejo métrico decimal. **R.** 93 a 75 cá

5. Si las bases de un trapecio son 12 y 15 m y su altura 6 m, encuentra su área. **R.** 81 m^2

6. ¿Cuál es la superficie de un cantero semicircular de 3 m de radio? **R.** 14.1372 m^2

7. A un cantero circular de 4 m de diámetro se le puso una cerca por la que se pagó a $0.90 el m. ¿Cuánto costó la cerca?
R. $11.31.

FORMULAS DE ÁREAS

FIGURA	ÁREA	FÓRMULA
Triángulo	La mitad del producto de la base × la altura	$\frac{b \times h}{2}$
Paralelogramos	El producto de la base × la altura	$b \times h$
Cuadrado	El cuadrado del lado	l^2
	La mitad del cuadrado de la diagonal	$\frac{d^2}{2}$
Rombo	El semiproducto de las diagonales	$\frac{d \times d'}{2}$
	La mitad de la altura × la suma de las bases	$\frac{h}{2}(b+b')$
Trapecio	La altura × la semisuma de las bases	$A = h\left(\frac{b+b'}{2}\right)$
	La altura × la base media.	h × base media
Polígono regular	La mitad del producto del apotema × el perímetro	$\frac{a \times ln}{2}$
Círculo	π × el cuadrado del radio	$\pi \times r^2$

EJERCICIOS

1. Hallar el área del cuadrilátero *ABCD* (figura 98) sabiendo que:
AC = 40 m, *BE* = 15 m y *DF* = 20 m
R. 700 m^2

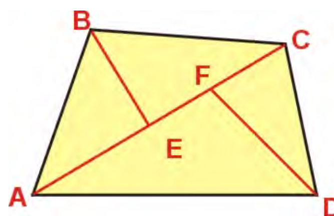


Figura 98

2. Hallar el área del hexágono *ABCDEF* (figura 99) siendo *AF* = 30 m,
DF = *AC* = 20 m, *EH* = *BI* = 10 m.
R. 800 m^2

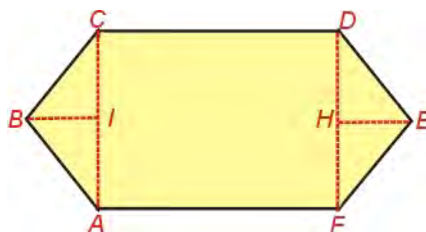


Figura 99

EJERCICIOS

Encuentra el área de estas figuras, escribiendo primero la fórmula del área, de cada figura para ver los datos necesarios, y luego averiguar qué datos faltan y trázalos. En seguida, con una regla graduada en milímetros mide todos los datos que hagan falta para aplicar la fórmula, sustituyendo las letras por los datos medidos.



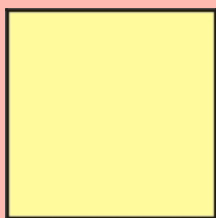
1. R. 600 mm^2



2. R. 400 mm^2



3. R. 320 mm^2



4. R. 900 mm^2



5. R. 750 mm^2



6. R. 700 mm^2



7. R. 337.5 mm^2



8. R. 375 mm^2



9. R. 480 mm^2



10. R. 706.86 mm^2

EJERCICIOS

1. Hallar el área del polígono representado en la figura 100 sabiendo que:
AG = *BF* = 30 mm, *FG* = 10 mm,
CH = 10 mm, *CE* = 20 mm, y
DI = 10 mm.
R. 650 mm^2

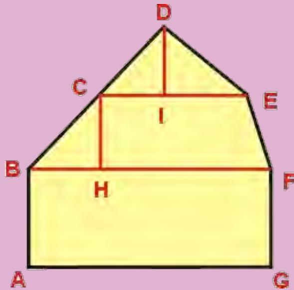


Figura 100

2. Hallar el área de la parte sombreada (figura 101) sabiendo que:
BD = 40 mm.
R. 456.64 mm^2

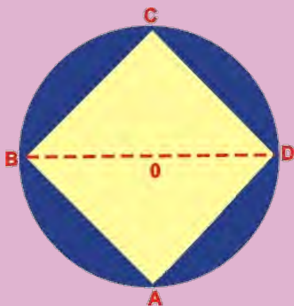


Figura 101

3. Hallar el área de la parte sombreada (figura 102) sabiendo que:
AO = 15 mm, *AD* = 22.5 mm y
BC = 26 mm.
R. 414,36 mm^2

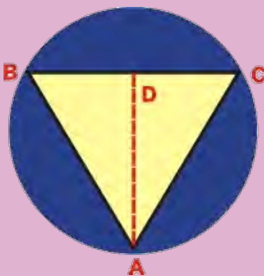


Figura 102

4. Hallar el área de la figura 103 siendo
AB = 20 mm, *BC* = 15 mm y
AC = 25 mm.
R. 640.8750 mm^2

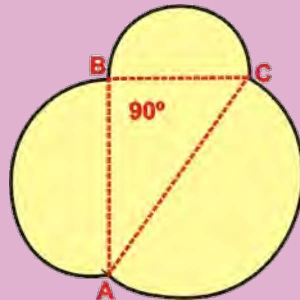


Figura 103

5. Hallar el área de la parte sombreada (figura 104) sabiendo que:
AC = 15 mm y *O B* = 13 mm
R. 54.0696 mm^2

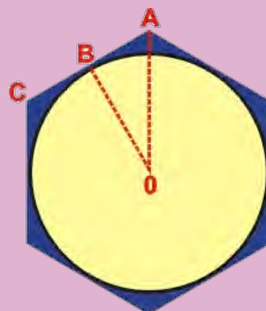


Figura 104

6. Hallar el área de la figura 105 siendo

AB = 20 mm,
BC = 5 mm,
DE = 30 mm,
y *EF* = 5 mm.
R. 250 mm^2

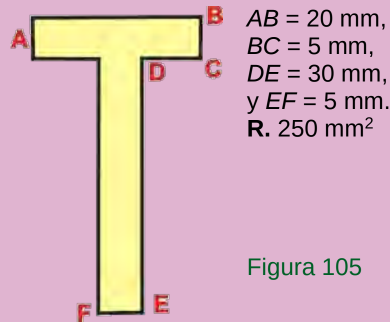


Figura 105

7. Hallar el área de la figura 106 siendo:
AB = 40 mm,
BC = 30 mm,
CD = *FG* =
AH = 5 mm,
EF = 10 mm
R. 375 mm^2

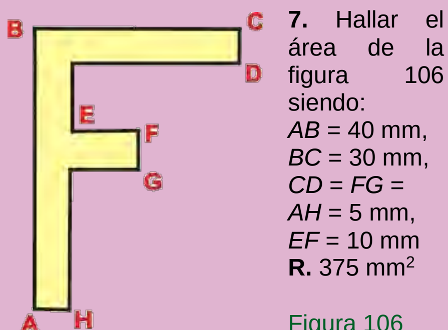


Figura 106

8. La figura 107 representa un andador circular pavimentado con losas de 400 cm^2 en cuyo interior hay un jardín circular. Siendo *AB* = 30 m y *C D* = 20 m, ¿cuántas losas se requirieron para pavimentar el andador?
R. 9817.5 losas.

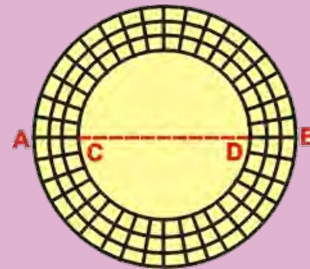


Figura 107

9. La figura 108 representa el marco de un cuadrado que se pagó a $1.60 el dm^2.
Siendo *CD* = 20 cm y *AB* = 30 cm, ¿cuánto costó el marco?
R. $8.

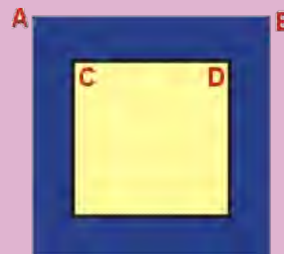


Figura 108

10. ¿Cuánto costará un piso de concreto como el representado en la figura 109, siendo *AB* = 20 m, *BC* = 40 m, *CD* = 25 m, *AE* = 20 m, a $1.80 el m^2?
R. $1620.

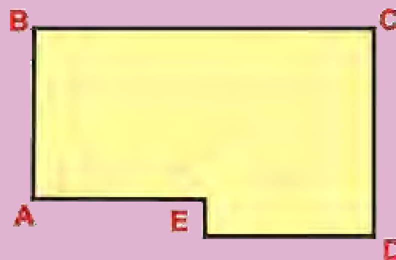


Figura109

EJERCICIOS

1. Hallar el valor del terreno representado en la figura 110 que se pagó a $0.80 la cá sabiendo que AC = 40 m,
BH = 15 ms, AD = 39 m,
CF = 17.5 metros y GE = 12.5 m.
R. $708.

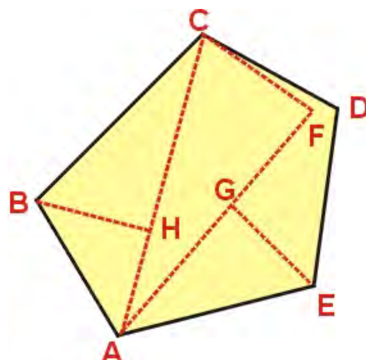


Figura 110

2. La figura 111 representa un parque cuadrado de 100 metros por lado que tiene en el centro un jardín cuadrado de 60 m de lado y el resto es acera. ¿Cuántos m^2 de acera tiene el parque?
R. 6400 m^2

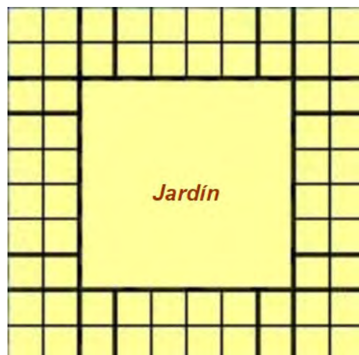


Figura 111

3. La figura 112 representa un parque cuadrado de 90 m por lado. En el parque hay cuatro canteros circulares de 6 m de radio; dos canteros iguales en forma de trapecio cuyas bases son 20 y 12 m y su altura 10 m, y en el centro un estanque en forma de rombo cuyas diagonales miden 70 y 15 m respectivamente. El resto es un andador pavimentado. ¿Cuántos m^2 de andador pavimentado hay?
R. 6802.6096 m^2

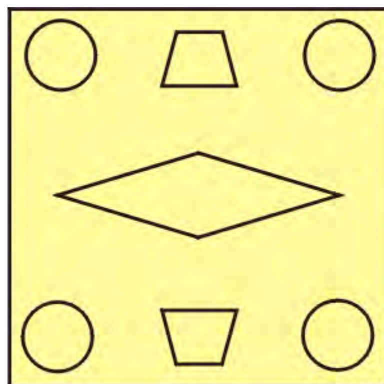


Figura 112

4. La figura 113 representa un parque cuadrado de 100 m por lado en el cual hay cuatro canteros rectangulares iguales de 20 m de base y 5 m de altura; cuatro canteros iguales en forma de triángulo rectángulo isóseles cuyos catetos miden 12 m y un estanque central en forma de hexágono regular de 20 m por lado y 17.3 m de apotema. El resto es un andador por cuya construcción se pagó a $1.50 el metro cuadrado. ¿Cuánto costó la construcción del andador? **R.** $12411.

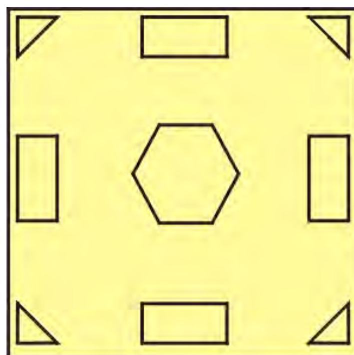


Figura 113

VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

Un **prisma** es un cuerpo geométrico cuyas bases son dos polígonos iguales y paralelos y sus caras laterales son paralelogramos. Según la forma de su base, los prismas pueden ser **triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales**, etc.

Las **aristas** de un prisma son las intersecciones de sus caras

Un **prisma es recto** (figura 114) cuando sus aristas son perpendiculares a las bases, y oblicuo cuando no lo son.

El **prisma regular** es recto y sus bases son polígonos regulares y el **irregular** no cumple alguna de estas condiciones.

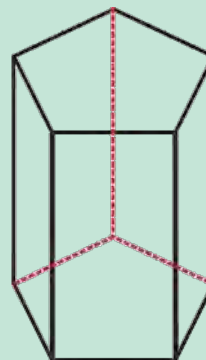
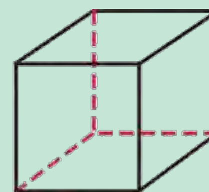


Figura 114

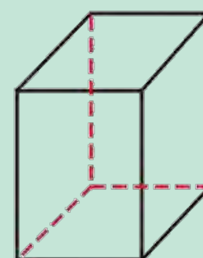
La **altura** de un prisma es la perpendicular bajada de una base a la otra. En un prisma recto la altura es igual a la arista.

Un paralelepípedo es el prisma cuyas bases son paralelogramos iguales, y cuando es recto y sus bases son rectángulos iguales, recibe el nombre de **paralelepípedo recto rectangular u ortoedro** (figura 115).

Un ladrillo, una caja de zapatos, una cajetilla de cigarros, la sala de una casa, etc., son ortoedros, y si sus caras son cuadradas, recibe el nombre de un **hexaedro** o **cubo** (figura 115).



Octaedro



Hexaedro o cubo

Figura 115

VOLUMEN DE UN PRISMA

El **volumen de un prisma** es igual a su altura multiplicada por el área de su base.

Siendo V = volumen del prisma, h = altura, B = área de la base, tendremos: $V = h \times B$.

Hallar el volumen de un prisma recto regular triangular cuya altura es 20 cm; el lado del triángulo de la base 15 cm y la altura de este triángulo 13 cm (figura 116).

Se busca el área de la base, en este caso un triángulo, por lo que será igual a la mitad del producto de la base por la altura:

Área de la base: $\dfrac{15 \times 13}{2} = 97.5 \text{ cm}^2$

Tenemos h = 20 cm, B = 97.5 cm^2, luego:
$V = h \times B = 20 \times 97.5 = 1950 \text{ cm}^2$

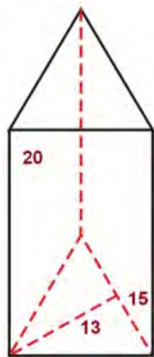


Figura 116

El **volumen de un ortoedro** es igual al producto de sus tres dimensiones (figura 117).

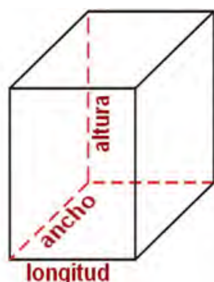


Figura 117

El ortoedro es un prisma y el volumen de todo prisma es:

V = *altura × área de la base*

pero como la base del ortoedro es un rectángulo y el área de este es igual al producto de su base (**longitud** de la figura 117) por su altura (**ancho** en la figura 117), en la fórmula anterior, en lugar de **área de la base** podemos poner *longitud* × *ancho* y tendremos:

Vol. del ortoedro = *altura* × *longitud* × *ancho* = $h \times l \times a$

El volumen de una caja cuyas dimensiones son 10 cm por 8 cm por 5 cm sería:

$V = 10 \times 8 \times 5 = 400 \text{ cm}^3$

El cubo es un ortoedro donde las tres dimensiones son iguales, por lo tanto el **volumen de un cubo** es igual al **cubo de su arista**; $V = a^3$.

Así, el volumen de un dado cuya arista es 12 cm sería:

$V = a^3 = 12^3 = 1728 \text{ cm}^3$

PIRÁMIDES

La **pirámide** es un cuerpo geométrico cuya base es un polígono cualquiera y sus caras laterales son triángulos que concurren en un punto llamado **vértice de la pirámide** (*S* en la figura 118).

De acuerdo con los lados de su **base**, las pirámides pueden ser **triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales**.

Las pirámides triangulares se llaman **tetraedros**.

La **altura** de una pirámide es la perpendicular bajada desde el vértice hasta la base o su prolongación (*SO* en la figura 118).

En una pirámide **regular** la base es un polígono regular y la altura cae en el centro de la base, y en una **irregular** no se cumplen estas condiciones.

El **volumen** de una **pirámide** es igual al tercio de su altura multiplicada por el área de la **base**.

Siendo V = volumen de la pirámide, h = altura, B = área de la base, tendremos:

$$V = \frac{1}{3} h \times B$$

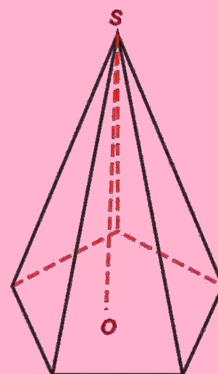


Figura 118

1) Encontrar el volumen de una pirámide cuya altura es 20 cm y el área de su base 180 cm^2:

$$V = \frac{1}{3} h \times B = \frac{20 \times 180}{3} = 1200 \text{ cm3}$$

2) Hallar el volumen de una pirámide regular pentagonal cuya altura es de 5.088 m, el lado de su base 6 m y el apotema de la base 4 m.

$$V = \frac{1}{3} h \times B$$

Aquí, h = 5.088 m

Se busca el área de la base aplicando la fórmula del área de un polígono regular:

$$B = \frac{a \times ln}{2} = \frac{4 \times 6 \times 5}{2} = 60 \text{ m}^2$$

Entonces,

$$V = \frac{1}{3} h \times B = \frac{5.088 \times 60}{3} = 101.76 \text{ m}^3$$

CILINDROS

Un **cilindro de revolución o cilindro circular recto** es el cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

El cilindro de la figura 119 está engendrado por el rectángulo ABOO' girando alrededor del lado OO'.

El lado OO' es el **eje** y **la altura** del cilindro; el lado opuesto, *AB*, es la **generatriz** y los lados *AO'* y *BO'* son los **radios** iguales de las bases del cilindro.

La **altura** del cilindro se puede definir también como la distancia entre las dos bases.

Cuando el cilindro es recto la altura es igual a la generatriz.

El volumen de un cilindro es igual a su altura multiplicada por el área del círculo de la base.

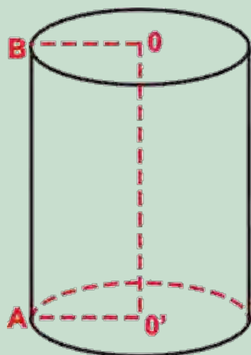


Figura 119

Siendo V = volumen del cilindro, h = altura, r = radio del círculo de la base y por tanto πr^2 = área de la base, tendremos:

$$V = h \times \pi r^2$$

Hallar el volumen de un cilindro cuya altura mide 40 cm y el diámetro del círculo de la base 10 cm

h = 40 cm, r = 5 cm, luego:

$V = h \times \pi r^2 =$

$40 \times 3.1416 \times 25 = 3141.6 \text{ cm}^3$

CONOS

Un **cono de revolución o cono circular recto** es el cuerpo geométrico engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

El cono de la figura 120 está engendrado por la revolución del triángulo rectángulo *SOA* alrededor del cateto *SO.*

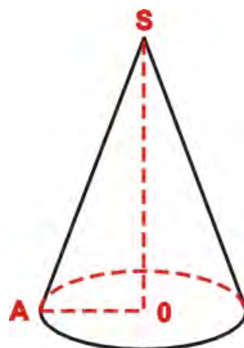


Figura 120

El punto *S* es el vértice del cono; el cateto *SO* la **altura** y el **eje**; el cateto *OA* es el **radio** del círculo de la base y la hipotenusa *SA* es la **generatriz** del cono.

La altura *SO* del cono se puede definir también como la perpendicular bajada del vértice a la base.

El volumen de un cono es igual al tercio de su altura multiplicada por el área del círculo de la base.

Siendo V = volumen del cono, h = altura, r = radio de la base, tendremos:

$$V = \frac{1}{3}\, h \times \pi r^2$$

Hallar el volumen de un cono cuya altura mide 12 cm y el diámetro de la base 8 cm.

h = 12 cm, r = 4 cm, luego:

$$V = \frac{1}{3}\, h \times r^2 =$$

$$\frac{12 \times 3.1416 \times 16}{3} = 201.0624 \text{ cm}^3$$

ESFERAS

La **esfera** es el cuerpo geométrico (figura 121) engendrado por la revolución completa de un semicírculo alrededor de su diámetro cuyo **centro, radio y diámetro** se corresponden con el diámetro del círculo que la engendra.

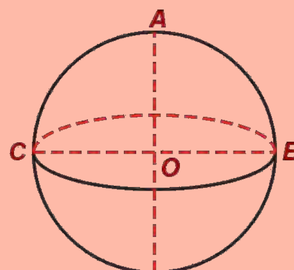


Figura 121

El **volumen** de una **esfera** es igual a $\frac{4}{3}$ de π por el **cubo del radio**.

Siendo V = volumen de la esfera y r = radio, tendremos:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Encontrar el volumen de una esfera cuyo radio es de 30 cm:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 =$$

$$\frac{4 \times 3.1416 \times 303}{3} = 113097 \text{ cm}^3$$

EJERCICIOS

1. Una caja de zapatos mide 35 cm por 18 cm por 15 cm. Expresa su volumen en complejo. **R.** 9 dm^3 450 cm^3

2. Hallar el volumen de un prisma cuya altura es 1.50 m y la base un rombo cuyas diagonales miden 70 cm y 50 cm. **R.** 262 dm^3 500 cm^3

3. ¿Cuál será el volumen de un prisma recto regular cuya altura es 3 dm 5 cm y la base un hexágono regular cuyo lado mide 6.9282 cm y el apotema 6 cm? **R.** 4 dm^3, 364 cm^3, 766 mm^3

CUERPO GEOMÉTRICO	VOLUMEN	FÓRMULA
Prisma	Altura × área de la base	$h \times B$
Ortoedro	Altura × longitud × ancho	$h \times l \times a$
Cubo	El cubo de la arista	a^3
Pirámide	$\frac{1}{3}$ de la altura × área de la base	$\frac{1}{3} h \times B$
Cilindro	Altura × área de la base	$h \times \pi r^2$
Cono	$\frac{1}{3}$ de la altura × área de la base	$\frac{1}{3} h \times \pi r^2$
Esfera	$\frac{4}{3}\pi$ × el cubo del radio	$\frac{4}{3}\pi \times r^3$

PROBLEMAS EN QUE SE COMBINA VOLUMEN CON PESO Y DENSIDAD

Para resolver estos problemas deben tenerse presente estas fórmulas:

$$D = \frac{P}{V} \qquad P = V \times D \qquad V = \frac{P}{D}$$

1. Un listón de cedro mide 15 cm por 10 cm por 5 cm y pesa 390 g. ¿Cuál es la densidad del cedro?

Aquí aplica la fórmula $D = \frac{P}{V}$

P = 390 g. Se busca el volumen del listón: *V* = 15 × 10 × 5 = 750 cm^3

Entonces $D = \frac{P}{V} = \frac{390}{750} = 0.52$

2. ¿Cuánto pesa una esfera de hierro (densidad 7.8) cuyo diámetro es 20 cm?
Se aplica la fórmula *r* = *V* × *D*

D = 7.8, y se busca el : $V = \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{4 \times 3.1416 \times 10^3}{3} = 4188.8\text{cm}^3$ el volumen de la esfera: Entonces *P* = *V* × *D* = 4188.8 × 7.8 = 32672.64 g = 32.67264 Kg

3. Hallar el volumen de un cono de cobre (densidad 8.9) sabiendo que pesa 2 Tm 4 Mg 7 Kg.

La fórmula que aplica es $V = \frac{P}{D}$

P = 2 Tm 4 Mg 7 Kg = 2047 Kg y *D* = 8.9, luego:

$$V = \frac{P}{D} = \frac{2047}{8.9} = 230 \text{ dm}^3$$

EJERCICIOS

1. Hallar la capacidad de un depósito cuya base es un triángulo de 60 cm de base y 50 cm de altura, siendo la altura del depósito de metro. **R.** 270 litros.

2. Hallar el volumen de una pirámide regular pentagonal cuya altura mide 3 m, 20 cm el lado de la base, 87.185 cm y el apotema de la base 60 cm.
R. 1 m^3, 394 dm^3, 960 cm^3

3. ¿Cuál será el volumen de una pirámide cuya altura es 10 yardas y el área de la base 18 m^2? **R.** 54.84 m^3

4. Hallar el volumen de un tetraedro cuya altura es 2 m, 15 cm, la base del triángulo de la base 40 cm y su altura 36 cm. **R.** 51 dm3 600 cm3

5. ¿Cuántos tanques cilíndricos de 2 m de altura y 6 m de diámetro harán falta para almacenar 1130976 litros de agua? **R.** 20 tanques.

6. 9. Hallar el volumen de un cono cuya altura es 6 dm y el diámetro de la base 20 cm.
R. 6 dm3, 283 cm3, 200 mm3.

7. En un barquillo de helado de forma cónica el diámetro de la base es 4 cm y la altura 12 cm. ¿Cuántos cm3 de helado hay en el barquillo cuando está lleno? **R.** 50.2656 cm3

8. ¿Cuál es el volumen de una pelota cuyo diámetro es 20 cm? **R.** 4188.8 cm3

9. Un trozo de cedro pesa 2 Dg 6 g. Siendo la densidad del cedro 0.52, ¿cuál es su volumen? **R.** 50 cm3

10. Un terrón de azúcar de 3 cm por 2 cm por 1 cm pesa 9.6 g. Hallar la densidad del azúcar. **R.** 1.6

11. Un tanque cilíndrico cuyas dimensiones interiores son 1 m de altura y 2 m 60 cm de diámetro de la base, pesa vacío 180 kg. ¿Cuánto pesará lleno de petróleo? (Densidad del petróleo 0.80). **R.** 4427.4432 kg.



Basándose en su sistema sexagesimal de numeración, los babilonios segmentaron el círculo en grados y minutos; estableciendo así la división en años, meses, días, horas, minutos y segundos. La pulgada fue una aportación del pueblo romano.

CAPÍTULO XL

NÚMEROS COMPLEJOS O DENOMINADOS

Los números complejos o denominados -que no deben confundirse con los números complejos de las matemáticas superiores- tienen su origen en los sistemas de medidas.

El **número complejo** consta de diversas unidades de medida de la misma magnitud, como 4 arrobas y 6 libras; 3 leguas, 4 cordeles y 8 varas.

El **número incomplejo** consta de unidades de una sola especie, como 45 libras; 20 yardas o 12 meses.

REDUCCIÓN DE COMPLEJO A INCOMPLEJO

Para **reducir un número complejo a uno incomplejo de especie inferior** se procede de la forma siguiente:

1) Reducir 4 varas, 2 pies y 5 pulg a pulg. Se reducen las varas a pies: 4 × 3 = 12 pies y a éstos le sumamos los 2 pies del número:

12 + 2 = 14 pies

Se reducen los 14 pies a pulgadas: 14 × 12 = 168 pulgadas y a éstos le sumamos las 5 pulgadas del número dado:

168 pulgadas + 5 pulgadas = 173 pulgadas

2) Reducir 3 qq, 2 @ y 5 onzas a onzas.

3 qq × 4 = 12 @ 12 @ + 2@ = 14@
14 @ × 25 = 350 libras
350 libras × 16 =
5600 onzas 5600 onzas + 5 onzas =
5605 onzas.

EJERCICIOS

Reduce a número incomplejo de la especie indicada:

1. 7 vs 2 ps 6 pulg a pulg	**R.** 282 pulg
2. 5 vs 3 pulg a líneas	**R.** 2196 lin
3. 2 vs^2 2 ps^2 6 $pulg^2$ a $pulg^2$	**R.** 2886 $pulg^2$
4. 1 T 3 qq 5 arrobas a arrobas	**R.** 97 @
5. 1 qq. 18 lb a onzas	**R.** 1888 oz
6. 1 milla 2 furl 3 poles a poles	**R.** 403 pol
7. 3 años 6 h 9 min a min	**R.** 1555569 min
8. 2 poles 3 yard a pies	**R.** 42 p
9. 8º 6' 14» a seg (S)	**R.** 29174" s
10. 35' 46" a seg (S)	**R.** 2146" s
11. 3º a 4' 5" a seg (C)	**R.** 30405" C
12. 15º 23" a seg (C)	**R.** 150023" C

EJERCICIOS

Reduce a número incomplejo de la especie pedida:

1. 3 leg 8 cord 4 v a cord	**R.** 633 $\frac{1}{3}$ cord.
2. 1 cab 20 crd^2 500 v^2 a $cord^2$	**R.** 344 $\frac{125}{144}$ $cord.^2$
3. 3 cab 300 $cord^2$ 100 v^2 a cab	**R.** 3 $\frac{43225}{46656}$ cab.
4. 7 v 10 pulg a pies	**R.** 21 $\frac{5}{6}$ p
5. 2 v 1 p 2 lin a pulg	**R.** 84 $\frac{2}{3}$ pulg
6. 3 @ 8 lb 8 oz a lb	**R.** 83 $\frac{1}{2}$ lb
7. 23º 40' 24" a minutos (S)	**R.** 1420 $\frac{2}{5}$ C
8. 14º 50" a minutos (S)	**R.** 840 $\frac{5}{6}$ S
9. 5º 6' 10" a minutos (C)	**R.** 506 $\frac{1}{10}$ C
10. 23º 40' 24" a minutos (C)	**R.** 2340 $\frac{6}{25}$ C

REDUCCIÓN DE UN NÚMERO COMPLEJO A INCOMPLEJO DE ESPECIE INTERMEDIA O SUPERIOR

Para **reducir un número complejo a incomplejo de especie intermedia o superior** se sigue este procedimiento:

1) Reducir 4 T 5 qq 3 lb a quintales.

Reducimos las 4 T a qq: 4 T × 20 = 80 qq

80 qq + 5 qq = 85 qq

Reducimos las 3 libras a quintales dividiéndolas por las 100 lb que tiene un quintal:

$$3 \text{ lb} = \frac{3}{100} \text{qq}$$

Sumamos esta fracción de quintal con los 85 qq que ya teníamos:

$$85 \text{ qq} + \frac{3}{100} = 85\frac{3}{100} \text{qq}$$

2) Reducir 5 meses 3 días 8 horas 6 minutos a días.

Reducimos los 5 meses y 3 días a días:

5 meses × 30 = 150 días 150 + 3 = 153 días

Ahora hay que reducir las 8 hr 6 min a días, pero antes deben reducirse a minutos:

8 h × 60 = 480 min 480 min + 6 min = 486 min

Se reducen estos 486 min a días, dividiéndolos por los minutos que tiene un día: 1 día tiene 24 horas y 1 horas tiene 60 minutos, luego un día tiene 24 × 60 = 1440 min. Por tanto se dividen los 486 min por 1440 min que tiene un día:

$$486 \text{ min} = \frac{486}{1440} \text{días} = \frac{27}{80} \text{días}$$

Sumamos esta fracción de día con los 153 días y tendremos:

$$153 \text{ días} + \frac{27}{80} \text{días} = 153\frac{27}{80} \text{días}$$

3) Reducir 5º 9' 16" S a grados

Tenemos 5º. Reducimos los 9' 16" a seg y después a grados.

9' × 60 = 540" 540" + 16" = 556"

Se reducen estos 556" a grados, dividiéndolos por los segundos que tiene un grado: 1º tiene 60' y 1' tiene 60", luego un grado tiene 60 × 60 = 3600". Por tanto se dividen los 556" por 3600:

$$556" = \frac{556°}{3600} = \frac{139°}{900}$$

Sumamos esta fracción de grado con los 5º del número dado y tendremos:

$$5° + \frac{139°}{900} = 5\frac{139°}{900}$$

REDUCCIÓN DE UN NÚMERO INCOMPLEJO ENTERO DE ESPECIE INFERIOR A COMPLEJO

Para **reducir** un **número incomplejo entero** de especie **inferior a complejo** se reduce con una división el número dado a la especie superior inmediata y el cociente que resulte se reduce a la especie superior inmediata; se hace lo mismo con el nuevo cociente y así sucesivamente. El complejo se forma con el último cociente y todos los residuos con sus especies respectivas.

1) Reducir a complejo 123121 segundos.

123121	s	60		
0312		2052 m	60 h	
121		252	34 h	24
1	s	12 m	10 h	1 d

123121 seg = 1 d 10 h 12 min 1 seg

2) Reducir 10126 líneas a complejo.

10126 lin	12		
52	843 pulg	12	
46	03 pulg	70 p	3
10 lin		10	23 v
		1 p	

10126 lin = 23 v 1 p 3 pulg 10 lin

EJERCICIOS

Reduce a complejo:

1. 3154'' C	**R.** 31' 54'' C
2. 121207 seg	**R.** 1 d, 9 h 40 m 7 s
3. 186931 ad	**R.** 7 qq 1 @ 5 lb 3 oz 3 ad
4. 20318'' S	**R.** 5º 38' 38'' S
5. 50131'' S	**R.** 13º 55' 13'' S
6. 563 pulg	**R.** 15 v 1 p 11 pulg
7. 37932 oz	**R.** 1 T 3 qq 2 @ 20 lb 12 oz
8. 873 @	**R.** 10 T 18 qq 1 @
9. 1201 lin	**R.** 2 v 2 p 4 pulg 1 lin
10. 517 años	**R.** 5 sig 1 dec 1 l 2 a
11. 10800 puntos	**R.** 2 v 3 pulg
12. 1901'S	**R.** 31º 41' S
13. 123104'' C	**R.** 12º 31' 4'' C
14. 3410 yardas	**R.** 1 mill 7 turl 20 pol

REDUCCIÓN DE UN NÚMERO INCOMPLEJO SUPERIOR A COMPLEJO

Para **reducir un número incomplejo fracción de especie superior a complejo** se reduce el quebrado a su especie inferior inmediata, multiplicándolo; se anota la parte entera y la fracción resultante se reduce a la especie siguiente, y así sucesivamente hasta llegar a la última especie, cuando se anotan el entero y el quebrado.

1) Reducir a complejo o valuar el quebrado $\frac{2}{7}$ de día.

Reducimos las $\frac{2}{7}$ de día a horas:

$$\frac{2}{7}\text{ dias}\times 24=\frac{48}{7}=6\frac{6}{7}\text{h} \qquad 6 \text{ horas}$$

reducimos $\frac{6}{7}$ de hora a minutos:

$$\frac{6}{7}\text{h}\times 60=\frac{360}{7}=51\frac{3}{7}\text{m} \quad 51 \text{ minutos}$$

reducimos $\frac{3}{7}$ de minuto a segundos

$$\frac{3}{7}\text{m}\times 60=\frac{180}{7}=25\frac{5}{7}\text{ seg} \quad 25\frac{5}{7}\text{ segundos}$$

Luego $\frac{2}{7}$ de día = 6 horas, 51 minutos, $25\frac{5}{7}$ segundos.

Se hace esta operación para *valuar una fracción*.

2) Valuar $\frac{2}{5}$ de vara

$$\frac{2}{5}\text{v}\times 3=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}\text{p} \qquad 1\text{ pie}$$

$$\frac{1}{5}\text{p}\times 12=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}\text{pulg} \qquad 2 \text{ pie}$$

$$\frac{2}{5}\text{pulg}\times 12=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}\text{lin} \qquad 4 \text{ lin}$$

$$\frac{4}{5}\text{lin}\times 12=\frac{48}{5}=9\frac{3}{5}\text{puntos} \qquad 9\frac{3}{5}\text{ puntos}$$

$$\frac{2}{5}\text{de vara}=1\text{p }2\text{ pulg }4\text{ lin} \qquad 9\frac{3}{5}\text{ puntos}$$

REDUCIR UN NÚMERO INCOMPLEJO MIXTO SUPERIOR A COMPLEJO

Para la **reducción de un incomplejo número mixto de especie superior a complejo** se opera con la parte entera como en el primer caso, y con la fracción como en el segundo.

Reducir 325 $\frac{2}{11}$ @ a complejo.

Primero reducimos a complejo las 325 @:

325 @	4	
05	81 qq	20
1 @	1 qq	4 T

Ahora reducimos los $\frac{2}{11}$ @ a complejo:

$\frac{2}{11}@\times 25=\frac{50}{11}=4\frac{6}{11}lbs$ 4 lb

$\frac{6}{11}lb\times 16=\frac{96}{11}=8\frac{8}{11}oz$ 8 oz

$\frac{8}{11}oz\times 16=\frac{128}{11}=11\frac{7}{11}ad$ 11 ad

$\frac{7}{11}\ ad\times 3=\frac{21}{11}=1\frac{10}{11}tom$ 1 tom

$\frac{10}{11}\ tom\times 12=\frac{20}{11}=10\frac{10}{11}granos$ $10\frac{10}{11}$ granos

Luego $325\frac{2}{11}@s=$

4 T 1 qq 1 @ 4 lb 8 oz 11 ad 1 tom $10\frac{10}{11}$ granos

SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para sumar números complejos se colocan unos debajo de los otros de modo que las unidades de la misma especie se correspondan. A continuación se suman independientemente las unidades de cada especie, y terminada esta operación se verifica si las distintas especies contienen unidades de la especie superior inmediata, y en caso afirmativo se agregan:

1) Sumar 4 @ 9 libras 6 onzas 4 adarmes con 3@ 8 libras 7 onzas 9 adarmes con 1 @ 9 libras 12 onzas 13 adarmes.

4 @ 9 libras 6 onzas 4 adarmes
\+ 3 @ 8 libras 7 onzas 9 adarmes
1 @ 9 libras 12 onzas 13 adarmes
8 @ 26 libras 25 onzas 26 adarmes

Suma reducida: 2 qq 1 @ 2 libras 10 onzas 10 adarmes.

2) Una persona nació el 5 de mayo de 1903. ¿En qué fecha cumplió 14 años, 6 meses y 28 días?

A la fecha del nacimiento hay que sumarle la edad para encontrar la fecha en que cumplió esa edad.

Para expresar la fecha del nacimiento se escriben los *años y meses completos transcurridos* y tendremos:

1902 años 4 meses 5 días
\+ 14 años 6 meses 28 días
1916 años 10 meses 33 días

Suma reducida: 1916 años 11 meses 3 días.

Esto significa que el día en que cumplió la edad mencionada habían transcurrido 1916 años 11 meses y 3 días a partir del inicio de nuestra Era.

Si han transcurrido 1916 años, los 11 meses y 3 días son de 1917; si han transcurrido 11 meses completos, ya ha pasado hasta el mes de noviembre inclusive de 1917, luego los 3 días son de diciembre, por tanto cumplió la edad citada el 3 de diciembre de 1917.

EJERCICIOS

Reduce a complejo o valúa lo siguiente:

1. $\frac{5}{7}$ de libra **R.** 11 oz 6 ad 2 tom $6\frac{6}{7}$ g

2. $\frac{8}{19}$ de vara **R.** 1 p 3 pulg $1\frac{17}{19}$ lin

3. $\frac{3}{5}$ de Grado C **R.** 60' C

4. $200\frac{3}{8}$ S **R.** 3º 20' $22\frac{1}{2}$" S

5. $108\frac{2}{7}$ pul ing **R.** $3\frac{3}{7}$ lin

EJERCICIOS

(En este ejercicio y los siguientes de este Capítulo las **medidas angulares son sexagesimales**).

1. 5 varas 2 pies 7 pulgadas y 3 varas 1 pie 9 pulgadas.
R. 9 varas 1 pulgadas y 4 pulgadas.

2. 7 varas^2 5 pies^2 4 pulgadas^2; 7 pies^2 10 pulgadas^2 14 líneas^2 y 1 vara^2 28 pulgadas^2 36 líneas^2.
R. 9 v^2 3 p^2 42 pulg^2 y 50 lín^2.

3. 8º 16' 45''; 19º 32' 56''.
R. 27º 49' 41''.

4. 2 qq 1 @ 15 libras 6 onzas; 2 @ 11 libras, 7 oz; 14 libras 6 onzas 2 ad.
R. 3 qq. 16 lb 3 oz 2 ad.

5. 5 T 17 libras 18 onzas; 3 qq 7 libras 12 onzas 4 adarmes; 3 @ 13 libras 14 adarmes.
R. 5 T 4 qq 13 lbs 15 oz 2 ad.

6. 134 libras; 14 onzas 12 adarmes 2 tomines; 8 libras; 15 adarmes 1 tomín. **R.** 1 qq 1 @ 17 lb 15 oz 12 ad.

7. 3 días 6 horas 23 minutos; 5 días 9 horas 56 minutos; 9 días 12 horas 48 minutos.
R. 18 d 5 h 7 min.

8. 2 años 7 meses 24 días 17 horas; 7 años 27 días 14 horas; 9 meses 14 días 19 horas.
R. 10 a 6 mes 7 d 2 h.

9. Un padre tiene tres hijos cuyas edades son: la del mayor, 15 años 5 meses y 6 días; la del segundo, 7 años 4 meses y 8 días, y la del tercero, 4 años 18 días. ¿Cuánto suman las tres edades? **R.** 26 a 10 m 2 d.

10. Una muchacha nació el 15 de septiembre de 1946, se casó cuando tenía 18 años 4 meses y 20 días de nacida y tuvo 2 su primer hijo 1 año 2 meses y 3 días después de casada. ¿En qué fecha nació su hijo?
R. 8 de abril de 1966.

RESTA DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para **restar números complejos** se coloca el sustraendo debajo del minuendo de modo que las unidades de la misma especie se correspondan. A continuación se restan las distintas especies independientemente, empezando por la inferior. Si algún sustraendo parcial es mayor que el minuendo, se le agrega una unidad de la especie superior inmediata para que la resta sea posible, restando dicha unidad al minuendo siguiente.

1) Restar 4 días 8 horas 20 minutos 18 segundos de 10 días 7 horas 15 minutos 16 segundos.

		30 horas	74 minutos	
	9 días	~~6~~ horas	~~14~~ minutos	76 segundos
	~~10~~ días	~~7~~ horas	~~15~~ minutos	~~16~~ segundos
-	4 días	8 horas	20 minutos	18 segundos
	5 días	22 horas	54 minutos	58 segundos

2) Encontrar el complemento de un ángulo de 67º 34' 54''. Tenemos que restar este ángulo de 90º.

	90°		
-	67°	34'	54''

De los 90º quitamos un grado que tiene 60 y quedan 89º; de los 60' quitamos un minuto que tiene 60'', con lo que quedan 59' y restamos:

89º	59'	60''
- 67º	34'	54''
22º	25'	6''

3) Una persona nació el 7 de marzo de 1926 y murió el 3 de agosto de 1956. ¿Qué edad tenía al morir?

Se escribe la fecha en que murió, 3 de agosto de 1956, y debajo la fecha en que nació, 7 de marzo de 1926, y se restan:

		7 meses	33 días
	1956 años	~~8~~ meses	~~3~~ días
-	1926 años	3 meses	7 días
	30 años	4 meses	26 días

Al morir tenía 30 años, 4 meses, 26 días.

EJERCICIOS

1. Si de una circunferencia se quita un arco 93º 53' 19'', ¿cuál es el valor del arco que queda?
R. 266º6'41''.

2. Una persona nació el 5 de marzo de 1949 y murió el 4 de abril de 1966. ¿Qué edad tenía al morir? **R.** 17 a 29 d.

3. Antonio, que nació el 6 de julio de 1939, terminó su carrera el 25 de junio de 1966. ¿Qué edad tenía al terminar la carrera? **R.** 26 años 11 meses y 19 días.

MULTIPLICACIÓN DE COMPLEJOS

Hallar el quíntuplo de un ángulo de 18º 39' 43".

Se multiplica cada una de las especies del complejo por 5 y después se hace la reducción de cada una de ellas a la especie superior:

	18°	39'	43"
			× 5
	90°	195'	215"
Producto reducido:	93°	18'	35"

1. Si una mercancía cuesta $0.50 la libra, ¿cuánto cuestan 3 @ 8 lb 8 oz? Al tener el precio de una libra, debemos reducir 3 @ 8 lb 8 oz a libras:

$$3@ \times 25 = 75 \text{ lb}$$

$$75 \text{ lb} + 8 \text{ lb} = 83 \text{ lb}$$

$$8 \text{ oz} = \frac{8}{16} \text{ lb} = \frac{1}{2} \text{ lb}$$

$$83 \text{ lb} + \frac{1}{2} \text{ lb} = 83\frac{1}{2} \text{ lb}$$

Entonces, si una libra cuesta $0.50, $83\frac{1}{2}$ lb costarán:

$$\$0.50 \times 83\frac{1}{2} = \$41.75$$

2. Una persona recorre 8 varas 1 pie 3 pulgadas en 1 segundo. ¿Cuánto recorrerá en 3 minutos 8 segundos?

Al saber lo que recorre en 1 seg se reducen los 3 minutos 8 seg a segundos:

3 min × 60 = 180 seg
180 seg + 8 seg = 188 seg

Si en 1 seg el móvil recorre 8 v 1 pie 3 pulg, en 188 seg recorrerá:

8 v	1 pie	3 pulg.
		×188
1504 v	188 p	564 pulg.

Producto reducido: 1582 v 1 p.

EJERCICIOS

1. Una persona recorre 25 varas 2 pies 9 pulgadas en 1 minuto. ¿Cuánto recorrerá en 8 minutos?
R. 207 v 1 p.

2. ¿Cuál es el séxtuplo de un ángulo de 72º 34' 56"?
R. 435º 29' 36".

3. Si con $0.20 pueden comprarse 2 libras 7 onzas y 4 adarmes de una mercancía, ¿cuánto podrá adquirirse con $1.20?
R. 14 lb 11 oz 8 ad.

4. Encuentra el duplo de la suma de dos ángulos de 54º 56' 58" y 31º 34' 38"
R. 173º 3' 12".

5. Encuentra el quintuplo del complemento de un ángulo de 72º37'56".
R. 86º50'20".

6. Seis ángulos iguales suman 1345º 23' 57". ¿Cuánto vale cada ángulo?
R. 224º 13' $59\frac{1}{2}$"

7. El triplo de un ángulo es 137º 56' 42". Encuentra el ángulo.
R. 45º 58' 54"

8. Tres personas tienen la misma edad y la suma de las tres edades es 61 años 18 días. Encuentra la edad común.
R. 20 años 4 meses 6 días.

9. ¿Cuál es la mitad del complemento de un ángulo que mide 18º 19' 19"?
R. 35º 50' $20\frac{1}{2}$"

10. En una circunferencia, un arco de 12º 25' 36" tiene una longitud de 36 cm. ¿Qué longitud corresponde a cada minuto?
R. $\frac{45}{932}$ cm

11. Un móvil recorre 15 varas 8 pulgadas 3 líneas en 1 segundo. ¿Cuánto recorrerá en 2 minutos 5 segundos?
R. 1903 v 1 p 11 pulg 3 lín.

12. De las 7 libras 6 onzas 5 adarmes de alimentos que tenía Joaquín, separó para sí 2 libras 8 onzas y el resto lo dividió en partes iguales entre tres pobres. ¿Cuánto correspondió a cada uno de ellos?
R. 1 libra, 10 onzas 1 adarme 2 tom.

DIVISIÓN DE COMPLEJOS

1. Se reparten 4 T 3 @ 18 lb de alimentos para tres asilos en partes iguales. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

Se divide entre 3 cada una de las especies, reduciendo cada resto a la especie siguiente y se suma a dicha especie:

4 T	20 qq	3 @	18 lb	32 oz	3
1 T	2 qq	+ 8 @	+ 50 lb	2 oz	1 T 6 qq 3 @ 22 lb $10\frac{2}{3}$ oz
× 20	× 4	11 @	68 lb		
20 qq	8 @	2 @	08		
		× 25	2 lb		
		50 lb	× 16		
			32oz		

A cada asilo le corresponde 1 T 6 qq 3 @ 22 lb 10 $\frac{2}{3}$ oz.

Si compramos 8 lb 4 oz de una mercancía en $6.60, ¿cuánto cuesta la onza?

Se debe reducir el complejo a onzas:

8 lb × 16 = 128 oz 128 oz + 4 oz = 132 oz

Si 132 onzas costaron $6.60 cada onza sale a:

$6.60 ÷132 oz = $0.05

2. Si una persona recorre 300 v 2 p 5 pulg en 3 min 6 seg, ¿cuánto por segundo?

Se reducen los 3 min 6 seg a segundos:

3 min × 60 = 180 seg 180 seg + 6 seg = 186 seg

Si en 186 seg recorre 300 v 2 p 5 pulg, para saber lo que camina en 1 seg se divide este complejo entre 186:

300 v	2 p	5 pulg	492 lin	186
				1 v 1 p 10 pulg $2\frac{20}{31}$ lin
114 v	+ 342 p	+1896 pulg	120 lin	
×3	344 p	1901 pulg		
342 p	158 p	41 pulg		
	× 12	× 12		
	316	82		
	158	41		
	1896 pulg	492 lin		

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN COMBINADAS

Si una persona recorre 8 v 2 p 6 pulg en 3 min 6 seg, ¿cuánto recorrerá en 5 minutos?

Reducimos 8 v 2 p 6 pul a pulgadas:

8 v × 3 = 24 p 24 p + 2 p = 26 p
26 p × 12 = 312 pulg 312 pulg + 6 pulg = 318 pulg

Reducimos 3 min 6 seg a segundos:

3 min × 60 = 180 seg
180 seg + 6 seg = 186 seg

Reducimos 5 min a segundos:

5 min × 60 = 300 seg

el problema queda reducido a lo siguiente:

Si una persona recorre 318 pulg en 186 seg, ¿cuánto recorrerá en 300 seg?

Si en 186 seg recorre 318 pulg en 1 seg recorrerá: $\frac{318}{186}$ pulg y en 300 seg.

$$\frac{318 \times 300}{186} \text{ plug} = 512\frac{28}{31} \text{ plug}$$

Al reducir este número a complejos, tenemos: 14 v 8 pulg $10\frac{26}{31}$ líneas.

Una persona recorre 8 v 3 pulg, en $\frac{3}{5}$ de min, ¿cuánto recorrerá en $\frac{3}{4}$ de hora?

Reducimos 8 v 3 pulg a pulg:

8 v × 36 = 288 pulg
288 pulg + 3 pulg = 291 pulg

Reducimos los $\frac{3}{5}$ de minuto a segundos: $\frac{3}{5}\text{min}\times 60 = \frac{180}{5} = 36$ seg

Reducimos los $\frac{3}{4}$ de hora a segundos:

$\frac{3}{4}$ h × 3600 = $\frac{10800}{4}$ = 2700 seg.

El problema queda reducido a lo siguiente: Si una persona recorre 291 pulg en 36 seg, ¿cuánto recorrerá en 2700 seg?

Si en 36 seg recorre 291 pulg en 1 seg recorrerá $\frac{291}{36}$ pulg y en 2700 seg

$\frac{291 \times 2700}{36}$ pulg = 21825 pulg =

606 v 9 pulg



En el siglo II d.C. Ptolomeo estableció longitudes aproximadas de varias ciudades, tomando como base a Alejandría. El sextante permitió determinar la longitud exacta durante la navegación. En el siglo XVII Huygens basándose en los descubrimientos de Galileo construyó los primeros relojes de péndulo.

CAPÍTULO XLI

LONGITUD Y TIEMPO

La longitud es la mayor de las dos dimensiones principales que tienen las cosas o figuras planas, en contraposición a la menor que se llama latitud.

El tiempo es una variable que interviene de modo general en los problemas con los correspondientes a las tres coordenadas del espacio.

Las principales unidades de tiempo son el año y el día que forman parte de todos los sistemas cronológicos humanos, pero el valor de uno y otro difieren según los fenómenos de que dependan y de los fines para los cuales se utilizan.

MERIDIANO

El **meridiano** es un círculo máximo (figura 122) que pasa por los polos de la Tierra y corta perpendicularmente al Ecuador.

Cada punto o lugar de la Tierra tiene su meridiano.



Figura 122

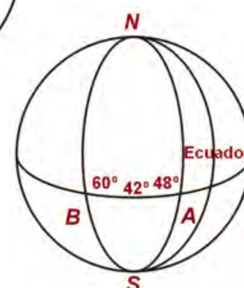


Figura 123

LONGITUD

La **longitud** de un punto o lugar de la Tierra es la distancia de éste al **primer meridiano**, que es el lugar donde convergen todas las longitudes. El primer meridiano generalmente aceptado es el que pasa por Greenwich, cerca de Londres.

La longitud se mide en grados, minutos y segundos y puede ser este u oeste, según esté situada con respecto al primer meridiano. Cuando decidimos que la longitud de un punto A (figura 124) es 40º 23' 50" este, significa que está situado al este del primer meridiano y a una distancia igual a 40º 23' 50", y decimos que la longitud del punto B es 80º 42' 43" **oeste**, significa que está situado al oeste del primer meridiano y a una distancia igual a 80º 42' 43".

Cabe mencionar que la longitud no puede pasar de 180º.

La **diferencia de longitud** entre dos puntos es la **distancia**, medida en grados, minutos y segundos, entre los meridianos que pasan por ambos puntos, y si está entre dos puntos situados **ambos al este** o al **oeste** del primer meridiano, se obtiene **restando ambas longitudes**.

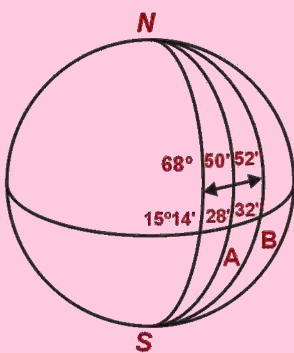


Figura 124

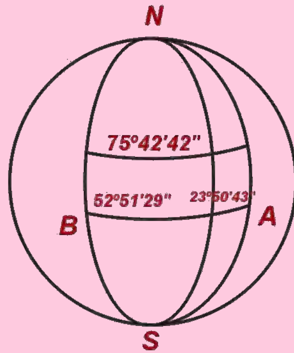


Figura 125

De tal forma, si la longitud del punto A (figura 125) es 40º 18' 45" **este** y la del punto B 68º 50'52" **este**, la diferencia de sus longitudes, o sea la distancia en longitud de A a B, será:

	60° 50' 52"
-	40° 18' 45"
	20° 32' 7"

Por otra parte, la diferencia de longitud entre dos puntos situados **uno al este** y **otro al oeste** del primer meridiano se obtiene **sumando ambas longitudes**.

Si la longitud del punto *A* (figura 125) es 23º 50' 43" **este** y la del punto B 52º 51' 29" **oeste**, la diferencia de sus longitudes, o sea la distancia en longitud de A a B, será:

	23°	50'	43"
+	52°	51'	29"
	75°	101'	72"
Reduciendo	76°	42'	12"

Si al sumar ambas longitudes el resultado es mayor de 180º, debe restarse de 360º.

Si la longitud de un punto es 120º 42" 17" **oeste** y la de otro 80º 9' 23" **este**, la diferencia de sus longitudes será:

	120°	42'	17"
+	80°	9'	23"
	200°	51'	40"

pero como esta suma es mayor de 180º se resta de 360º para hallar la verdadera distancia:

	359°	59'	60"
-	200°	51'	40"
	159°	8'	20"

EJERCICIOS

Busca la diferencia de longitud entre:

1. Bogotá (70º 4' 53" oeste) y Hamburgo (9º 58' 21" este).
R. 80º 3' 14".

2. Otawa (75º 42' 59' oeste) y Río de Janeiro (43º10'22" oeste).
R. 32º 32' 37".

3. Key West (81º 48' 24" oeste) y Montevideo (56º 15' 30" oeste).
R. 25º 32' 37".

4. Barcelona (2º 11' 4" este) y Leningrado (30º 17' 42" este).
R. 28º 6' 38".

5. Havre (6' 28" este) y HongKong (114º 10' 19").
R. 114º 3' 51".

6. Varsovia (21º 1' 49" este) y Melbourne (144º 58' 33" este).
R. 123º 56' 44".

7. Marsella (5º 23' 37" este) y Calcuta (88º 20' 12" este).
R. 82º 56' 35".

8. Nueva Orleans (90º 3' 51" oeste) y Viena (16º 20' 20" este).
R. 106º 24' 11".

9. Vladivostok (131º 53' 6" este) y Chicago (87º 37' 37" oeste).
R. 140º 29' 17".

10. Tahití (149º 29' 16" oeste) y Wellington (174º 46' 6" este).
R. 35º 44' 38".

11. Cienfuegos (longitud 80º 29' 16" oeste) y Liverpool (longitud 3º 37" oeste).
R. 77º 28' 39".

12. Santiago de Cuba (75º 45' 7" oeste) y Coruña (8º 2' 24" oeste).
R. 67º 20' 43".

RELACIÓN TIEMPO LONGITUD

Cada punto de la Tierra da una vuelta completa en 24 horas, es decir, describe una circunferencia de 360° en 24 horas, por tanto en una hora describe un arco que será $\frac{1}{24}$ de 360°, o sea $\frac{860}{24}{}^{o} = 15^{o}$.

Una hora tiene 60 minutos, por lo que en una hora un punto de la Tierra describe un arco de 15°, en un minuto describirá un arco que será $\frac{1}{60}$ de 15°, o sea $\frac{15}{60}{}^{o} = \frac{1}{4}{}^{o} = 15'$.

Como 1 minuto tiene 60 segundos, si en un minuto un punto de la Tierra describe un arco de 15', en un segundo describirá un arco que será $\frac{1}{60}$ de 15' o sea $\frac{15}{60}' = \frac{1}{4}' = 15''$.

Por tanto: 1 hora equivale a 15° de longitud.
1 minuto equivale a 15' de longitud.
1 segundo equivale a 15" de longitud.

EXPRESAR EL TIEMPO EN LONGITUD

Expresar en longitud 2 horas 8 minutos 16 segundos.

Como 1 hora equivale a 15°, 1 minuto a 15' y 1 segundo a 15", sólo se **multiplica** 2 h 8 min 16 seg por 15 y resultará la longitud en grados, minutos y segundos.

```
   2 h     8 min     16 seg
                  × 15
 ----------------------------
   30°    120'       240"
```

Reduciendo: 32º 4' 0"

Para buscar la diferencia de longitud entre dos ciudades cuya diferencia de tiempo es 1 hora 20 minutos 7 segundos, tan sólo se **multiplica** la diferencia de tiempo por 15:

```
  1 hora    20 min    7 seg
                 × 15
 ----------------------------
  15º       300'      105"
```

Reduciendo 20º 1' 45"

La diferencia de longitud es:

20º 1' 45"

RELACIÓN LONGITUD TIEMPO

Sabiendo que un punto de la Tierra describe un arco de 15º en 1 hora o 60 minutos, para describir un arco de 1º empleará un tiempo 15 veces menor, o sea $\frac{60}{15}$ min = 4 minutos.

Dado que 1º tiene 60', si para recorrer un arco de un grado emplea 4 minutos, para un arco de 1' empleará un tiempo 60 veces menor, o sea $\frac{4}{60}$ min = $\frac{1}{15}$ de min = 4 seg.

Luego 15° de longitud equivalen a 1 hora
Luego 1° de longitud equivalen a 4 minutos
Luego 1' de longitud equivalen a 4 segundos

EJERCICIOS

Expresa en longitud:

1. 3 h 23 min 18 seg	**R.** 50° 49' 30"
2. 4 h 6 min 7 seg	**R.** 61° 31' 45"
3. 5 h 52 min 16 seg	**R.** 88° 4'
4. 6 h 33 seg	**R.** 90° 8' 15"
5. 2 h 20 min 17 seg	**R.** 35° 4' 15"

EXPRESAR LONGITUD EN TIEMPO

Expresar en tiempo 18° 9' 8".

Como 15º de longitud equivalen a 1 hora, 15' a 1 minuto y 15" a 1 segundo, sólo se divide 18º 9' 8" entre 15 y el cociente expresará el tiempo en horas, minutos y segundos:

```
   18º      9'        8"  | 15
                          |____________
                           1 h. 12 min
                           36 8/5 seg
    3     + 180     + 540
  × 60    -----     -----
  ----     189'      548"
  180'      39        98
            9'         8
          × 60
          ----
          540"
```

Para encontrar la diferencia de tiempo entre dos ciudades cuya diferencia de longitud es 16º 43' 9", se **divide** la diferencia de longitud entre 15:

```
   16º      43'        9" | 15
                          |____________
                           1 h 6 min 52 3/5 seg
     1    +  60    + 780
  ×  60   -----    -----
  -----    103'     789"
   60'      13'      39
          ×  60       9"
          -----
           780"
```

LOCALIZACIÓN DE LA LONGITUD Y EL HORARIO

Dada la longitud de dos lugares y la hora de uno de ellos, hallar la hora del otro

Como la Tierra gira de oeste a este, si fijamos un lugar en su superficie sucederá que en todos los lugares situados al este de ese punto el sol sale más temprano y en todos los lugares situados al oeste sale más tarde.

Por tanto, conociendo la **hora de un lugar**, para obtener la hora de otro situado al este, se suma a la hora dada la diferencia de hora entre los dos lugares, y para obtener la hora de otro lugar situado al oeste del primero, se **resta** de la hora dada la diferencia de hora entre los dos lugares.

Como ya lo vimos, la diferencia de hora entre los dos lugares se obtiene al encontrar la diferencia de longitud entre los dos lugares y dividiéndola entre 15.

Si es mediodía en Greenwich, ¿qué hora es en Bombay? (longitud 72º 48' 54" este).

A la hora de Greenwich, 12 del día, se le **suma** la diferencia de hora entre Greenwich y Bombay, que está al este de Greenwich. Para buscar la diferencia de hora hay que hallar la diferencia de longitud y dividirla entre 15, pero como la longitud de Greenwich es 0, la diferencia de longitud es 72º 48' 54". Por tanto, al dividir 72º 48' 54" entre 15 tendremos:

72º	48"	54"	15
12º	+ 720"	+180"	4 h 51 min $15\frac{3}{5}$ seg
× 60	768"	234"	
720'	18"	84"	
	3"	9	
	× 60"		
	180"		

A la hora de Greenwich, 12 del día, se le **suma** la diferencia de hora: 4h 51 min. $15\frac{3}{5}$ seg y en Bombay serán las 4 h 51 min $15\frac{3}{5}$ seg pm.

Si son las 8 am en Barcelona (longitud 2º 11' 4" este), ¿qué hora es en Sidney, Australia? (longitud 151º 12' 23" este).

Se busca la diferencia de longitud restada ambas longitudes, porque los dos lugares están al este del primer meridiano:

	151º	12'	23"
-	2º	11'	4"
	149º	1'	19"

Se obtiene la *diferencia de hora* dividiendo entre 15 la diferencia de longitud:

149º	1'	19"	15
14º	+ 840	+60"	9 h 56 min $5\frac{4}{15}$ seg
× 60	841'	79"	
840'	91	4	
	1'		
	× 60		
	60"		

Como Sidney se encuentra al este de Barcelona, a la hora dada, 8 am, se le suma la diferencia de hora, 9 h 56 min $5\frac{4}{15}$ seg y resultará que en Sidney serán las 5 h 56 min $5\frac{4}{15}$ seg pm.

¿Qué hora es en Calcuta (longitud 88º 20' 12" este) cuando en La Habana (longitud 82º 20' 54" oeste) son las 9 pm?

Se obtiene la diferencia de la longitud **sumado ambas longitudes**, porque La Habana está al oeste y Calcuta al este del primer meridiano:

	88º	20'	12"	
+	82º	20'	54'	
	170º	41'	6"	(reduciendo)

Diferencia $\frac{170º\,41'\,6''}{15} = 11$ h 22 min $44\frac{2}{5}$ seg de hora:

A la hora dada en La Habana, 9 pm se le **suma** esta diferencia de hora y resultará que en Calcuta serán las 8 h 22 min $44\frac{2}{5}$ seg am del día siguiente.

¿Qué hora es en Washington (longitud 77º 3' 56" oeste) cuando en París (longitud 2º 20' 14" este) son las 7 am?

Se obtiene la diferencia de hora sumando ambas longitudes:

77º	3'	56"	
2º	20'	14"	
79º	24'	10"	(reduciendo)

La diferencia de hora será:

$\frac{79º24'10''}{15} = 5$ h 17 min $36\frac{3}{8}$ seg

A la hora de París, 7 am se le **resta** la diferencia de hora, porque Washington esta al oeste de París, y resultará que la hora de Washington será la 1 h 42' $23\frac{1}{3}$" seg am del mismo día.



La aplicación del conocimiento de las proporciones se la debemos a los matemáticos Regiomontano y Lucas Pacioli, este último ha pasado a la historia como el inventor de la contabilidad por partida doble.

CAPÍTULO XLII

RAZONES Y PROPORCIONES

La razón o relación es el resultado de comparar dos cantidades, lo cual puede hacerse de dos maneras: buscar en cuánto excede una a la otra, es decir **restándolas**, o buscando cuántas veces contiene una a la otra, es decir **dividiéndolas**. De aquí que las razones se dividan en dos clases: **razón aritmética** o **por diferencia** y **razón geométrica** o **por cociente**.

La razón aritmética o por diferencia es la diferencia indicada de dos cantidades.

RAZONES

Las razones aritméticas se pueden escribir separando las dos cantidades con el signo - o con un punto (.): la razón aritmética de 6 a 4 se escribe 6 - 4 ó 6.4 y se lee **seis es cuatro**.

La razón consta de dos términos: el primero es el antecedente y el segundo el **consecuente**. En la razón 6 - 4, el antecedente es 6 y el consecuente 4.

La **razón geométrica o por cociente** es el cociente indicado de dos cantidades.

Las razones geométricas se escriben en forma de quebrado, ya sea separando numerador y denominador con una raya horizontal o separando las cantidades con el signo de división (÷): la razón geométrica de 8 a 4 se escribe u 8 ÷ 4 y se lee **ocho es a cuatro**.

La razón geométrica, al igual que la aritmética, consta de los términos **antecedente** y **consecuente**. En la razón 8 ÷ 4, el antecedente es 8 y el consecuente 4.

PROPIEDADES

Dado que la razón aritmética o por diferencia de dos cantidades es la diferencia indicada de dichas cantidades, sus propiedades serán las de toda resta o diferencia:

1) Si se suma o resta un número al antecedente de una razón aritmética, la razón queda aumentada o disminuida en ese número.

2) Si se suma o resta un número, al consecuente de una razón aritmética, la razón queda disminuida en el primer caso y aumentada en el segundo, en el mismo número.

3) Si se suma o resta un mismo número al antecedente y su consecuente de una razón aritmética la razón no varía.

Dado que la razón geométrica o por cociente de dos cantidades es una división indicada o un quebrado, sus propiedades serán las mismas de los quebrados:

1) Si se multiplica o divide por un número el antecedente de una razón geométrica, la razón queda multiplicada o dividida por ese número.

2) Si se multiplica o divide por un número el consecuente de una razón geométrica, la razón queda dividida en el primer caso y multiplicada en el segundo por ese mismo número.

3) Si se multiplican o dividen por un mismo número el antecedente y el consecuente de una razón geométrica la razón no varía.

EJERCICIOS

En estos ejercicios, cuando se mencione simplemente razón o relación, se entenderá que la razón pedida es geométrica.

1. Dos números son entre sí como 2 es a 17. Si el menor es 14, ¿cuál es el mayor? **R.** 119.

2. Menciona dos números cuya razón aritmética sea 6 y dos cuya razón geométrica sea $\frac{2}{3}$.

3. El mayor de dos números, es 42 y la relación entre ambos de 5 a 7. ¿Cuál es el número? **R**. 30.

4. Encuentra la razón aritmética y geométrica de:

a) 5.6 y 3.5 **R.** 2.1; $\frac{8}{5}$

b) $\frac{11}{12}$ y $\frac{5}{6}$ **R.** $\frac{1}{12}$; $\frac{11}{10}$

5. Menciona cinco pares de números que estén en la relación de 2 y 3.

6. Cita tres pares de números cuya razón sea $\frac{3}{4}$ y tres pares cuya relación sea de 1 a 6.

7. La razón de dos números es $\frac{5}{6}$. Si el menor es 20, ¿cuál es el mayor? **R.** 24.

PROPORCIONES ARITMÉTICAS

Una **equidiferencia o proporción aritmética** es la igualdad de dos diferencias o razones aritméticas y se puede escribir de dos formas:

$a - b = c - d$ y $a \cdot b :: c \cdot d$, y se lee a es a b como c es a d.

A los términos de una equidiferencia se ls llama **extremos** (el primero y él cuarto) y **medios** (el segundo y al tercero), pero también, al igual que las razones, se les conoce como **antecedentes** (primero y tener términos) y **consecuentes** (segundo y cuarto).

En la equidiferencia 20 - 5 = 21 - 6, los extremos son 6 y 20 y los medios, 5 y 21, o bien, 20 y 21 antecedentes, 5 y 6 consecuentes.

Se conocen dos clases de equidiferencias: la **discreta**, cuyos medios no son iguales, por ejemplo 9 - 7 = 6, y la **continua**, cuyos medios si son iguales, por ejemplo 10 - 8 = 8 - 6.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

En toda equidiferencia la suma de los extremos es igual a la suma de los medios.

Siendo la equidiferencia $a - b = c - d$, demostraremos que $a + d = c + b$.

Sumando a los dos miembros de la equidiferencia dada $a - b = c - d$ un extremo y un medio $b + d$, tendremos:

$a - b + b + d = c - d + b + d$

y simplificando nos queda $a + d = c + b$, que es lo que queríamos demostrar.

En la equidiferencia 8 - 6 = 9 - 7 tenemos: 8 + 7 = 9 + 6, o sea 15 = 15.

1) En toda equidiferencia un extremo es igual a la suma de los medios, menos el otro extremo.

Siendo la equidiferencia $a - b = c - d$, demostraremos que $a = b + c - d$.

Sabemos por la propiedad fundamental que $a + d = b + c$.

Si restamos d en ambos miembros, tendremos $a + d - d = b + c - d$ y simplificando: $a = b + c - d$.

En 9 - 5 = 10 - 6 tenemos que:

9 = 5 + 10 - 6

2) En toda equidiferencia un medio es igual a la suma de los extremos, menos el otro medio.

Siendo la equidiferencia $a - b = c - d$, probaremos que $b = a + d - c$.

Sabemos que $a + d = b + c$.

Si restamos c a los dos miembros tendremos $a + d - c = b + c - c$ y simplificando: $b = a + d - c$.

En 11 - 7 = 9 - 5 tenemos que:

7 = 11 + 5 - 9

MEDIA DIFERENCIAL O ARITMÉTICA

La **media diferencial** o **media aritmética** es cada uno de los términos medios de una equidiferencia continua, o sea cada uno de los medios de una equidiferencia, cuando son iguales. En la equidiferencia 8 - 6 = 6 - 4, la media diferencial es 6.

Teorema

La media diferencial es igual a la semisuma de los extremos.

Siendo la equidiferencia a - b = b - c, demostraremos que $b=\frac{a+c}{2}$

Según la propiedad fundamental sabemos que $a + c = b + b$, o sea $a + c = 2b$.

Si dividimos ambos miembros entre 2 nos queda $\frac{a+c}{2}=\frac{2b}{2}$ o sea $\frac{a+c}{2}=b$ que es lo que queríamos demostrar.

En 12 - 9 = 9 - 6 tenemos $9=\frac{12+6}{2}$

TÉRMINOS DESCONOCIDOS EN EQUIDIFERENCIAS

1) Hallar el término desconocido en 8 - 6 = 4 - x .

Como el término desconocido es un extremo, que es igual a la suma de los medios menos el extremo conocido, tendremos:

$$x = 6 + 4 - 8 = 2$$

sustituyendo el valor de x en la equidiferencia: 8 - 6 = 4 - 2

2) Hallar el término desconocido en . $3.4-x=\frac{8}{5}-1$

Como el término desconocido es un medio, que es igual a la suma de los extremos menos el medio conocido, tendremos:

$$x=3.4+1-\frac{8}{5}=4.4-\frac{8}{5}=\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}$$

sustituyendo el valor de x : $3.4-2\frac{4}{5}=\frac{8}{5}-1$

3) Hallar el término desconocido en 14 - x = x - 3.04

Aquí el término desconocido es la media diferencial, que es igual a la semisuma de los extremos, luego:

$$x=\frac{14+3.04}{2}=\frac{17.04}{2}=8.52$$

sustituyendo el valor de x en la equidiferencia dada: 14 - 8.52 = 8.52 - 3.04.

EJERCICIOS

Encuentra el término desconocido en:

1. $x-\frac{5}{16}=6\frac{2}{5}-\frac{1}{8}$ **R.** $6\frac{47}{80}$

2. $8-\frac{1}{3}-x=5\frac{1}{4}-14\frac{1}{12}$ **R.** $17\frac{1}{6}$

3. 45.3 - x = 18 - 0.03 **R.** 27.33

4. $\frac{1}{2}-0.36=x-4\frac{1}{8}$ **R.** 4.265

5. $\frac{9}{19}-x=\frac{3}{7}-\frac{1}{4}$ **R.** $\frac{157}{532}$

TÉRMINO MEDIO DIFERENCIAL ENTRE DOS NÚMEROS

Hallar la media diferencial entre 8.04 y 4.

Aquí se debe formar una equidiferencia continua cuya medio diferencial sea x y los extremos los números dados, y despejar x :

8.04 - x = x - 4

Despejando x :

$$x=\frac{8.04+4}{2}=\frac{12.04}{2}=6.02$$

y sustituyendo el valor de x :

8.04 - 6.02 = 6.02 - 4

EJERCICIOS

Encuentra el término medio diferencial entre:

1. 100 y $50\frac{3}{11}$ **R.** $75\frac{3}{22}$

2. 150 y 20.364 **R.** 85.182

3. $5\frac{3}{5}$ y 0.006 **R.** 2.803

4. 5.004 y 0.0016 **R.** 2.5028

5. 3.42 y $\frac{3}{4}$ **R.** 2.085

6. $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$ **R.** $\frac{11}{30}$

PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

Una proporción geométrica o **equicociente** es la igualdad de dos razones geométricas o por cociente, y puede escribirse de dos formas:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ o } a : b :: c : d$$

y se lee a es a b como c es a d .

A los términos de una proporción geométrica se les llama **extremos** (el primero y el cuarto) y **medios** (el segundo y el tercero), pero también, al igual que las razones, se les conoce como **antecedentes** (primero y tercer términos) y **consecuentes** (segundo y cuarto).

En la proporción $\frac{8}{4}$ y $\frac{10}{5}$ los extremos son 8 y 5 y los medios 10 y 4; o bien, los antecedentes son 8 y 10 y los consecuentes 4 y 5.

Se conocen dos clases de proporciones geométricas: la **discreta**, cuyos medios no son iguales, por ejemplo 8 : 4 :: 10 : 5, y la **continua**, cuyos medios sí son iguales, por ejemplo 20 : 10 :: 10 : 5.

MEDIA PROPORCIONAL

La **media proporcional** o **media geométrica** es cada uno de los términos medios de una proporción geométrica continua, es decir, cuando los términos son iguales. En la proporción 8: 4 :: 4 : 2 la media proporcional es 4.

Teorema

La media proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

Siendo la proporción continua $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ demostraremos que $b = \sqrt{a \times c}$

Según la propiedad fundamental $a \times c = b \times b$, o sea $a \times c = b^2$.

Si extraemos la raíz cuadrada en ambos miembros tendremos: $\sqrt{a \times c} = \sqrt{b^2}$ y simplificando

$b = \sqrt{a \times c}$ que es demostrativo:

En $\frac{9}{6}=\frac{6}{4}$ tenemos que $6 =\sqrt{9\times4}=\sqrt{36}=6$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

En toda proporción geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Siendo la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, demostraremos que $a \times d = c \times b$.

Si multiplicamos ambos miembros de la igualdad $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ por el producto de un medio y un extremo, $b \times d$, para lo cual basta con multiplicar los numeradores, tendremos:

$$\frac{a\times b\times d}{b}=\frac{c\times b\times d}{d}$$

y simplificando nos queda: $a \times d = c \times b$, que es lo que queríamos demostrar.

En la proporción $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ tenemos que $6 \times 2 = 3 \times 4$, o sea $12 = 12$.

1) En toda proporción geométrica un extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.

Siendo la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, demostraremos que $a \frac{b\times c}{d}$

Sabemos por la propiedad fundamental que $a \times d = b \times c$.

Si dividimos los dos miembros de esta igualdad por d tendremos: $\frac{a\times d}{d}=\frac{b\times c}{d}$ y simplificando: $a=\frac{b\times c}{d}$

En $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ tenemos $9=\frac{12\times 3}{4}$

2) En toda proporción geométrica un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio.

Siendo la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, probaremos que $b=\frac{a\times d}{c}$

Sabemos que $a \times d = b \times c$.

Al dividir ambos miembros de esta igualdad por c , tendremos: $\frac{a\times d}{c}=\frac{b\times c}{c}$ y simplificando $b=\frac{a\times d}{c}$

En $\frac{5}{10}=\frac{2}{4}$ tenemos $2=\frac{5\times 4}{10}$

TÉRMINOS DESCONOCIDOS EN PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

1) Hallar el término desconocido en 8 : 4 :: 10 : *x* .

Como el término desconocido es un extremo, que es igual al producto de los medios dividido por el extremo conocido, tendremos:

$$x = \frac{4 \times 10}{8} = c$$

Sustituyendo el valor de la *x* en la proporción dada, queda: 8 : 4 :: 10 : 5.

2) Hallar el término desconocido en

$$10 : \frac{1}{6} :: x : 4$$

Como el término desconocido es un medio, que es igual al producto de los extremos dividido por el medio conocido, tendremos:

$$x = \frac{10 \times 4}{1/6} = \frac{40}{1/6} = 240$$

Sustituyendo el valor de *x* en la proporción dada, queda: 10: 1/6 :: 240 : 4

3) Hallar el término desconocido en $25 : x :: x : \frac{1}{16}$

Como el término desconocido es la media proporcional y ésta es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos, tendremos:

$$x = \sqrt{25 \times \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

Sustituyendo el valor de *x* en la proporción dada, queda:

$$25 : 1\frac{1}{4} :: 1\frac{1}{4} : \frac{1}{16}$$

MEDIA PROPORCIONAL

Hallar el término medio proporcional entre 16 y 81.

Se debe formar una proporción geométrica continua cuyo medio proporcional sea *x* y los extremos los números dados, y despejar *x* :

$$16 : x :: x : 81.$$

Despejando *x* :

$$x = \sqrt{16 \times 81} = 4 \times 9 = 36$$

Al sustituir el valor de *x* en la proporción dada, queda: 16 : 36 :: 36 : 81.

CUARTA PROPORCIONAL

Una **cuarta proporcional** es cualquiera de los cuatro términos de una proporción geométrica discreta. Así, en la proporción 8 : 16 :: 5 : 10, cualquiera de estos cuatro términos es cuarta proporcional respecto de los otros tres.

Hallar una cuarta proporcional de

$20,\ \frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$: x

Se forma una proporción geométrica con estas tres cantidades, poniendo de último extremo *x*, y se despeja el valor de *x* :

$$x = \frac{1/3 \times 2/5}{20} = \frac{2/15}{20} = \frac{2}{300} = \frac{1}{150}$$

sustituyendo el valor de x $:20 : \frac{1}{3} :: \frac{2}{5} : \frac{1}{150}$.

TERCIA PROPORCIONAL

Una **tercera** o **tercia proporcional** es el primero o cuarto términos de una proporción geométrica continua. Así, en la proporción 20 : 10 :: 10 : 5, 20 es una tercia proporcional de 10 y 5, y 5 es una tercia proporcional de 20 y 10.

Hallar una tercera proporcional entre:

$\frac{1}{5}$ y 6.

Se forma una proporción continua, poniendo de término medio proporcional uno de los números dados y *x* de último extremo, y se despeja *x* :

$$\frac{1}{5} : 6 : x$$

Despejando

$$x : x = \frac{6 \times 6}{\not{1}/5} = \frac{36}{\not{1}/5} = 180$$

Sustituyendo el valor de *x* :

$$\frac{1}{5} : 6 :: 6 : 180$$

EJERCICIOS

Encuentra el término desconocido en:

1. $5 : \frac{1}{2} :: x : 0.04$	**R.** 0.4
2. $\frac{1}{3} : \frac{2}{5} :: 4.25 : x$	**R.** $5\frac{1}{10}$
3. $\frac{1}{3} : \frac{1}{5} :: x : \frac{2}{3}$	**R.** $1\frac{1}{9}$
4. $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{9}$	**R.** 1/6
5. 64 y 25	**R.** 40
6. 0.0144 *y* $\frac{1}{324}$	**R.** $\frac{1}{150}$
7. 0.16 y 169	**R.** 5.2
8. $1\frac{47}{529}$ y $1\frac{49}{576}$	**R.** $1\frac{2}{23}$
9. 5, 6 y 0.4	**R.** 0.048
10. $\frac{5}{6}, \frac{1}{4}\ y\ \frac{2}{3}$	**R.** $\frac{1}{5}$
11. $\frac{1}{16}, 5\frac{2}{3}\ y\ 6\frac{1}{12}$	**R.** $551\frac{5}{9}$
12. $\frac{1}{14}, 5.34\ y\ 16\frac{2}{5}$	**R.** $1226\frac{8}{125}$



Gracias a Eudoxio, Euclides en su libro "Elementos" (volumen 5) puedo exponer la Teoría de las Proporciones. Tartaglia, en 1537 utilizó el signo || para indicar las proporciones.

CAPÍTULO XLIII

TRANSFORMACIÓN, COMPARACIÓN Y PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

Una proporción es una igualdad de dos razones. Las proporciones son de dos maneras:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ o bien: } a : b : : c : d$$

y se leen "*a* es a *b* como *c* es a *d* ". Los términos *a* y *d* se denominan extremos mientras que los términos *b* y *c* se llaman medios. Las proporciones cuyos medios son distintos reciben el nombre de proporciones discretas. Si los medios son iguales las proporciones se denominan continuas.

TRANSFORMACIÓN

Una proporción geométrica puede sufrir diversas transformaciones, pero para que sean legítimas es necesario que se conserve el **producto de los extremos** igual al **producto de los medios**.

Una proporción geométrica puede presentar ocho formas distintas con sólo cambiar sus términos:

1. La proporción dada .... $a : b :: c : d$
2. Cambiando los extremos en la 1ª .... $d : b :: c : a$
3. Invirtiendo las razones de la 1ª .... $c : d :: a : b$
4. Invirtiendo las razones de la 3ª .... $c : a :: d : b$
5. Cambiando los medios en la 1ª........................ $a : c :: b : d$
6. Cambiando los medios en la anterior .... $d : c :: b : a$
7. Invirtiendo las razones de la 2ª .... $b : d :: a : c$
8. Invirtiendo las razones de la 4ª .... $b : a :: d : c$

Estos cambios son legítimos porque en todas las proporciones se conserva el producto de los extremos igual al de los medios: $a \times d = b \times c$, lo mismo que en la proporción dada.

La proporción $\frac{2}{3} = \frac{6}{4}$ puede escribirse de las ocho formas siguientes:

1º $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ 2º $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$ 3º $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ 4º $\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$

5º $\frac{3}{6} = \frac{2}{4}$ 6º $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 7º $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ 8º $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Todas son legítimas porque en cualquiera resulta que:

$$6 \times 2 = 3 \times 4$$

TEOREMA DE COMPARACIÓN 1

Si dos proporciones geométricas tienen los antecedentes iguales, sus consecuentes forman proporción geométrica.

Siendo las proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{m} = \frac{c}{n}$, demostraremos que:

$$\frac{b}{d} = \frac{m}{n}$$

En las dos proporciones dadas $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{m} = \frac{c}{n}$, cambiamos los medios y tendremos . $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y $\frac{a}{c} = \frac{m}{n}$.

Dado que, según el teorema anterior, si dos proporciones tienen una razón común, las otras dos razones forman proporción, tendremos:

$$\frac{b}{d} = \frac{m}{n}$$

que es lo que queríamos demostrar.

De las proporciones $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ y $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ resulta

$$\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$$

TEOREMA DE COMPARACIÓN 2

Si dos proporciones geométricas tienen una razón común, las otras dos razones forman proporción geométrica.

Siendo las proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, demostraremos que:

$$\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$$

En las proporciones dadas

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \; y \; \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

vemos que la razón $\frac{c}{d}$ es igual a $\frac{a}{b}$ y la razón $\frac{m}{n}$ también es igual a $\frac{a}{b}$ y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí:

$\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ que es lo que queríamos demostrar.

De las proporciones $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ y $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

resulta que: $\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$

TEOREMA DE COMPARACIÓN 3

Si dos proporciones geométricas tienen los consecuentes iguales, sus antecedentes forman proporción geométrica.

Siendo las proporciones

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \; y \; \frac{m}{b}=\frac{n}{d}$$

probaremos $\frac{a}{c}=\frac{m}{n}$

En las dos proporciones dadas

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \; y \; \frac{m}{b}=\frac{b}{d}$$

cambiamos los medios y tendremos:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \; y \; \frac{m}{b}=\frac{b}{d}$$

Dado que si dos proporciones tienen una razón común, las otras dos forman proporción, tendremos:

$$\frac{a}{c}=\frac{m}{n}$$

que era lo que nos proponíamos y queríamos demostrar:

De las proporciones

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6} \; y \; \frac{4}{2}=\frac{12}{6}$$

resulta

$$\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$$

TEOREMA DE COMPARACIÓN 4

Los productos que resultan de multiplicar término por término varias proporciones geométricas forman proporción geométrica.

Siendo las proporciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}; \frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'} \; y \; \frac{a''}{b''}=\frac{c''}{d''}$

demostraremos que $\frac{a \times a' \times a''}{b \times b' \times b''}=\frac{c \times c' \times c''}{d \times d' \times d''}$

Al multiplicar miembro por miembro las tres porciones dadas tendremos:

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}=\frac{c}{d}\times\frac{c'}{d'}\times\frac{c''}{d''}$$

al efectuar la multiplicación de estas fracciones tendremos:

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}=\frac{c}{d}\times\frac{c'}{d'}\times\frac{c''}{d''}$$

que es lo que queríamos demostrar:

De las proporciones $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}; \frac{1}{4}=\frac{3}{12} \; y \; \frac{1}{5}=\frac{2}{10}$ resulta $\frac{1\times1\times1}{2\times4\times5}$ $=\frac{3\times3\times2}{6\times12\times10}$ o sea $\frac{1}{40}=\frac{18}{720}$ que es legítima porque 1 × 720 = 40 × 18

TEOREMA DE COMPARACIÓN 5

Con los cuatro términos de dos productos iguales se puede formar proporción geométrica. Siendo los productos *a* × *d* = *c* × *b*, demostraremos que con sus cuatro términos podemos formar la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Dividimos los dos miembros de la igualdad *a* × *d* = *c* × *b* por *b* × *d* y tendremos:

$$\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{c\times b}{b\times d}$$

y al simplificar los factores iguales en el numerador y el denominador nos queda $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, que es lo que queríamos demostrar.

De 5 × 4 = 10 × 2 resulta $\frac{5}{10}=\frac{2}{4}$

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

Con los términos de una proporción geométrica se pueden verificar las operaciones siguientes sin variar la proporción:

1) Multiplicar o dividir todos los términos por un mismo número.

Siendo la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ tendremos

$$\frac{a \times m}{b \times m} = \frac{c \times m}{d \times m}\ y\ \frac{a \div m}{b \div m} = \frac{c \div m}{d \div m}$$

porque al multiplicar o dividir los dos términos de un quebrado o razón por un mismo número no varía.

En $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ tenemos

$\frac{4 \times 2}{6 \times 2} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$ *o sea* $\frac{8}{12} = \frac{4}{6}$ que es legítima porque 8 × 6 = 12 × 4 y $\frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2 \div 2}{3 \div 2}$ *o sea* $\frac{2}{3} = \frac{1}{1.5}$ que es legítima porque 2 × 1.5 = 1 × 3.

2) Multiplicar o dividir los antecedentes por un mismo número

$$\frac{a \times m}{b} = \frac{c \times m}{d}\ y\ \frac{a \div m}{b} = \frac{c \div m}{d}$$

porque al multiplicar o dividir los numeradores de los dos quebrados o razones por un mismo número, ambos quedan multiplicados en el primer caso y divididos en el segundo por el mismo número, por tanto la igualdad no varía.

En $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ tenemos

$\frac{4 \times 2}{6} = \frac{2 \times 2}{3}$ o sea $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ que es legítima porque 8 × 3 = 6 × 4 y

$\frac{4 \div 2}{6} = \frac{2 \div 2}{3}$ o sea $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ que es legítima porque 2 × 3 = 6 × 1

3) Multiplicar o dividir los consecuentes por un mismo número.

$$\frac{a}{b \times m} = \frac{c}{d \times m}\ y\ \frac{a}{b \div m} = \frac{c}{d \div m}$$

porque al multiplicar o dividir los denominadores de los dos quebrados o razones por un mismo número, ambos quedan divididos en el primer caso y multiplicados en el segundo por el mismo número, por tanto la igualdad no varía.

En $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ tenemos:

$\frac{4}{6 \times 2} = \frac{2}{3 \times 2}$ o sea $\frac{4}{12} = \frac{2}{6}$ que es legítima porque 4 × 6 = 12 × 2

y $\frac{4}{6 \div 3} = \frac{2}{3 \div 3}$ o sea $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ y que es legítima porque 4 × 1 = 2 × 2

4) Multiplicar o dividir los dos términos de una de las razones por un mismo número.

$$\frac{a \times m}{b \times m} = \frac{c}{d}\ y\ \frac{a}{b} = \frac{c \div m}{d \div m}$$

porque al multiplicar o dividir los dos términos de un quebrado o razón por un mismo número no varía.

En $\frac{7}{2} = \frac{14}{4}$ tenemos

$\frac{7 \times 5}{2 \times 5} = \frac{14}{4}$ o sea $\frac{35}{10} = \frac{14}{4}$ que es legítima porque 35 × 4 = 14 × 10

y $\frac{7 \div 2}{2 \div 2} = \frac{14}{4}$ o sea $\frac{3.5}{1} = \frac{14}{4}$ que es legítima porque 3.5 × 4 = 14 × 1

5) Elevar todos sus términos a una misma potencia. $\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$ porque si en la proporción o igualdad dada $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ elevamos sus dos miembros a una misma potencia, la igualdad no varía, y tendremos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m \text{ o sea } \frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$$

En $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ tenemos:

$\frac{2^2}{3^2} = \frac{4^2}{6^2}$ o sea $\frac{4}{9} = \frac{16}{36}$ que es legítima porque 4 × 36 = 9 × 16.

6) Extraer una misma raíz a todos los términos.

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$$

porque si en la proporción o igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dada extraemos una misma raíz a sus dos miembros, la igualdad no varía, y tendremos:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{c}{d}} \text{ o sea } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$$

En $\frac{4}{9} = \frac{16}{36}$ tenemos:

$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{16}}{36}$ o sea $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ que es legítima porque 2 × 6 = 3 × 4

TEOREMA DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS 1

En toda proporción geométrica la suma o resta de los dos términos de la primera razón es a su consecuente o antecedente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su consecuente o antecedente.

Para demostrar esto dividiremos el ejemplo en dos partes:

1) La suma o resta de los dos términos de la primera razón es a su consecuente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su consecuente.

Siendo la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, demostraremos que

$$\frac{a \pm b}{b}=\frac{c \pm d}{d}$$

Si sumamos o restamos a los dos miembros de la igualdad o proporción, dada la unidad, tendremos:

$$\frac{a \pm 1}{b}=\frac{c \pm 1}{d}$$

al efectuar las operaciones nos queda: $\frac{a \pm b}{b}=\frac{c \pm d}{d}$

que es lo que queríamos demostrar.

2) La suma o resta de los dos términos de la primera razón es a su antecedente como la suma o resta de los dos términos de la segunda razón es a su antecedente.

Siendo la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ demostraremos que

$$\frac{a \pm b}{a}=\frac{c \pm d}{c}$$

Si invertimos las razones en la proporción dada tendremos:

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

Al sumar los dos miembros de esta igualdad con la unidad o al restarlos de la unidad tendremos:

$$1 \pm \frac{b}{a}=1 \pm \frac{d}{c}$$

y efectuando las operaciones quedará: $\frac{a \pm b}{a}=\frac{c \pm d}{c}$

que es lo que queríamos demostrar.

En la proporción $\frac{10}{5}=\frac{4}{2}$ tenemos:

a) $\frac{10+5}{5}=\frac{4+2}{2}$ o sea $\frac{15}{5}=\frac{6}{2}$ que es legítima porque $15 \times 2 = 6 \times 5$

b) $\frac{10-5}{5}=\frac{4-2}{2}$ o sea $\frac{5}{5}=\frac{2}{5}$ que es legítima porque $5 \times 2 = 5 \times 2$

c) $\frac{10+5}{10}=\frac{4+2}{2}$ o sea $\frac{15}{10}=\frac{6}{4}$ que es legítima porque $15 \times 4 = 10 \times 6$

d) $\frac{10-5}{10}=\frac{4-2}{2}$ o sea $\frac{5}{10}=\frac{2}{4}$ que es legítima porque $5 \times 4 = 10 \times 2$

TEOREMA DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS 2

En toda proporción geométrica la suma o resta de los antecedentes es a la suma o resta de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente.

Siendo la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, demostraremos que

$$\frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{a}{b}$$

Al cambiar los medios en la proporción dada tendremos:

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ y segun el teorema anterior: $\frac{a \pm c}{a}=\frac{b \pm c}{b}$

y si cambiamos los medios en esta última proporción nos queda:

$$\frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{a}{b}$$

que es lo que queríamos demostrar.

En $\frac{10}{5}=\frac{2}{1}$ tenemos:

$\frac{10+2}{5+1}=\frac{10}{5}$ o sea $\frac{12}{6}=\frac{10}{5}$ porque $12 \times 5 = 6 \times 10$

y $\frac{10-2}{5-1}=\frac{2}{1}$ o sea $\frac{8}{4}=\frac{2}{1}$ porque $8 \times 1 = 4 \times 2$

TEOREMA DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS 3

En toda proporción geométrica la suma de los dos términos de la primera razón es a su diferencia como la suma de los dos términos de la segunda razón es a su diferencia.

Siendo la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

probaremos que: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Sabemos por un teorema anterior que $\frac{a \pm b}{a \pm d}=\frac{a}{c}$

Al cambiar los medios tendremos

Si desarrollamos en sus dos formas la igualdad anterior tendremos:

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}\ y\ \frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}$$

y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí: $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$ cambiando los medios en esta última proporción nos queda:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

que es lo que queríamos demostrar.

En : $\frac{12}{2}=\frac{6}{1}$ tenemos

$$\frac{12+2}{12-2}=\frac{6+1}{6-1} \text{ o sea}$$

$$\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$$

que es legítima porque:

$$14 \times 5 = 10 \times 7$$

TEOREMA DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS 4

En toda proporción geométrica, la suma de los antecedentes es a su diferencia como la suma de los consecuentes es a su diferencia.

Siendo la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

demostraremos que $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$.

Ya hemos demostrado que la suma o diferencia de los antecedentes es a la suma o diferencia de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente, luego

$$\frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{a}{b}$$

Si desarrollamos en sus dos formas la igualdad anterior tendremos

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}\ y\ \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$$

y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí:

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

cambiando los medios en esta última proporción nos queda:

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$$

que es lo que queríamos demostrar.

En $\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$ tenemos $\frac{8+6}{4+3}=\frac{4+3}{4-3}$
o sea:

$$\frac{14}{2}=\frac{7}{1}$$

que es legítima porque:

$$14 \times 1 = 7 \times 2$$

TEOREMA DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS 5

En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente.

Siendo la serie de razones iguales $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$, demostraremos que:

$$\frac{a+c+m}{b+d+n}=\frac{a}{b};$$

$$\frac{a+c+m}{b+d+n}=\frac{c}{b}\ y$$

$$\frac{a+c+m}{b+d+n}=\frac{m}{n}$$

Ya demostramos para dos razones que la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente, luego:

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$$

y como $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$ tendremos $\frac{a+c}{b+d}=\frac{m}{n}$

Si aplicamos a estas dos razones el teorema citado tendremos:

$$\frac{a+c+m}{b+d+n}=\frac{m}{n}$$

y como $\frac{m}{n}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ tendremos:

$$\frac{a+c+m}{b+d+n}=\frac{a}{b}\ y\ \frac{a+c+m}{b+d+n}=\frac{c}{d}$$

que es lo queríamos demostrar.

En $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}$ tenemos:

$$\frac{1+3+4}{2+6+8}=\frac{1}{2} \text{ o sea } \frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

que es legítima porque $8 \times 2 = 16 \times 1$

EJERCICIOS

1. $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ Si $a + m = 45$, $b + n = 40$ y $m = 5$, ¿cuánto vale n? **R.**

2. $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$ Si $x - m = 20$, $y - n = 15$, $n = 6$, ¿cuánto vale m? **R.** 8.

3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ Siendo $a + b = 40$, $a - b = 30$, $c + d = 50$, ¿cuánto vale $c - d$? **R.** $37\frac{1}{2}$

4. $\frac{m}{4}=\frac{b}{7}$ Siendo $m + b = 18$, ¿cuánto vale n? **R.** 10.

5. Forma la proporción que resulte de $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ y $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$

6. Multiplica término a término $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$ y $\frac{1}{3}=\frac{24}{6}$
   R. $\frac{1}{6}=\frac{4}{48}$

7. Multiplica término a término $\frac{1}{3}=\frac{10}{5}$, $\frac{5}{7}=\frac{10}{14}$ y $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$
   R. $\frac{10a}{21b}=\frac{100m}{210n}$

8. Enuncia seis teoremas de proporciones y aplícalos a proporciones numéricas.

9. Enuncia seis teoremas de proporciones y aplícalos a proporciones geométricas.

10. Escribe la proporción $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ de ocho modos distintos.

11. Escribe de todos los modos posibles la proporción $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$.

12. Forma la proporción que resulta de $3 \times 10 = 6 \times 5$.
   R. $\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$

13. Forma la proporción que resulta en cada caso:

a) $x \times y = a \times b$ **R.** $\frac{x}{a}=\frac{b}{y}$

b) $a(m - n) = 6(xc - y)$ **R.** $\frac{a}{x-y}=\frac{6}{m-n}$

c) $3\sqrt{b}=m^2n$ **R.** $\frac{3}{m^2}=\frac{n}{\sqrt{b}}$

14. ¿La proporción $\frac{6}{5}=\frac{3}{2.5}$ resulta de $3 \times 5 = 6 \times 2.5$? Explica la razón.

15. ¿De los productos iguales $ax = pq$ resulta la proporción $\frac{a}{p}=\frac{x}{q}$ Explica la razón.

16. $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ y $x + y = 10$. Hallar x e y. **R.** $x = 4$, $y = 6$.

17. $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$ Siendo $x - m = 10$, $y + n = 30$, $y - n = 20$, hallar $x + m$. **R.** 15

18. $\frac{a}{6}=\frac{b}{5}$ Sabiendo que $b + 5 = 15$, hallar a. **R.** 12.

19. $\frac{a}{12}=\frac{b}{7}$ Siendo $a - b = 15$, ¿cuánto vale a? **R.** 36.

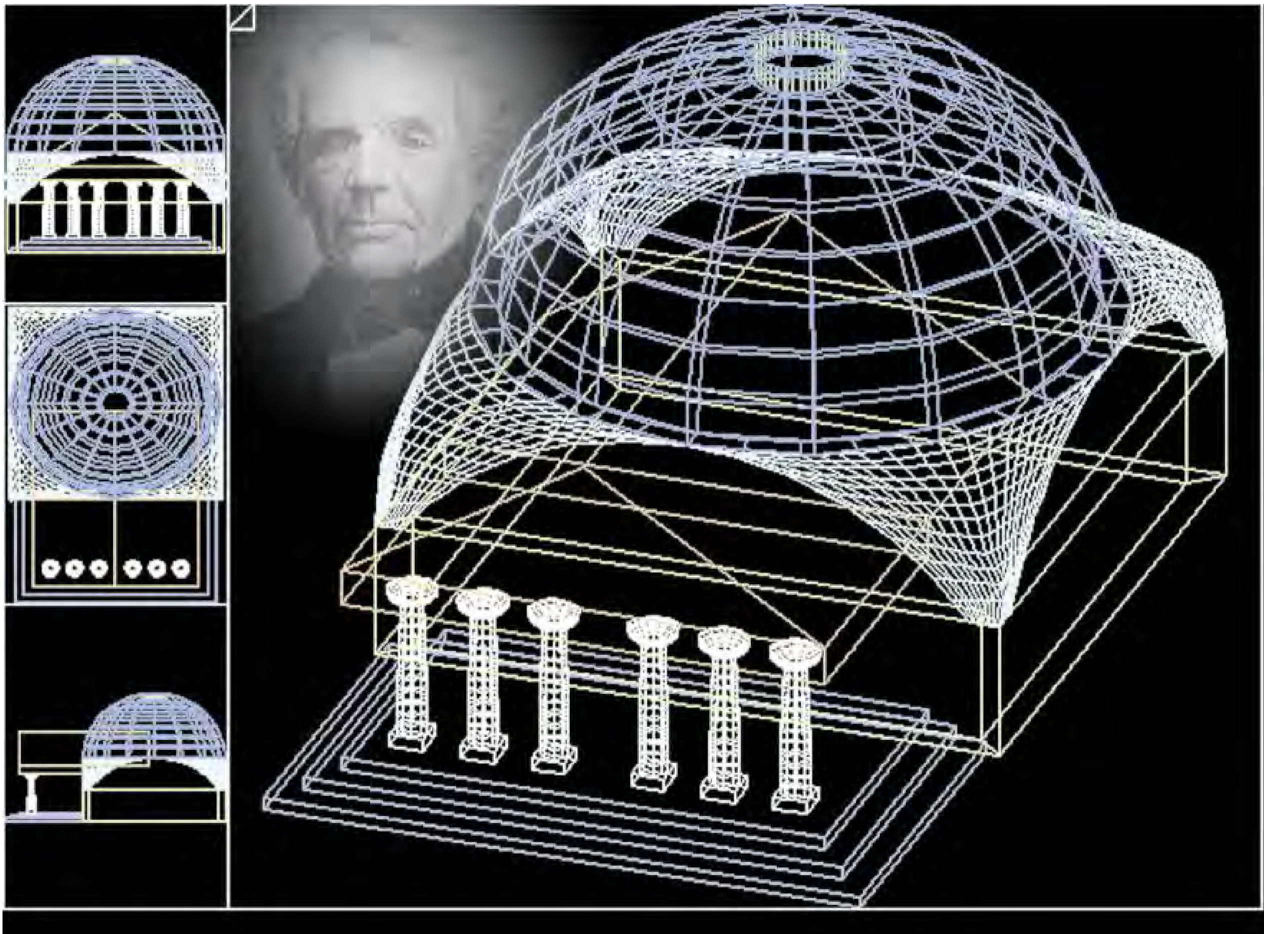
20. $\frac{a}{b}=\frac{6}{5}$ Siendo $a - b = 12$, ¿cuánto vale $a + b$? **R.** 132.

21. La relación entre dos números es de 5 a 2. Encuentra los números sabiendo que su suma es 49. **R.** 35 y 14.

22. La razón de dos números es $\frac{8}{3}$ y su diferencia 55. Encuentra los números. **R.** 88 y 33.

23. $\frac{a}{2}=\frac{m}{3}=\frac{n}{4}$ Hallar a, m y n sabiendo que $a + m + n = 36$. **R.** $a = 8$, $m = 12$, $n = 16$.

24. Tres números cuya suma es 240 guardan entre sí la relación de los números 2, 3 y 5. Encuentra los números.
   R. 48, 72 y 120.



Gracias a los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet la teoría de funciones evolucionó de forma importante. Sin embargo, las bases actuales de dicha teoría fueron establecidas por Riemann en 1851.

CAPÍTULO XLIV

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Las cantidades que intervienen en una cuestión matemática son **variables** cuando pueden tomar diversos valores, y son **constantes** cuando tienen un valor fijo y determinado.

Si un metro de listón cuesta 3 dólares, el costo del carrete de listón dependerá del número de metros que tenga. Si tiene 5 metros, su costo será de 15 dólares. El precio de un metro de listón no varía, entonces es una constante, en tanto que el número de metros de la pieza y su costo si varían, éstas serán las variables.

CANTIDAD VARIABLE Y CONSTANTE

Un ejemplo de cantidades variables y constantes es el siguiente:

1) Si un coche tiene una velocidad constante de 6 metros por segundo, el **espacio** que recorra dependerá del **tiempo** que se mueva. Si avanza durante 2 seg recorrerá un espacio de 12 m y durante 5 seg recorrerá un espacio de 30 m. En este caso la velocidad (6 m) es una constante, mientras que el **tiempo** y el **espacio** recorrido, que toman sucesivos valores son **variables**.

En este caso ¿de qué depende el espacio recorrido? Del tiempo que avanza el coche, por lo que el **tiempo** es la variable **independiente** y el espacio recorrido la variable **dependiente**.

CONCEPTO DE FUNCIÓN

En el ejemplo anterior el espacio recorrido depende del tiempo que el coche estuvo moviéndose, por lo que el espacio recorrido está en función del tiempo.

Siempre que una cantidad variable depende de otra, se dice que está en función de esta última.

Cuachy hace una definición moderna de función:

Se dice que *y* es función de *x* cuando a cada valor de la variable *x* corresponden uno o varios valores de la variable *y.*

Esta es la notación para expresar que *y* es función de *x* :

$y = f(x)$

FUNCIONES ARITMÉTICAS

1) El costo de una pared depende, entre otras cosas, de su superficie; luego, el costo es función de la superficie:

Costo = *f (superficie)*

2) El trabajo realizado por cierto número de obreros depende del número de días que trabajen; luego, el trabajo realizado es función del número de días:

Trabajo realizado = *f (tiempo)*

3) El tiempo que se lleva una obra depende del número de obreros empleados; luego, el tiempo es función del número de obreros:

Tiempo = *f (obreros)*

4) El interés mensual que produce un capital de 5,000 dólares depende del tanto por ciento al que esté invertido; luego, el interés es función del tanto por ciento:

Interés = f (r)

5) El salario de un obrero depende del tiempo que trabaje; luego, el salario es función del número de días laborados:

Salario = f (tiempo)

FUNCIONES GEOMÉTRICAS

1) Si la base de un rectángulo es fija, el área del rectángulo depende de la altura, pues cuanto mayor sea la altura, mayor será el área; luego, el área de un rectángulo es función de su altura.

Del mismo modo, si la altura es fija, cuanto mayor sea la base, mayor será el área; luego, el área también es función de la base.

Así el área de un rectángulo es función de la base y de la altura:

$A = f(b, h)$

2) El área de un cuadrado depende de la longitud de su diagonal; luego, el área de un cuadrado es función de su diagonal:

$A = f(d)$

3) El área de un círculo depende de la longitud del radio; luego, el área de un círculo es función del radio:

$A = f(R)$

4) El volumen de un ortoedro depende de su ancho, su largo y su altura; luego, el volumen es función del ancho, largo y altura:

$V = f(a, l, h)$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Dos magnitudes son **proporcionales** cuando al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida (o viceversa) por el mismo número.

Las **magnitudes proporcionales** pueden ser **directa e inversamente proporcionales**.

Dos **magnitudes directamente proporcionales** son aquellas que, al **multiplicar** una de ellas por un número, la otra queda **multiplicada** por el mismo número, y al **dividir** una por un número, la otra queda **dividida** por ese mismo número.

Si una cuadrilla de obreros hace en 4 días 20 metros de una obra, en 8 días (doble número de días) hará 40 metros (doble número de metros) y en 2 días (la mitad) hará 10 metros (la mitad de metros).

Por lo tanto, el *tiempo* y las *unidades de trabajo realizadas* son magnitudes directamente proporcionales o que están en *razón directa.*

Otras magnitudes directamente proporcionales son:

El *tiempo* y las *unidades de trabajo* realizadas.

El *número de cosas* y el *precio*, cuando se paga en razón del número.

El *peso* y el *precio* de una mercancía, cuando se paga en razón del peso.

El *tiempo de trabajo* y el *salario* de un obrero.

El *espacio* con la *velocidad*, si el tiempo no varía.

El *espacio,* con el *tiempo,* si la velocidad no varía.

El *número de obreros* empleados y el *trabajo realizado.*

Dos magnitudes inversamente proporcionales son aquellas que, al **multiplicar** una de ellas por un número, la otra queda **dividida** por el mismo, y al **dividir** una por un número, la otra queda **multiplicada** por ese mismo número.

Si 4 hombres hacen una obra en 6 días, 8 hombres (el doble) harían la misma obra en 3 días (la mitad de días) y 2 hombres (la mitad) harían la obra en 12 días (doble número de días).

Por lo tanto, el *número de hombres* y el *tiempo* necesario para hacer una obra son magnitudes inversamente proporcionales o que están en *razón inversa.*

Otras magnitudes inversamente proporcionales son:

El *número de obreros* empleado y el *tiempo* necesario para hacer una obra.

Los *días de trabajo* y las *horas diarias* que se trabajan.

La *longitud* con el *ancho* y la *altura* y en general de cualquier dimensión de un cuerpo con otra, si la superficie o el volumen del cuerpo permanecen constantes.

La *velocidad* de un coche con el *tiempo* empleado en recorrer un espacio.

RAZÓN DE PROPORCIONALIDAD

Siempre que dos magnitudes sean directamente proporcionales, la relación entre dos de sus cantidades correspondientes es constante.

Si 5 metros de tela cuestan 10 dólares, 10 metros costarán 20 dólares y 20 m 40 dólares, y la relación entre cada dos de estas cantidades correspondiente es constante:

$$\frac{\$10}{5} = 2 \qquad \frac{\$20}{10} = 2 \qquad \frac{\$40}{20} = 2$$

Esta relación constante se llama **razón de proporcionalidad** entre la magnitud dólares y la magnitud metros.

En general, siendo *A* y *B* directamente proporcionales, la relación constante $\frac{A}{B}$ se llama **razón de proporcionalidad** entre la magnitud *A* y la magnitud *B.*

RAZONES DIRECTAS E INVERSAS

Si tenemos cuatro cantidades, homogéneas dos a dos y proporcionales, por ejemplo:

1ª	3ª
3 naranjas cuestan	5 cts
6 naranjas cuestan	10 cts
2ª	4ª

y establecemos con ellas el **orden** indicado, llamamos **razones directas** a:

$$\frac{3}{6} \text{ y } \frac{5}{10}$$

o sea las razones

$$\frac{1^a \text{ cantidad}}{2^a \text{ cantidad}} \text{ y } \frac{3^a \text{ cantidad}}{4^a \text{ cantidad}},$$

y **razones inversas** a $\frac{3}{6}$ y $\frac{5}{10}$ o sea las razones

$$\frac{1^a \text{ cantidad}}{2^a \text{ cantidad}} \text{ y } \frac{3^a \text{ cantidad}}{4^a \text{ cantidad}}$$

COMO FORMAR PROPORCIÓN CON CANTIDADES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Si tenemos cuatro cantidades, homogéneas dos a dos, y directamente proporcionales, por ejemplo:

1ª	3ª
5 cuadros cuestan	\$15
10 cuadros cuestan	\$30
2ª	4ª

las razones directas son iguales. En este caso, $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ y $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ si las dos razones directas son iguales, podemos igualarlas y tendremos la proporción:

$$\frac{5}{10} = \frac{15}{30}$$

Por tanto, para formar proporción con cuatro cantidades, homogéneas dos a dos, **directamente proporcionales**, se **iguala** la **razón directa** de las dos primeras con la **razón directa** de las dos últimas.

COMO FORMAR PROPORCIÓN CON CANTIDADES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Si tenemos cuatro cantidades, homogéneas dos a dos e inversamente proporcionales, por ejemplo:

1ª	3ª
3 hombres hacen una obra en	8 días
6 hombres harían la misma obra en	4 días
2ª	4ª

la **razón inversa** de las dos primeras es igual a la **razón inversa** de las dos últimas y viceversa. En este caso $\frac{3}{6}$(directa) = $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{8}$ (inversa) = 2 y $\frac{8}{4}$ (directa) = 2, y si la **razón directa** de las dos primeras es igual a la **razón inversa** de las dos últimas, y viceversa, podemos igualar una razón directa con una inversa y tendremos la proporción:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} \text{ o } \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$$

Por tanto, para formar proporción con cuatro cantidades, homogéneas dos a dos, **inversamente proporcionales**, se **iguala la razón directa** de las dos primeras con la **razón inversa** de las dos últimas o viceversa.



En la Edad Media los árabes dieron a conocer la Regla de Tres. Leonardo de Pisa la difundió a principios del siglo XIII, con el nombre de Regla de Tres Números Conocidos; Regla de los Mercaderes o Regla de los Traficantes.

CAPÍTULO XLV

REGLA DE TRES

La regla de tres es la operación aritmética que consiste en calcular el cuarto término de una proporción conocidos los otros tres. Si en una regla de tres tan sólo intervienen dos magnitudes se dice que la regla de tres es simple. Cuando en una regla de tres intervienen tres o más magnitudes se dice que la regla es compuesta.

En una regla de tres, los datos de la parte que resulta conocida del problema se denomina supuesto, mientras que los datos de la parte que contiene la incógnita recibe el nombre de pregunta.

Si 6 pelotas cuestan 8 dólares, ¿cuánto costarán 16 pelotas? Aquí el supuesto está constituido por 6 pelotas y 8 dólares y la pregunta por 16 pelotas y x dólares.

MÉTODOS PARA RESOLVER LA REGLA DE TRES

Se conocen tres métodos para resolver la Regla de Tres: el método de reducción a la unidad; el método de las proporciones y el método práctico.

Regla de tres simple directa

Si 4 agendas cuestan 8 dólares, ¿cuánto costarán 15 agendas?

Supuesto .....4 agendas ....8 dólares
Pregunta .....15 agendas ....*x* dólares

Si 4 agendas cuestan 8 dólares, 1 agenda costará 4 veces menos: 8 ÷ 4 = 2, y obviamente 15 agendas costarán 15 veces más: 2 × 15 = 30 dólares.

Regla de tres simple inversa

Cuatro obreros hacen una obra en 12 días. ¿En cuántos días la harían 7 obreros?

Supuesto .....4 obreros ....12 días
Pregunta .....7 obreros ....*x* días

Si 4 obreros la terminan en 12 días, 1 tardaría 4 veces más: 4 × 12 = 48 días y 7 tardarían 7 veces menos:

$$\frac{48}{7} = 6\ \frac{6}{7}\text{ días}$$

Regla de tres compuesta

Si 3 hombres trabajan 8 horas diarias y terminan 80 m de una obra en 10 días, ¿cuántos días necesitarán 5 hombres, si trabajan 6 horas diarias, para hacer 60 metros de la misma obra?

Supuesto .....3 hombres 8 h diarias 80 m 10 días
Pregunta .....5 hombres 6 h diarias 60 m *x* días

Si 3 hombres que trabajan 8 horas diarias hicieron 80 metros de la obra en 10 días, 1 tardará 3 veces más y 5 tardarán 5 veces menos:

$$\frac{10 \times 3}{5}\ \text{días, trabajando 8 horas diarias.}$$

Si en lugar de 8 horas diarias trabajaran 1 hora tardarían 8 veces más, y con 6 horas diarias tardarían 6 veces menos:

$$\frac{10 \times 3 \times 8}{5 \times 6}\ \text{días, para hacer 80 metros}$$

Si en lugar de 80 m hicieran 1 metro, tardarían 80 veces menos y para 60 m tardarían 60 veces más:

$$\text{luego: } x = \frac{10 \times 3 \times 8 \times 60}{5 \times 6 \times 80} = 6\text{ días}$$

MÉTODO DE LAS PROPORCIONES

Regla de tres compuesta

Si 3 hombres que trabajan 8 horas diarias terminan 80 metros de una obra en 10 días, ¿cuántos días necesitarán 5 hombres, trabajando 6 horas diarias, para hacer 60 metros?

Supuesto 3 hombres 8 h diarias 80 m 10 días
Pregunta 5 hombres 6 h diarias 60 m *x* días

El método de las proporciones consiste en descomponer la Regla de Tres compuesta en Reglas de Tres simples y luego multiplicar ordenadamente las proporciones formadas.

Al formar cada Regla de Tres simple se considera que las demás magnitudes no varían.

En este caso tenemos 3 proporciones:

1ª 3 hombres hacen la obra en 10 días
5 hombres la harán en *y* días

A **más** hombres, **menos** días; luego, son inversamente proporcionales:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{y}$$

2ª Se emplean *y* días trabajando 8 horas diarias
se emplearán *y'* días trabajando 6 horas diarias

A **más** días, **menos** horas diarias; luego, son inversamente proporcionales:

$$\frac{6}{8} = \frac{y}{y'}$$

3ª Se emplean *y'* días para hacer 80 m de la obra
se emplearán *x* días para hacer 60 m de la obra

A **más** días, **más** metros; luego, son directamente proporcionales:

Si multiplicamos término a término las proporciones (1), (2) y (3), tenemos:

$$\frac{5 \times 6 \times 80}{3 \times 8 \times 60} = \frac{10 \times y \times y'}{y \times y' \times x}$$

Simplificando, queda:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{x} \therefore x = \frac{10 \times 3}{5} = 6\text{ días}$$

MÉTODO DE LAS PROPORCIONES

Regla de tres simple directa

Si 4 agendas cuestan 8 dólares, ¿cuánto costarán 15 agendas?

Supuesto ...4 agendas ... 8 dólares

Pregunta ....15 agendas . *x* dólares

Como a **más** agendas, **más** dólares, estas cantidades son directamente proporcionales y ya sabemos que la proporción se forma igualando las **razones directas**:

$$\frac{4}{15} = \frac{8}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{8 \times 15}{4} = \$30$$



Figura 126

Regla de tres simple inversa

Si 4 hombres terminan una obra en 12 días, ¿cuánto tiempo les tomaría a 7 hombres?

Supuesto .... 4 hombres ... 12 días

Pregunta ..... 7 hombres ... *x* días

Como a **más** hombres, **menos** días, estas cantidades son inversamente proporcionales y ya sabemos que la proporción se forma igualando la **razón directa** de las dos primeras con la **razón inversa** de las dos últimas o viceversa:

$$\frac{7}{4} = \frac{12}{x} \quad \therefore$$

$$x = \frac{4 \times 12}{7} = 6\frac{6}{7} \text{ días}$$

MÉTODO PRÁCTICO

Una regla práctica para resolver cualquier problema de Regla de Tres simple o compuesta es la siguiente:

Se escriben el supuesto y la pregunta y después se compara cada una de las magnitudes con la incógnita (suponiendo que las demás no varían) para ver si son directa o inversamente proporcionales con la incógnita. A las magnitudes directamente proporcionales con la incógnita se les pone debajo un signo + y encima un signo -, y a las inversamente proporcionales un signo - debajo y un signo + encima. El valor de la incógnita × será igual al valor conocido de su misma especie (al cual siempre se le pone +), multiplicado por todas las cantidades que llevan el signo +, partiendo este producto por el producto de las cantidades que llevan el signo -.

Primero resolveremos los ejemplos que ya vimos con los métodos anteriores y después otros más, ya que el método práctico es el más rápido.

REGLA DE TRES SIMPLE

Si 4 libros cuestan 8 dólares, ¿cuánto costarán 15 libros?

	-	+
Supuesto	 4	libros ....8 dólares
Pregunta	15	libros ....*x* dólares
	+	

A **más** libros **más** pesos; luego, estas magnitudes son directamente proporcionales; ponemos + debajo de los libros y - encima y también + en 8. El valor de *x* será igual al producto de 8 por 15, que es lo que tiene el signo +, dividido por 4 que tiene -, y tendremos:

$$x = \frac{8 \times 15}{4} = \$30$$

Si 4 hombres terminan una obra en 12 días, ¿cuántos días les llevaría a 7 hombres?

	-	+
Supuesto	 4	hombres .... 12 días
Pregunta	 7	hombres .... *x* días
	+	

A **más** hombres, **menos** día; luego, son inversamente proporcionales.

Ponemos - debajo de hombres y + arriba y también + a 12 días.

El valor de *x* será igual al producto de 12 por 4, que tienen signo +, dividido por 7 que tiene -, y tendremos:

$$x = \frac{12 \times 4}{7} = 6\frac{6}{7} \text{ días}$$

Una cuadrilla de obreros concluye una obra en 20 días trabajando 6 horas diarias. ¿En cuántos días la habrían terminado trabajando 8 horas diarias?

	-	+
Supuesto	20	días .... 6 horas diarias
Pregunta	.........*x*	días .... 8 horas diarias
		+

A **más** días, **menos** horas diarias; ponemos - debajo de horas diarias y + encima; ponemos + en 20 días y el valor de *x* será:

$$x = \frac{20 \times 6}{8} = 15 \text{ días}$$

REGLA DE TRES COMPUESTA

Si 3 hombres trabajan 8 horas diarias y hacen 80 metros de una obra en 10 días, ¿cuántos días necesitarán 5 hombres trabajando 6 horas diarias para hacer 60 metros de la misma obra?

	+	+	-	+
Supuesto	3 hombres	8 h diarias	80 m	10 días
Pregunta	5 hombres	6 h diarias	60 m	*x* días
	-	-	+	

A **más hombres, menos días;** ponemos - debajo de hombres y + encima; a **más horas diarias** de trabajo, **menos días** para terminar la obra: ponemos - debajo de horas diarias y + encima; a **más metros, más días**: ponemos + debajo de metros y - encima y + a 10 días.

El valor de *x* **será** el producto de 10 por 60, por 8 y por 3, que tienen signo + dividido por el producto de 80 por 6 y por 5, que tienen signo -, y tendremos:

$$x = \frac{10 \times 60 \times 8 \times 3}{80 \times 6 \times 5} = 6 \text{ días}$$

Una guarnición de 1600 hombres tiene víveres para 10 días a razón de 3 raciones diarias por cada hombre. Si se refuerza con 400 hombres más, ¿cuántos días durarán los víveres si cada hombre toma 2 raciones diarias?

Supuesto	1600 hombres	10 días	3 raciones diarias
Pregunta	2000 hombres	*x* días	2 raciones diarias

A **más hombres**, suponiendo que las raciones no varían, **menos días** durarán los víveres: ponemos signo - debajo de los hombres y + encima; a **más raciones diarias**, suponiendo que el número de hombres no varía, **menos días** durarán los víveres: ponemos signo - debajo de raciones y signo + encima; además ponemos + en 10 días, y tendremos:

+	+	+
1600 hombres	10 días	3 raciones diarias
2000 hombres	*x* días	2 raciones diarias
-		-

Entonces, *x* será igual al producto de las cantidades que tienen el signo +, que son 3, 1600 y 10, dividido por el producto de las que tienen el signo -, que son 2000 y 2, y tendremos:

$$x = \frac{1600 \times 10 \times 3}{2000 \times 2} = 12 \text{ días}$$

Durante 5 días 40 hombres trabajan 4 horas diarias para cavar una zanja de 10 m de largo, 6 m de ancho y 4 m de profundidad.

¿Cuántos días necesitarán 6 hombres, trabajando 3 horas diarias, para cavar otra zanja de 15 m de largo, 3 m de ancho y 8 m de profundidad, en un terreno de doble dificultad?

Escribimos el supuesto y la pregunta, teniendo en cuenta que, como en el supuesto no se da dificultad y en la pregunta sí, se considera que la dificultad del supuesto es 1 y tendremos:

+	+	+	-	-	-	-
10 h	5 d	4 h d	10 m l	6 m a	4 m prof.	1 dif.
6	*x*	3	15	3	8	2
-		-	+	+	+	+

A **más hombres, menos días** en terminar la obra: ponemos signo - debajo de hombres y + encima: a **más horas diarias** de trabajo, **menos días**: ponemos signo - debajo de horas diarias y + encima; a **más metros de largo**, **más días**: ponemos signo + debajo de metros de largo y - encima; a **más metros de ancho, más días**: ponemos signo + debajo de metros de ancho y signo - encima; **a más metros de profundidad**, **más días**: ponemos + debajo de metros de profundidad y - encima; a **más dificultad**, **más días**: ponemos signo + debajo de dificultad y - encima + en 5 días.

Entonces, *x* será igual al producto de las cantidades que tienen el signo +, que son 10, 5, 4, 15, 3, 8 y 2, dividido por el producto de las que tienen el signo -, que son 6, 3, 10, 4 y 1, o sea:

$$x = \frac{10 \times 5 \times 4 \times 15 \times 3 \times 8 \times 2}{6 \times 3 \times 10 \times 6 \times 4 \times 1} = 33\ \frac{1}{3} \text{ días}$$

EJERCICIOS

1. Una torre de 25.05 m da una sombra de 33.40 m. ¿Cuál será, a la misma hora, la sombra de una persona cuya estatura es 1.80 m?
R. 2.40 m.

2. Los 2/5 de capacidad de un estanque son 500 litros. ¿Cuál será la capacidad de los 3/8 del mismo estanque?
R. 468 3/4 litros.

3. A la velocidad de 30 km por hora un automóvil emplea 8 1/4 horas en ir de una ciudad a otra. ¿Cuánto tiempo menos se hubiera tardado al triple de velocidad?
R. 5 1/2 horas menos.

4. Una cuadrilla de 15 hombres se compromete a terminar en 14 días la obra. Al cabo de 9 días sólo han hecho 3/7. ¿Cuántos más necesitarán para terminar la obra en el tiempo fijado? **R.** 21 hombres.

8. Un capataz empezará una obra el día 1 de junio y debe terminarla el 5 de julio. El 1 de junio pone a 20 hombres que trabajan hasta el día 14 inclusive, a razón de 6 horas diarias. Ese día el propietario le dice que necesita la obra terminada el 24 de junio. A partir del día 15, coloca más obreros y todos trabajan 9 horas diarias en vez de 6. ¿Cuántos obreros aumentó el capataz a partir del día 15? **R.** 8 obreros.



El signo tanto por ciento (%) surgió como una alteración de la abreviatura de ciento (Cto.), que se empleaba en las operaciones mercantiles. Delaporte fue el primero en utilizar el signo tal como lo usamos hoy.

CAPÍTULO XLVI

TANTO POR CIENTO

El **tanto por ciento** de un número es una o varias de las **cien partes iguales** en que se puede dividir dicho número, es decir, uno o varios centésimos, y se escribe con el signo %.

El 4% de 80 ó $\frac{4}{100}$ de 80 equivale a **cuatro** 100 **centésimas partes** de 80, es decir que 80 se divide en **cien** partes iguales de las que se toman **cuatro**.

El $5\frac{3}{4}$ % de 150 significa que 150 se divide en **cien** partes iguales de las que se toman **cinco partes y tres cuartos**.

Es evidente que el **100%** de un número es el mismo número (el 100% de 8 es 8).

CÓMO ENCONTRAR EL TANTO POR CIENTO

1) Hallar el 15% de 32.

El 100% de 32 es 32; por tanto, el 15% de 32 será *x*. Formamos una regla de tres simple con estas cantidades y despejamos la *x*:

-	+
100%	32
15% +	$x \therefore x = \frac{32 \times 15}{100} = 4.8$

El 15% de 32 es 4.8

2) Hallar el $\frac{1}{8}$ % de 96.

-	+
100 %	96
$\frac{1}{8}$%	$x \therefore x = \frac{96 \times 1/8}{100} = 0.12$

EJERCICIOS

Busca los siguientes porcentajes:

1. 56% de 3000 **R.** 1680
2. 90% de 1315 **R.** 1183.5
3. $\frac{1}{2}$ % de 18 **R.** 0.09
4. $\frac{2}{3}$ % de 54 **R.** 0.36
5. $\frac{2}{9}$ % de 360 **R.** 0.8
6. $\frac{1}{4}$ % de 1320 **R.** 3.3
7. $\frac{5}{12}$ % de 144 **R.** 0.6
8. $4\frac{1}{2}$ % de 150 **R.** 6.75
9. $1\frac{1}{2}$ % de 1854 **R.** 27.81
10. 35% de 180 **R.** 63
11. 42% de 1250 **R.** 525
12. $6\frac{5}{7}$ % de 49 **R.** 3.29
13. 0.03% de 560 **R.** 0.168
14. 3.75% de 18 **R.** 0.675
15. 5.34% de 23 **R.** 1.2282

MÉTODOS ESPECIALES

Existe un método rápido para encontrar varios tantos por ciento:

El 1% de un número $= \frac{1}{100}$ del número; luego, para hallar el 1% se divide entre 100.

El 1% de 915 = 915 ÷ 100 = 9.15

El 2% de un número $= \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ del número; para hallar el 2% se divide entre 50.

El 2% de 350 = 350 ÷ 50 = 7

El 4% de un número $= \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ del número; para hallar el 4% se divide entre 25.

El 4% de 750 = 750 ÷ 25 = 30

El 5% de un número $= \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ del número; para hallar el 5% se divide entre 20.

El 5% de 1860 = 1860 ÷ 20 = 93

El 10% de un número $= \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ del número; para hallar el 10% se divide entre 10.

El 10% de 56.78 = 56.78 ÷ 10 = 5.678

El 12½ % de un número $= \frac{12\ ½}{100} = \frac{1}{8}$ del número; para hallar el 12 ½% se divide entre 8.

El 12 ½% de 48 = 48 ÷ 8 = 6

El 16 2/3% de un número $= \frac{16\ 2/3}{100} = \frac{1}{6}$ del número; para hallar el 16 2/3% se divide entre 6.

El 16 2/3% de 78 = 78 ÷ 6 = 13

El 20% de un número $= \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ del número; para hallar el 20% se divide entre 5.

El 20% de 1215 = 1215 ÷ 5 = 243

El 25% de un número $= \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ del número; para hallar el 25% se divide entre 4.

El 25% de 1496 = 1496 ÷ 4 = 374

El 33 1/3% de un número $= \frac{331/3}{100} = \frac{1}{3}$ del número; para hallar el 33 1/3% se divide entre 3.

El 33 1/3% de 18 = 18 ÷ 3 = 6

El 50% de un número $= \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ del número; para hallar el 50% se divide entre 2.

El 50% de 45 = 45 ÷ 2 = $22\frac{1}{2}$

El 75% de un número $= \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ del número; para hallar el 75% se divide entre 4 y se multiplica por 3.

El 75% de144 $= \frac{144 \times 3}{4} = 108$

EJERCICIOS

Encuentra, por simple inspección, estos porcentajes:

1. $16\frac{2}{3}$ % de 12 **R.** 2

2. 25% de 84 **R.** 21

3. $33\frac{1}{3}$ % de 15 **R.** 5

4. 40% de 25 **R.** 10

5. 60% de 40 **R.** 24

6. 80% de 30 **R.** 24

7. 5% de 60 **R.** 3

8. 10% de 98 **R.** 9.8

9. 20% de 85 **R.** 17

10. $12\frac{1}{2}$ % de 16 **R.** 2

11. 25% de 104 **R.** 26

12. $16\frac{2}{3}$ % de 54 **R.** 9

13. 20% de 155 **R.** 31

14. $33\frac{1}{3}$ % de 108 **R.** 36

15. 75% de 48 **R.** 36

16. 50% de 56 **R.** 28

17. 10% de 56.75 **R.** 5.675

18. 40% de 35 **R.** 14

19. $12\frac{1}{2}$ % de 56 **R.** 7

20. 1% de 187.43 **R.** 1.8743

EJERCICIOS

Encuentra los porcentajes siguientes:

1. 5% de 108.50 **R.** 5.425

2. 25% de 56.84 **R.** 14.21

3. 50% de 108.88 **R.** 54.44

4. 10% de $15\frac{2}{5}$ **R.** 1.54

5. 25% de 1044 **R.** 261

6. 20% de 1612 **R.** 322.4

7. 75% de 18.16 **R.** 13.62

8. 5% de 95.6 **R.** 4.78

9. 60% de 23455 **R.** 14073

10. 80% de 134.65 **R.** 107.72

11. $16\frac{2}{3}$% de 1914 **R.** 319

12. $12\frac{1}{2}$% de $4\frac{4}{5}$ **R.** 0.6

13. 50% de $56\frac{1}{6}$ **R.** $28\frac{1}{12}$

14. 2% de $\frac{1}{2}$ **R.** 0.01

15. 5% de $\frac{3}{4}$ **R.** 0.0375

16. 4% de $\frac{1}{50}$ **R.** 0.0008

17. 75% de 14324 **R.** 10743

18. $33\frac{1}{3}$% de $\frac{1}{3}$ **R.** $\frac{1}{9}$

19. 20% de 108 $\frac{1}{2}$ **R.** 21.7

20. 40% de 18745 **R.** 7498

21. 80% de 97 **R.** 77.6

CÓMO ENCONTRAR UN NÚMERO CUANDO SE CONOCE UN TANTO POR CIENTO DEL MISMO

1) ¿De qué número 46 es el 23%?

El 23% del número que se busca es 46 y el 100%, o sea el número buscado, será *x*:

$$\begin{matrix} - & & + \\ 23\% & & 46 \\ 100\% & & x \\ + & & \end{matrix} \quad \therefore \; x = \frac{46 \times 100}{23} = 200$$

Por tanto 46 es el 23% de 200.

2) ¿Cuál es el número cuyos $\frac{3}{4}$ % son 21?

$$\begin{matrix} - & & + \\ \frac{3}{4}\% & & 21 \\ 100\% & & x \\ + & & \end{matrix} \quad \therefore \; x = \frac{21 \times 100}{3/4} = 2800$$

EJERCICIOS

De qué número es:

1. 196 el 0.56% **R.** 35000

2. 445 el 5.34% **R.** 8333 $\frac{1}{3}$

3. $150\frac{1}{6}$ el $\frac{1}{3}$% **R.** 45050

4. 35 el 5% **R.** 700

5. 60 el 90% **R.** $66\frac{2}{3}$

6. 115 el 82% **R.** $140\frac{10}{41}$

7. 84 el $5\frac{1}{4}$ % **R.** 1600

8. 48 el $3\frac{1}{5}$ % **R.** 1500

9. 420 el 36% **R.** $1166\frac{2}{3}$

10. 850 el 72% **R.** $1180\frac{5}{9}$

CASOS ESPECIALES

1) ¿De qué número 76 es el 10%?

Si el 10% es la décima parte de un número, éste será:

$76 \times 10 = 760$

2) ¿De qué número 7 es el 25%?

Si el 25% es la cuarta parte de un número, éste será:

$7 \times 4 = 28$

3) De qué número 9 es el 16 2 %

Si el 16 2 % es la sexta parte de un número, éste será:

$9 \times 6 = 54$

4) ¿De qué número 12 es el 75%?

Si el 75% es 3 de un número, éste será:

$12 \times 4 = 16$

OBTENER EL TANTO POR CIENTO DE UN NÚMERO DETERMINADO

Dados dos números, averiguar qué tanto por ciento es uno del otro.

1) ¿Qué % de 840 es 2940?

8400 es su 100%, por lo que 2940 será su *x* %.

-	+
8400	100%
2940	*x*

+

$$\therefore\ x = \frac{100 \times 2940}{8400} = 35\%$$

Luego 2940 es el 35% de 8400.

2) $6\frac{2}{5}$, ¿qué % es de 16?

-	+
16	100%
$6\frac{2}{5}$	x

+

$$\therefore\ x = \frac{100 \times 6\ 2/5}{16} = 40\%$$

En algunos casos se puede hallar por simple inspección qué porcentaje es un número de otro.

1) ¿Qué % de 250 es 50?

50 es $\frac{1}{5}$ de 250, luego 50 es el 20% de 250.

2) ¿Qué % de 870 es 87?

87 es $\frac{1}{10}$ de 870, luego 87 es el 10% de 870

3) ¿Qué % de 48 es 36?

36 es los $\frac{3}{4}$ de 48, luego 36 es el 75% de 48

4) 60, ¿qué % es de 75?

60 es los $\frac{4}{5}$ de 75, luego 60 es el 80% de 75

EJERCICIOS

Indica que porcentaje de:

1. 24 es 3 — **R.** $12\frac{1}{2}\%$

2. 30 es 6 — **R.** 20%

3. 18 es 9 — **R.** 50%

4. 8 es 6 — **R.** 75%

5. 10 es 4 — **R.** 40%

6. 1950 es 156 — **R.** 8%

7. 815 es 431.95 — **R.** 53%

8. 18 es 0.045 — **R.** 0.25%

9. 93 es 0.186 — **R.** 0.2%

10. 36 es 0.06 — **R.** $\frac{1}{6}\%$

11. 512 es 0.64 — **R.** $\frac{1}{8}\%$

12. 40 es 0.30 — **R.** $\frac{3}{4}\%$

13. 40 es 32 — **R.** 80%

14. 18 es 1.8 — **R.** 10%

15. 500 es 5 — **R.** 1%

16. 80 es 20 — **R.** 25%

17. 1320 es 3.3 — **R.** $\frac{1}{4}\%$

18. 5.6 es 0.007 — **R.** $\frac{1}{8}\%$

19. 85 es 2.7625 — **R.** $3\frac{1}{4}\%$

20. 8400 es 147 — **R.** 1.75%

21. 40000 es 550 — **R.** $1\frac{3}{8}\%$

22. 86 es 172 — **R.** 200%

TANTO POR CIENTO MÁS

En el **tanto por ciento más** se trata de hallar un número conociendo el porcentaje que otro número es mayor que él.

1) ¿De qué número es 265 el 6% más?

Representamos el número buscado por su 100%. Si 265 es el 6% más que ese número, 265 será el 100% + 6% igual a los 106% del número buscado. Luego diremos: Si el 106% del número buscado es 265, el 100%, o sea el número buscado, será *x* :

-	+
106%	265
100%	x

+

$$\therefore\ x = \frac{100 \times 265}{106} = 250$$

Por tanto, 265 es el 6% más que 250

2) ¿De qué número 157.50 es el 12 % más?

-	+
112.50	157.50
100%	x

+

$$\therefore\ x = \frac{100 \times 157.50}{112.50} = 140$$

EJERCICIOS

De qué número es:

1. 1215 el 35% más — **R.** 900

2. 918 el $12\frac{1}{2}$ % más — **R.** 816

3. 2152 el $33\frac{1}{3}$% más — **R.** 1614

4. 216.54 el $\frac{1}{4}$% más — **R.** 216

5. 264 el $5\frac{3}{5}$% más — **R.** 250

TANTO POR CIENTO MENOS

En el tanto por ciento menos se trata de hallar un número conociendo el tanto por ciento de otro número menor que él.

1) ¿De qué número es 168 el 4% menos?

Representamos el número buscado por su 100%. Si 168 es el 4% menos que ese número buscado, 168 es el 100% - 4% = 96% del número buscado. Luego diremos: Si el 96% del número buscado es 168, el 100%, o sea el número buscado, será *x* :

-	+
96%	168
100%	x
+	

$$\therefore\ x = \frac{100 \times 168}{96} = 175$$

Por tanto 168 es el 4% menos que 175

2) ¿De qué número 798 es el $\frac{1}{4}$% menos?

-	+
99 %	798
100%	x
+	

$$\therefore\ x = \frac{798 \times 100}{99.75} = 800$$

EJERCICIOS

Señala qué número es:

1. 774.9 el 18% menos **R.** 945

2. 850 el $16\frac{2}{3}$% menos **R.** 1020

3. 920 el 54% menos **R.** 2000

4. ¿Qué % de 12 es 10? **R.** $83\frac{1}{3}$%

5. ¿Qué % de 9 es 54? **R.** 600

6. ¿Qué % de 34 es 25? **R.** 73%

PROBLEMA 1

Francisco tenía $80 y gastó el 20%, luego le dio a su hermano el 15% del resto, ¿cuánto le queda?

Gastó el 20% de $80, o sea $80 ÷ 5 = $16. Si gastó $16, el resto será $80 - $16 = $64.

A su hermano le dio el 15% de $64, o sea 15 × 64 = $9.60. Por tanto, le quedan: $64 - $9.60 = $54.40

EJERCICIOS

1. Arturo debe 90 dólares. Si le rebajan el 5% de su deuda, ¿cuánto pagará? **R.** 85.5 dólares.

2. Si un metro de tela cuesta 15 dólares, ¿en cuánto debe venderse para ganar el 20% del costo? **R.** 18 dólares.

3. De una finca de 50 hectáreas se vende el 16% y se alquila el 14%. ¿Cuántas hectáreas quedan? **R.** 35 hectáreas.

4. Tenía 30 lápices. Di a mi hermano el 30%, a mi primo el 20% y a mi amigo el 10%. ¿Cuántos lápices le di a cada uno y cuántos me quedaron? **R.** 9, 6, 3; quedan 12.

PROBLEMA 2

Se incendia una casa que estaba asegurada en el 86% de su valor y se cobran $4,300 por el seguro. ¿Cuál era el valor de la casa?

Si el 86% del valor de la casa es $4,300, el 100%, valor total de la casa, será: *x* :

-	+
86%	$ 4,300
100%	x
+	

$$\therefore\ x = \frac{4300 \times 100}{86} = \$5,000$$

PROBLEMA 3

De los 150 alumnos de un colegio, 27 son niñas. Hallar el % de varones.

El número de varones es 150 - 27 = 123.

Se busca que % del total de alumnos (150) es el número de varones (123).

Si 150 alumnos son el 100%, entonces 123 alumnos varones serán %:

-	+
150	100%
123	x
+	

$$\therefore\ x = \frac{123 \times 100}{150} = 82\%$$

PROBLEMA 4

Arturo tiene $63, y su dinero excede al de José en 5%. ¿Cuánto tiene José?

Representamos el dinero de José por su 100%.

Si los $63 de Arturo exceden al dinero de José en 5%, los $63 de Arturo son el 100% + 5% = 105% del dinero de José.

-	+
105%	$63
100%	x
+	

$$\therefore\ x = \frac{63 \times 100}{105} = \$60$$

José tiene $60.

EJERCICIOS

1. ¿Qué número disminuido en 35% equivale a 442? **R.** 680.

2. Pedro tiene 69 años y su edad excede a la de Juan en 15%. ¿Qué edad tiene Juan? **R.** 60 años.

3. Si se aumenta en 8% el precio de un artículo, el nuevo precio sería $1.62. ¿Cuál era el precio original? **R.** 1.50.



El cobro de los intereses en la antigüedad eran operaciones que se hacían en términos muy ambiguos. Fue en 1407 cuando la Casa San Gregorio en Génova (considerado el primer banco) puso cierto orden en el cobro de los intereses.

CAPÍTULO XLVII

INTERÉS

Por medio de la **Regla de Interés** se puede encontrar la **ganancia** o **interés** que produce una suma de dinero o capital, prestado a un **tanto por ciento** determinado y durante un tiempo también determinado.

Aquí, el capital se representa por *c*, el tiempo por *t*, el % por *r* y el interés o **rédito** por *I*.

El dinero nunca está inactivo, pues al darse en préstamo debe producir una ganancia para quien lo presta, la cual es un % dado de la cantidad prestada, cuyo % es convenido por las partes que hacen el contrato. Así, prestar dinero al 5% anual significa que por cada $100 la persona que recibe el dinero pagará $5 al año; al 1½% mensual significa que se debe pagar $1.50 al mes por cada $100.

INTERÉS LEGAL Y USURA

Cuando en una operación financiera debe existir un tipo de interés y éste no ha sido estipulado por las partes contratantes, la Ley puede disponer, por ejemplo, que será el 6% anual. A esto se le llama **interés legal**.

Por otra parte, la **usura** consiste en exigir un interés muy elevado por el dinero que se presta y es penada por las leyes en algunos países.

En Cuba la ley contra la usura establece que el **interés máximo** en cualquiera operación financiera será del 12% anual.

Si se cobra un interés mayor, la ley dispone que el exceso pagado como interés se considere como pagos de una parte del capital prestado.

INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

El interés puede ser **simple** cuando el **interés** o **rédito**, es decir, la ganancia que produce el capital prestado, se percibe al final de periodos iguales **sin que el capital varíe**. Y también puede ser **compuesto**, cuando los **intereses** que produce el capital se le suman al final de cada periodo formando un **nuevo capital**.

DEDUCCIÓN DE FÓRMULAS DEL INTERÉS SIMPLE

En las fórmulas que se deducen a continuación, r representa el tanto por ciento anual, es decir, lo que reditúan $100 al año.

1) Siendo el tiempo 1 año:

$100	producen	r al año
$ c	producen	I

Como el capital y el interés son directamente proporcionales, porque a doble capital, doble interés, formaremos la proporción igualando las razones directas:

$$\frac{100}{c} = \frac{r}{I}$$

y despejando en esta proporción I, c y r como medios o extremos desconocidos, tendremos:

$$I = \frac{c\ r}{100} \qquad c = \frac{100I}{r} \qquad r = \frac{100I}{c}$$

2) Siendo el tiempo de varios años:

Es evidente que el interés que produce un capital c durante t años, es igual al interés que produce un capital t **veces mayor** durante un año, o sea el interés durante un año del capital $c\,t$.

Por lo tanto, si	$ 100 producen	r al año
	$ ct producirán	I al año

Al formar la proporción tendremos: $\frac{100}{ct} = \frac{r}{I}$

y despejando:

$$I = \frac{ctr}{100} \qquad c = \frac{100I}{tr} \qquad t = \frac{100I}{cr} \qquad r = \frac{100I}{ct}$$

3) Siendo el tiempo de varios meses:

Cuando el tiempo t represente **meses**, t representará años de esa forma estaremos en el caso anterior:

$100 producen r al año.

$ $\frac{c \times t}{12}$ producirán I

Formando la proporción, tendremos: $\frac{100}{\frac{c\ t}{12}} = \frac{r}{I}$

Simplificando, queda: $\frac{1200}{ct} = \frac{r}{I}$

despejando:

$$I = \frac{ctr}{1200} \qquad c = \frac{1200I}{tr} \qquad t = \frac{1200I}{cr} \qquad r = \frac{1200I}{ct}$$

4) Siendo el tiempo de algunos días:

El año **comercial** se considera de 360 días.

Cuando el tiempo t representa **días**, $\frac{t}{360}$ representará años, luego, diremos:

$100 producen r al año

$ $\frac{ct}{360}$ producirán I

Formando la proporción $\frac{100}{\frac{ct}{360}} = \frac{r}{I}$

Simplificando, queda: $\frac{36000}{ct} = \frac{r}{I}$

y despejando:

$$I = \frac{ctr}{36000} \qquad c = \frac{36000I}{tr} \qquad t = \frac{36000I}{rc} \qquad r = \frac{36000I}{ct}$$

PROBLEMAS

Para aplicar estas fórmulas debe considerarse que, siendo el % **anual**, cuando el tiempo sea en **años** se emplean las fórmulas con **100**; cuando sea en **meses** con **1200**, y en **días**, con **36000**.

Estas fórmulas están deducidas bajo la **suposición de que el % es anual**. Por tanto, si el % que se da es **mensual** o **diario** hay que **hacerlo anual** multiplicándolo, si es mensual por 12, y si es diario por 360, y entonces se podrán aplicar las fórmulas anteriores.

CÁLCULO DEL INTERÉS

Hallar el interés de \$450 al 5% anual en 4 años.

Aplicamos la fórmula *I* con 100, porque el tiempo está dado en años:

$$I = \frac{ctr}{100} = \frac{450 \times 5 \times 4}{100} = \$90$$

Un propietario toma \$3600 en hipoteca sobre una casa al 5¾% anual. ¿Cuánto pagará de intereses al mes?

Hay que hallar el interés de 1 mes. Aplicamos la fórmula de *I* con 1200, porque el tiempo está en meses:

$$I = \frac{ctr}{1200} = \frac{3600 \times 1 \times 5.75}{1200} = \$17.25$$

Hallar el interés que han producido \$6000 invertidos durante 2 años, 8 meses y 6 días al ½% mensual.

Hay que reducir 2 años, 8 meses y 6 días a días = 966 días. Entonces se aplica la fórmula de *I* con 36000, porque el tiempo está en días, pero para poderla aplicar primero se obtiene el % anual. Como es ½ % mensual se multiplica por 12 y se tiene ½ × 12 = 6% anual.

$$I = \frac{ctr}{36000} = \frac{6000 \times 966 \times 6}{36000} = \$966$$

Un empleado toma un préstamo de \$480 al 5% anual el 12 de marzo y devuelve el dinero el 15 de mayo. ¿Cuánto pagará de interés?

Al calcular el interés entre dos fechas próximas, se calcula el número exacto de días de una fecha a otra. Así, en este problema, del 12 de marzo al 15 de mayo hay 19 días en marzo, 30 en abril y 15 en mayo = 64 días.

$$I = \frac{ctr}{36000} = \frac{480 \times 64 \times 5}{36000} = \$4.27$$

CÁLCULO DEL CAPITAL

¿Qué suma al $5\frac{1}{5}\%$ produce \$104 en 8 meses?

Aplicamos la fórmula de capital con 1200, porque el tiempo está en meses:

$$c = \frac{1200I}{rt} = \frac{1200 \times 104}{5.2 \times 8} = \$3000$$

EJERCICIOS

En éste y los siguientes ejercicios si no se establece uno específico, el % se entiende que es **anual**.

1. Se toman \$4800 en hipoteca al 7%. ¿Cuánto hay que pagar de interés mensual? **R.** \$28.

2. Si presto \$120 al 1% mensual, ¿cuánto me pagarán mensualmente de intereses? **R.** \$1.20.

3. Hallar el interés de \$600 al $3\frac{1}{2}\%$ en 4 años. **R.** \$84.

4. Hallar el interés de \$4500 al $5\frac{1}{2}\%$ en 8 meses. **R.** \$165.

5. Hallar el interés de \$9000 al 12% en 20 días. **R.** \$ 60.

6. Hallar el interés de \$1800 al 5% en 3 años, 8 meses y 10 días. **R.** \$332.50.

7. ¿Cuánto producen 8200 dólares prestados al $\frac{1}{4}\%$ mensual durante 90 días? **R.** 61.50 dólares.

8. ¿Cuánto producen 750 dólares que se prestan al $\frac{1}{80}\%$ diario en 2 meses? **R.** 7.50 dólares.

9. Hallar el interés de 500 dólares al 6% del 6 de febrero de 1967 al 2 de marzo del mismo año. **R.** 2 dólares.

10. Se toman 900 dólares al $5\frac{1}{2}\%$ el 29 de abril y se devuelve el capital prestado el 8 de junio. ¿Cuánto se pagará de interés? **R.** 5.50 dólares.

11. Hallar el interés de 400 dólares al 9% del 1 de febrero de 1964 al 30 de julio del mismo año (año bisiesto). **R.** \$18.

PROBLEMA 1

Por un dinero que recibí en préstamo al $\frac{1}{3}\%$ mensual y que devolví a los 80 días pagué \$400 de interés. ¿Cuál fue la suma prestada?

$$\frac{1}{3}\% \text{ mensual} = \frac{1}{3} \times 12 = 4\% \text{ anual}$$

Se aplica la fórmula de capital con 36000 porque el tiempo está en días:

$$c = \frac{36000I}{rt} = \frac{36000 \times 400}{4 \times 80} = \$45000$$

CÁLCULO DEL POR CIENTO

¿A qué % anual se invirtieron $75000 que produjeron en 24 días $250?

Aplicamos la fórmula *r* con 36000 porque el tiempo está en días:

$$r = \frac{36000I}{ct} = \frac{36000 \times 250}{75000 \times 24'} = 5\% \text{ anual}$$

CÁLCULO DEL TIEMPO

Si 6,000 dólares invertidos al 2% producen 600 dólares, ¿por cuánto tiempo estuvieron invertidos?

Para tener el tiempo en años se aplica la fórmula de *t* con 100; en meses, con 1200 y en días con 36000. Aquí se busca en años:

$$t = \frac{100I}{cr} = \frac{100 \times 600}{6000 \times 2} = 5 \text{ años}$$

EJERCICIOS

1. ¿Qué suma al 3% en 2 años produce 60 dólares? **R.** 1000 dólares.

2. ¿Qué suma al $5\frac{1}{2}$% en 5 meses produce 110 dólares? **R.** 4800 dólares.

3. ¿Qué suma al $3\frac{3}{5}$ % en 60 días produce 72 dólares? **R.** 12000 dólares.

4. ¿Qué capital al $7\frac{1}{2}$ % produce en 5 meses y 10 días $400? **R.** $12000.

EJERCICIOS

1. ¿A qué % se invirtieron $800 que en 5 años producen $40? **R.** 1%.

2. ¿A qué % se invirtieron $1254 que en 6 meses producen $62.70? **R.** 10%.

3. ¿A qué % se invirtieron $8200 que en 90 días producen $410? **R.** 20%.

4. ¿A qué % se invirtieron 12000 dólares que en 2 años 9 meses y 18 días producen 2016? **R.** 6%.

EJERCICIOS

1. ¿Durante cuánto tiempo se invirtieron 960 dólares que al 5% produjeron 48 dólares? **R.** 1 año.

2. Con los intereses de 60000 dólares al 1% mensual se adquirió un solar de 9000, ¿cuánto tiempo estuvo invertido el dinero? **R.** 1 año 3 meses.

3. Se toma al 4% una suma de 9000 dólares el 13 de septiembre y al devolver el capital se pagan 74 dólares de intereses. ¿Qué día se hizo la devolución? **R.** El 26 de noviembre.

CASOS PARTICULARES DE INTERÉS SIMPLE

1) Conociendo *c*, *t* y *r*, hallar el monto, *C* .

¿En cuánto se convertirán 7,200 dólares al $3\frac{3}{4}$ % anual en 5 meses?

Aquí se pide el monto *C*, que es la suma del capital con el interés, o sea, *C* = *c* + *I*. Cómo conocemos el capital, 7200 dólares, sólo hay que buscar el interés y sumarlo con *c*.

$$I = \frac{ctr}{1200} = \frac{7200 \times 5 \times 3.75}{1200} = 112.50 \text{ dólares}$$

Como *C* = *c* + *I*, sabiendo que *c* = 7200 dólares y que *I* = 112.50 dólares, tendremos: *C* = 7200 + 112.50 = 7312.50 dólares.

2) Conociendo *C, c* y *t*, hallar *r*.

¿A qué % anual se invirtieron $9000 que en 40 días se convirtieron en $9051.25?

Aquí se aplica la fórmula de *r* con 36000, y para encontrar el interés sólo hay que restar de *C* el capital con sus intereses acumulados, $9051.25, el valor de *c* que es $9000.

Y el interés será:

$$I = C - c = \$9051.25 - \$9000 = \$51.25$$

y tendremos:

$$r = \frac{36000I}{ct} = \frac{36000 \times 51.25}{9000 \times 40} = 5\frac{1}{8}\%$$

3) Conociendo *C*, *c* y *r*, hallar *t* .

¿Durante cuánto tiempo se invirtieron $500 para que el 7% anual se convirtieran en $570?

Se aplica la fórmula de *t*, y para hallar el interés *I* se resta el capital *c* que es $500, del monto *C* que es $570 y el interés *I* = *C* - *c* será $570 - $500 = $70, y tendremos:

$$t = \frac{100I}{cr} = \frac{100 \times 70}{500 \times 7} = 2 \text{ años}$$

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL CAPITAL ORIGINAL

Sabemos que $C = c + I$ y como $I = \frac{ctr}{100}$ tendremos:

$$C = c + \frac{ctr}{100}$$

Incorporando el entero c en el segundo miembro:

$$C = \frac{100c + ctr}{100}$$

Pasando el divisor 100 del segundo miembro al primero: $100\,C = 100\,c + c\,t\,r$

Sacando el factor común c en el segundo miembro:

$$100 \times C = c(100 + tr)$$

y despejando c, queda: $c = \frac{100C}{100 + tr}$

Esta es la fórmula que se aplica siendo t años; en *meses* deben sustituirse los dos 100 por 1200 y en *días* por 36000.

1) ¿Qué capital invertido al 7% anual en 5 años se convierte en $3105?

Aplicamos la fórmula del capital original con 100 porque el tiempo está en años:

$$c = \frac{100C}{100 + tr} = \frac{100 \times 3105}{100 + (7 \times 5)} = \frac{100 \times 3105}{135} = \$2300$$

2) Se invierte cierta suma al 3% y al cabo de 2 años y 18 días se ha convertido en $12738. ¿Cuál fue la suma invertida?

Aplicamos la fórmula del capital original con 36000 porque se reducirá el tiempo a días:

$$c = \frac{36000C}{36000 + tr} = \frac{36000 \times 12738}{36000 + (3 \times 738)} =$$

$$\frac{36000 \times 12738}{38214} = \$12000$$

EJERCICIOS

1. ¿En cuánto se convertirán $250 al 6% en 4 años? **R.** $310.

2. ¿En cuánto se convertirán 300 dólares invertidos al 3 2/5 % durante 8 meses? **R.** 306.80 dólares.

3. Una persona presta a un amigo $4500 durante un año y 40 días y al cabo de este tiempo el amigo le entrega $4700, importe del capital prestado y sus intereses acumulados ¿A qué tanto por ciento anual hizo la operación? **R.** 4% anual.

INTERÉS COMPUESTO

En la Aritmética los problemas de interés compuesto se resuelven por aplicaciones sucesivas del interés simple y por medio de las tablas de interés compuesto.

Por aplicaciones sucesivas del **interés simple** se busca el interés del capital en la primera unidad de tiempo y se suma al capital; esta suma se considera el capital de la segunda unidad de tiempo y se busca el interés de este nuevo capital en esa segunda unidad de tiempo; el interés obtenido se suma al capital y el resultado es el capital para la tercera unidad de tiempo; se busca el interés de este nuevo capital en la tercera unidad de tiempo y se le suma al capital, y así sucesivamente hasta terminar con todas las unidades de tiempo.

1) Hallar los intereses compuestos de $200 al 3% anual en 2 años. Se busca el interés de $200 en el primer año:

$$\frac{ctr}{100} = \frac{200 \times 1 \times 3}{100} = \$6$$

Este interés del primer año se suma el capital:

$200 + $6 = $206

Ahora buscamos el interés de $206 en el segundo año:

$$I = \frac{ctr}{100} = \frac{206 \times 1 \times 3}{100} = \$6.18$$

Este interés se suma el capital anterior:

$206 + $6.18 = $212.18

Por lo tanto, si los $200 se han convertido en $212.18, los intereses compuestos son

$212.18 - $200 = $12.18

2) ¿En cuánto se convertirán $300 al 4% anual de interés compuesto en 2 años 5 meses?

Se busca el interés de $300 en el primer año:

$$I = \frac{300 \times 4 \times 1}{100} = 12 \quad \$300 + \$12 = \$312$$

Se busca el interés de $312 en el segundo año:

$$I = \frac{312 \times 4 \times 1}{100} = \$12.48 \quad \$312 + \$12.48 = \$324.48$$

Se busca el interés de $ 324.48 en 5 meses:

$$I = \frac{324.48 \times 5 \times 4}{1200} = \$5.41$$

$$\$324.48 + \$5.41 = \$329.89$$

EJERCICIOS

1. Encuentra los intereses compuestos de $120 al 5% anual en 2 años.
R. $12.30.

2. ¿En cuánto se convertirán $400 al 6% anual de interés compuesto en 3 años? **R.** 476.41.

3. ¿En cuánto se convertirán $500 al 7% anual de interés compuesto en 5 años? **R.** 701.28.

4. Hallar los intereses compuestos de $200 al 2% anual en 2 años y 7 meses. **R.** $10.51.

5. ¿En cuánto se convertirán 600 dólares al 3% anual de interés compuesto en 1 año, capitalizando los intereses por trimestre? **R.** 618.20 dólares.

6. Hallar los intereses compuestos de $800 al 6% anual en año y medio, capitalizando los intereses por semestre. **R.** $74.18.

7. ¿En cuánto se convertirán 700 dólares al 4½% anual en 1 año y 4 meses, capitalizando los intereses cada 4 meses? **R.** 742.95 dólares.

EJERCICIOS

Usando la tabla de interés compuesto, encuentra en cuánto se convertirán:

1. 23456 dólares al 6% en 12 años.
R. 47198.09 dólares.

2. $325 al 11% en 15 años. **R.** $1559.11.

3. 300 dólares al 2% en 5 años. **R.** $331.22.

4. $840 al 7% en 9 años. **R.** $ 704.31.

5. 13456 dólares al 8% en 3 años. **R.** $3494.68

6. 35000 dólares al 10% en 7 años. **R.** $33205.10

7. $600 al 4% en un año capitalizando los intereses por trimestre. **R.** $24.36.

TABLAS DE INTERÉS COMPUESTO

El procedimiento anterior resulta muy laborioso, por lo que es mucho más rápido usar la tabla de interés compuesto que se presenta más adelante.

El monto o importe C de un capital c colocado a interés compuesto durante t años o unidades de tiempo a un tanto por ciento dado puede calcularse por la fórmula $C = c\ (1 + r\ )^{t}$ en la cual r no es el tanto por ciento anual, sino el tanto por uno, es decir, lo que gana $1 en cada año o unidad de tiempo.

El valor de $(1 + r\ )^{t}$ aparece en la tabla de interés compuesto, con lo cual para hallar el monto sólo hay que multiplicar el capital por el valor de este binomio. Una vez encontrado el monto, el interés compuesto es la diferencia entre éste y el capital.

1) ¿En cuánto se convertirán $6000 al 3% interés compuesto en 5 años?

Aquí c = $6000, t = 5, r = 0.03 porque el tanto por ciento 3 significa que $100 ganan $3 al año, luego $1 ganará 3 ÷ 100 = $0.03 y este es el tanto por uno.

Aplicando la fórmula $C = c\ (1 + r\ )^{t}$ tenemos:

$$C = 6000 \times (1 + 0.03)^5\ C = 6000 \times (1.03)^5$$

El valor de 1.03^5, o sea el valor adquirido por $1 al 3% en 5 años está en la tabla mencionada y es 1.159274, luego:

$$C = 6000 \times 1.159274\ C = \$6955.64$$

Los intereses compuestos serán:

$6955.64 - $6000 = $955.64

2) Hallar los intereses compuestos de $16800 al 5 1 % en 8 años.

El valor adquirido por $1 al 5 2 % en 8 años según la tabla es 1.534687, luego:

$$C = 16800 \times 1.534687\ C = \$25782.74$$

Los intereses compuestos son:

$25782.74 - $16800 = $8982.74

3) Hallar los intereses compuestos de $5820 al 9% en 17 años.

El valor adquirido por $1 al 9% en 17 años es 4.327633, luego:

$$C = 5820 \times 4.327633\ C = \$25186.82$$

El interés compuesto es:

$25186.82 - $5820 = $19366.82

4) ¿En cuánto se convertirán $500 al 6% interés compuesto en 1 año capitalizando los intereses por trimestre?

Como la unidad de tiempo es el trimestre y en 1 año hay 4 trimestre, t = 4.

Como el % anual es el 6%, el % trimestral será 6 ÷ 4 = 1 ½. El valor de $1 al 1½% anual en 4 trimestres (igual que si fuera en 4 años) es 1.061364, según la tabla, luego:

$$C = 500 \times 1.061364\ C = \$530.68$$

Los intereses compuestos serán:

$530.68 - $500 = $30.68

TABLA DE INTERÉS COMPUESTO

VALOR ADQUIRIDO POR $1 A INTERÉS COMPUESTO DE 1 A 20 AÑOS, O SEA VALOR DE $(1 + r)^t$

Años	1%	$1\frac{1}{2}$ %	2%	$2\frac{1}{2}$ %	3%	$3\frac{1}{2}$ %	4%	$4\frac{1}{2}$ %	5%	$5\frac{1}{2}$ %	6%	7%	8%	9%	10%	11%
1	1.010000	1.015000	1.020000	1.025000	1.030000	1.035000	1.040000	1.045000	1.050000	1.055000	1.060000	1.070000	1.080000	1.090000	1.100000	1.110000
2	1.020100	1.030225	1.040400	1.050625	1.060900	1.071225	1.081600	1.092025	1.102500	1.113025	1.123600	1.144900	1.166400	1.188100	1.210000	1.232100
3	1.030301	1.045678	1.061208	1.076891	1.092727	1.108718	1.124864	1.141166	1.157625	1.174241	1.191016	1.225043	1.259712	1.295029	1.331000	1.367631
4	1.040604	1.061364	1.082432	1.103813	1.125509	1.147523	1.169859	1.192519	1.215506	1.238825	1.262477	1.310796	1.360489	1.411582	1.464100	1.518070
5	1.051010	1.077284	1.104081	1.131408	1.159274	1.187686	1.216653	1.246182	1.276282	1.306960	1.338226	1.402552	1.469328	1.538624	1.610510	1.685058
6	1.061520	1.093443	1.126162	1.159693	1.194052	1.229255	1.265319	1.302260	1.340096	1.378843	1.418519	1.500730	1.586874	1.677100	1.771561	1.870414
7	1.072135	1.109845	1.148686	1.188686	1.229874	1.272279	1.315932	1.360862	1.407100	1.454679	1.503630	1.605782	1.713824	1.828039	1.948717	2.076160
8	1.082857	1.126493	1.171659	1.218403	1.266770	1.316809	1.368569	1.422101	1.477455	1.534687	1.593848	1.718186	1.850930	1.992563	2.143589	2.304537
9	1.093685	1.143390	1.195093	1.248863	1.304773	1.362897	1.423312	1.486095	1.551328	1.619094	1.689479	1.838459	1.999005	2.171893	2.357948	2.558036
10	1.104622	1.160541	1.218994	1.280085	1.343916	1.410599	1.480244	1.552969	1.628895	1.708145	1.790848	1.967151	2.158925	2.367364	2.593742	2.839420
11	1.115668	1.177949	1.243374	1.312087	1.384234	1.459970	1.539454	1.622853	1.710339	1.802092	1.898299	2.104852	2.331639	2.580426	2.853117	3.151757
12	1.126825	1.195618	1.268242	1.344889	1.425761	1.511069	1.601032	1.695881	1.795856	1.901208	2.012197	2.252192	2.518170	2.812665	3.138428	3.498450
13	1.138093	1.213552	1.293607	1.378511	1.468534	1.563956	1.665074	1.772196	1.885649	2.005774	2.132928	2.409845	2.719624	3.065805	3.452271	3.883279
14	1.149474	1.231756	1.319479	1.412974	1.512590	1.618695	1.731676	1.851945	1.979932	2.116092	2.260904	2.578534	2.937194	3.341727	3.797498	4.310440
15	1.160969	1.250232	1.345868	1.448298	1.557967	1.675349	1.800944	1.935282	2.078928	2.232477	2.396558	2.759032	3.172169	3.642482	4.177248	4.784588
16	1.172579	1.268986	1.372786	1.484506	1.604706	1.733986	1.872981	2.022370	2.182875	2.355263	2.540352	2.952164	3.425943	3.970306	4.594973	5.310893
17	1.184304	1.288020	1.400241	1.521618	1.652848	1.794676	1.947901	2.118377	2.292018	2.484802	2.692773	3.158815	3.700018	4.327633	5.054470	5.895091
18	1.196148	1.307341	1.428246	1.559659	1.702433	1.857489	2.025817	2.208479	2.406619	2.621466	2.854339	3.379932	3.996019	4.717120	5.559917	6.543551
19	1.208109	1.326951	1.456811	1.598650	1.753506	1.922501	2.106849	2.307860	2.526950	2.765647	3.025599	3.616528	4.315701	5.141661	6.115909	7.263342
20	1.220190	1.346855	1.485947	1.638616	1.806111	1.989789	2.191123	2.411714	2.653298	2.917758	3.207136	3.869685	4.660957	5.604411	6.727500	8.062309

TABLA DE INTERÉS COMPUESTO DECRECIENTE
VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD POR $1 A INTERÉS COMPUESTO DE 1 A 20 AÑOS

A	1%	1 1/2 %	2%	2 1/2 %	3%	3 1/2 %	4%	4 1/2 %	5%	5 1/2 %	6%	7%
1	0.010000	1.01500	1.02000	1.025000	1.030000	1.035000	1.040000	1.045000	1.050000	1.055000	1.060000	1.070000
2	0.507512	0.511278	0.515050	0.518827	0.522611	0.526400	0.530196	0.533998	0.537805	0.541618	0.545437	0.553092
3	0.340022	0.343383	0.346755	0.350137	0.353530	0.356934	0.360349	0.363773	0.367209	0.370654	0.374110	0.381052
4	0.256281	0.259445	0.262624	0.265818	0.269027	0.272251	0.275490	0.278744	0.282012	0.285294	0.288591	0.295228
5	0.206040	0.209089	0.212158	0.215247	0.218355	0.221481	0.224627	0.227792	0.230975	0.234176	0.237396	0.243891
6	0.172548	0.175525	0.178526	0.181550	0.184598	0.187668	0.190762	0.193878	0.197017	0.200179	0.203363	0.209796
7	0.148628	0.151556	0.154512	0.157495	0.160506	0.163544	0.166610	0.169701	0.172820	0.175964	0.179135	0.185553
8	0.130690	0.133584	0.136510	0.139467	0.142456	0.145477	0.148528	0.151610	0.154722	0.157864	0.161036	0.167468
9	0.116740	0.119610	0.122515	0.125457	0.128434	0.131446	0.134493	0.137574	0.140690	0.143839	0.147022	0.153486
10	0.105582	0.108434	0.111327	0.114259	0.117231	0.120241	0.123291	0.126379	0.129505	0.132668	0.135868	0.142378
11	0.096454	0.099294	0.102178	0.105106	0.108077	0.111092	0.114149	0.117248	0.120389	0.123571	0.126793	0.133357
12	0.088849	0.091680	0.094560	0.097487	0.100462	0.103484	0.106552	0.109666	0.112825	0.116029	0.119277	0.125902
13	0.082415	0.085240	0.088118	0.091048	0.094030	0.097062	0.100144	0.103275	0.106456	0.109684	0.112960	0.119651
14	0.076901	0.079723	0.082602	0.085537	0.088526	0.091571	0.094669	0.097820	0.101024	0.104279	0.107585	0.114345
15	0.072124	0.074944	0.077825	0.080766	0.083767	0.086825	0.089941	0.093114	0.096342	0.099626	0.102963	0.109795
16	0.067945	0.070765	0.073650	0.076599	0.079611	0.082685	0.085820	0.089015	0.092270	0.095583	0.098952	0.105858
17	0.064258	0.067080	0.069970	0.072928	0.075953	0.079043	0.082199	0.085418	0.088699	0.092042	0.095445	0.102425
18	0.060982	0.063806	0.066702	0.069670	0.072709	0.075817	0.078993	0.082237	0.085546	0.088920	0.092357	0.099413
19	0.058052	0.060878	0.063782	0.066761	0.069814	0.072940	0.076139	0.079407	0.082745	0.086150	0.089621	0.096753
20	0.055415	0.058246	0.061157	0.064147	0.067216	0.070361	0.073582	0.076876	0.080243	0.083679	0.087185	0.094393

PARA USAR ESTA TABLA

En muchas operaciones mercantiles se emplea el interés compuesto decreciente, en el que se van amortizando cantidades anuales, que incluyen principal e intereses. De este modo, si se presta una suma con un interés compuesto decreciente en un tiempo cualquiera, tenemos que determinar las amortizaciones anuales, para lo cual buscamos en la Tabla los años y el tipo de interés, y en el punto coincidente encontraremos el factor, que se multiplica por el capital prestado y nos da la anualidad de amortización.

Ejemplo

Tomamos un préstamo de $4,500.00 al 6% de interés compuesto decreciente pagadero en 5 años. Buscamos en la tabla y encontramos el factor 0.237396; multiplicamos este factor por el capital $4500 y nos dará una anualidad de $1,068.28.

AÑOS 5	INTERESES 6%	PAGOS ANUALES PRINCIPAL E INTERESES $ 1.068.28		PRÉSTAMO TOTAL $ 4,500.00
	PAGOS DEL INTERÉS	PAGOS DEL PRINCIPAL	PAGOS TOTALES	SALDO DEUDOR
Primer año	$270.00	$798.28	$1,068.28	$3,701.72
Segundo año	222.10	846.18	1,068.28	2,855.54
Tercer año	171.33	896.95	1,068.28	1,958.59
Cuarto año	117.52	950.76	1,068.28	1,007.83
Quinto año	60.47	1,007.83	1,068.30	0



Se puede decir que el inicio de la letra de cambio fue en las Ferias de Flandes y Champaña. Al comienzo del siglo XII se establece la práctica de pagar, mediante promesa escrita, una cantidad. El pago se podía hacer mediante representantes de ambas partes.

CAPÍTULO XLVIII

DOCUMENTOS MERCANTILES

Una **letra de cambio** es un documento legal por medio del cual una persona ordena a otra que pague, a la orden de ella misma o de un tercero, cierta cantidad de dinero en un lugar y tiempo estipulados.

Quien ordena pagar es el librador y la persona a quien va dirigida la letra y que paga es el **librado**; quien cobra es el **tomador** o **tenedor**.

Los aspectos relacionados con la letra de cambio lo regula el Código de Comercio.

LA LETRA DE CAMBIO

Para que una letra de cambio surta efecto en un juicio legal deberá contener: 1) El lugar, día, mes y año en que se expide o libra. 2) El tiempo en que se pagará (**vencimiento**). 3) El nombre y apellido, razón social o título de la persona o entidad a cuya orden se manda hacer el pago (**tenedor**). 4) La cantidad que se ordena pagar expresada en moneda efectiva (**valor nominal**). 5) Las palabras "valor recibido" o "valor en cuenta". 6) El nombre y apellido, razón social o título de quien se recibe el importe o a cuya cuenta se carga. 7) El nombre y apellido, razón social o título del librado. 8) La firma del librador. 9) El sello del timbre que establece la Ley.

Cuando una letra de cambio no reúne los requisitos legales, se considerará pagaré si cumple las condiciones de éste a la orden del tenedor y a cargo del librado.

MODELO DE UNA LETRA DE CAMBIO

Acepto(amos)

LETRA DE CAMBIO

No. ______ BUENO POR $ ______

En ______ a ____ de ______ de ______

A ______ se servirá(n) Usted(es) mandar pagar incondicionalmente por esta ______ Letra de Cambio en ______ ______ a la Orden de ______ la cantidad de:

Valor recibido que cargará(n) usted(es) en cuenta según este aviso de:

S.S.S.

Nombre ______
Dirección ______ Tel. ______
Población ______

Firma(s) ______

Datos y firmas del(os) aval(es)

Nombre ______
Dirección ______
Población ______ Tel. ______
Firma ______

Nombre ______
Dirección ______
Población ______ Tel. ______
Firma ______

Al enviar letras, sobre todo al extranjero, se hace por duplicado o triplicado y se llaman **primera**, **segunda** y **tercera de cambio**. Se envían por separado para evitar pérdidas o demora. Si cualquiera de ellas es aceptada o pagada, las demás que-dan anuladas.

Las letras de cambio pueden girarse al contado o a plazos por alguno de estos términos: 1) A la vista. 2) A uno o más días, a uno o más meses vista. 3) A uno o más días, a uno o más meses fecha. 4) A día fijo o determinado.

Los términos anteriores obligan al librado a pagar la letra en un plazo establecido:

A la vista: El librado tiene que pagar la letra el día que se la presenten.

A días o meses vista: El día en que se cumplen los días o meses señalados a contar desde el día siguiente al de la **aceptación** de la letra por el librado o el **protesto**.

A días o meses fecha: El día en que se cumplen los días o meses señalados a contar desde el día siguiente al de la fecha de la letra.

A día fijo: El día señalado.

Así, una letra girada el 8 de enero a 15 días **vista** vence a los 15 días de la **aceptación** de la letra por el librado. El tenedor presenta la letra al librado para su aceptación; si éste la acepta escribe **aceptada** y firma; si no la acepta, el tenedor **protesta** la letra ante notario, y a partir del día siguiente se empiezan a contar los 15 días que deben transcurrir para que la letra **venza** y se pueda cobrar al librado.

Una letra girada el 8 de enero a 15 días fecha vence el 23 de enero.

Los **meses** se computan de fecha a fecha. Así, una letra girada el 22 de marzo a tres meses vista, aceptada el 3 de abril, vence el 3 de julio.

Una letra girada el 26 de mayo a 30 **días fecha** vence el 25 de junio y girada a un **mes fecha** vence el 26 de junio.

Si en el mes del vencimiento no hubiere día correspondiente al de la emisión o aceptación, la letra girada a uno o varios meses fecha o vista vencerá el último día del mes. Así, una letra girada el 31 de mayo a un mes fecha vence el 30 de junio.

FECHAS DE PAGO DE LAS LETRAS

Las letras deberán pagarse el día de su vencimiento, sin término de gracia.

No obstante, si el día del vencimiento es festivo, se pagará la letra al día siguiente.

Si la letra no es pagada el día del vencimiento, el tenedor tiene que hacer el **protesto** ante notario antes del día siguiente a aquél en que fue negado el pago.

Si no hace el protesto en su oportunidad, la letra queda **perjudicada**, es decir, el tenedor pierde las **acciones cambiarias** que establece la ley y tiene que acudir a otros procedimientos para exigir su pago.

ENDOSO

Por medio de un **endoso** el tenedor traspasa la propiedad de la letra a otra persona. Se llama **endoso** porque se escribe al dorso de la letra el nombre o razón social de la personal o entidad a quien se traspasa la propiedad de la letra, el concepto (valor recibido) por el cual se traspasa la propiedad, la fecha y la firma del endosante.

Como se ve, los requisitos del endoso son casi los mismos que en la letra de cambio. Si cumple estos requisitos se llama **endoso regular**; y si no los cumple, es un endoso **irregular** que tiene distintos efectos, según la ley.

El **endoso en blanco** es un endoso irregular que consiste en que el tenedor simplemente firma la letra al reverso y entonces el portador de la letra tiene derecho a exigir su pago al librador el día del vencimiento.

No pueden endosarse letras no expedidas a la orden.

PAGARÉ

Un **pagaré** es una promesa escrita de pagar una cantidad de dinero, a una persona determinada en el documento o a su orden o al tenedor del documento, en una fecha determinada.

Los pagarés deberán contener: 1) El nombre específico de **pagaré**. 2) La fecha en que se expide. 3) La cantidad (**valor nominal**). 4) La fecha de pago. 5) El nombre y apellido de la persona a cuya orden se habrá de hacer el pago. 6) El origen del valor que representa (valor recibido). 7) La firma del que contrae la obligación de pagar.

Quien contrae la obligación de pagar es el **otorgante** y la persona que tiene derecho a cobrar el pagaré, esté o no mencionada en el documento, es el **tenedor**.

MODELO DE PAGARÉS

PAGARE

No. ________ BUENO POR $ ________

En ____________ a ____ de ____________ de ______

Debe(mos) y Pagare(mos) incondicionalmente por este Pagaré a la Orden de: ____________________
Nombre de la Persona a quien ha de pagarse

____________ en ____________________ el ____________________

La cantidad de:

____

Valor Recibido a mi (nuestra) entera satisfacción. Este pagaré forma parte de una serie numerada del 1 a ____ y todos están sujetos a la condición de que, al no pagarse cualquiera de ellos a su vencimiento, serán exigibles todos los que le sigan en número, además de los ya vencidos, desde la fecha de venciento de este documento hasta el día de su liquidación, causará intereses moratorios al tipo de ______ % mensual, pagadero en esta ciudad juntamente con el principal.

Nombre de la Persona a quien ha de pagarse
Nombre ____________________
Dirección ____________ Tel ________
Población ____________________

Acepta(mos)

Firma(s) ____________________

Datos y firmas del(os) aval(es)

Nombre ____________________
Dirección ____________________
Población ____________ Tel ________
Firma ____________

Nombre ____________________
Dirección ____________________
Población ____________ Tel ________
Firma ____________

PLAZO Y VENCIMIENTO

Estos pagarés pueden otorgarse a su **presentación, a días fecha, a meses fecha** y a **fecha fija**. Los primeros vencen en cualquier tiempo; los demás el día señalado.

Por otra parte, los pagarés expedidos "a la orden" son endosables, pero si son expedidos a una persona determinada **no son endosables**.

Si en un pagaré se estipula que ganará un porcentaje de interés, se entenderá sobre el valor nominal y desde la fecha en que se expide hasta el día del vencimiento. Entonces, el **valor nominal del pagaré** es la cantidad escrita en el mismo **más el interés** que debe ganar hasta el vencimiento.

BENEFICIOS DE LOS PAGARÉS Y LAS LETRAS

Un comerciante que recibe mercancías no suele pagar al contado; el vendedor siempre le da un plazo (generalmente 30, 60, 90 ó 180 días) para pagar, con objeto de que pueda vender la mercancía al público y después pagar al vendedor. Así, el comerciante firma un pagaré por el valor de la mercancía recibida o autorizada al vendedor para que gire contra él una letra de cambio por el importe de la venta.

Estos documentos son negociables y con ellos en la mano se puede comprar y pagar, es decir, pueden **circular** exactamente como si fueran dinero, ya que están respaldados por la solvencia del deudor, aunque no se puede hacer efectivo sino hasta el día de su vencimiento.

Con las letras de cambio una persona puede disponer de los fondos o créditos de que disponga en un lugar distante y saldar sus deudas sin necesidad de mover el dinero.

CHEQUES

El **cheque** es un documento por el cual una personal que deposita dinero en un banco, manda a éste que pague todo o parte de sus fondos al portador del documento, o a la orden de una persona.

El cheque debe contener la fecha en que se expide, el nombre y apellido de la persona a cuyo favor se expide, la cantidad con número y letra y la firma de quien expide el cheque.

Si es al portador, el banco lo pagará a quien lo presente; si es a la orden de una persona, lo pagará a ésta o a quien ésta lo endose. Un cheque se endosa de la misma forma que un pagaré.

El plazo del cheque es **a la vista**, o sea que se puede cobrar en cualquier momento después de su expedición, desde luego, siempre que no esté posfechado (fecha adelantada).



Figura 127

DESCUENTO

No se puede exigir el pago de una letra o un pagaré al deudor sino hasta el día del vencimiento. Pero si una persona posee una letra o un pagaré y necesita hacerla efectiva **antes de su vencimiento**, se dirige a otra persona o entidad, generalmente un banco, para que le pague el documento, pero como le hace un anticipo porque no puede exigir el pago al deudor sino hasta el día del vencimiento, y como el dinero del banco no es propio, sino de sus depositantes, a los cuales les paga un interés por el dinero depositado, no paga la cantidad escrita en el documento, pues rebaja un % de interés, generalmente sobre el **valor nominal**, por el **tiempo** que media entre el día en que el banco paga la letra o pagaré y el día del vencimiento, cuando el banco puede cobrar al deudor. A esta **rebaja** se le llama **descuento**.

El **valor nominal** es la cantidad escrita en el documento, o la **cantidad** más el interés desde la fecha hasta el día del vencimiento, si es que el documento gana interés, y se representa por n.

Al porcentaje de interés que cobra el banco por pagar una letra o un pagaré antes del vencimiento se le llama **tipo de descuento**, y puede calcularse sobre el **valor nominal (descuento comercial)** o sobre el **valor actual (descuento racional)**, por el **término o plazo del descuento,** que es el tiempo que media entre el día que se negocia el documento y el día del vencimiento.

Por otra parte, el **descuento comercial abusivo** es el interés del **valor nominal**, al tipo de descuento, durante el plazo del descuento o el tiempo que falta para el **vencimiento**.

El **valor efectivo, actual o real** es el valor del documento al día que se negocia, o sea, lo que se recibe por el documento negociándolo antes del vencimiento. Es, desde luego, menor que el valor nominal, pues es igual al valor nominal n, menos el descuento d y se representa:

$$e = n - d$$

DESCUENTO COMERCIAL

El **descuento comercial** es el interés de valor nominal durante el tiempo que falta para el vencimiento: si se llama *n* al valor nominal, *t* al plazo de descuento y *r* al tipo de descuento o % de interés, formaremos la proporción del mismo modo que en el interés, pero poniendo *n* en lugar de *c* .

$100	pierden	*r* al año
$ *n t*	perderán	*d*

Al formar la proporción, tenemos:

$$\frac{100}{n\,t} = \frac{r}{d}$$

y despejando *d, n, t* y *r* tendremos:

$$d = \frac{n\,t\,r}{100} \quad n = \frac{100d}{t\,r} \quad r = \frac{100d}{n\,t} \quad t = \frac{100d}{n\,r}$$

Estas son las fórmulas tratándose de años; cuando son meses (de 30 días) se sustituye el 100 por 1200, y en días por 36000.

CÁLCULO DEL DESCUENTO

¿Cuánto se rebajará de una letra de $850 descontada comercialmente al $6\frac{1}{2}\%$ anual, 2 años antes del vencimiento?

Aplicamos la fórmula de *d* con 100, porque el tiempo está en años:

$$d = \frac{ntr}{100} = \frac{850}{100} \times 2 \times 6.5 = \$110.50$$

El **valor efectivo** sería: $850 - $110.50 = $739.50

Hallar el descuento comercial y el valor efectivo de un pagaré de 720 dólares que vence el 15 de noviembre y se negocia al 5% el 17 de agosto del mismo año.

El plazo del documento es del 17 de agosto al 15 de noviembre: 14 días en agosto, 30 en septiembre, 31 en octubre y 15 en noviembre = 90 días.

Aplicamos la fórmula de *d* con 36,000 porque el tiempo está en días:

$$d = \frac{ntr}{36000} = \frac{720 \times 90 \times 5}{36000} = 9 \text{ dólares}$$

El **valor efectivo** será: 720 - 9 = 711 dólares

EJERCICIOS

Encuentra el descuento comercial y el valor efectivo de los siguientes documentos:

VALOR NOMINAL	TIPO DE DESC.	PLAZO DE DESC.	
1. $240	5%	3 años	**R.** $36; $204
2. $960	7%	3 años	**R.** $201.60; $758.40
3. $360	$8\frac{4}{5}\%$	4 m y 5 d	**R.** $11; $349
4. $748	1% mens.	5 meses	**R.** $37.40; $710.60
5. $1234	9%	40 días	**R.** $12.34; $1221.66

EJERCICIOS

Encuentra el descuento comercial y el valor efectivo de los siguientes pagarés:

1. $180. México, junio 6 de 1989.

Tres meses después de la fecha, pagaré al Sr. Jacinto Suárez o a su orden, la cantidad de ciento ochenta dólares, valor recibido.

Ramón Pérez

Descontado, agosto 17 de 1989, al 6%
R. $0.60; $179.40

2. $300 Guadalajara, febrero 26, 1989.

A treinta días fecha, pagaré al Sr. Constantino Vázquez o a su orden, la cantidad de trescientos pesos, valor recibido.

Mario López

Descontado, marzo 1 de 1989, al 6%.
R. $1.35; $298.65.

3. $500 México, D.F., marzo 15 de 1989.

A tres meses fecha, pagaré al Sr. Cándido Oyarzábal o a su orden, la cantidad de quinientos pesos, valor recibido en mercancías de dicho señor.

Pedro Hernández

Descontado, abril 4 de 1989, al 5%
R. $5; $495.

CÁLCULO DEL VALOR NOMINAL

1. Hallar el valor nominal de una letra que vence el 3 de agosto y descontada al $4\frac{1}{2}$% el 24 de junio del mismo año se disminuye en $14.

Plazo del descuento: Del 24 de junio al 3 de agosto, 40 días. Se aplica la fórmula de *n* con 36000:

$$n = \frac{36000d}{rt} = \frac{36000 \times 14}{4.5 \times 40} = \$2,800$$

2. Hallar el valor nominal de un pagaré por el cual se reciben $2985, descontado al 6% por 30 días.

Descuento de $1 por 30 días al 6%: $\frac{1 \times 30 \times 6}{36000} = \$0.005$.

Valor efectivo de $1 pagadero dentro de 30 días:

$1 - $0.005 = $0.995

Así que, por cada $0.995 de valor efectivo, el valor nominal es $1, luego por $2985 de valor efectivo, el valor nominal será: $2985 ÷ 0.995 = $3000.

CÁLCULO DEL PORCENTAJE

¿A qué porcentaje anual se descuenta una letra de $900, que descontada por 4 meses sufre una rebaja de $24?

Aplicamos la fórmula de *r* con 1200:

$$r = \frac{1200d}{nt} = \frac{1200 \times 24}{900 \times 4} = 8\% \text{ anual}$$

Un pagaré de $600 a tres meses fecha, otorgado el 15 de junio, se descuenta el 1° de agosto y se reciben por él $595.50. ¿Cuál fue el tipo de descuento?

El plazo del descuento es de agosto 1° al día del vencimiento, septiembre 15, o sea 45 días.

Aplicamos la fórmula de *r* con 36000 porque el tiempo está en días. No nos dan el descuento directamente, pero lo podemos hallar con facilidad porque si la letra era de $600 y nos pagaron $595.50, el descuento será la **diferencia**, o sea:

$600 - $ 595.50 = $4.50. Tendremos:

$$r = \frac{36000d}{nt} = \frac{36000 \times 4.50}{600 \times 45} = 6\% \text{ anual}$$

EJERCICIOS

Encuentra el valor nominal, conociendo:

Plazo del descuento	Tipo	Descuento	
1. 5 años	8%	$20	**R.** $50
2. 4 meses	2%	$76	**R.** $11400
3. 18 días	$\frac{1}{3}$% mensual	$12	**R.** $6000
4. 2 a 5 m 15 d	$\frac{2}{5}$%	$177	**R.** $18000

Encuentra el valor nominal de los siguientes documentos:

VENCIMIENTO	FECHA DEL DESCUENTO	TIPO	DESC.	
1. Mayo 4, 1967	Abril 4, 1967	6%	$8	**R.** $1600
2. Feb 12, 1967	Enero 13, 1967	5%	$10.50	**R.** $2520
3. Junio 23, 1967	Dic. 2, 1967	8%	$20.30	**R.** $450
4. Marzo 12, 1964 (bisiesto)	Feb. 15, 1964	6%	$9.10	**R.** $2100

CÁLCULO DEL TIEMPO

Una letra de 800 dólares se descuenta al 6% anual y se reduce a 656 dólares. ¿Qué tiempo faltaba para el vencimiento?

Si se quiere hallar el tiempo en años se aplica la fórmula con 100; en meses con 1200 y en días con 36000. El **descuento** será la diferencia 800 - 656 = 144 dólares. Tendremos:

$$t = \frac{100d}{nr} = \frac{100 \times 144}{800 \times 6} = 3 \text{ años}$$

Hallar la fecha de vencimiento de una letra de $900 por la cual, negociada al 4% el 29 de octubre de 1987, se recibieron $895.80.

El descuento será:

$900 - $895.80 = $4.20

Hay que buscar los días que faltaban para el vencimiento:

$$t = \frac{36000d}{nr} = \frac{36000 \times 4.20}{900 \times 4} = 42 \text{ días}$$

Por tanto, si el 29 de octubre faltaban 42 días, el vencimiento era el 10 de diciembre de 1987.

EJERCICIOS

1. Un pagaré de 800 dólares que vence el 10 de julio se negocia el 4 de junio y se reciben por él 793.60 dólares. ¿A qué % se descontó? **R.** 8%.

2. Un pagaré de 900 dólares suscrito el 8 de octubre a 3 meses fecha se negocia el 9 de noviembre y se reduce a 892.50 dólares. ¿A qué % se descontó? **R.** 5%.

3. ¿A qué % se negoció una letra de $500 que descontada a 3 años se disminuyó en $35? **R.** 2 1/3 %.

4. Se negocia una letra de 400 dólares a 2 años y se reciben por ella 360. ¿A qué % se negoció? **R.** 5%.

5. ¿A qué % se negocia un pagaré de 512 dólares por el cual, 3 meses antes del vencimiento se reciben 488?
R. 18 3/4 %.

6. ¿Cuánto tiempo faltaba para el vencimiento de una letra de $144 que se negoció al 10% y se disminuyó en $57? **R.** 5 años.

7. Se negocia una letra de $1400 al 1/18% mensual y se disminuye en $7. ¿Cuántos meses faltaban para el vencimiento? **R.** 9 meses.

8. ¿Cuánto faltaba para el vencimiento de una letra de 1000 dólares que negociada al 5 1/2% se redujo a 945?
R. 1 año.

9. ¿Cuántos días antes del vencimiento se negoció una letra de 4000 dólares que al 1 4/5 % se redujo a 3982?
R. 90 días.

10. ¿Cuántos meses antes del vencimiento se negoció un pagaré de 3100 dólares al 1/6 % mensual si su valor ha sido de 3007 dólares? **R.** 18 meses.

11. Un pagaré de $600 que vencía el 20 de julio se negoció al 5% y se redujo a $596.25. ¿En qué fecha se negoció? **R.** 5 de junio.

DESCUENTO RACIONAL

El **descuento racional o legal** es el interés del valor **verdadero** actual de la letra (el valor **verdadero** que tiene la letra o pagaré el día que se negocia), al tipo de descuento durante el tiempo que falta para el vencimiento.

El valor **verdadero** actual de un documento es la cantidad que sumada con los intereses que producirá durante el tiempo que falta para el vencimiento da el valor nominal y se encuentra **restando del valor nominal el descuento racional**.

El descuento **racional** o **legal** es el interés del valor efectivo, $e = n - d$, durante el tiempo, t, que falta para el vencimiento al tipo de descuento, r ; luego, formaremos la misma proporción del interés poniendo en lugar de c el valor efectivo $n - d$.

$100 pierden r al año
$$(n - d)t$ perderán d

Al formar la proporción, tendremos:

$$\frac{100}{(n-d)t} = \frac{r}{d}$$

Como el producto de los extremos es igual al de los medios, tendremos:

$$100\,d = (n - d)\,t\,r$$

Al efectuar la multiplicación indicada en el segundo miembro:

$$100d = n\,t\,r - d\,t\,r$$

Pasando $d\,t\,r$ como sumando al primer miembro:

$$100d + d\,t\,r = n\,t\,r$$

Sacando el factor común d : $d\,(100 + tr) = n\,t\,r$ (2)

Despejando d, tendremos:

$$d = \frac{n\,t\,r}{100 + t\,r}$$

Para deducir la fórmula de n partimos de la igualdad (2) establecida anteriormente:

$$d\,(100 + tr) = n\,t\,r$$

Despejando n en esta igualdad, queda:

$$n = \frac{d(100 + t\,r)}{t\,r}$$

Para deducir las fórmulas de t y r partimos de la igualdad establecida anteriormente:

$$100d = n\,t\,r - d\,t\,r$$

Sacando el factor común $t\,r$, tendremos: $100d = t\,r\,(n - d)$.

En esta fórmula, despejando t y r, obtendremos:

$$t = \frac{100d}{r(n-d)} \qquad r = \frac{100d}{t(n-d)}$$

Estas fórmulas se deducen suponiendo que el tiempo se da en años, pero si se da en meses, se sustituye 100 por 1200, y en días por 36000.

CÁLCULO DEL DESCUENTO RACIONAL

Hallar el descuento racional y el valor actual de una letra de $448, descontada al 3% anual, a 4 años.

Aplicamos la fórmula de *d • r* con 100, porque el tiempo está en años:

$$\text{d. r.} = \frac{ntr}{100 + tr} = \frac{448 \times 4 \times 3}{100 + (4 \times 3)} = \frac{448 \times 4 \times 3}{112} = \$48$$

El verdadero **valor actual** será:

$448 - $48 = $400

El interés de este valor actual durante el tiempo que falta para el vencimiento da el descuento racional:

$$I = \frac{ctr}{100} = \frac{400 \times 4 \times 3}{100} = \$48$$

Sumando el valor actual ($400) con su interés ($48) se da el valor nominal:

$400 + $48 = $448

Hallar el descuento racional y el valor actual racional de una letra de 4008 dólares que vence el 10 de mayo y se descuenta al 2% el 4 de abril.

El plazo del descuento es del 4 de abril al 10 de mayo = 36 días. Se aplica la fórmula de *d • r* con 36000, porque el tiempo está en días:

$$d.r. = \frac{ntr}{36000 + tr} = \frac{4008 \times 36 \times 2}{36000 + (36 \times 2)} = \frac{4008 \times 36 \times 2}{36072} = 8$$

El verdadero **valor actual** será:

4008 - 8 = 4000 dólares

El interés de este verdadero valor actual durante el tiempo que falta para el vencimiento es el descuento racional:

$$I = \frac{ctr}{36000} = \frac{4000 \times 36 \times 2}{36000} = 8 \text{ dólares}$$

Este interés, sumado con el valor actual, da el valor nominal:

4000 + 8 = 4008 dólares

EJERCICIOS

Busca el descuento racional y el valor actual de los siguientes documentos:

VALOR NOMINAL	PLAZO DEL DESCUENTO	TIPO	
1. $9058	58 días	4%	**R.** $58; $9000
2. $8012	1 mes 6 días	$\frac{1}{8}$%	**R.** $12; $8000
3. $580	5 años	$3\frac{1}{5}$%	**R.** $80; $500
4. $1254	2 años 3 meses	2%	**R.** $54; $1200
5. $355	6 años	7%	**R.** $105; $250

TIEMPO Y PORCENTAJE EN EL DESCUENTO RACIONAL

Hallar el valor nominal de una letra que, descontada racionalmente al $3\frac{3}{4}$% , 8 meses antes del vencimiento, se ha disminuido en $15.

Aplicamos la fórmula de *n* con 1200, por ser el tiempo en meses:

$$n = \frac{d(1200 + tr)}{tr} = \frac{15(1200 + 3.75 \times 8)}{3.75 \times 8} = \frac{15 \times 1230}{30} = \$615$$

¿A qué porcentaje anual se ha negociado una letra de $500 que se disminuyó en $20 siendo el descuento legal y faltando 3 meses y 10 días para el vencimiento?

Aplicamos la fórmula de *r* con 36000 porque el tiempo lo reducimos a días, y tendremos:

$$r = \frac{36000d}{t(n-d)} = \frac{36000 \times 20}{100(500-20)} = \frac{36000 \times 20}{100 \times 480} = 15\%$$

Por una letra de $600 se han recibido $540 con un descuento racional del 5%. ¿Cuánto tiempo faltaba para el vencimiento?

Se aplica la fórmula de *t*. No nos da el descuento, pero es muy fácil hallarlo, pues si el valor nominal de la letra era de $600 y se han recibido por ella $540 (valor efectivo), el descuento será al **diferencia**, o sea $600 - $540 = $60, y tendremos:

$$t = \frac{100d}{r(n-d)} = \frac{100 \times 60}{5 \times (600-60)} = \frac{100 \times 60}{5 \times 540} = 2\frac{2}{9} \text{ años}$$

= 2 años 2 meses 20 días

DESCUENTO COMERCIAL Y DESCUENTO RACIONAL

Al comparar las fórmulas del descuento comercial y el racional tenemos:

$$d.c. = \frac{ntr}{100} \qquad d.r. = \frac{ntr}{100 + tr}$$

Aquí se trata de dos quebrados que tienen el **mismo numerador**, y como en este caso es **mayor** el que tiene **menor denominador**, resulta que el descuento comercial, con menor denominador que el racional, será **mayor** que el racional.

El **descuento comercial** se llama **abusivo** porque el banquero cobra el % de interés sobre una cantidad mayor de la que desembolsa.

Cuando un banquero descuenta comercialmente una letra de \$6000 al 6% por 30 días, el descuento es el interés de \$6000 al 6% en 30 días, o sea:

$$\frac{6000 \times 6 \times 30}{36000} = \$30$$

y paga \$6000 - \$30 = \$5970; luego, cobra el interés del 6% sobre una cantidad **mayor** de la que desembolsa. Lo justo es cobrar el interés al 6% por 30 días del dinero que desembolsa, es decir, de \$5970, que sería:

$$\frac{5970 \times 6 \times 30}{36000} = \$29.85$$

En el descuento comercial, el banquero cobra el interés de lo que desembolsa más el interés de éste:

Interés de \$5970 al 6% por 30 días   \$29.85

Interés de este interés,

\$29.85, al 6% por 30 días $\frac{29.85 \times 6 \times 30}{36000} = \frac{\$\ 0.15}{\$\ 30.00}$

La suma es \$30, el descuento comercial.

No obstante, el descuento comercial se emplea generalmente en todas las operaciones del comercio, en primer lugar, porque su cálculo es rápido y sencillo (mientras que el racional es más laborioso) y en segundo lugar, porque como las operaciones de descuento suelen ser siempre a corto plazo (generalmente no pasan de 90 días), la **diferencia** entre el descuento comercial y el racional es insignificante.

Si se aplica el descuento comercial para negociar documentos a largo plazo, el resultado es **absurdo**. Si una letra de \$200 se descuenta al 10% por 10 años, el descuento comercial sería:

$$\frac{200 \times 10 \times 10}{100} = \$200 \text{ y el valor efectivo } \$200 - \$200 = 0$$

o sea que la letra no valdría nada el día que se descuenta, lo cual es absurdo.

La diferencia entre el descuento comercial y el racional es igual al **interés del descuento racional** durante el tiempo que falta para el vencimiento.

EJERCICIOS

En estos problemas el descuento es racional.

1. Se han rebajado 100 dólares de una letra que vencía el primero de julio y se negoció al 3% el primero de febrero del mismo año. ¿Cuál era el valor de la letra? (Tiempo: 5 meses). **R.** \$8100

2. Un pagaré que vencía el 22 de julio se cobra el 10 del mismo mes y año, negociándolo al 2% y se ha disminuido en 10 dólares. ¿Cuál era su valor nominal? **R.** 15010 dólares.

3. ¿Cuánto faltaba para el vencimiento de una letra de \$352 que ha disminuido en \$32 negociándola al 5%? **R.** 2 años.

4. Un pagaré de \$308 negociado al 4% se disminuye en \$8. ¿Cuánto faltaba para el vencimiento? **R.** 8 meses.

5. Una letra de 4531 dólares reduce a 4500 negociándola al 8%. ¿Cuánto faltaba para el vencimiento? **R.** 31 días.

6. A un pagaré de 195 dólares se rebajan 45 negociándolo a 5 años. ¿Cuál fue el tipo del descuento? **R.** 6%.

7. Una letra que vencía el primero de junio se negocia el primero de marzo. Si la letra era por \$1632 y se cobran \$160, ¿cuál fue el % de descuento? (Tiempo: 3 meses). **R.** 8%.

8. Un pagaré de 2258 dólares que vencía el 17 de septiembre se negoció el día primero del mismo mes y año y se cobraron 2250. ¿A qué % se hizo el descuento? **R.** 8%.

9. Hallar la diferencia entre el descuento abusivo y el legal de un pagaré de 800 dólares que vencía el primero de octubre y se ha negociado al 6% el primero de abril. (Tiempo: 6 meses). **R.** \$0.70.

10. Hallar el valor nominal de una letra negociada al 9%, 40 días antes del vencimiento, sabiendo que la diferencia entre el descuento comercial y el racional es 1 dólar. **R.** \$10100.

11. Hallar el valor nominal de un pagaré negociado al 8% por 3 meses, sabiendo que la diferencia entre el descuento comercial y el racional es de 4 dólares. **R.** \$10200.



En América alcanzaron un considerable desarrollo las ciencias matemáticas en civilizaciones como la maya, la inca, etc., esto puede verse en sus sistemas de numeración y en la aplicación de una regla fundamental para el repartimiento proporcional.

CAPÍTULO XLIX

REPARTOS PROPORCIONALES

Repartir proporcionalmente un número o una cantidad dada consiste en dividir dicho número o cantidad en partes proporcionales a otros varios números. Los repartos proporcionales pueden ser directos, inversos y compuestos.

Para repartir un número dado en partes directamente proporcionales a varios números se determina cada una de las partes multiplicando el número que se quiere repartir por cada uno de los números y dividiendo por la suma de todos ellos.

Para repartir un número dado en partes inversamente proporcionales a varios números se calcula cada una de las partes repartiéndolo en partes directamente proporcionales a los inversos de dichos números.

DEDUCCIÓN DE FÓRMULAS

Siendo el número *N* que queremos dividir en partes proporcionales para *a, b* y *c*, llamemos *x* a la parte de *N* que le corresponde a *a, y* a la que le corresponde a *b* y *z* a la que le corresponde a *c*. Como la suma de estas partes es igual al número dado, tendremos que $N = x + y + z$.

Es evidente que si $a > b > c$, $x > y > z$, con estas cantidades podemos formar una serie de razones iguales:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

y como un teorema dice que en una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente, tendremos:

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a} \text{ o sea } \frac{N}{a+b+c} = \frac{x}{a} \quad \therefore \quad x = \frac{Na}{a+b+c}$$

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{y}{b} \text{ o sea } \frac{N}{a+b+c} = \frac{y}{b} \quad \therefore \quad y = \frac{Nb}{a+b+c}$$

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{z}{c} \text{ o sea } \frac{N}{a+b+c} = \frac{z}{c} \quad \therefore \quad \frac{z}{a+b+c} = Nc$$

De lo anterior se deduce la siguiente regla:

Para repartir un número en partes proporcionales a otros varios se multiplica el número que se quiere repartir por cada uno de los otros números y se divide por la suma de éstos.

REPARTO PROPORCIONAL DIRECTO

1) Para repartir un número en partes directamente proporcionales a varios números enteros se multiplica el número que se quiere repartir por cada uno de los otros y se divide por su suma.

Repartir 150 en partes directamente proporcionales a 5, 6 y 9.

$$x = \frac{150 \times 5}{5+6+9} = \frac{150 \times 5}{20} = 37.5$$

$$y = \frac{150 \times 6}{5+6+9} = \frac{150 \times 6}{20} = 45$$

$$z = \frac{150 \times 9}{5+6+9} = \frac{150 \times 9}{20} = \frac{67.5}{150.0} \text{ prueba.}$$

Si la operación está bien hecha, la suma de los resultados debe dar el número que se reparte, como sucede en el caso anterior.

2) Para repartir un número en partes directamente proporcionales a varios quebrados se reducen los quebrados a un común denominador.

Se prescinde del denominador y se divide el número dado en partes proporcionales a los numeradores.

Repartir 154 en partes directamente proporcionales a

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \text{ y } \frac{1}{6}.$$

Reduciendo estos quebrados al mínimo común denominador, tendremos:

$$\frac{40}{60}, \frac{15}{60}, \frac{12}{60}, \frac{10}{60}$$

Ahora, prescindimos del denominador común 60 y repartimos el número dado (154) en partes proporcionales a los numeradores 40, 15, 12 y 10.

$$x = \frac{154 \times 40}{40+15+12+10} = \frac{154 \times 40}{77} = 80$$

$$y = \frac{154 \times 15}{40+15+12+10} = \frac{154 \times 15}{77} = 30$$

$$z = \frac{154 \times 12}{40+15+12+10} = \frac{154 \times 12}{77} = 24$$

$$u = \frac{154 \times 10}{40+15+12+10} = \frac{154 \times 10}{77} = \frac{20}{154} \text{ prueba}$$

3) Para repartir un número en partes directamente proporcionales a otros de cualquier clase se reducen a quebrados y se opera como en el caso anterior.

Repartir 49 en partes proporcionales a $0.04,\ 2\frac{1}{5},\ \frac{1}{3}$ y 2.

Los reducimos a quebrados:

$$0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}; \quad 2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}; \ \frac{1}{3}; \ \frac{2}{1}$$

Reduciendo estos quebrados $\frac{1}{25}, \frac{11}{5}, \frac{1}{3}$ y $\frac{2}{1}$ a un común denominador, tendremos:

$$\frac{3}{75}, \frac{165}{75}, \frac{25}{75}, \frac{150}{75}$$

Ahora, prescindimos del denominador común 75 y repartimos 49 en partes directamente proporcionales a los numeradores 3, 165, 25 y 150.

$$x = \frac{49 \times 3}{3+165+25+150} = \frac{49 \times 3}{343} = \frac{3}{7}$$

$$y = \frac{49 \times 165}{3+165+25+150} = \frac{49 \times 165}{343} = \frac{4}{7}$$

$$z = \frac{49 \times 25}{3+165+25+150} = \frac{49 \times 25}{343} = 3\frac{4}{7}$$

$$u = \frac{49 \times 150}{3+165+25+150} = \frac{49 \times 150}{343} = 21\frac{3}{7} \quad 49 \text{ prueba}$$

EJERCICIOS

1. Repartir 357 en partes directamente proporcionales a 17, 20, 38 y 44. **R.** 51, 60, 114, 132.

2. Repartir 66 en partes directamente proporcionales a 2.2, 2.5, 3.1 y 3.2. **R.** 13.2, 15, 18.6, 19.2.

3. Repartir 580 en partes directamente proporcionales a 7, 10 y 12. **R.** 140, 200, 240.

4. Repartir 1080 en partes directamente proporcionales a 13, 19 y 22. **R.** 260, 380, 440.

5. Repartir 90 en partes directamente proporcionales a 2, 3 y 4. **R.** 20, 30, 40.

REPARTO PROPORCIONAL INVERSO

La regla para el **reparto proporcional inverso** consiste en invertir los números dados y repartir el número que se pretende dividir en partes directamente proporcionales a estos inversos.

1) Repartir un número en partes inversamente proporcionales a otros varios enteros.

Repartir 240 en partes inversamente proporcionales a 5, 6 y 8.

Se invierten estos enteros y queda: $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ y $\frac{1}{8}$.

Sólo hay que repartir 240 en partes *directamente proporcionales* a estos quebrados, para lo cual los reduciremos al mínimo común denominador y nos darán:

$$\frac{24}{120}, \frac{20}{120}, \frac{15}{120}$$

Prescindimos del denominador común 120, y repartimos 240 en partes proporcionales a los numeradores 24, 20 y 15:

$$x = \frac{240\times24}{24+20+15} = \frac{240\times24}{59} = 97\frac{37}{59}$$

$$y = \frac{240\times20}{24+20+15} = \frac{240\times20}{59} = 81\frac{21}{59}$$

$$z = \frac{240\times15}{24+20+15} = \frac{240\times15}{59} = 61\frac{1}{59} \text{ prueba}$$

240

2) Repartir un número en partes inversamente proporcionales a otros quebrados diversos.

Repartir 15 en partes inversamente proporcionales a

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{5} \text{ y } \frac{6}{7}$$

Invertimos estos quebrados y tenemos:

$$\frac{4}{3}, \frac{5}{2} \text{ y } \frac{7}{6}$$

Reduciéndolos a común denominador queda:

$$\frac{8}{6}, \frac{15}{6}, \frac{7}{6}$$

Prescindiendo del denominador común 6, repartimos 15 en partes directamente proporcionales a los numeradores 8, 15 y 7:

$$x = \frac{15\times8}{8+15+7} = \frac{15\times8}{30} = 4$$

$$y = \frac{15\times15}{8+15+7} = \frac{15\times15}{30} = 7\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{15\times7}{8+15+7} = \frac{15\times7}{30} = 3\frac{1}{2} \quad 15 \text{ prueba}$$

3) Repartir un número en partes inversamente proporcionales a otros de cualquier clase.

Repartir 192.50 en partes inversamente proporcionales a $0.25, 3\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ y 0.4.

Reducimos a quebrados y tendremos:

$$\frac{1}{4}, \frac{13}{4}, \frac{1}{8}, \frac{2}{5}$$

Al invertir estos quebrados tenemos:

$$\frac{4}{1} \quad \frac{4}{13} \quad \frac{8}{1} \quad \frac{5}{2}$$

Reduciéndolos a un común denominador, queda:

$$\frac{104}{26}, \frac{8}{26}, \frac{208}{26}, \frac{65}{26}$$

Repartiendo 192.50 en partes directamente proporcionales a los numeradores 104, 8, 208 y 65 tenemos:

$$x = \frac{192.50\times104}{104+8+208+65} = \frac{192.50\times104}{385} = 52$$

$$y = \frac{192.50\times8}{104+8+208+65} = \frac{192.50\times8}{385} = 4$$

$$z = \frac{192.50\times208}{104+8+208+65} = \frac{192.50\times208}{385} = 104$$

$$u = \frac{192.50\times65}{104+8+208+65} = \frac{192.50\times65}{385} = \frac{32.50}{192.50} \text{ prueba}$$

EJERCICIOS

1. Repartir 141 en partes inversamente proporcionales a 7, 21, 84, 10 y 30. **R.** 60, 20, 5, 42, 14.

2. Repartir 33 en partes inversamente proporcionales a 1, 2 y 3. **R.** 18, 9, 6.

3. Repartir 123 en partes inversamente proporcionales a 3, 8 y 9. **R.** 72, 27, 24.

4. Repartir 7 1/2 en partes inversamente proporcionales a 10, 12 y 15. **R.** 3, 21/2, 2.

5. Dividir 3368 en partes inversamente proporcionales a 3/4, 5/6, 2/7 y 1/8. **R.** 320, 288, 840, 1920.

6. Repartir 1095 en partes inversamente proporcionales a 0.08, 1 1/7 y 1/14. **R.** 500, 35, 560.

7. Repartir 8018 en partes inversamente proporcionales a 2 1/5, 0.25, y 1.6. **R.** 560, 4928, 1760, 770.

8. Repartir 8313 en partes inversamente proporcionales a 0.2, 0.3, 0.4, 2 1/2 y 3 1/5. **R.** 3600, 2400, 1800, 288, 225.

9. Dividir 117 en partes inversamente proporcionales a 5, 6 y 8. **R.** 72, 60, 45.

10. Dividir 1001 en partes inversamente proporcionales a 0.8, 0.15 y 0.25. **R.** 105, 560, 336.

11. Dividir 26 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 4. **R.** 12, 8, 6.

12. Dividir 130 en partes inversamente proporcionales a 0.2, 0.3 y 0.4. **R.** 60, 40, 30.

13. Dividir 28.50 en partes inversamente proporcionales a 7, 49 y 343. **R.** 24 1/2, 3 1/2, 1/2.

14. Dividir 485 en partes inversamente proporcionales a 9, 12, 30, 36 y 72. **R.** 200, 150, 60, 50, 25.

15. Dividir 14 en partes inversamente proporcionales a 3.15, 6.30 y 12.60. **R.** 8, 4, 2.

16. Dividir 77.50 en partes inversamente proporcionales a 1/3, 1/6, 3/5 y 4/9. **R.** 18, 36, 10, 13 1/2.

17. Dividir 2034 en partes inversamente proporcionales a 3/4, 5/6, 6/7 y 7/8. **R.** 560, 504, 490, 480.

18. Repartir 141 en partes inversamente proporcionales a 7, 21, 84, 10 y 30. **R.** 60, 20, 5, 42, 14.

PROBLEMAS SOBRE REPARTO PROPORCIONAL

Repartir $42 entre *A*, *B* y *C* de modo que la parte de *A* sea el doble que la de *B*, y la de *C* sea la suma de las partes de *A* y *B*.

Cuando *A* tenga $2, *B* tendrá $1 y *C* $3. Dividimos $42 en partes proporcionales a 2, 1 y 3:

$$x = \frac{42\times 2}{6} = \$14 \quad y = \frac{42 \times 1}{6} = \$7 \quad z = \frac{42 \times 3}{6} = \$21$$

A, $14; *B*, $7; *C*, $21

Dividir 175 en dos partes que sean entre sí como $\frac{3}{4}$ es a $\frac{2}{9}$

La relación entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{9}$ es $\frac{3/4}{2/9} = \frac{27}{8}$; la relación entre las dos partes en que se va a dividir el número debe ser $\frac{27}{8}$.

Dividimos 175 en partes proporcionales a 27 y 8:

$$\text{1a. parte} = \frac{175 \times 27}{35} = 135$$

$$\text{2a. parte} = \frac{175 \times 8}{35} = 40$$

Dividir $95 entre *A*, *B* y *C* de modo que la parte de *A* sea a la de *B* como 4 es a 3 y la parte de *B* sea a la de *C* como 6 es a 5.

Cuando *A* tiene $4, *B* tiene $3. Lo que tiene *C* cuando *B* tiene $3 se llama *x*, y como la relación entre la parte de *B* y *C* es de 6 a 5 se busca *x* formando la proporción:

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{5} \therefore x = \frac{3 \times 5}{6} = 2\ \frac{1}{2}$$

Entonces, cuando *A* tiene $4, *B* $3 y C $2 $\frac{1}{2}$, se divide $95 en partes proporcionales a 4, 3 y 2 $\frac{1}{2}$.

Al reducir a común denominador se tiene 8 , 6 y 5 . Se divide 95 en partes proporcionales a 8, 6 y 5:

$$x = \frac{95\times 8}{19} = \$40 \quad y = \frac{95\times 6}{19} = \$30 \quad z = \frac{95\times 5}{19} = \$25$$

La parte de *A* es $40, la de *B*, $30 y la de *C* $25.

REPARTO COMPUESTO

En el **reparto compuesto** que hay que repartir una cantidad en partes proporcionales a los productos de varios números.

Repartir 170 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a 4, 5, 6 y a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$.

Se multiplica 4 por $\frac{1}{2}$, 5 por $\frac{1}{4}$ y 6 por $\frac{1}{6}$ y tendremos:

$$4\times\frac{1}{2}=2;\quad 5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4};\quad 6\times\frac{1}{6}=1$$

En seguida se reparte 170 en partes proporcionales a estos productos 2, $\frac{5}{4}$ y 1, para lo cual se reducen a un común de nominador y queda:

$$\frac{8}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{4}$$

Al repartir 170 en partes proporcionales a los numeradores 8, 5 y 4 tendremos:

$$x=\frac{170\times8}{8+5+4}=\frac{170\times8}{17}=80$$

$$y=\frac{170\times5}{8+5+4}=\frac{170\times5}{17}=50$$

$$z=\frac{170\times4}{8+5+4}=\frac{170\times4}{17}=\frac{40}{170}\quad \text{prueba}$$

Repartir 50 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{7}$ e inversamente proporcionales a

$$\frac{1}{6},\ \frac{3}{10}\ \text{y}\ \frac{5}{14}.$$

Se multiplican los números con relación a los cuales el reparto es directo por los **inversos** de los números con relación a los cuales el reparto es inverso. En este caso se multiplica $\frac{2}{3}$ por el inverso de $\frac{1}{6}$, o sea por 6; $\frac{4}{5}$ por el inverso de $\frac{3}{10}$, o sea por $\frac{10}{3}$, y $\frac{2}{7}$ por el inverso de $\frac{5}{14}$, o sea por $\frac{14}{5}$, y tendremos:

$$\frac{2}{3}\times\frac{6}{1}=4;\ \frac{4}{5}\times\frac{10}{3}=\frac{8}{3};\ \frac{2}{7}\times\frac{14}{5}=\frac{4}{5}$$

En seguida se reparte 50 en partes proporcionales a estos productos 4, $\frac{8}{3}$ y $\frac{4}{5}$, para lo cual se reducen a un común denominador:

$$\frac{60}{15}\ \frac{40}{15}\ \frac{12}{15}$$

Se reparte 50 en partes proporcionales a los numeradores:

$$x=\frac{50\times60}{60+40+12}=\frac{50\times60}{112}=26\ \frac{11}{14}$$

$$y=\frac{50\times40}{60+40+12}=\frac{50\times40}{112}=17\ \frac{6}{7}$$

$$z=\frac{50\times12}{60+40+12}=\frac{50\times12}{112}=\frac{5\ \frac{5}{14}}{50}\ \text{prueba}$$

EJERCICIOS

1. Repartir 411 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a 4, 5 y 6 y a 8, 9 y 10. **R.** 96, 135, 180.

2. Repartir 396 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a 5/6, 7/8 y 8/9 y a 6/7, 8/11 y 9/22. **R.** 165, 147, 84.

3. Repartir 32 en dos partes que sean a la vez directamente proporcionales a 2 y 4 e inversamente proporcionales a 5 y 6. **R.** 12, 20.

4. Repartir 100 en tres partes que sean a la vez directamente proporcionales a 5, 6 y 7 e inversamente proporcionales a 2, 3 y 4.
R. 40, 32, 28.

5. Repartir 69 en dos partes que sean a la vez directamente proporcionales a 2/3 y 3/4 e inversamente proporcionales a 5/6 y 1/2. **R.** 24, 25.

6. Dos hombres alquilan un estacionamiento por 320 dólares. El primero guarda 4 automóviles durante 6 meses y el segundo 5 automóviles por 8 meses. ¿Cuánto debe pagar cada uno?
R. 1º, 120; 2º, 200 dólares.

7. Tres cuadrillas de obreros realizaron un trabajo por el que se pagaron $516. La primera cuadrilla constaba de 10 hombres y trabajó 12 días; la segunda, de 6 hombres, trabajó 8 días y la tercera de 5 hombres, trabajó 18 días. ¿Cuánto debe recibir cada cuadrilla?
R. 1ª, $240; 2ª, $96; 3ª, $180.

8. En una obra se emplean tres cuadrillas de obreros. La primera constaba de 10 hombres y trabajó 6 días a razón de 8 horas diarias de trabajo; la segunda, de 9 hombres, trabajó durante 5 días por 6 horas y la tercera, de 7 hombres, trabajó 3 días por 5 horas. ¿Cuánto debe recibir cada cuadrilla si la obra se ajustó en $427.50? **R.** 1ª, $240; 2ª, $135; 3ª, $52.50.



A partir del siglo IX, en las ciudades italianas de Venecia, Génova y Pisa se constituyeron las primeras compañías por los gremios o hansas que formaban los armadores de barcos (sociedades en comandita). Leornardo de Pisa desarrolló una regla para resolver los problemas de reparticiones de las ganancias o pérdidas.

CAPÍTULO L

LAS COMPAÑÍAS

Una **sociedad mercantil** o **compañía mercantil** se constituye por la reunión de dos o más personas que aportan en común dinero, bienes o su trabajo para ejercer la industria o el comercio, es decir, con fines de **lucro**, pues su objetivo es obtener una ganancia.

Por otro lado, las sociedades sin fines de lucro se conocen como sociedades civiles.

El Código de Comercio regula todas las actividades de las sociedades mercantiles.

TIPOS DE SOCIEDADES MERCANTILES

1) **Sociedad regular colectiva,** en la que todos los socios se comprometen a participar de los mismos derechos y obligaciones. Además responden por las deudas de la compañía no sólo con el capital social, sino también con su capital particular.

2) **Sociedad anónima (S. A.),** donde los socios, al aportar su capital a la compañía, reciben acciones que les dan derecho a participar de las utilidades designan administradores para el manejo de la empresa.

   En una sociedad anónima los socios responden por las deudas sólo con el capital aportado y no con sus bienes particulares.

3) **Sociedades en comandita (S. en C.),** en la cual uno o varios socios, llamados **comanditarios,** aportan un capital determinado a un fondo común y están a expensas de las operaciones de la sociedad, la cual está dirigida por otros socios con nombre colectivo, por lo que son mixtas entre colectivas y anónimas, y cuentan con socios colectivos que responden por las deudas de la sociedad no sólo con su patrimonio social, sino también con sus bienes particulares, y socios comanditarios, que sólo responden por las deudas con el capital aportado.

PÉRDIDAS Y GANANCIAS

La finalidad de la sociedad mercantil es obtener una ganancia y dividirla entre sus socios, mismos que pueden acordar el porcentaje en que cada uno participará de las ganancias y, desde luego, de las pérdidas.

Si se estipula que alguno de los socios no participará de las ganancias de la compañía, el contrato resultaría nulo.

Por otra parte, los **socios industriales** (que no aportan capital, sino sólo su trabajo) generalmente quedan libres de las pérdidas de la compañía.

Salvo acuerdo en contrario, las **ganancias** y **pérdidas** de una compañía se distribuyen en **partes proporcionales** al capital aportado y al tiempo que permanece cada socio en la compañía.

En una compañía existen reglas que se deben respetar; por ejemplo, en una **compañía simple** los capitales o los tiempos impuestos son **iguales** y en una **Compañía compuesta** los capitales y los tiempos son **distintos.** Esto no es otra cosa que un **reparto proporcional**.

En una **compañía simple** se pueden considerar que los **tiempos sean iguales.**

En este caso se prescinde del tiempo y se reparte la ganancia o la pérdida en partes proporcionales a los capitales invertidos.

Ejemplo

Tres empresarios forman una sociedad durante 2 años. El primero aporta 800 dólares, el segundo $750 y el tercero $600. ¿Cuánto corresponderá a cada uno si hay ganancia de $1200?

Como el tiempo es igual para todos los socios, se prescinde de él y se reparte la ganancia en partes proporcionales según los capitales:

$$x=\frac{1200\times800}{800+750+600}=\frac{1200\times800}{2150}=\$446\ \frac{22}{43}$$

$$y=\frac{1200\times750}{800+750+600}=\frac{1200\times750}{2150}=\$418\ \frac{26}{43}$$

$$z=\frac{1200\times600}{800+750+600}=\frac{1200\times600}{2150}=\$334\ \frac{38}{43}\quad \text{prueba}\quad \frac{}{1200}$$

El 1º Gana $\$446\ \frac{22}{43}$; el 2º, $\$418\ \frac{26}{43}$ y el 3º, $\$334\ \frac{38}{43}$.

En una compañía simple cuyos capitales son iguales, se prescinde de los capitales y se reparte la ganancia o la pérdida en partes proporcionales a los tiempos.

Alfonso Gutiérrez emprende un negocio con un capital de $2000. A los 4 meses se asocia con Ignacio Rodríguez, que aporta $2000, y tres meses más tarde ambos admiten como socio a Rogelio García, que aporta otros $2000. Un año después del día en que Gutiérrez emprendió el negocio, hay una utilidad de $1250. ¿Cuánto recibe cada socio?

Como todos aportaron el mismo capital, se prescinde de éste y se divide la ganancia de $1250 en partes proporcionales a los tiempos.

Gutiérrez lleva 12 meses en el negocio, Rodríguez 8 meses y García 5 meses, por lo que se divide $1250 proporcionalmente a 12, 8 y 5 meses:

$$x=\frac{1250\times12}{25}=\$600\qquad y=\frac{1250\times8}{25}=\$400$$

$$z=\frac{1250\times5}{25}=\$250$$

Gutiérrez gana $600, Rodríguez $400 y García $250.

EJERCICIOS

1. Dos socios emprenden un negocio que dura 4 años. El primero invierte un capital de $500 y el segundo de $350. ¿Cuánto corresponde a cada uno de una ganancia de $250?

R. Al 1º, $ 147 1/17 y al 2º, $ 102 16/17.

2. En un negocio que ha durado 5 años han intervenido 4 socios que invirtieron $2500 el primero, $3000 el segundo, $4500 el tercero y $6000 el cuarto. Si hay una pérdida de $1200, ¿cuánto perderá cada uno? **R.** El 1º, $187.50; el 2º, $225; el 3º, $337.50; el 4º, $450.

3. Cuatro socios ganaron en los 3 años que explotaron una industria, lo siguiente: El primero $5000; el segundo los 2/5 de lo que ganó el primero; el tercero los 3/4 de lo que ganó el segundo, y el cuarto los 5/3 de lo que ganó el tercero. Si el capital social era de $44000, ¿con cuánto contribuyó cada uno? **R.** 1º, $20000; 2º, $8000; 3º, $6000; 4º, $10000.

4. *A* emprende un negocio con $2000. Al cabo de 6 meses entra como socio *B* con $2000 y 11 meses más tarde entra como socio *C* con $2000. Si a los dos años de comenzar *A* su negocio hay un beneficio de $630, ¿cuánto recibe como ganancia cada socio?
R. *A*, $308 4/7; *B*, $231 3/7; *C*, $90.

COMPAÑÍA COMPUESTA

Por otra parte, en una **compañía compuesta,** como los capitales y los tiempos son distintos, se reparte la ganancia o la pérdida en partes proporcionales a los productos de los capitales por los tiempos, reduciendo éstos, si es necesario, a una misma medida.

Tres hombres se asocian para emprender una empresa. El primero aporta $2000 durante 3 años, el 2º $1800 durante 4 años y el 3º $3000 en 8 meses. ¿Cuánto le corresponde a cada uno si hay una utilidad de $2500?

En este caso se multiplican los capitales por sus tiempos respectivos:

$2000 × 36 meses = $72000 por 1 mes
$1800 × 49 meses =$86400 por 1 mes
$3000 × 8 meses = $24000 por 1 mes

En seguida se reparte la ganancia de $2500 en partes proporcionales a estos productos:

$$x = \frac{2500 \times 72000}{72000+86400+24000} = \frac{2500\times72000}{182400} = \$986\ \frac{16}{19}$$

$$y = \frac{2500\times86400}{72000+86400+24000} = \frac{2500\times86400}{182400} = \$1184\ \frac{4}{19}$$

$$z = \frac{2500 \times 24000}{72000+86400+24000} = \frac{2500 \times 24000}{182400} = \frac{\$328\ \frac{18}{19}}{\$2500 \text{ prueba}}$$

El 1º gana $986 $\frac{16}{19}$; el 2º $1184 $\frac{4}{19}$ y el 3º $328 $\frac{18}{19}$

EJERCICIOS

1. En una sociedad formada por tres empresarios, el primero invierte $500 por 2 años; el segundo $ 400 por 4 años y el tercero $300 por 5 años. ¿Cuánto corresponde a cada uno si hay una ganancia de $1230? **R.** 1º, $300; 2º, $480; 3º, $ 450.

2. En una industria, tres socios invierten: el primero 6000 dólares más que el segundo; el segundo 3000 más que el tercero y éste 8000 dólares. El primero fue socio durante un año, el segundo un año y medio y el tercero 2 1/3 años. ¿Cuánto le corresponde a cada uno si hubo una utilidad de 5885 dólares? **R.** 1º, 1870; 2º, 1815; 3º, $2200 .

3. 5 socios invierten: el primero $2000 por 2 años 4 meses; el segundo $2500 por 3/7 del tiempo anterior; el tercero $3000 por 5/6 del tiempo del segundo; el cuarto $4000 por un año y 8 meses y el quinto $500 menos que el cuarto por 3/4 de año. Si hubo $9100 de utilidad, ¿cuánto ganará cada uno?
R. 1º, $2240; 2º, $1200;
3º, $1200; 4º, $3200; 5º, $1260.

REGLA PARA LA ALTERACIÓN DE CAPITALES

A continuación presentamos un ejemplo de una compañía en la que se alteran los capitales:

Tres amigos se asocian en un negocio que dura 2 años. El primero aporta $2000 y al cabo de 8 meses $1500 más. El segundo pone al principio $5000 y después de un año retira la mitad. El tercero, que había invertido al principio $2500, a los 5 meses retira $1000 y dos meses después aporta $500. Si hay una pérdida de $500, ¿cuánto perderá cada uno?

Aquí se considera cada aportación y el tiempo que ha durado. Se multiplica cada inversión por su tiempo respectivo y se suman los productos correspondientes a cada socio.

Los $2000 que aportó el primero al principio estuvieron invertidos durante 8 meses. Después añade $1500, siendo su capital de $2000 + $1500 = $3500 que están invertidos, pero como ya habían pasado 8 meses, durante los 16 meses restantes hasta completar los dos años tendremos:

$2000 × 8 m = $16000 por 1 mes
$3500 × 16 m = $56000 por 1 mes
El 1º: $16000 + $56000 = $72000 por 1 mes

El segundo invirtió al principio $5000, pero sólo por 12 meses, porque un año después de comenzar sacó la mitad; si al final del primer año saca la mitad de su capital, que era $5000, le quedan $2500, que han estado invertidos durante el año siguiente, o sea 12 meses:

$5000 × 12 m = $60000 por 1 mes
$2500 × 12 m = $30000 por 1 mes
El 2º: $60000 + $30000 = $90000 por 1 mes

El tercero aporta al principio $2500 que están invertidos durante 5 meses, luego de los cuales saca $1000, por lo que le quedan $1500, invertidos por 2 meses, al cabo de los cuales agrega $500, que con los $1500 anteriores suman $2000 durante los 17 meses que faltan hasta completar dos años:

$2500 × 5 m = $12500 por 1 mes
$1500 × 2 m = $3000 por 1 mes
$2000 × 17 m = $34000 por un mes
El 3º: $12500 + $3000 + $34000 = $49500 por 1 mes

Luego se reparte la pérdida de $500 en partes proporcionales a las sumas que corresponden a cada uno, o sea 72000, 90000 y 49500:

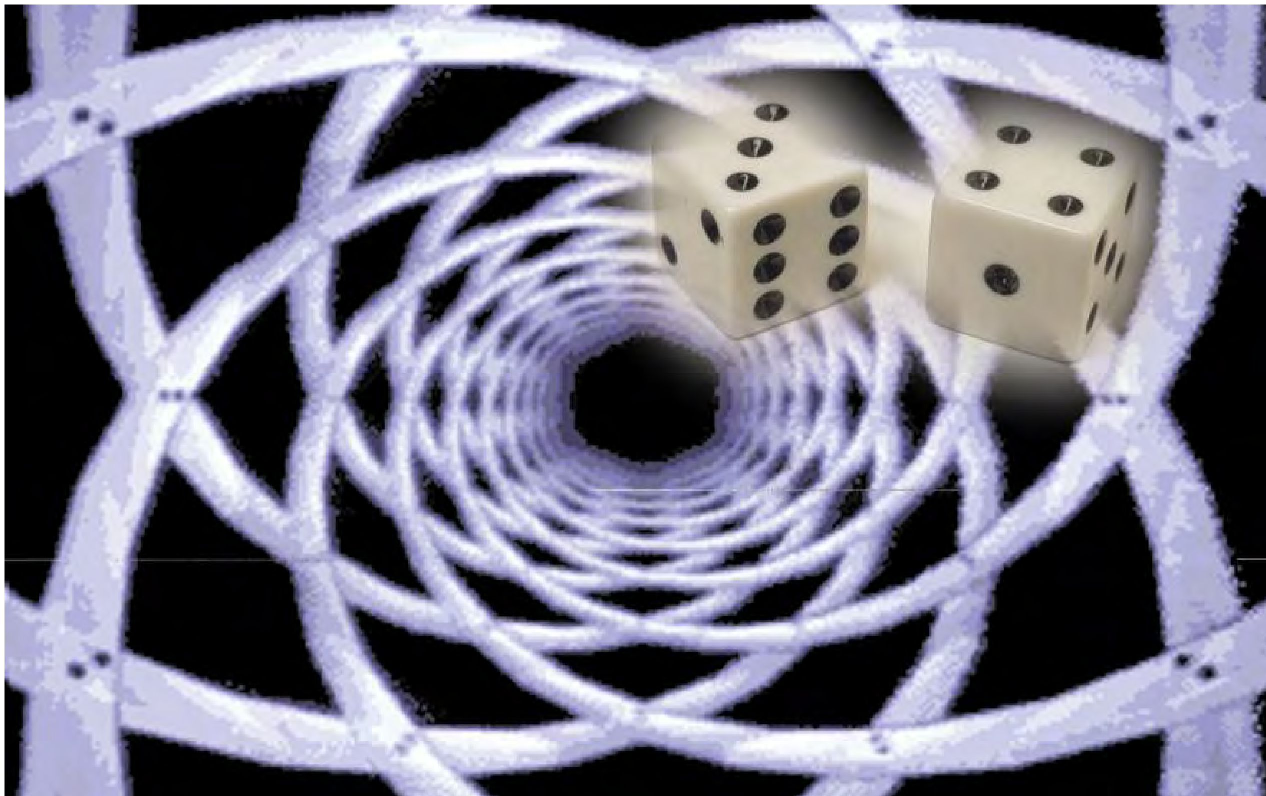
$$x=\frac{500\times72000}{72000+90000+49500}=\frac{500\times72000}{211500}=\$170\frac{10}{47}$$

$$y=\frac{500\times90000}{72000+90000+49500}=\frac{500\times72000}{211500}=\$212\frac{36}{47}$$

$$z=\frac{500\times49500}{72000+90000+49500}=\frac{500\times49500}{211500}=\frac{\$117\ \frac{1}{47}}{\$500}$$

prueba

El 1º pierde $170 $\frac{10}{47}$; el 2º, $212 $\frac{36}{47}$ y el 3º $117 $\frac{1}{47}$



Se considera que el origen de la Estadística se debe al juego de azar. Se dice que estando Pascal en una taberna, Antonio Gombaud le propuso un problema basado en el juego de dados. Pascal le dio solución, fundando así la Teoría de las Probabilidades.

CAPÍTULO LI

PROMEDIOS

Los promedios son valores que tienden a situarse en el centro de un conjunto de datos ordenados según su magnitud.

La medida de centralización más empleada habitualmente es la media aritmética o simplemente media. Otras medidas de centralización son la mediana, la moda, la media geométrica, la media armónica y la media cuadrática.

El uso de una u otra medida de centralización viene condicionado por el tipo de resultados que interese extraer a partir de los datos.

Un ejemplo de esto sería la puntualidad y el cumplimiento de los horarios previstos de una compañía ferroviaria, la cual calcula éstos determinando la media aritmética de los retrasos de los trenes que han circulado durante un determinado periodo de tiempo.

REGLA DEL TÉRMINO MEDIO

Mediante la **Regla de Término Medio** se encuentra un número o término medio entre varias cantidades de la misma especie, para lo cual deben sumarse y el resultado se divide por el número de cantidades.

Si un trabajador gasta el lunes $4.95, el martes $5, el miércoles $3.85 y el jueves $8, ¿cuánto gasta en promedio por día?

Primero debe sumarse lo que se gastó en los cuatro días:

$4.95 + $5 + $3.85 + $8 = $21.80

El resultado se divide entre los cuatro días:

$21.80 ÷ 4 = $5.45

Con lo que el gasto promedio por día es de $5.45.

En una finca de 15 caballerías, 7 caballerías producen 80000 @ de caña c/u; 4 producen 100000 @ c/u y las restantes 120000 @ c/u. ¿Cuál es la producción media por caballería?

7 caballerías	× 80000 @ =	560000 @
4 caballerías	× 100000 @ =	400000 @
4 caballerías	× 120000 @ =	480000 @
15 caballerías		1440000 @ producción total

1440000 @ ÷ 15 caballerías = 96000 @ por caballería. La producción media por caballería es de 96000 @.

Un comerciante compra 500 sombreros a 3 dólares cada uno. Si vende 300 a 3.50 dólares cada uno; 80 a $2.25 dólares y el resto a 2.15 dólares, ¿ganó o perdió y cuál es el promedio de ganancia o pérdida por cada sombrero?

Al vender 300 sombreros a $3.50 dólares gana $0.50 dólares en cada sombrero, por lo que de 300 sombreros gana 300 × $0.50 dólares = 150 dólares.

Con 80 sombreros a $2.25 pierde en cada uno $0.75, por lo que de 80 sombreros perderá 80 × $0.75 = $60.

Al vender los restantes 120 sombreros a $2.15 pierde en cada uno $0.85, por lo que con 120 sombreros perderá 120 × $0.85 = $102.

De este modo, la ganancia obtenida en la primera venta es $150 y la pérdida de la segunda y tercera ventas es de $60 + $120 = $162, por lo tanto tiene una pérdida total de:

$162 - $150 = $12

Con esta pérdida total de $12, luego de vender 500 sombreros, el promedio de pérdida por sombrero es $12 ÷ 500 = 0.024 dólares.

EJERCICIOS

1. El primer día de trabajo un empleado gana 7 dólares; el segundo día, 4.40 dólares; el tercero 9 dólares y el cuarto 10 dólares. ¿Cuál es su ganancia promedio diaria?
R. 7.60 dólares.

2. Un hombre camina durante 5 días: el primer día 12 kilómetros, el segundo, 14; el tercero, 16; el cuarto, 20 y el quinto 23. ¿Cuál es la distancia promedio que recorre por día?
R. 17 kilómetros.



Figura 128

3. Al hacer cuatro obras se paga: por la primera 240 dólares; por la segunda, 350 dólares; por la tercera, 500 dólares y por la cuarta, 235 dólares. ¿Cuál es el precio promedio por obra?
R. 331.25.

4. Durante el primer año de estudios un alumno recibió 2 medallas como premio; el segundo, 3; el tercero, 5; el cuarto 7 y el quinto 8. ¿Cuántas medallas ganó en promedio por año?
R. 5 medallas.

5. Un famoso corredor de autos alcanzó la velocidad de 220 1/8 millas por hora corriendo contra el viento y 223.301 millas por hora en sentido contrario. ¿Cuál fue su velocidad media por hora?
R. 221.713 millas.

CAPÍTULO LII



En la antigüedad y gracias a la comercialización de vino con los fenicios, los romanos y los griegos utilizaban la Regla de Aligación. En 1556 en "Aritmética Comercial", Tartaglia expone diversas reglas entre las que se encontraba la Regla de Mezcla o Aligación.

ALIGACIÓN O MEZCLA

El objeto de la **Regla de Aligación** es resolver problemas de mezclas, y en una mezcla de varias sustancias se pueden presentar problemas directos e inversos.

El **problema directo** consiste, una vez conocidas las cantidades de las sustancias mezcladas y sus precios respectivos, en hallar el precio de cada unidad de la mezcla, lo que se conoce como **precio medio** o **término medio**.

El **problema inverso** consiste, conocidos el precio medio y los precios de los ingredientes, en hallar la cantidad que debe participar en la mezcla de cada ingrediente.

ALIGACIÓN DIRECTA: DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA

En una mezcla en la que entran *a* Kg de precio $*p* (cada kg), *b* kg de precio $*p* ' y *c* Kg de precio $ *p* ''.

Tendremos:

a kg de precio $ *p* cuestan $ *ap*.

b kg de precio $ *p* ' cuestan $ *bp* '.

c kg de precio $ *p* '' cuestan $ *cp* ''.

El importe total de la mezcla es $(*ap* + *bp* ' + *cp* '') y el número de kg de la mezcla es *a* + *b* + *c*, luego el precio medio *m* al que hay que vender cada kg de la mezcla para no ganar ni perder es:

$$m = \frac{ap + bp' + cp''}{a + b + c}$$

y ésta es la fórmula de la aligación directa.

Este cociente, que nos da el precio al que debe venderse cada unidad de la mezcla para no ganar ni perder, es lo que se llama **precio medio**.

PROBLEMAS DE ALIGACIÓN DIRECTA

Los **problemas de aligación directa** son simplemente problemas de promedios.

En un tonel de 100 litros de capacidad se depositan 40 litros de vino de $0.60, 50 litros de $0.80 y se termina de llenar con agua. ¿Cuánto cuesta el litro de la mezcla y a cómo hay que venderlo para ganar el 25% del costo?

40	litros de $0.60 cuestan 40 ×	$0.60 = $24
50	litros de $0.80 cuestan 50 ×	$0.80 = 40
10	litros de agua no cuesta nada	
100	litros	$64
(cantidad total)		(precio total)

El litro de la mezcla costará $64 ÷ 100 litros = $0.64.

Al vender cada litro de la mezcla a $0.64 **no se gana ni se pierde**; $0.64 es simplemente el costo de cada litro. Si queremos ganar el 25% del costo, sólo hay que hallar el 25% de $0.64 y sumárselo.

El 25% de $0.64 ÷ 4 = $0.16; luego; para ganar el 25% del costo habrá que vender el litro de la mezcla a:

$0.64 + $0.16 = $0.80

EJERCICIOS

1. Al mezclar un litro de vino de 69 cts. con otro de 80 cts. y otro más de 45 cts., ¿a cómo sale el litro de la mezcla? **R.** $64\frac{2}{3}$ cts.

2. Si se tienen 14 litros de vino a 80 cts. el litro y se añaden 6 litros de agua, ¿a cómo sale el litro de la mezcla?
R. 56 cts.

3. Se mezclan 8 litros de vino de 90 cts. con 14 litros de 70 cts. Si a esta mezcla se añaden 5 litros de agua, ¿a cómo sale el litro de la mezcla?
R. $62\frac{26}{27}$ cts.

4. Combinando 8 libras de café de 60 cts. la libra, con 1 qq. a 50 cts. la libra, con 3 @ a 40 cts. libra y 40 libras 30 cts. ¿en cuánto habrá que vender la libra de la mezcla para no ganar ni perder?
R. $43\frac{91}{223}$ cts.

5. ¿De cuántos grados resultará el litro de una mezcla de 500 litros de alcohol de 30 grados, con 200 litros de 40 grados y 300 litros de 8 grados?
R. $25\frac{2}{5}$ º.

6. En un tonel de 500 litros se depositan 100 litros de vino de 40 cts., 80 litros de vino de 50 cts., 120 litros de vino de 60 cts. y se acaba de llenar con agua. ¿A cómo saldrá el litro de la mezcla? **R.** 30.4 cts.

7. Si se combinan 12 litros de vino de 80 cts. con 10 litros de 72 cts. y 8 litros de 60 cts., ¿a cómo habrá que vender el litro de la mezcla para ganar el 6% del costo?
R. 76.32 cts.

8. ¿Cuánto cuesta el litro de una mezcla de 10 litros de vino de $0.84 con 8 litros de $0.90 y con 12 litros de $1.20?
R. 10 litros, $8.40; 8 litros, $7.20; 12 litros, $14.40

ALIGACIÓN INVERSA: DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA

Las diferencias entre los precios extremos y el precio medio son inversamente proporcionales a las cantidades que se mezclan.

Siendo p el precio mayor, m el precio medio y p' el precio menor. Siendo x la cantidad de precio p e y y la cantidad de precio p' que deben mezclarse para obtener una mezcla de precio medio m.

p. medio	p. ingred.	cant. ingred.	
m	p	x	$p > m$
	p'	y	$m > p'$

Si una unidad del ingrediente de precio p, que es mayor que el precio medio m, se vende a m, se pierde $p - m$ y en x unidades se perderá $(p - m)\,x$.

Si una unidad del ingrediente de precio p', que es menor que el precio medio m, se vende a m, se gana $m - p'$ y en y unidades se ganará $(m - p')y$.

Luego tenemos:

$(p - m)x$ es la pérdida total que se obtiene vendiendo las x unidades de precio p a m, que es menor.

$(m - p')y$ es la ganancia total que se obtiene vendiendo las y unidades de precio p' a m, que es mayor.

Como la ganancia tiene que ser igual a la pérdida tendremos: $(p - m)x = (m - p)\,y$, y como un teorema dice que si el producto de dos cantidades es igual al producto de otras dos, y con las cuatro se puede formar una proporción, tendremos:

$$\frac{p - m}{m - p'} = \frac{y}{x}$$

que es la fórmula de la aligación inversa.

En la aligación inversa se pueden considerar cuatro casos:

PROBLEMAS DE ALIGACIÓN INVERSA

Para obtener café de $0.55 la libra mezclando café de $0.75, $0.70. $0.65, $0.50 y $0.35 la libra.

¿Cuánto debe tomarse de cada calidad?

T. medio	P. de ingred.	Comparación.	Cantidad de ingredientes
	75	55 - 35	= 20 libras de 75 cts.
	70	55 - 50	= 5 libras de 70 cts.
55	65	55 - 35	= 20 libras de 65 cts.
	50	70 - 55	= 15 libras de 50 cts.
	35	75 - 55 = 20 65 - 55 = 10	$\frac{30}{90}$ libras de 35 cts.

Aquí se compara 75 con 35 y 70 con 50 y queda un precio libre de 65, mayor que el medio.

Éste se compara con cualquiera de los precios menores que el medio, por ejemplo con 35; pero como ya se había hecho otra comparación con 35, a este precio le tocan **dos resultados** que se suman.

PROBLEMA 1

CASO 1. Dado el precio medio y los precios de los ingredientes, hallar las cantidades de los ingredientes.

Para obtener un vino de $0.80 l, ¿qué cantidades de vino de $0.90 y de $0.50 se necesitan?

T. medio	P. de ingred.	Comparación	Cant. de ingred.
80	90	80 - 50 =	30 de 90 cts.
	50	90 - 80 =	10 de 50 cts.
			40

La comparación se hace restando del precio **medio** el precio **menor**, y esa diferencia será la **cantidad del ingrediente de precio mayor**; y restando **del precio mayor el precio medio**, y esa diferencia será la **cantidad del ingrediente de precio menor**.

R.: 30 litros de vino de $0.90 y 10 litros de vino de $0.50 para preparar 30 + 10 = 40 litros de vino que se venden a $0.80 sin ganar ni perder.

PROBLEMA 2

¿Cuántos litros de vino de $0.90, $0.85, $0.50 y $0.30 el litro serán necesarios para obtener una mezcla que se pueda vender a $0.65 el litro sin ganar ni perder?

T. medio	P. de ingred.	Comparación	Cant. de ingred.
	90	65 - 30 =	35 litros de 90 cts.
65	85	65 - 50 =	15 litros de 85 cts.
	50	85 - 65 =	20 litros de 50 cts.
	30	90 - 65 =	25 litros de 30 cts.
			95

R.: 35 litros de $0.90, 15 litros de $0.85, 20 litros de $0.50 y 25 litros de $0.30 para preparar 95 litros que se puedan vender a $0.65 sin ganar ni perder.

Otra solución

Este problema también puede resolverse comparando 90 con 50 y 85 con 30, como se expresa a continuación:

T. medio	P. de ingred.	Comparación	Cant. de ingred.
	90	65 - 50 =	15 litros de 90 cts.
65	85	65 - 30 =	35 litros de 85 cts.
	50	90 - 65 =	25 litros de 50 cts.
	30	85 - 65 =	20 litros de 30 cts.
			95

Aquí las comparaciones siempre deben hacerse con dos precios de ingredientes tales que **uno sea mayor que el término medio** y otro **menor** y **nunca** con dos precios **mayores** o **menores** que el **medio**.

INDETERMINACIÓN

Los problemas de este primer caso son **indeterminados**, ya que tienen muchas soluciones, porque multiplicando o dividiendo por un mismo número las cantidades de ingredientes obtenidas, tendríamos otras soluciones que cumplirían las condiciones del problema.

Los siguientes casos en los que se **limita la cantidad** total de la mezcla o se **fija la proporción** en que participarán **uno o más ingredientes** son determinados.

EJERCICIOS

1. ¿Qué cantidades de harina necesito de 10 cts. por kg y 15 cts. por kg para obtener harina que pueda vender a 13 cts. el kg sin ganar ni perder?
R. 2 kg de 10 cts. y 3 kg de 15 cts. para 5 kg de la mezcla.

2. ¿Qué cantidades de café de 25 cts. y 30 cts. libras necesito para obtener café que pueda vender a 28 cts. la libra sin ganar ni perder?
R. 2 libras de 25 cts. y 3 libras de 30 cts. para 5 libras de la mezcla.

3. Con café de 45 cts. libra y 60 cts. libra quiero hacer una mezcla tal que al vender la libra de la mezcla en 55 cts. gane 5 cts. por cada libra. ¿Cuánto tomaré de cada ingrediente?
R. 10 libras de 45 cts. y 5 libras de 60 cts. para 15 libras de la mezcla.

4. ¿Qué cantidades de vino de 80 cts. y 95 cts. el litro formaban una mezcla que, vendida a 85 cts. el litro, dejó una pérdida de 5 cts. por cada litro?
R. 5 litros de 80 cts. y 10 litros de 95 cts. para 15 litros de la mezcla.

5. Al mezclar vino de 90 cts., 80 cts., 75 cts. y 60 cts. por litro obtuve una mezcla que vendí a 78 cts. el litro sin ganar ni perder. ¿Qué cantidad tomé de cada ingrediente? **R.** 18 litros de 90 cts., 3 litros de 80 cts., 2 litros de 75 cts. y 12 litros de 60 cts. o 3 litros de 90 cts., 18 litros de 80 cts.; 12 litros de 75 cts. y 2 litros de 60 cts. para 35 litros de la mezcla.

PROBLEMAS DE ALIGACIÓN INVERSA

CASO 2. Dado el término medio, los precios de los ingredientes y la cantidad total de la mezcla, hallar las cantidades de los ingredientes.

¿Qué cantidades de vino de $1.20 y $0.50 el litro y de agua serán necesarias para preparar 380 litros de vino que se vendan a $0.80 el litro sin ganar ni perder?

Se procede como en los problemas anteriores, prescindiendo por ahora de la cantidad total de la mezcla (380 litros).

T. medio	P. de ingred.	Comparación	Cant. de ingred.
	120	80 - 50 = 30 ; 80 - 0 = 80	= 110 de $1.20
80	50	120 - 80	= 40 de $0.50
	0	120 - 80	= $\frac{40}{190}$ de agua

Estas cantidades (110, 40 y 40) **no son las buscadas** porque su suma no da los 380 litros que se busca obtener. Ahora hay que repartir la cantidad total de la mezcla, 380 litros, en partes proporcionales a los resultados obtenidos (110, 40 y 40):

$$x=\frac{380\times110}{110+40+40}=\frac{380\times110}{190}=220 \text{ litros de } \$1.20$$

$$y=\frac{380\times 40}{110+40+40}=\frac{380\times40}{190}=80 \text{ litros de } \$0.50$$

z = (igual anterior) = 80 litros de agua.

CASO 3. Dado el término medio, los precios de los ingredientes y la cantidad de uno de los ingredientes, hallar las cantidades de los otros.

¿Qué cantidades de café de 80 cts. la libra, 60 cts. la libra y 25 cts. la libra será necesario añadir a 6 libras de café de 35 cts. para que la libra de la mezcla se pueda vender a 50 cts. sin ganar ni perder?

Se hace la comparación como en los casos anteriores, prescindiendo por ahora de la cantidad (6 libras) del ingrediente conocido.

T. medio	P. de ingred.	Comparación	Cantidades
	80	50 - 25 =	25 de 80
50	60	50 - 35 =	15 de 60
	25	80 - 50 =	30 de 25
	6 libras de 35	60 - 50 =	10 de 35

Estos resultados (25, 15, 30 y 10) no son los que buscamos.

Para **hallar la cantidad** que se debe **tomar** de **cada ingrediente,** se establecen proporciones del modo siguiente:

Para saber qué cantidad debo tomar de café de 80 cts., diré:

Cuando pongo 10 libras de 35 cts. pongo 25 libras de 80 cts. cuando ponga 6 libras de 35 cts. pondré *x* libras de 80 cts:

$$\frac{10}{6}=\frac{25}{x} \quad \therefore \quad x=\frac{6\times25}{10}=15 \text{ libras de 80 cts.}$$

Para saber la cantidad de café de 60 cts., dire:

Cuando pongo 10 libras de 35 cts. pongo 15 libras de 60 cts. cuando ponga 6 libras de 35 cts. pondré *x* libras de 60 cts:

$$\frac{10}{6}=\frac{15}{x} \quad \therefore \quad x=\frac{6\times15}{10}=9 \text{ libras de 60 cts.}$$

Para saber la cantidad de café de 25 cts., dire:

Cuando pongo 10 libras de 35 cts. pongo 30 libras de 25 cts. cuando ponga 6 libras de 35 cts. pondré *x* libras de 25 cts:

$$\frac{10}{6}=\frac{30}{x} \quad \therefore \quad x=\frac{6\times30}{10}=18 \text{ libras de 25 cts.}$$

R.: A las 6 libras de 35 cts. habrá que añadir 15 libras de 80 cts., 9 libras de 60 cts., y 18 libras de 25 cts.

EJERCICIOS

1. ¿Qué cantidades de café de 50 cts. por kg y 40 cts. por kg harán falta para formar una mezcla de 30 kg de café que se pueda vender a 42 cts. el kilo sin ganar ni perder?
R. 6 kg de 50 cts. y 24 kg de 40 cts.

2. Para preparar 44 litros de alcohol de 75º, ¿qué cantidades serán necesarias de alcohol de 60º y 82º?
R. 14 litros de 60º y 30 litros de 82º.

3. ¿Qué cantidades de vino de 90, 82, 65 y 50 cts. el litro serán necesarias para preparar 114 litros de una mezcla que se pueda vender a 75 cts. el litro sin ganar ni perder?
R. 50 litros de 90 cts., 20 litros de 82 cts., 14 litros de 65 cts. y 30 litros de 50 cts. o 20 litros de 90 cts., 50 litros de 82 cts., 30 litros de 65 cts. y 14 litros de 50 cts.

4. Para formar una mezcla de 60 libras de harina que se pueda vender a 11 cts. la libra sin ganar ni perder, ¿qué cantidades serán necesarias de harina de 7, 10, 15 y 14cts. la libra?

R. 20 libras de 15 cts., 5 libras de 14 cts., 15 libras de 10 cts. y 20 libras de 7 cts. o 5 libras de 15 cts., 20 libras de 14 cts., 20 libras de 10 cts. y 15 libras de 7 cts.

5. Si tengo alcohol de 40º, 35º, 30º y 25º, ¿qué cantidad de cada graduación necesitaré para preparar 5 litros de 33º?
R. 2 litros de 40º, 3/4 l de 35º, ½ l de 30º y 1 3/4 litros de 25º o 3/4 litros de 40º, 2 litros de 35º, 1 3/4 litros de 30º y ½ litro de 25º.

PROBLEMAS DE ALIGACIÓN INVERSA

CASO 4. Dado el precio medio, los precios de los ingredientes, la cantidad total de la mezcla y la cantidad de uno o varios ingredientes, hallar las cantidades de los ingredientes restantes.

Un tabernero tiene 50 litros de vino de 90 cts. y quiere saber qué cantidad de vino de 80, 50 y 40 cts. el litro deberá añadir para formar una mezcla de 185 litros que pueda vender a 60 cts. el litro sin ganar ni perder.

Se trata de un caso mixto (entre el 2o. y el 3o.).

En esta mezcla tienen que entrar 50 litros de 90 cts. (precio mayor que el medio). Tomamos este dato y un ingrediente de precio menor que el medio, por ejemplo 40 cts., y hallamos **qué cantidad de vino de 40 cts.** hay que añadir a los 50 litros de 90 cts. para que la mezcla salga al precio medio buscado de 60 cts. (3er. caso).

T. medio	P. de ingred.	Comparación	Cantidades
60	50 litros de 90	60 - 40	= 20 de 90
	40	90 - 60	= 30 de 40

Ahora decimos:

Cuando entran 20 litros de 90 cts. entran 30 litros de 40 cts.
Cuando entren 50 litros de 90 cts. entrarán *x* litros de 40 cts.

$$\frac{20}{30} = \frac{50}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{30 \times 50}{20} = 75 \text{ litros de 40 cts.}$$

Entonces sabemos que con 50 litros de 90 cts. y 75 litros de 40 cts. puedo formar una mezcla de 50 + 75 = 125 litros que se vendan a 60 cts. (el precio medio buscado) sin ganar ni perder.

Como se quieren obtener 185 litros de 60 cts. y ya tenemos 125 litros de ese precio, falta obtener 185 - 125 = 60 litros de 60 cts., mezclando **los dos ingredientes que faltan**, es decir, vino de 80 cts. y de 50 cts.

En seguida se busca **qué cantidades de vino de 80 y 50 cts.** el litro hacen falta para obtener 60 litros 60 cts. (2do. caso).

T. medio	P. de ingred.	Comparación	Cant. de ingred.
60	80	60 - 50	= 10 de 80 cts.
	50	80 - 60	= $\frac{20}{30}$ de 50 cts.

Pero como es necesario obtener 60 litros de 60 cts. hay que repartir 60 litros en partes proporcionales a 10 y 20:

$$x = \frac{60 \times 10}{30} = 20 \text{ litros de 80 cts.}$$

$$y = \frac{60 \times 20}{30} = 40 \text{ litros de 50 cts.}$$

R.: A los 50 litros de vino de 90 cts. se añaden 75 litros de 40 cts., 20 litros de 80 cts. y 40 litros de 50 cts. para tener una mezcla de 50 + 75 + 20 + 40 = 185 litros, que se venden a 60 cts. sin ganar ni perder.

OTRA PRUEBA DE ALIGACIÓN INVERSA

La aligación inversa también puede probarse por medio de la **aligación directa**. Con los resultados obtenidos se forma una aligación directa para hallar el precio medio de la mezcla, y si el problema está bien, dará como resultado el término medio.

En el último problema resuelto se toma el resultado para formar una aligación directa, y tendremos:

50	litros de 90 cts. cuestan 50 × 90 cts. =	$ 45.00
75	litros de 40 cts. cuestan 75 × 40 cts. =	$ 30.00
20	litros de 80 cts. cuestan 20 × 80 cts. =	$ 16.00
40	litros de 50 cts. cuestan 40 × 50 cts. =	$ 20.00
185	litros	$ 111.00
(cantidad total)		(costo total)

El litro de la mezcla cuesta $111 ÷ 185 = 60 cts. (precio medio).

EJERCICIOS

1. ¿A cómo debo vender el litro de una mezcla de 30 litros de vino de 60 cts. y 20 litros de agua para ganar 8 cts. por litro?
R. 44 cts.

2. Con café de 60, 50, 40 y 30 cts. la libra se quieren obtener 40 libras de café que, vendidas a 45 cts., no dejen ganancia ni pérdida. Si en la mezcla deben entrar 5 libras de 30 cts., ¿qué cantidad se tomará de los otros ingredientes?
R. 5 libras de 60 cts. y 15 libras de 40 cts. y 50 cts.

3. Tengo 20 litros de vino de 70 cts. y quiero saber qué cantidades de vino de 50 cts. y de agua deberé añadir para obtener 50 litros de vino que se puedan vender a 40 cts. sin ganar ni perder.
R. 12 litros de 50 cts. y 18 litros de agua.

4. Con alcohol de 40º, 30º y 20º se pretende obtener 60 litros de alcohol de 25º. Si en la mezcla deben entrar 10 litros de 40º, ¿cuántos litros habrá que poner de los otros ingredientes?
R. 40 litros de 20º y 10 litros de 30º.



Durante la época prehistórica, se da el descubrimiento de las aleaciones. La primera que el hombre llega a conocer es la mezcla del cobre con el estaño, que da por resultado el bronce, material que se utilizó en miles de artículos.

CAPÍTULO LIII

ALEACIONES

Una **aleación** es la mezcla de dos o más metales fundidos. Una **amalgama** es una aleación en la que uno de sus ingredientes es el mercurio.

Un **metal fino** resulta de una aleación en la que interviene un metal precioso, como oro, plata o platino.

La **liga** es el peso de un metal inferior (cobre, níquel, etc.) con el cual se funde el metal precioso.

LEY DE LOS METALES FINOS

Se conoce como **ley de una aleación** a la proporción en que participa un metal fino en la aleación, y suele expresarse en milésimas.

Así, al decir oro de 900 milésimas (0.900) significa que por cada mil partes en peso de la aleación, 900 son de oro y 100 de liga.

Si un lingote de plata pesa 1000 g y de ellos 850 g son de plata, la ley de la aleación es 0.850, o sea el cociente de dividir 850 entre 1000.

Por lo tanto, la ley es **la relación entre el peso del metal fino y el peso total** de la aleación.

Llamando F al peso del metal fino, P al peso total de la aleación y L a la ley, tendremos:

$$L = \frac{F}{P} \text{ o } \frac{L}{1} = \frac{F}{P} \text{ y de aquí: } F = P \times L \text{ y } P = \frac{F}{L}$$

Esto significa que el **peso del fino** es igual al peso total por la ley y el **peso total** es igual al peso del fino dividido entre la ley.

LEY DE LOS METALES FINOS EN KILATES

La ley, sobre todo del oro, suele expresarse en **kilates**. En este caso, cada **kilate** significa $\frac{1}{24}$ del peso total.

Así, un anillo de **oro de 18 kilates** significa que del peso total del anillo, $\frac{18}{24}$ son de oro puro y el resto, $\frac{6}{24}$, son del metal inferior o liga; una cadena de **oro de 14 kilates** significa que $\frac{14}{24}$ del peso total de la cadena son de oro puro y $\frac{10}{24}$ son de liga.

Al conocer la ley en **kilates**, para expresarla en milésimas sólo se divide el número de kilates entre 24.

De este modo, el oro de 22 kilates es oro de $\frac{22}{24} = \frac{11}{12} = 0.916\frac{2}{3}$ y el de 18 kilates es oro de $\frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0.750$.

PROBLEMAS SOBRE RELACIONES ENTRE EL PESO DEL FINO, EL PESO DE LA ALEACIÓN Y LA LEY

Si 8 g de oro puro se funde con 4 g de cobre, ¿cuál es la ley de la aleación?

Peso del fino: 8 g. Peso de la aleación 8 g de oro + 4 g de cobre = 12 g. Aplicamos la fórmula:

$$L = \frac{F}{P} \text{ Sustituyendo: } L = \frac{8}{12} = 0.666\frac{2}{3}$$

Si un anillo de oro es de ley 0.900 y contiene 6 g de oro puro, ¿cuánto pesa éste?

Peso del fino: 6 g Ley: 0.900.

$$P = \frac{F}{L} \text{ Sustituyendo: } P = \frac{6}{0.900} = 6\frac{2}{3} \text{ g}$$

Un objeto de oro pesa 50 g. Si la ley es de 0.800, ¿cuántos g de oro puro contiene?

Peso total: 50 g. Ley: 0.800.

$F = P \times L$. Sustituyendo: $F = 50 \times 0.800 = 40$ g

Un anillo de oro de 18 kilates pesa 9 adarmes. Si el adarme de oro puro se paga a $1.80, ¿cuánto vale el anillo?

Peso total: 9 ad. Ley: $\frac{18}{24}$. Se busca el peso del fino:

$$F = P \times L \;\therefore\; F = 9 \times \frac{18}{24} = 6.75 \text{ ad}$$

Si hay 6.75 adarmes de oro puro y se pagan a $1.80 el adarme, el anillo vale 6.75 × $1.80 = $12.15.

PROBLEMAS SOBRE ALEACIONES

Dado que una aleación no es más que una aligación en la que los ingredientes son metales, estos problemas se resuelven del mismo modo que en la aligación directa o inversa y pueden darse los mismos casos.

Al fundir 14 g de plata a la ley de 0.950 con 8 g de plata a la ley de 0.850 y con 12 g de plata pura, ¿cuál es la ley de la aleación?

Se resuelve como aligación directa:

14 g de ley 0.950 contienen	14 × 0.950 = 13.300 g de plata
8 g de ley 0.850 contienen	8 × 0.850 = 6.800 g de plata
12 g de plata pura contienen	12 × 1.000 = 12.000 g de plata
34 g (peso total)	32.100 (fino).

La ley de la aleación será: $32.100 \div 34 = 0.944\frac{2}{17}$

¿Qué cantidades de oro de 0.980 y 0.940 de ley serán necesarias para obtener 20 kg de oro a la ley de 0.950?

Este problema es semejante a los del Caso 2 de la aligación inversa, donde se conoce la cantidad total de la mezcla y se resuelve de modo análogo:

T. medio	Ley de ingred.	Comparación	Cant. de ing.
0.950	0.980	0.950 - 0.940 =	0.010
	0.940	0.980 - 0.950 =	0.030

Ahora se reparten 20 kg en partes proporcionales a los resultados obtenidos:

$$x = \frac{20 \times 0.01}{0.01 + 0.03} = \frac{0.20}{0.04} = 5 \text{ kg de } 0.980$$

$$y = \frac{20 \times 0.03}{0.01 + 0.03} = \frac{0.60}{0.04} = 15 \text{ kg de } 0.940$$

Si se tratara de tres o más ingredientes, se procedería igual que en la aligación inversa.

EJERCICIOS

1. Al fundir 10 g de oro puro con 5 g de cobre, ¿cuál es la ley de la aleación? **R.** $0.666\frac{2}{3}$.

2. Una cadena de plata que pesa 200 g contiene 50 g de cobre. ¿Cuál es la ley? **R.** 0.750.

3. Un arete de oro pesa 2 g y es de ley 0.900. ¿Cuánto pesa el oro que contiene? **R.** 1.8 g.

4. Un anillo de oro de 14 kilates pesa 12 g. ¿Cuánto pesa el oro que contiene? **R.** 7 g.

5. Un vasito de oro de 16 kilates pesa 60 adarmes. ¿Cuál es su valor en moneda si el adarme de oro se paga a 6 dólares? **R.** 240 dólares.

6. Un anillo de oro de 18 kilates pesa 12 g. ¿Cuánto vale el oro del anillo si se paga a 8 dólares el gramo? **R.** $72.

7. Una cadenita de oro de 0.500 de ley contiene 5 ad de oro puro. ¿Cuánto pesa? **R.** 10 adarmes.

8. Un objeto de oro de 16 kilates contiene 120 g de oro puro. ¿Cuántos g de liga tiene el objeto? **R.** 60 g.

9. Un objeto de oro pesa 1.6718 g y su ley es 0.900. Si el gramo de oro puro se paga a $1.15, ¿cuánto vale ese objeto? **R.** $1.73.

10. Se funden 20 gramos de plata a la ley de 0.990 con 10 gramos a la ley de 0.915. ¿Cuál será la ley de la aleación? **R.** 0.965.

11. ¿Cuál será la ley de una aleación de 35 gramos de plata a la ley de 0.960, con 42 gramos a la ley de 0.950 y con 23 gramos a la ley de 0.850?
R. 0.9305.

12. ¿Cuál será la ley de una aleación de 5 libras de plata a la ley de 0.970, 4 libras de 0.960, 3 libras de 0.950 y 2 libras de plata pura?
R. $0.967\frac{1}{7}$.

SISTEMA MONETARIO

La **moneda** es una mercancía que mide toda clase de valores y se emplea como instrumento general en intercambios comerciales, financieros, etc.

Cualquier mercancía utilizada como moneda debe cumplir ciertas condiciones: ser de fácil conservación; reunir mucho valor en poco volumen; fácilmente fraccionable; que su valor fluctúe poco y sea de fácil acuñación y difícil desacuñación.

Los metales reúnen estas condiciones, y los más comúnmente usados para fabricar monedas son: oro, plata, bronce, níquel y cobre.

Para lograr una mayor consistencia en las monedas, el oro y la plata suelen alearse con pequeñas cantidades de cobre, y así, las monedas de bronce son una aleación de cobre, estaño y zinc.

METALES PRECIOSOS

Las monedas de **metales finos** son aquellas fabricadas con oro y plata y cuyo valor aumenta según la pureza de su metal.

LEY DE LAS MONEDAS

La **ley de la moneda** establece la cantidad de **fineza** en una moneda, según la proporción del metal fino en relación con el metal inferior (generalmente el cobre) con el que tiene aleación, y suele darse en milésimas; por ejemplo, en la **ley de las monedas de oro** es de 0.900, lo que significa que en mil partes del peso de la moneda, 900 son de oro y 100 de cobre.

Es difícil que todas las monedas de una misma clase contengan rigurosamente el mismo peso y la misma ley, por lo que suele concederse una **tolerancia** tanto en el peso como en la ley, la cual puede ser de 0.001 a 0.003, lo cual significa que una moneda cuyo peso o ley sea de 0.001 a 0.003 **mayor** o **menor** a lo establecido **no pierde su valor** y **tiene un curso legal**.

VALORES FIDUCIARIOS Y BANCARIOS

Una moneda posee tres valores: **valor legal**, el que tiene de acuerdo con las leyes del Estado que la emite y está inscrito en las monedas; **valor intrínseco**, del oro o la plata que contienen las monedas, y **valor extrínseco**, que depende de las circunstancias y en gran parte de su valor en relación con las monedas extranjeras.

El **valor legal** suele ser mayor que el **valor intrínseco**, esto con el fin de cubrir los gastos de acuñación de la moneda; por su parte, el **valor extrínseco** puede ser mayor o menor que el valor legal.

La **moneda fiduciaria** o **billetes de banco** son certificados al portador que pueden cambiarse por monedas en cualquier momento. Con esta seguridad son aceptados por todas las personas y con ellos se facilitan en mucho las operaciones mercantiles.

TABLA DE MONEDAS DE AMÉRICA			
PAÍS	UNIDAD	MONEDA METÁLICA	PAPEL MONEDA
Argentina	peso	1, 5, 10, 25 y 50 centavos	1, 2, 5, 10, 20, 50 y 100 pesos
Bolivia	boliviano	2, 5, 10, 20 y 50 centavos; 1boliviano	2, 5, 10, 20, 50, 100 y 200 bolivianos
Brasil	cruzeiro real	1, 5, 10, 20, 50 centavos; 1, 2 y 5 cruzeiros reales	20, 50 centavos; 1, 5, 10, 50, 100, 500 cruzeiros reales
Canadá	dólar canadiense	1, 5, 10 y 25 centavos; 1 dólar canadiense	2, 5, 10, 20, 50 y 100 dólares canadienses
Colombia	peso	1, 2, 5, 10, 20 y 50 pesos	200, 500, 1000, 2000, 5000 y 10000 pesos
Costa Rica	colón	5, 10, 25, 50 céntimos (las primeras tres casi en desuso); 1, 2, 5, 10 y 20 colones	5, 10, 20, 50, 100, 500 y 1000 colones
Cuba	peso	1, 5, 20 y 40 centavos; 1 peso	1, 3, 5, 10, 20 y 50 pesos
Chile	peso	1, 5, 10, 50, 100 pesos	500, 1000, 5000 y 10000 pesos
Ecuador	sucre	50 centavos; 5, 10, 20 y 50 sucres	5, 10, 20, 50, 100, 500, 1000, 5000 y 10000 sucres
El Salvador	colón salvadoreño	1, 2, 3, 5, 10, 25, 50 centavos; 1 colón	1, 2, 5, 10, 25, 50 y 100 colones
Estados Unidos	dólar	1, 5, 10, 25 y 50 centavos; 1 dólar	1, 2, 5, 10, 20, 50 y 100 dólares
Guatemala	quetzal	1, 5, 10, 25 centavos	50 centavos; 1, 5, 10, 20, 50, 100 quetzales
Honduras	lempira	1, 2, 5, 10, 20, 50 centavos	1, 2, 5, 10, 20, 50 y 100 lempiras
México	peso	5, 10, 20, 50 centavos; 1, 2, 5, 10, 20 pesos	10, 20, 50, 100, 200 y 500 pesos
Nicaragua	nuevo córdoba	5, 10, 25, 50 centavos; 1, 5 nuevos córdobas	1, 5, 10, 20, 50, 100, 500 y 1000 nuevos córdobas
Panamá	balboa	1, 5, 10, 25, 50 centésimos 1, 100 balboas	1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 dólares de EU (no hay billetes emitidos por Panamá; el papel moneda de EU tiene curso legal).
Paraguay	guaraní	1, 5, 10, 50 guaraníes	1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000 y 10000 guaraníes
Perú	nuevo sol	0.5, .10, .20, .50; 1 nuevo sol	5, 10, 20, 50 nuevos soles
Uruguay	nuevo peso	10, 20, 50 centésimos 1, 5, 10 nuevos pesos	50, 100, 200, 500, 1000, 5000 y 10000 nuevos pesos
Venezuela	bolívar	5, 10, 25 y 50 centésimos 1, 2 y 5 bolívares	5, 10, 20, 50, 100, 500 y 1000 bolívares



El trueque es considerado como la primera operación mercantil. Durante el medievo surgieron los mercados comerciales, entre los más importantes pueblos de Europa, China, India, etc. y este comercio lo resolvían por la Regla Conjunta.

CAPÍTULO LIV

REGLA CONJUNTA

La **regla conjunta** determina la relación existente entre dos cantidades conociendo otras relaciones intermedias.

Para resolver **problemas de regla conjunta** hay que aplicar la siguiente regla:

Formar con los datos una serie de igualdades, poniendo en el primer miembro de la primera la incógnita (x), y procurando que el segundo miembro de cada igualdad sea de la misma especie que el primero de la siguiente; de este modo, el segundo miembro de la última igualdad será de la misma especie que el primero de la primera.

Se multiplican ordenadamente estas igualdades y se obtiene el valor de x.

PROBLEMAS DE LA REGLA CONJUNTA

Si sabemos que 6 varas de paño cuestan lo mismo que 5 metros, y 2 metros valen $4, ¿cuánto costarán 4 varas?

Primero se escribe la igualdad de la incógnita: $x = 4 varas.

Como el segundo miembro de esta igualdad es varas, el primero de la siguiente también será varas, o sea: 6 varas = 5 m

Como el segundo miembro de esta igualdad es metros, el primero de la siguiente también debe ser metros o sea:

2 metros = $4

Con lo que tendremos:

$x = 4 varas
6 v = 5 metros
2 m = $4

Se multiplica ordenadamente:

$$\$x \times 6 \times 2 = \$4 \times 5 \times 4$$

y de aquí: $x = \frac{4 \times 5 \times 4}{6 \times 2} = \$6\ \frac{2}{3}$

Por tanto las 4 varas cuestan $\$6\ \frac{2}{3}$

TEOREMA FUNDAMENTAL

Si se tienen varias igualdades tales que el segundo miembro de cada una sea de la misma especie que el primero de la siguiente y se multiplican ordenadamente, el primer miembro de la igualdad resultante será de la primera especie y el segundo de la última.

Siendo las igualdades: *a* libras = *b* kilogramos
c kilogramos = *d* arrobas
e arrobas = *f* onzas.

Demostraremos que *a c e* libras = *d b f* onzas.

Al multiplicar los dos miembros de la primera de las tres igualdades dadas por *c* y los de la segunda igualdad por *b*, tendremos:

a libras × *c* = *b* kilogramos × *c*
c kilogramos × *b* = *d* arrobas × *b*

Dado que el producto es de la misma especie que el multiplicando, tendremos:

ac libras = *b c* kilogramos
cb kilogramos = *b d* arrobas

y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, tendremos:

ac libras = *b d* arrobas.

Ahora multiplicamos los dos miembros de esta igualdad por *e* y los dos miembros de la tercera de las tres igualdades dadas al principio por *bd* y tendremos:

ace libras = *b d e* arrobas
ebd arrobas = *b d f* onzas

y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, tendremos:

ace libras = b d f onzas

que es lo que queríamos demostrar.

DESCUENTOS SUCESIVOS

Una de las aplicaciones de la regla conjunta es la de los **descuentos sucesivos**.

Rebajar sucesivamente el 5%, 10% y 8% de una cantidad **no equivale** a rebajar el 5% + 10% + 8% = 23%, sino que a la cantidad dada se le rebaja el 5%; a lo que queda después se le rebaja el 10% y a lo que queda después de esta segunda rebaja se le disminuye el 8%.

Este cálculo puede hacerse aplicando los conocimientos del tanto por ciento, aunque por regla conjunta es mucho más rápido.

Sobre una mercancía marcada en $800 se hacen tres descuentos sucesivos del 20%, 25% y 5%. ¿Cuál será su precio?

Si aplicamos la regla conjunta tenemos:

$x de venta = $800 marcados.
$100 marcados = $80 con el 1^er^ descuento.
$100 con el 1^er^ descuento = $75 con el 2° descuento.
$100 con el 2° descuento = $95 con el 3^er^ descuento venta

$$x = \frac{800 \times 80 \times 75 \times 95}{100 \times 100 \times 100} = \$456$$

Por tanto, la mercancía se vende en $456.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál será el sueldo mensual de un teniente, si el sueldo mensual de 2 capitanes equivale al de 3 tenientes y el de 3 capitanes al de 2 comandantes y el sueldo mensual de un comandante es de 200 dólares? **R.** $88 8/9 dólares.

2. ¿El trabajo de cuántos hombres equivaldrá al trabajo de 8 niños, si el trabajo de 4 niños equivale al de 3 niñas, el de una mujer al de 2 niñas y el de tres mujeres al de un hombre? **R.** El trabajo de un hombre.

3. Si el precio de catálogo de un artículo es de 900 dólares y se vende haciéndole descuentos sucesivos del 15%, 20% y 2%, ¿en cuánto se vende? **R.** $599.76 dólares.



Los primeros seguros que existieron se relacionaban principalmente con el comercio marítimo. Lloyd es la organización más poderosa de seguros en el mundo, ya que fue el primero en dedicarse a estas actividades.

CAPÍTULO LV

SEGUROS CONTRA RIESGOS

A lo largo de la historia el hombre ha estado expuesto a innumerables **riesgos**, que lo orillaron a crear un sistema de previsión para amortiguar, en cierto modo, los efectos de esos peligros sobre su economía.

Dichos medios de previsión son lo que se conoce generalmente como **seguros**, que son un **contrato** entre dos partes en el que se estipula que una de ellas (el **asegurado**) se obliga a pagar determinada cantidad por adelantado durante un tiempo establecido, y la otra (el **asegurador**) se obliga a pagar al asegurado una cantidad previamente fijada si ocurre alguno de los hechos de riesgo previstos en el contrato.

CLASES DE SEGUROS

La **póliza** es el documento o contrato que firman ambas partes y en el cual constan los derechos y obligaciones del asegurado y el asegurador. El dicha póliza se indica claramente el **capital asegurado**.

La **prima** es la **cantidad** que el asegurado debe abonar en los plazos fijados en la póliza.

En todo el mundo existen compañías dedicadas a realizar estos negocios de **venta de pólizas de seguros**, para lo cual deben reunir los requisitos que señalan las leyes del país donde operan. Por lo general, a las **compañías de seguros** se les exige un capital determinado, así como el depósito de una cantidad conocida como **fianza** en la Tesorería de la nación donde se establecen.

Los principales seguros son los de **vida** y **contra incendios**.

Hay muchos planes de seguros de vida, y entre los más conocidos se encuentran el **seguro de vida entera** u **ordinario,** de **vida entera con pagos limitados** y el **dotal.**

LOS SEGUROS DE VIDA

El **seguro de vida entera** u **ordinario** es aquél en el que el asegurado paga las **primas** por adelantado (años, semestres, trimestres) mientras viva y la compañía se compromete, cuando muere el asegurado, a pagar al beneficiario el importe total de la póliza.

En el plan de **seguro de vida entera con pagos limitados** el asegurado se compromete a pagar primas adelantadas por un tiempo determinado (15 ó 20 años, por lo general).

Transcurrido ese plazo, cesan las obligaciones del asegurado y la compañía está obligada a pagar al beneficiario el importe de la póliza al fallecimiento del asegurado, pero si éste dejare de existir antes del vencimiento del plazo fijado para pagar las primas, la compañía está obligada a pagar inmediatamente el importe de la póliza al beneficiario.

En el **plan dotal** la póliza tiene un vencimiento a plazo fijo. Al decursar este plazo, el asegurado recibe el capital estipulado en la póliza, y si fallece antes, la compañía paga inmediatamente el capital asegurado al beneficiario.

EJERCICIOS

Aplicando cualquier tabla de primas de seguros, determina las primas de cada una de las siguientes pólizas:

1. Una póliza de pagos limitados por 30000 dólares, a 15 años, si la edad del asegurado es de 40 años.

2. Una póliza dotal a 20 años, de 6000 dólares, si la edad es 30 años.

3. El presidente de una compañía petrolera contrata una póliza de vida entera a los 50 años. Si la póliza es por 200000 dólares, ¿cuánto pagará de prima trimestral?

4. ¿Cuál es la prima trimestral de una póliza dotal de 60000 dólares, por 20 años, si el asegurado tiene 32 años.

Determina el capital asegurado de cada una de las siguientes pólizas:

5. Una póliza de vida entera si el asegurado tiene 26 años y paga $928.40 de prima anual.

6. Si la póliza es de pagos limitados a 15 años y el asegurado tiene 50 años, pagando $2003.40 de prima anual.

TABLA DE PRIMAS ANUALES DE SEGUROS CONTRA INCENDIOS

POR CADA 100 DÓLARES DE CAPITAL ASEGURADO

	Clase extra		Primera clase		Segunda clase		Tercera clase	
CLASE DE OCUPACIÓN	**E**	**C**	**E**	**C**	**E**	**C**	**E**	**C**
A. Viviendas familiares	0.08	0.15	0.12	0.20	0.40	0.40	0.60	0.60
B. Colegios	0.15	0.25	0.18	0.35	0.65	0.65	0.85	0.85
C. Compañías de televisión	0.25	0.40	0.30	0.48	0.80	0.80	1.00	1.00
D. Librerías	0.40	0.60	0.48	0.72	1.00	1.00	1.25	1.25
E. Fábricas de aceites vegetales	0.60	0.80	0.72	0.96	1.25	1.25	1.50	1.50

NOTA:

Si la extensión de la póliza es por un periodo mayor de un año, se cobrará el tipo anual completo por los primeros 12 meses más el 75% del tipo anual por cada año adicional. El periodo de vigencia de una póliza no debe exceder de cinco años.

SEGURO CONTRA INCENDIO

Otro de los seguros más utilizados es el **seguro contra incendios**, cuyas primas se determinan por cada 100 dólares de valor de la cosa asegurada, y dependen del tipo de construcción del edificio, el fin al que está destinado y las construcciones que lo rodean.

Para efectos del seguro contra incendios, los edificios se clasifican en: **clase extra, primera clase, segunda clase** y **tercera clase.**

Los de **clase extra** están construidos de hormigón, mampostería, ladrillos, bloques de cemento o cualquier combinación de estos materiales, utilizando madera sólo en puertas, ventanas y sus marcos. Los de **primera clase** son aquellos en cuya construcción se emplean tejas de barro, techos de azotea, fibrocemento u otro material sólido. En la **segunda clase** están aquellos donde predomina la construcción de la primera clase, pero el porcentaje de madera utilizado no excede del 40%, y sus techos son sólidos. Los de **tercera clase** están construidos de madera o construcción mixta donde predomina la madera en más de un 40%.

Asimismo, para los efectos del seguro contra incendios se considera la ocupación a que se destina el edificio, estableciéndose una clasificación en orden ascendente según el riesgo: A, B, C, D, E, etc.

1) La gerencia de la KGH, una compañía de televisión, decide comprar una póliza de seguro contra incendios. ¿Qué prima pagará si el capital asegurado es de 1350000 dólares, teniendo en cuenta que el edificio es de clase extra y está valuado en 350000 dólares?

El total del seguro es de 1350000 dólares y el valor del edificio 350000 dólares, luego 1350000 - 350000 = 1000000 dólares, que será el valor del contenido asegurado.

Buscamos en la tabla la clase extra a la que pertenece el edificio asegurado, bajamos hasta la clase C en la columna de la clase de ocupación, donde se encuentran incluidas las compañías de televisión, y tendremos una prima anual de 0.25 por cada 100 dólares de valor del edificio, y 0.40 por cada 100 dólares valor del contenido.

Si el edificio está valorado en 350000 dólares, sacamos el 0.25% de 350000:

$$\frac{0.25 \times 350000}{100} = 0.25 \times 3500 = 875 \text{ dólares}$$

Como el contenido asegurado asciende a 1000000 de dólares, buscamos el 0.40% de 1000000 dólares y tendremos:

$$\frac{0.40 \times 1000000}{100} = 0.40 \times 10000 = 4000 \text{ dólares}$$

Prima anual del edificio	875 dólares
Prima anual del contenido	4000 dólares
Prima total anual	4875 dólares

2) Se compra una póliza contra incendios por 4 años para un colegio cuyo edificio es de primera clase. Si el edificio se valora en $84500 y el contenido en $32700, ¿cuál será la prima pagada al cabo de los 4 años?

Localizamos en la tabla la columna de la primera clase, vemos en la columna correspondiente a la clase de ocupación el apartado B (colegios) y sabemos que por el edificio se paga 0.18% y por el contenido 0.35%.

Obtenemos el 0.18% de 84500 dólares:

$$\frac{0.18 \times 84500}{100} = 0.18 \times 845 = \$152.10$$

Obtenemos el 0.35% de 32700 dólares:

$$\frac{0.35 \times 32700}{100} = 0.35 \times 327 = \$114.45$$

Sumamos ambas primas y tendremos 266.55 dólares.

Por el primer año pagará $266.55 y por cada uno de los años restantes el 75% de esta cantidad:

$$\frac{75\% \times 266.55}{100} = 75 \times 2.6675 = \$199.91$$

Al multiplicar esta cantidad por 3 tendremos $599.73 dólares, se agrega la prima del primer año ($266.55) y nos dará $866.28, que es la prima pagada al cabo de los 4 años.

EJERCICIOS

1. Se asegura el contenido de una fábrica de aceite en $80000 dólares. Si el edificio es de clase extra, ¿cuál será la prima anual? **R.** 640.00 dólares.

2. Se asegura una librería cuyo edificio es de tercera clase. Si el edificio se valora en $28000 y el contenido en $22000, ¿qué prima pagará por un seguro contra incendios de 2 años? **R.** $1103.75.

3. Antonio Rodríguez asegura su casa en $20000. Si la construcción es de clase extra, ¿qué prima pagará en un año?
R. 16.00 dólares.

4. Una compañía de televisión cuyo edificio es de primera clase contrata un seguro por $800000. Si el valor del contenido se calcula en $500000 dólares, ¿qué prima pagará en 3 años? **R.** $8250.00.

5. Un colegio contrata un seguro contra incendios por $135000 dólares. Si el edificio es de segunda clase y está valorado en $22000, ¿qué prima anual pagará?
R. 877.50 dólares.

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS INTENCIONALMENTE EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

ÁLGEBRA



PÁGINA INTENCIONALMENTE EN BLANCO



Para los primeros pobladores, medir y contar eran actividades que realizaban constantemente, sin darse cuenta, comenzaron a aplicar los primeros conocimientos matemáticos. Sin embargo, tuvieron que pasar varios siglos para que el hombre desarrollara lo que hoy conocemos como Álgebra.

CAPÍTULO I

PRINCIPIOS DEL ÁLGEBRA

El **ÁLGEBRA** es la rama de las Matemáticas que estudia la cantidad considerada del modo más generalizado posible, siendo los árabes los primeros en desarrollarla.

En Álgebra el concepto de cantidad es mucho más amplio que en Aritmética, donde las cantidades se representan con **números** que expresan valores **determinados.**

Así, 20 expresa un solo valor: **veinte**; y para expresar un valor mayor o menor se debe escribir un número distinto de 20.

NOTACIÓN ALGEBRAICA

Para representar las cantidades en Álgebra se utilizan símbolos llamados **números** y **letras**.

Los **números** representan cantidades conocidas y determinadas, mientras que las **letras** representan toda clase de cantidades, sean conocidas o desconocidas.

Las **cantidades conocidas** se expresan con las primeras letras del alfabeto: *a, b, c, d ...* y las **cantidades desconocidas** con las últimas letras del alfabeto: *u , v , w , x , y , z.*

Una misma letra puede representar distintos valores siempre y cuando se diferencien por medio de comillas (por ejemplo: a', a'', a''', que se leen **a prima**, **a segunda**, **a tercera**), o de subíndices (por ejemplo: a_1, a_2, a_3, que se leen a **subuno**, a **subdos**, a **subtres**).

CARACTERÍSTICAS DEL ÁLGEBRA

En Álgebra, para lograr la **generalización**, las cantidades se representan por medio de **letras**, que pueden **representar los valores**. De tal modo, *a* representa el **valor que** le asignemos, el cual puede ser 20 o más de 20 o menos de 20, a nuestra elección, aunque conviene advertir que cuando en un problema le asignamos a una letra un valor determinado, esa letra no puede representar, en el mismo problema, otro valor distinto.

FÓRMULAS ALGEBRAICAS

Estas surgen como consecuencia de la generalización que implica la representación de cantidades por medio de letras.

Una **fórmula algebraica** es la representación, por medio de letras, de una regla o de un principio general.

Por ejemplo, la Geometría enseña que el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

Luego, llamando *A* al área del rectángulo, *b* a la base y *h* a la altura, la fórmula

$$A = b \times h$$

representará de un modo general el área de cualquier rectángulo, pues ésta se obtendrá con sólo sustituir *b* y *h* en la fórmula anterior por sus valores en el caso dado: si la base de un rectángulo es 3 m y su altura 2 m, su área será:

$$A = b \times h = 3m \times 2m = 6m^2$$

El área de otro rectángulo cuya base fuera 8 m y su altura $3\frac{1}{2}$ m sería:

$$A = b \times h = 8 \text{ m} \times 3\frac{1}{2} \text{ m} = 28 \text{m}^2$$

SIGNOS ALGEBRAICOS

En Álgebra se utilizan tres clases de signos: de operación, de relación y de agrupación.

Signos de Operación

En Álgebra se verifican las mismas operaciones que en Aritmética: suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces, mismas que se indican con signos.

El **signo de la suma** es + y se lee **más:**

a + *b* se lee "*a* más *b*"

El **signo de la** resta es - y se lee **menos:**

a - *b* se lee "*a* menos *b*"

El **signo de la multiplicación** es × y se lee **multiplicado por**: *a* × *b* se lee "*a* multiplicado por *b* ". Aquí también suele emplearse **un punto** entre los factores en lugar de la × e igualmente se indica la multiplicación colocando los factores entre paréntesis: *a* . *b* y (*a*)(*b*) equivalen a *a* × *b.*

Entre factores literales o entre un factor numérico y uno literal **suele omitirse** el signo de multiplicación: *abc* equivale a *a* × *b* × *c*; 5*xy* equivale a 5 × *x* × *y* .

El **signo de la división** es ÷ y se lee **dividido entre:** *a* ÷ *b* se lee "*a* dividido entre *b* ". También se indica separando el dividendo y el divisor por una raya horizontal:

$$\frac{m}{n} \text{ equivale a } m \div n$$

El **signo de la elevación a potencia es el exponente,** un número pequeño colocado arriba y a la derecha de una cantidad, que indica las veces en que dicha cantidad (llamada **base**) se toma como factor:

$$a^3 = aaa; b^5 = bbbbb$$

Si una letra **no tiene exponente,** este es la **unidad:** ***a* equivale a *a*^{1}; *mnx* equivale a:**

$$m^1 n^1 x^1$$

El **signo de raíz** es $\sqrt{\ }$ también llamado signo radical, y bajo éste se coloca la cantidad a la que se le extrae: la raíz $\sqrt{a}$ equivale a **raíz** cuadrada de a, o sea la cantidad que elevada al cuadrado reproduce la cantidad a ; $\sqrt[3]{b}$ equivale a raíz cúbica de *b*, o sea la cantidad que elevada al cubo reproduce la cantidad *b*.

Coeficiente

En el producto de dos factores, cualquiera de ellos es **coeficiente** del otro factor.

En el producto 3*a* el factor 3 es coeficiente del factor *a* e indica que el factor *a* se toma como sumando tres veces, o sea 3*a* = *a* + *a* + *a* ; en el producto 5*b*, el factor 5 es coeficiente de *b* e indica que:

$$5b = b + b + b + b + b$$

A éstos se les conoce como **coeficientes numéricos.**

En el producto *ab*, el factor *a* es coeficiente del factor *b*, e indica que el factor *b* se toma como sumando *a* veces, o sea:

$$ab = b + b + b + b \ldots a \text{ veces}$$

A éste se le conoce como **coeficiente literal.**

En un producto de más de dos factores, uno o varios de ellos son el coeficiente de los restantes: en el producto *abcd, a* es el coeficiente de *bcd* ; *ab* es el coeficiente de *cd* ; *abc* es el coeficiente de *d.*

Si una cantidad **no tiene coeficiente numérico**, su coeficiente es la **unidad**: *b* equivale a 1*b* ; *abc* equivale a 1*abc* .

Signos de relación

Indicar la relación que existe entre dos cantidades, y los principales son:

=, que se lee **igual a**: *a* = *b* se lee "*a* igual a *b* ".

>, que se lee **mayor que**: *x* + *y* > *m* se lee "*x* + *y* mayor que *m* ".

<, que se lee **menor que**: *a* < *b* + *c* se lee "*a* menor que *b* + *c* ".

Signos de Agrupación

Indican que la operación colocada entre ellos debe efectuarse primero, y son: el paréntesis ordinario ( ), el paréntesis angular o corchete [ ], las llaves { } y la barra o vínculo ——.

Así, (*a* + *b*)*c* indica que el resultado de la suma de *a* y *b* debe multiplicarse por *c* ; [*a* - *b*] *m* indica que la diferencia entre *a* y *b* debe multiplicarse por *m* ; {*a* + *b* } ÷ {*c* - *d* } indica que la suma de *a* y *b* debe dividirse entre la diferencia de *c* y *d*.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN ARITMÉTICA Y EN ÁLGEBRA

A continuación se expone un ejemplo que resalta la diferencia entre el método aritmético y el algebraico para la resolución de problemas, basado este último en la **notación** algebraica y en la **generalización** que ésta implica:
Las edades de *A* y *B* suman 48 años. Si la edad de *B* es 5 veces la edad de *A*, ¿qué edad tiene cada uno?

Método Aritmético

Edad de *A* más edad de *B* = 48 años

Como la edad de *B* es 5 veces la de *A*, tendremos:

Edad de *A* más 5 veces la edad de *A* = 48 años

O sea, 6 veces la edad de *A* = 48 años

luego, Edad de *A* = 8 años

Edad de *B* = 8 años × 5 = 40 años

Método Algebraico

Como la edad de *A* es una cantidad desconocida, se representa como x .

Siendo x = edad de *A*

Entonces $5x$ = edad de *B*

Como ambas edades suman 48 años, tendremos:

$x + 5x = 48$ años

o sea, $6x = 48$ años

Si 6 veces x equivale a 48 años, x valdrá la sexta parte de 48 años,

o sea x = 8 años, edad de *A*

Entonces $5x$ = 8 años × 5 = 40 años, edad de *B*

PROBLEMA SOBRE CANTIDADES NEGATIVAS Y POSITIVAS

1) Un hombre cobra $130, paga una deuda de $80 y luego hace compras por un valor de $95. ¿Cuánto tiene?

Si tenía $130 y pagó $80, se quedó con $50. Después gastó $95, y como sólo tiene $50 incurre en una deuda de $45. Por lo tanto actualmente tiene - $45.

ELECCIÓN DEL SENTIDO POSITIVO

La fijación del sentido **positivo** en cantidades que pueden tomarse en dos sentidos opuestos es arbitraria, por lo que depende de nuestra voluntad; es decir, podemos tomar como sentido positivo el que queramos; pero una vez fijado, el **sentido opuesto** será el negativo.

Si tomamos como sentido **positivo** el camino recorrido a la derecha de un punto, entonces el recorrido a la **izquierda** de ese punto será negativo, pero nada nos impide tomar como positivo el recorrido a la **izquierda** del punto, y en tal caso el camino recorrido a la derecha del punto sería negativo.

De este modo, si sobre el segmento *AB* tomamos como **positivo** el sentido de *A* hacia *B*, el sentido de *B* hacia *A* sería negativo, pero si fijamos como sentido positivo de *B* hacia *A*, el sentido de *A* hacia *B* sería negativo**.**

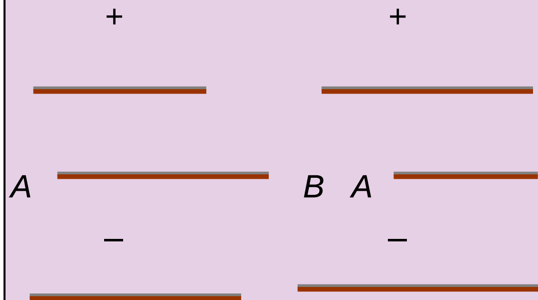


Figura 1

El **cero** representa la ausencia de cantidad; por ejemplo, el estado económico de una persona por 0 equivale a decir que no tiene haber ni deudas.

Las cantidades positivas son **mayores que 0** y las negativas **menores que 0.**

Así, + 3 es una cantidad tres unidades **mayor** que 0; + 5 es cinco unidades **mayor** que 0, mientras que - 3 es tres unidades **menor** que 0 y - 5 es cinco unidades menor que 0.

Entre dos **cantidades positivas**, es **mayor la de más alto valor absoluto** (+ 5 es mayor que + 3), mientras que entre **dos cantidades negativas** es **mayor la de menor valor absoluto:** - 3 es mayor que - 5; - 9 es menor que - 4.

CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS

En Álgebra, al estudiar cantidades que pueden tomarse en **sentidos opuestos** o que son de condición o **modo de ser opuestos**, se expresa el sentido, condición o modo de ser (valor relativo) de la cantidad por medio de los **signos** + y -, anteponiendo el **signo** + a las cantidades tomadas en un sentido determinado (**cantidades positivas**) y el **signo** - a las tomadas en **sentido opuesto** al anterior (**cantidades negativas**).

Así, el **haber** se designa con el signo + y el deber con el signo -. Si una persona tiene Z100 de **haber**, diremos que tiene + $100, y si debe $100, diremos que tiene -$100 de **deuda.**

Por otra parte, en un termómetro los grados sobre cero se expresan con el signo + y los **grados bajo cero** con el signo -: si el termómetro marca 10° sobre cero escribiremos + 10°, y si marca 8° bajo cero escribiremos - 8°.

En otro caso, el camino recorrido a la **derecha o hacia arriba de un punto** se define con el signo + y a la **izquierda o hacia abajo** de un punto con el signo _: si recorremos 200 m a la derecha de un punto dado, diremos que hemos recorrido + 200 m, y si recorremos 300 m a la izquierda escribiremos - 300 m.

El tiempo transcurrido **después de Cristo** se considera positivo y **antes de Cristo**, negativo: + 150 años significa 150 años D. C. y - 78 años significa 78 años a. C.

En un poste clavado en el suelo, representamos con el signo + la porción que se halla del suelo **hacia arriba** y con el signo - la porción del suelo **hacia abajo**: para expresar que la longitud del poste del suelo hacia arriba mide 15 m, escribiremos + 15 m, y si la porción clavada en el suelo es de 8 m, escribiremos - 8 m.

La **latitud norte** se expresa con el signo + y la **latitud sur** con el signo -; la **longitud este** se considera positiva y la **longitud oeste** negativa.

Por lo tanto, un punto de la Tierra cuya situación geográfica sea: + 45° de longitud y -15° de latitud se hallará 45° al este del primer meridiano y a 15° bajo el Ecuador.

EJERCICIOS

1.Tenía $200. Cobré $56 y pagué deudas por $189. ¿Cuánto tengo? **R.** +67 dólares

2. Compré ropa por un valor de 665 dólares y alimentos por 1,178 dólares. Si después recibo 2,280 dólares, ¿cuál es mi estado económico? **R.** +437 dólares

3.Tenía $20. Pagué $15 que debía, después cobré $40 y luego hice gastos por $75. ¿Cuánto tengo? **R.** – 30 dólares

4. Enrique hace una compra por $67, después recibe $72, hace otra compra por $16 y después recibe $2. Expresar su estado económico. R. – 9 dólares

5. Después de recibir 200 dólares hago tres gastos por 78, 81 y 93 dólares. Recibo 41 dólares y luego hago un nuevo gasto por 59. ¿Cuánto tengo?

R. – 70 dólares

6. Pedro tenía tres deudas por $45, $66 y $79. Recibe $200 y hace un gasto de $10. ¿Cuánto tiene?

R. 0

7. Antonio debía 60 dólares y recibió 320. ¿Cuál es su estado económico?

R. +260 dólares

8. Un trabajador que tenía 1,170 dólares hizo una compra por valor de 1,515. Expresa su estado económico actual.

R. – 345 dólares

PROBLEMA

Son las 6 a. m. y el termómetro marca - 4°. Para las 9 a. m. sube 7° y desde esta hora hasta las 5 p. m. baja 11°. ¿Cuál es la temperatura a las 5 p.m.?

A las 6 a. m. marca - 4° y para las 9 a. m. sube 7°, por lo que contamos siete divisiones de la escala desde - 4° hacia arriba y tendremos 3° sobre cero (+ 3°); como desde esta hora hasta las 5 p. m. ha bajado 11°, contando 11 divisiones de la escala desde + 3° hacia abajo llegaremos a - 8°. Por tanto, a las 5 p. m. la temperatura es de - 8°.

EJERCICIOS

1. A las 3 a. m. el termómetro marca - 8° y al mediodía + 5°. ¿Cuántos grados ha subido la temperatura?

R. 13º

2. A las 8 a. m. el termómetro marca - 4°; a las 9 a. m. sube 7°; a las 4 p. m. sube 2° más y a las 11 p. m. baja 11°. Expresar la temperatura a las 11 p. m. **R.** –6º

3. El 5 de mayo la ubicación de un viajero es 18° de longitud este y 65° de latitud norte. Del día 5 al 31 recorre 3° hacia el este y se acerca 4° al Ecuador. Expresar su situación para el día 31. **R.** Long. + 21º; lat. +61º.

4. Una ciudad fundada en el año 75 a. C. fue destruida 135 años después. ¿Cuál es la fecha de su destrucción?. **R.** 60 años

5. A las 9 a. m. el termómetro marca + 12° y de esta hora a las 8 p. m. baja 15°. Expresar la temperatura a las 8 p.m. **R.** –3º

6. A las 6 a. m. el termómetro marca - 3°. A las 10 a.m. la temperatura es 8° más alta y desde esta hora hasta las 9 p. m. baja 6°. Expresar la temperatura a las 9 p. m. **R.** –1º

7. A la 1 p. m. el termómetro marca + 15° y a las 10 p. m. - 3° ¿Cuántos grados ha bajado la temperatura? **R.** –18º

8. A las 6 a. m. el termómetro marca - 8°. De las 6 a. m. a las 11 a. m. sube a razón de 4° por hora. Expresar la temperatura a las 7 a. m., a las 8 a. m. y a las 11 a. m.

R. –4º,0º,+12º

PROBLEMA

Un automóvil recorre 40 metros en línea recta a la derecha de un punto *A* y luego retrocede en la misma dirección a razón de 15 m por segundo. Expresar a qué distancia se halla del punto *A* al cabo del 1°, 2°, 3° y 4° segundo.

Si el automóvil ha recorrido 40 m a la derecha del punto *A*; su posición es + 40 m tomando como positivo el sentido de izquierda a derecha.

Empieza a moverse de la derecha hacia la izquierda (sentido negativo) a razón de 15 m. por segundo, así que en el primer segundo se acerca 15 m al punto *A*, y como estaba a 40 m de ese punto, se halla a 40 - 15 = 25 m a la derecha de *A*; luego, su posición es + 25 m.

En el 2° segundo se acerca otros 15 m al punto *A*, por lo que se hallará a 25 - 15 = 10 m a la derecha de *A*; su posición ahora es + 10 m.

En el 3er. segundo recorre otros 15 m hacia *A*, y como estaba a 10 m a la derecha de *A*, habrá llegado al punto *A* (con 10 m) y recorrido 5 m a la izquierda de *A*, es decir, 10 - 15 = -5 m. Su posición ahora es - 5 m.

En el 4° segundo recorre otros 15 m más hacia la izquierda, y como ya estaba 5 m a la izquierda de *A*, se hallará al cabo del 4° segundo a 20 m a la izquierda de *A*, o sea - 5 - 15 = - 20 m; su posición ahora es - 20 m.

EJERCICIOS

Tomar el sentido positivo: de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba.

1. Un camión recorre 72 m a la derecha de *A* y empieza a retroceder en la misma dirección, a razón de 30 m por seg. Expresar su distancia del punto *A* al cabo del 1°, 2°, 3° y 4° seg.

R. +42 m ; + 12 m; -18 m; -48 m

2. Un auto recorre 120 km a la izquierda del punto *M* y luego retrocede a razón de 60 km por hora. ¿A qué distancia se halla del punto *M* al cabo de la 1ª, 2ª, 3ª y 4ª hora?

R. – 60 km; 0; + 60 km; + 120 km

3. Si corro a la izquierda del punto *B* a razón de 6 m por segundo, ¿a qué distancia de *B* me hallaré al cabo de 11 segundos?

R. – 66 m

4. Dos corredores parten del punto *A* en sentidos opuestos. El que corre hacia la izquierda de *A* va a 8 m por seg y el que corre hacia la derecha va a 9 m por seg. Expresar sus distancias del punto *A* al cabo de 6 seg.

R. – 48 m; + 54 m

5. Partiendo de la línea de salida hacia la derecha un corredor da dos vueltas a una pista de 400 m de longitud. Si yo parto del mismo punto y doy 3 vueltas a la pista en sentido contrario, ¿qué distancia hemos recorrido?

R. Corredor + 800 m; yo –1200 m

6. Un poste de 40 pies de longitud tenía 15 pies sobre el suelo. Días después se introdujeron 3 pies más. Expresar la parte que sobresale y la enterrada.

R. +12 pies; - 28 pies

7. Un automóvil recorre 55 m a la derecha del punto *A* y luego en la misma dirección retrocede 52 m. ¿A qué distancia se halla de *A*? **R.** + 3 m

8. Un automóvil recorre 32 m a la izquierda del punto *A* y luego retrocede en la misma dirección 15 m. ¿A qué distancia se halla de *A*? **R.** –17 m

9. Un automóvil recorre 35 m a la derecha de *B* y luego retrocede en la misma dirección 47 m. ¿A qué distancia se halla de *B*?

R. – 12 m

10. Un automóvil recorre 39 m a la izquierda de *M* y luego retrocede en la misma dirección 56 m. ¿A qué distancia se halla de *M*? **R.** + 17 m

11. A partir del punto *B* una persona recorre 90 m a la derecha y retrocede, en la misma dirección, primero 58 m y luego 36 m. ¿A qué distancia se halla de *B*? **R.** – 4 m

12. Expresar la situación de un automóvil que se halla 32 m a la derecha del punto *A* y luego 16 m a la izquierda de *A.*

R. + 32 m; - 16 m

13. Expresar que la parte de un poste que sobresale del suelo es 10 m y tiene enterrados 4 m.

R. + 10 m; -4 m

VALOR ABSOLUTO Y VALOR RELATIVO

El valor absoluto de una cantidad es el número que representa esa cantidad prescindiendo del signo o sentido, y el valor relativo es el sentido de la cantidad, representado por el signo.

De este modo, el valor absoluto de + $8 es $8, y su valor relativo es el haber, expresado por el signo +; el valor absoluto de - $20 es $20, y su valor relativo es la deuda, expresada por el signo -.

Las cantidades + 7° y - 7° tienen el mismo valor absoluto, pero su valor relativo es opuesto, pues el primero expresa grados sobre cero y el segundo bajo cero; - 8° y - 11° tienen el mismo valor relativo (grados bajo cero) pero distinto valor absoluto.

El valor absoluto de una cantidad algebraica cualquiera se representa colocando el número que corresponda a dicho valor entre dos líneas verticales: el valor absoluto de + 8 se representa:

$$|8|$$

DIFERENCIAS ENTRE CANTIDADES ARITMÉTICAS Y ALGEBRAICAS

Las cantidades aritméticas sólo expresan el valor absoluto de las cantidades representado por los números, pero no nos dicen su sentido o valor relativo.

Cuando escribimos en Aritmética que una persona posee $5, sólo tenemos la idea del valor absoluto $5 de esta cantidad, pero con esto no sabemos si la persona tiene $5 de haber o de deuda. Al escribir que el termómetro marca 8°, no sabemos si son sobre cero o bajo cero.

Las cantidades algebraicas expresan el valor absoluto de las cantidades además de su sentido o valor relativo por medio del signo.

Si una persona tiene + $5 expresamos el valor absoluto $5 y el sentido o valor relativo (haber) expresado por el signo +; al escribir -$8 expresamos el valor absoluto $8 y el sentido o valor relativo (deuda) expresado por el signo -; al escribir que el termómetro marca + 8° tenemos el valor absoluto 8° y el valor relativo (sobre cero) expresado por el signo +, y al expresar - 9° tenemos el valor absoluto 9° y el valor relativo (bajo cero) expresado por el signo -.

En Álgebra los signos + y - tienen dos aplicaciones: una para indicar las operaciones de suma y resta, y la otra para indicar el sentido o condición de las cantidades. Esta doble aplicación se distingue porque cuando los signos + ó - tienen la significación de suma o resta, van entre términos o expresiones incluidas en paréntesis, como por ejemplo en (+ 8) + (- 4) y en (- 7) - (+ 6).

Si preceden a un término, ya sea literal o numérico, expresan el sentido positivo o negativo, como por ejemplo en - *a*, + *b*, + 7, - 8.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA SERIE ALGEBRAICA DE LOS NÚMEROS

Teniendo en cuenta que en Álgebra el 0 representa la ausencia de cantidad, que las cantidades positivas son mayores que 0 y las negativas menores que 0, y que las distancias medidas hacia la **derecha** o hacia **arriba** de un punto se consideran positivas y hacia la **izquierda** o hacia **abajo** son **negativas**, la serie algebraica de los números se puede representar de este modo:

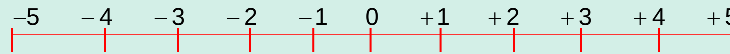


Figura 2

NOMENCLATURA ALGEBRAICA

Una **expresión algebraica** es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.

$$a, 5x, \sqrt{4a(a+b)c}, \frac{(5x-3y)a}{x^2}$$

Un **término** es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios símbolos **no separados** entre sí por el signo + ó –.

$$a, 3b\,2xy, \frac{4a}{3x}$$

Un término consta de cuatro elementos: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado.

De acuerdo con su **signo**, son **términos positivos** los que van precedidos del signo + y **negativos** los precedidos del signo –: + *a*, + 8*x*, + 9*ab* son términos positivos, $y - x, -5bcy - \frac{3a}{2b}$ son términos negativos.

El signo + suele omitirse delante de los términos positivos, con lo que *a* equivale a + *a* y 3*ab* equivale a + 3*ab*.

Por tanto, cuando un término no va precedido de ningún signo es positivo.

Como ya se dijo, el **coeficiente** es uno cualquiera (generalmente el primero) de los factores del término. Así, en el término 5*a* el coeficiente es 5; en $-3a^2x^3$ el coeficiente es – 3.

Las **letras** que hay en el término constituyen la parte literal. Así, en 5*xy* la parte literal es *xy*; en $\frac{3x^2y^4}{2ab}$ la parte literal es $\frac{x^3y^4}{ab}$.

El **grado** de un **término** pude ser absoluto o con relación a una letra.

El **grado absoluto** es la suma de los exponentes de sus factores literales. Así el término 4*a* es de **primer grado** que el exponente del factor literal a es de 1; el término *ab* es de **segundo grado** porque la suma de los exponentes de sus factores literales es de 1+1=2; el término a^2b es de **tercer grado** porque la suma de los exponentes de sus factores literales es 2+1=3; $5a^4b^3c^3$ es de noveno grado porque la suma de los exponentes de sus factores literales es 4+3+2+=9.

El **grado** de un término c**on relación a una letra** es el exponente de dicha letra. Así, el término bx^3 es de **primer grado** con relación a *b* y de **tercer grado** con relación a *x*;$4x^2y^4$ es de **segundo grado** con relación a *x* y de **cuarto grado** con relación a *y*.

TIPOS DE TÉRMINOS

Un término **entero** no tiene denominador literal, como $5a$, $6a^4b^3$, $\frac{2a}{5}$

Un término **fraccionario** sí tiene denominador literal, como $\frac{3a}{b}$

Un término **racional** no tiene radical, como en los ejemplos anteriores, y uno **irracional** sí tiene radical, como $\sqrt{ab}, \frac{3b}{\sqrt[3]{2a}}$

Los términos **homogéneos** tienen el mismo grado absoluto.

$4x^4y$ y $6x^2y^3$ son homogéneos porque ambos son de quinto grado absoluto.

Los términos **heterogéneos** son de distinto grado absoluto, como $5a$, que es de primer grado, y $3a^2$, de segundo grado.

EJERCICIOS

1. Escribe un término de dos factores literales de cuarto grado con relación a la x; otro de cuatro factores literales de séptimo grado con relación a la y; y uno más de cinco factores literales que sea de décimo grado con relación a la b.

2. Menciona el grado de los términos siguientes respecto de cada uno de sus factores literales:

$-a^3b^2$, $-5x^4y^3$, $6a^2bx^3$, $-4abcy^2$, $10m^2n^3b^4c^5$

3. De los términos siguientes escoge cuatro homogéneos y tres heterogéneos:

$-4a^3b^2$, $6ab^3$, $-x^5$, $6x^4y$, $-2a^3x^4$, $-ab^5$, $4abcx^2$, $-2ac$

4. Escribe tres términos enteros; dos fraccionarios; dos positivos, enteros y racionales; tres negativos, fraccionarios e irracionales.

5. Escribe un término de cada uno de los grados absolutos siguientes: de tercer grado, quinto grado, undécimo grado, décimo quinto grado y vigésimo grado.

6. Señala el grado absoluto de los términos siguientes:

$5a$, $-6a^2b$, a^2b^2, $-5a^3b^4c$, $8x^5y^6$, $4m^2n^3$, $-xyz^5$

7. Menciona de qué clase son los términos siguientes, atendiendo al signo, si tienen o no denominador y si tienen o no radical:

$5a^2$, $-4a^3b$, $\frac{2a}{3}$, $\frac{5b^2}{6}$, $\sqrt{a}$, $-\sqrt[3]{5b^2}$, $\frac{\sqrt{a}}{6}$, $-\frac{4a^2b^3}{\sqrt{6a}}$

CLASIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

El **monomio** consta de un solo término; por ejemplo:

$$3a, -5b, \frac{x^{2y}}{4a^3}$$

El **polinomio** consta de más de un término; por ejemplo:

$$a+b, a+x-y, x^3+2x^2+x+7$$

Un **binomio** es un polinomio que consta de dos términos; por ejemplo:

$$a+b, x-y \frac{a^2}{3} - \frac{5mx^4}{6b^2}$$

Un **trinomio** es un polinomio que consta de tres términos; por ejemplo:

$$a+b+c, x^2 5x+6, 5x^2-6y^3+\frac{a^2}{3}$$

El **grado** de un polinomio puede ser **absoluto** y **con relación a una letra.**

El **grado absoluto** es el de su término de mayor grado.

Así, en el polinomio:

$$x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x$$

el primer término es de cuarto grado; el segundo de tercer grado; el tercero de segundo grado, y el último de primer grado; por tanto, el **grado absoluto del polinomio** es el **cuarto**.

El **grado** de un polinomio **con relación a una letra** es el mayor exponente de dicha letra en el polinomio.

Así, el polinomio $a^6 + a^4x^2 - a^2x^4$ es de **sexto grado** con relación a la a y de **cuarto grado** con relación a la x .

EJERCICIOS

a) Menciona el grado absoluto de los siguientes polinomios:

1. $x^3 + x^2 + x$ **R.** 3er. grado

2. $5a - 3a^2 + 4a^4 - 6$ **R.** 4º. grado

3. $a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4$

R. Para a 3er. grado, para b 4º.grado

b) Señala el grado de los siguientes polinomios con relación a cada una de sus letras:

1. $a^3 + a^2 - ab^3$ **R.** a y b 3er grado

2. $x^4 + 4x^3 - 6x^2y^4 - 4xy^5$

R. x, 4º. grado; y 5º. grado.

3. $6a^4b^7 - 4a^2x + ab^9 - \text{er}5a^3b^8x^6$

R. a, 4º. Grado, b, 9º.grado, x, 6º. grado

CLASES DE POLINOMIOS

Un polinomio es **entero** cuando ninguno de sus términos tiene denominador literal, como $x^2 + 5x - 6$; $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{1}{5}$; es **fraccionario** cuando alguno de sus términos tiene letras en el denominador, como $\frac{a^2}{b} + \frac{b}{c} - 8$; es **racional** cuando no contiene radicales, como en los ejemplos anteriores; es **irracional** cuando contiene radical, como $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{abc}$; es **homogéneo** cuando todos sus términos son del mismo grado absoluto, como $4a^3 + 5a^2b + 6ab^2 + b^3$, y es **heterogéneo** cuando sus términos no son del mismo grado, como $x^3 + x^2 + x - 6$.

Un polinomio **completo** con relación a una letra contiene todos los exponentes sucesivos de dicha letra, del más alto al más bajo que tenga dicha letra en el polinomio. Así, el polinomio $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 3x$ es completo respecto de la x, porque contiene todos los exponentes sucesivos de la x, desde el más alto, 5, hasta el más bajo, 1, o sea 5, 4, 3, 2, 1; el polinomio $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ es completo respecto de a y b.

En un polinomio **ordenado** con respecto a una letra los exponentes de una letra escogida, llamada **letra ordenatriz,** van aumentando o disminuyendo.

Así, el polinomio $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 8$ está en orden **descendente** con relación a la letra ordenatriz x; el polinomio $a^5 - 2a^4b + 6a^3b^2 - 5a^2b^3 + 3ab^4 - b^5$ está en orden **descendente** respecto de la letra ordenatriz a y en orden **ascendente** respecto de la letra ordenatriz b.

Para **ordenar** un polinomio se escriben sus términos de modo que los exponentes de una letra ordenatriz queden en orden descendente o ascendente. Para ordenar el polinomio $- 5x^3 + x^5 - 3x + x^4 - x^2 + 6$ en orden descendente con relación a x se escribe $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 - 3x + 6$.

Para ordenar el polinomio $x^4y - 7x^2y^3 - 5x^5 + 6xy^4 + y^5 - x^3y^2$ en orden ascendente con relación a x se escribe:

$$y^5 + 6xy^4 - 7x^2y^3 - x^3y^2 + x^4y - 5x^5$$

Un término independiente de un polinomio con relación a una letra es aquél que no tiene dicha letra.

En el polinomio $a^3 - a^2 + 3a - 5$ el término independiente con relación a la a es 5, porque no tiene a; en $x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 9x + 20$ el término independiente es 20; en $a^3 - a^2b + 3ab^2 + b^3$ el término independiente con relación a la a es b^3, y el término independiente con relación a la b es a^3. Un término independiente con relación a una letra tiene esa letra con exponente cero porque, como se verá más adelante, toda cantidad elevada a cero equivale a 1.

En el primer ejemplo, $- 5$ equivale a $- 5a^0$, y en el último ejemplo, b^3 equivale a a^0b^3.

EJERCICIOS

1. Escribe un trinomio de segundo grado respecto de la x; un polinomio de quinto grado respecto de la a; un polinomio de noveno grado respecto de la m.

2. De los siguientes polinomios escoge dos homogéneos y dos heterogéneos.

a) $3a^2b + 4a^3 - 5b^3$
b) $a^4 - a^3b + a^2b^2 + ab^3$
c) $x^5 - bx^4 + abx^3 + ab^3x^2$
d) $4a - 5b + 6c^2 - 8d^3 - 6$
e) $y^5 - ay^4 + a^2y^3 - a^3y^2 - a^4y + y^5$
f) $- 6a^3b^4 - 5a^6b + 8a^2b^5 - b^7$

3. De los siguientes polinomios señala cuáles son completos y respecto de cuáles letras:

a) $a^4 - a^2 + a - a^3$
b) $5x^4 - 8x^2 + x - 6$
c) $x^4y - x^3y^2 + x^2y^3 - y^4$
d) $m^5 - m^4 + m^3 - m + 5$
e) $y^5 - by^4 + b^2y^3 - b^3y^2 + b^4y$

4. Escribe tres polinomios homogéneos de tercer grado absoluto; cuatro de quinto grado absoluto y dos polinomios completos.

5. Coloca los siguientes polinomios respecto de cualquier letra en orden descendente:

a) $m^2 + 6m - m^3 + m^4$
b) $6ax^2 - 5a^3 + 2a^2x + x^3$
c) $- a^2b^3 + a^4b + a^3b^2 - ab^4$
d) $a^4 - 5a + 6a^3 - 9a^2 + 6$
e) $- x^8y^2 + x^{10} + 3x^4y^6 - x^6y^4 + x^2y^8$
f) $- 3m^{15}n^2 + 4m^{12}n^3 - 8m^6n^5 - 10m^3n^6 + n^7 - 7m^9n^4 + m^{18}n$

6. Coloca los siguientes polinomios respecto de cualquier letra en orden ascendente:

a) $a^2 - 5a^3 + 6a$
b) $x - 5x^3 + 6x^2 + 9x^4$
c) $2y^4 + 4y^5 - 6y + 2y^2 + 5y^3$
d) $a^2b^4 + a^4b^3 - a^6b^2 + a^8b + b^5$
e) $y^{12} - x^9y^6 + x^{12}y^4 - x^3y^{10}$

7. Considerando si tienen o no denominador literal y si tienen o no radical, menciona de qué clase son los polinomios siguientes:

a) $a^3 + 2a^2 - 3a$
b) $\frac{a^4}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - a$
c) $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 2c + \sqrt{d}$
d) $4a + \frac{\sqrt{a}}{2} - 6b + 4$

8. Escribe un polinomio de tercer grado absoluto; de quinto grado absoluto; de octavo grado absoluto; de décimo quinto grado absoluto.

TÉRMINOS SEMEJANTES

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la **misma parte** literal, es decir, cuando tienen **iguales letras** afectadas de **iguales exponentes**:

$2a$ y a ; $-2b$ y $8b$;
$-5a^3b^2$ y $-8a^3b^2$; x^{m+1} y $3x^{m+1}$

Por otra parte, los términos $4ab$ y $-6a^2b$ no son semejantes, porque aunque tienen letras iguales, éstas no tienen los mismos exponentes, ya que la *a* del primero tiene de exponente 1 y la *a* del segundo 2.

Además, los términos $-bx^4$ y ab^4 no son semejantes, porque aunque tienen los mismos exponentes, las letras no son iguales.

La **reducción de términos semejantes** es una operación que tiene por objeto convertir en un solo término dos o más términos semejantes, y en ella se pueden dar los tres casos siguientes:

1) Reducción de dos o más términos semejantes del mismo signo.

Regla

Se suman los coeficientes, poniendo delante de esta suma el mismo signo que tienen todos, y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos

1) $5x + x + 2x = 8x$

2) $-a^2 - 9a^2 = -10a^2$

3) $3a^{x-2} + 5a^{x-2} = 8a^{x-2}$

4) $-4a^{m+1} - 7a^{m+1} = -11a^{m+1}$

5) $\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}ab = \frac{7}{6}ab$

6) $-\frac{1}{3}xy - \frac{2}{3}xy = -xy$

7) $-m - 3m - 6m - 5m = -15m$

8) $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{8}x^2y = \frac{7}{8}x^2y$

EJERCICIOS

Reducir:

1. $-8m - m$ **R.** $-9m$

2. $-9m - 7m$ **R.** $-16m$

3. $4a^x + 5a^x$ **R.** $9ax$

4. $x + 2x$ **R.** $3x$

5. $8a + 9a$ **R.** $17a$

6. $11b + 9b$ **R.** $20b$

7. $-b - 5b$ **R.** $-6b$

8. $-7m - 8m - 9m$ *R* **R.** $-24m$

9. $-a^2b - a^2b - 3a^2b$ **R.** $-5a^2b$

10. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$ **R.** a

11. $\frac{3}{5}ab + \frac{1}{2}ab$ **R.** $\frac{7}{10}ab$

12. $\frac{1}{3}xy + \frac{1}{6}xy$ **R.** $\frac{1}{2}xy$

13. $-\frac{1}{5}xy - \frac{4}{5}xy$ **R.** $-xy$

14. $-\frac{5}{6}a^2b - \frac{1}{8}a^2b$ **R.** $-\frac{23}{24}a^2b$

15. $-a - \frac{7}{8}a$ **R.** $-\frac{15}{8}a$

16. $8a + 9a + 6a$ **R.** $23a$

17. $15x + 20x + x$ **R.** $36x$

18. $6a^{x+1} + 8a^{x+1}$ **R.** $14a^{x+1}$

19. $-m^{x+1} - 5m^{x+1}$ **R.** $-6m^{x+1}$

20. $-3a^{x-2} - a^{x-2}$ **R.** $-4a^{x-2}$

21. $a^x + 3a^x + 8a^x$ R. $12a^x$

R. $12a^x$

22. $-X - \frac{2}{3}X - \frac{1}{6}X$ **R.** $-\frac{11}{6}x$

REGLA

Reducción de dos términos semejantes de distinto signo.

Se restan los coeficientes, poniendo delante de esta diferencia el signo del mayor, y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos

1) $2a - 3a = -a$

2) $18x - 11x = 7x$

3) $-20ab + 11ab = -9ab$

4) $-8a^x + 13a^x = 5a^x$

5) $25a^{x+1} - 54a^{x+1} = -29a^{x+1}$

6) $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}a = -\frac{1}{6}a$

7) $-\frac{3}{7}a^2b + a^2b = \frac{4}{7}a^2b$

8) $-\frac{5}{6}a^{x+1} + \frac{3}{4}a^{x+1} = -\frac{1}{12}a^{x+1}$

De la regla anterior se deduce que dos términos semejantes de iguales coeficentes y de signo contrario se anulan.

Así:

$$-8ab + 8ab = 0$$

$$\frac{2}{5}x^2y - \frac{2}{5}x^2y = 0$$

EJERCICIOS

Reducir

1. $-m^2n + 6m^2n$ **R.** $5m^2n$

2. $-15xy + 40xy$ **R.** $25xy$

3. $55a^3b^2 - 81a^3b^2$ **R.** $26a^3b^2$

4. $-x^2y + x^2y$ **R.** 0

5. $-9ab^2 + 9ab^2$ **R.** 0

6. $6a - 8a$ **R.** $-2a$

7. $9ab - 15ab$ **R.** $-6ab$

8. $-am + \frac{3}{5}3am$ **R.** $-\frac{2}{5}am$

9. $\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}a$ **R.** $-\frac{1}{4}a$

10. $15ab - 9ab$ **R.** $6ab$

11. $2a - 2a$ **R.** 0

REGLA

Reducción de más de dos términos semejantes de signos distintos.

Se reducen a un sólo término todos los positivos, se reducen a un solo término todos los negativos y a los dos resultados se les aplica la regla del caso anterior.

Ejemplos

1) Reducir $5a - 8a + a - 6a + 21a$

Reduciendo los positivos: $5a + a + 21a = 27a$

Reduciendo los negativos: $-8a - 6a = -14a$

Aplicando a estos resultados $27a$ y $-14a$, la regla del caso anterior, se tiene: $27a - 14a = 13a$

Esta reducción también suele hacerse término a término, de esta manera:

2) Reducir $-\frac{2}{5}bx^2 + \frac{1}{5}bx^2 + \frac{3}{4}bx^2 - 4bx^2 + bx^2$

Reduciendo los positivos: $\frac{1}{5}bx^2 + \frac{3}{4}bx^2 + bx^2 = \frac{39}{20}bx^2$

Reduciendo los negativos: $-\frac{2}{5}bx^2 - 4bx^2 = -\frac{22}{5}bx^2$

Tendremos: $-\frac{39}{20}bx^2 - 22bx^2 = -\frac{49}{20}bx^2$

EJERCICIOS

Reducir:

1. $-72ax + 87ax - 101ax + 243ax$ **R.** $157ax$

2. $-82bx - 71bx - 53bx + 206bx$ **R.** 0

3. $105a^3 - 464a^3 + 58a^3 + 301a^3$ **R.** 0

4. $9a - 3a + 5a$ **R.** $11a$

5. $-8x + 9x - x$ **R.** 0

6. $12mn - 23mn - 5mn$ **R.** $-16mn$

7. $-x + 19x - 18x$ **R.** 0

8. $19m - 10m + 6m$ **R.** $15m$

9. $-11ab - 15ab + 26ab$ **R.** 0

10. $-5a^x + 9a^x - 35a^x$ **R.** $-31ax$

11. $-24a^{x+2} - 15a^{x+2} + 39a^{x+2}$ **R.** 0

12. $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}y - y$ **R.** 0

13. $-\frac{3}{5}m + \frac{1}{4}m - \frac{1}{2}m$ **R.** $-\frac{17}{20}m$

14. $\frac{3}{8}a^2b + \frac{1}{4}a^2b - a^2b$ **R.** $-\frac{3}{8}a^2b$

REDUCCIÓN DE UN POLINOMIO CON TÉRMINOS SEMEJANTES DE DIVERSAS CLASES

Ejemplos

1) Reducir el polinomio

$5a - 6b + 8c + 9a - 20c - b + 6b - c$

Se reducen por separado los de cada clase:

$5a + 9a = 14a$

$-6b - b + 6b = -b$

$8c - 20c - c = -13c$

Tendremos: $14a - b - 13c$

2) Reducir el polinomio:

$8a^3b^2 + 4a^4b^3 + 6a^3b^2 - a^3b^2 - 9a^4b^3 - 15 - 5ab^5 + 8 - 6ab^5$

Se reducen por separado los de cada clase:

$4a^4b^3 - 9a^4b^3 = -5a^4b^3$

$8a^3b^2 + 6a^3b^2 - a^3b^2 = 13a^3b^2$

$-5ab^5 - 6ab^5 = -11ab^5$

$-15 + 8 = -7$

Tendremos:

$-5a^4b^3 + 13a^3b^2 - 11ab^5 - 7$

3) Reducir el polinomio:

$\frac{2}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^3y + 3x^4 - y^4 + \frac{5}{6}y^4 - 0.3x^4 - \frac{3}{5}x^3y - 6 + x^3y - 14 + 2\frac{1}{3}y^4$

Tendremos:

$\frac{2}{5}x^4 + 3x^4 - 0.3x^4 = 3\frac{1}{10}x^4$

$x^3y - \frac{1}{2}x^3y - \frac{3}{5}x^3y = -\frac{1}{10}x^3y$

$2\frac{1}{3}y^4 + \frac{5}{6}y^4 - y^4 = 2\frac{1}{6}y^4$

$-6 - 14 = -20$

$3\frac{1}{10}x^4 - \frac{1}{10}x^3y + 2\frac{1}{6}y^4 - 20$

EJERCICIOS

Reducir los polinomios siguientes:

1. $-a + b + 2b - 2c + 3a + 2c - 3b$ **R.** $2a$

2. $-81x + 19y - 30z + 6y + 80x + x - 25y$ **R.** $-30z$

3. $15a^2 - 6ab - 8a^2 + 20 - 5ab - 31 + a^2 - ab$ **R.** $8a^2 - 12ab - 11$

4. $-3a + 4b - 6a + 81b - 114b + 31 + a^2 - ab$ **R.** $9a - 29b + a^2 - ab + 31$

5. $-71a^3b - 84a^4b^2 + 50a^3b + 84a^4b^2 - 45a^3b + 18a^3b$ **R.** $-48a^3b$

6. $-a + b - c + 8 + 2a + 2b - 19 - 2c - 3a - 3 - 3b + 3c$ **R.** $-2a - 14$

7. $m^2 + 71mn - 14m^2 - 65mn + m^3 - m^2 - 115m^2 + 6m^3$

R. $7m^3 - 129^2 + 6mn$

8. $x^4y - x^2y^2 + x^2y - 8x^4y - x^2y - 10 + x^3y^2 - 7x^2y^2 - 9 + 21x^4y - y^3 + 50$

R. $14x^4y - 7x^3y^2 - y^3 + 31$

9. $7a - 9b + 6a - 4b$ **R.** $13a - 13b$

10. $a + b - c - b - c + 2c - a$ **R.** 0

11. $5x - 11y - 9 + 20x - 1 - y$ **R.** $25x - 12y - 10$

12. $-6m + 8n + 5 - m - n - 6m - 11$ **R.** $-13m + 7n - 6$

VALOR NUMÉRICO

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al sustituir las letras por valores numéricos dados y efectuar después las operaciones indicadas.

Valor numérico de expresiones simples

Ejemplos

1) Hallar el valor numérico de $5ab$ para $a = 1$, $b = 2$

Sustituimos a por su valor 1 y b por 2, con lo que tendremos:

$$5ab = 5 \times 1 \times 2 = 10$$

2) Valor numérico de $a^2b^3c^4$ para $a = 2$, $b = 3$, $c = \frac{1}{2}$

$$a^2b^3c^4 = 22 \times 33 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4 \times 27 \times \frac{1}{16} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$$

3) Valor numérico de $3ac\sqrt{2ab}$ para $a = 2$, $b = 9$, $c = \frac{1}{3}$

$$3ac\sqrt{2ab} = 3 \times 2 \times \frac{1}{3} \times \sqrt{2 \times 2 \times 9} = 2 \times \sqrt{36} = 2 \times 6 = 12$$

4) Valor numérico de $\frac{4a^2b^3}{5cd}$ para $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 2$, $d = 3$

$$\frac{4a^2b^3}{5cd} = \frac{4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3}{5 \times 2 \times 3} = \frac{4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{27}}{30} = \frac{\frac{1}{27}}{30} \times 1 = \frac{\frac{1}{27}}{30} = \frac{1}{810}$$

EJERCICIOS

Encuentra el valor numérico de las expresiones siguientes para:

$a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $m = \frac{1}{2}$

$n = \frac{1}{3}$ $p = \frac{1}{4}$

1. $\frac{24mn}{2\sqrt{n^2p^2}}$ **R.** 24

2. $\frac{3\sqrt[3]{64b^3c^6}}{2m}$ **R.** 216

3. $3ab$ **R.** 6

4. $5a^2b^3c$ **R.** 120

5. b^2mn **R.** $\frac{2}{3}$

6. $24m^2n^3p$ **R.** $\frac{1}{18}$

7. $\frac{2}{3}a^4b^2m^3$ **R.** $\frac{1}{3}$

8. $\frac{7}{12}c^3p^2m$ **R.** $\frac{63}{128}$

9. $m^bn^cp^a$ **R.** $\frac{1}{432}$

10. $\frac{5}{6}a^{b-1}m^{c-2}$ **R.** $\frac{5}{12}$

11. $\sqrt{2bc^2}$ **R.** 6

12. $4m\sqrt[3]{12bc^2}$ **R.** 12

13. $mn\sqrt{8a^4b^3}$ **R.** $\frac{4}{3}$

14. $\frac{4a}{3bc}$ **R.** $\frac{2}{9}$

15. $\frac{5b^2m^2}{np}$ **R.** 60

16. $\frac{2m}{\sqrt{n^2}}$ **R.** 3

VALOR NUMÉRICO DE EXPRESIONES COMPUESTAS

Ejemplos

1) Hallar el valor numérico de $a^2 - 5ab + 3b^3$ para $a = 3$, $b = 4$

$$a^2 - 5ab + 3b^3 = 3^2 - 5 \times 3 \times 4 + 3 \times 4^3 = 9 - 60 + 192 = 141$$

2) Valor numérico de $\frac{3a^2}{4} - \frac{5ab}{x} + \frac{b}{ax}$ para $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{6}$

$$\frac{3a^2}{4} - \frac{5ab}{x} + \frac{b}{ax} = \frac{3 \times 2^2}{4} - \frac{5 \times 2 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} + \frac{\frac{1}{3}}{2 \times \frac{1}{16}} = 3 - \frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{16}} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= 3 - 20 + 1 = -16$$

3) Valor numérico de $2(2a - b)(x^2 + y) - (a^2 + b)(b - a)$ para

$$a = 2,\ b = 3,\ x = 4,\ y = \frac{1}{2}$$

Las operaciones indicadas en los paréntesis deben efectuarse antes que ninguna otra:

$$2(2a - b) = 2 \times (2 \times 2 - 3) = 2 \times (4 - 3) = 2 \times 1 = 2$$

$$x^2 + y = 4^2 + \frac{1}{2} = 16 + \frac{1}{2} = 16\ \frac{1}{2}$$

$$a^2 + b = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$b - a = 3 - 2 = 1$$

Tendremos:

$$2(2a - b)(x^2 + y) - (a^2 + b)(b - a) = 2 \times 16\frac{1}{2} - 7 \times 1 = 2 \times \frac{33}{2} - 7 = 33 - 7 = 26$$

EJERCICIOS

Encuentre el valor numérico de las expresiones siguientes para:

$$a = 1,\ b = 2,\ c = 3,\ d = 4,\ m = \frac{1}{2},\ n = \frac{2}{3},\ p = \frac{1}{4},\ x = 0$$

1. $(4p + 2b)(18n - 24p) + 2(8m + 2)(40p + a)$ **R.** 162

2. $(a + b)$ Ö $c^2 + 8b - m$ Ö n^2 **R.** 14 2

3. $(a + b)c - d$ **R.** 5

4. $(a + b)(a - b)$ **R.** 3

5. $(b - m)(c - n) + 4a^2$ **R.** $7\frac{1}{2}$

6. $(2m + 3n)(4p + b^2)$ **R.** 15

7. $(4m + 8p)(a^2 + b^2)(6n - d)$ **R.** 0

8. $(c - b)(d - c)(b - a)(m - p)$ **R.** $\frac{1}{4}$

9. $\left(\frac{8m}{9n} + \frac{16p}{b}\right)a$ **R.** $2\frac{2}{3}$

EJERCICIO

Encuentra el valor numérico de las expresiones siguientes para:

1. $\frac{c}{d} - \frac{m}{n} + 2$ **R.** $-21\frac{1}{3}$

2. $\frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{2} + \frac{m^2}{6}$ **R.** 1

3. $\frac{3}{5}c - \frac{1}{2}b + 2d$ **R.** $-\frac{4}{5}$

4. $\frac{ab}{n} + \frac{ac}{d} - \frac{bd}{m}$ **R.** $49\frac{2}{3}$

5. $\sqrt{b} + \sqrt{n} + \sqrt{6m}$ **R.** $8\frac{1}{2}$

6. $\frac{m^a}{d^b}$ **R.** 3456

7. $\frac{3c^2}{4} + \frac{4n^2}{m}$ **R.** $\frac{1}{8}$

8. $a^2 - 2ab + b^2$ **R.** 1

9. $c^2 + 2cd + d^2$ **R.** $\frac{25}{36}$

10. $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$ **R.** 17

11. $\frac{12c - a}{2b} - \frac{16n - a}{m} + \frac{1}{d}$ **R.** $1\frac{23}{24}$

12. $\sqrt{4b} + \frac{\sqrt{3a}}{3} - \frac{\sqrt{6m}}{6}$ **R.** 4

13. $\frac{4\ \ d^{\ 2}}{2} + \frac{16\ \ n^{\ 2}}{2} - 1$ **R.** 0

14. $\frac{a + b}{c} - \frac{b + m}{d}$ **R.** 1

15. $\frac{\sqrt{b} + \sqrt{2d}}{2} - \frac{\sqrt{3c} + \sqrt{8d}}{4}$

R. $\frac{3}{4}$

EJERCICIOS SOBRE NOTACIÓN ALGEBRAICA

Con las cantidades algebraicas, representadas por letras, se pueden hacer las mismas operaciones que con los números aritméticos.

Ejemplos

1) Escribir la suma del cuadrado de *a* con el cubo de *b*.

$$a^2 + b^3$$

2) Un hombre tenía $*a* ; recibió $8 y después pagó una cuenta de $*c* . ¿Cuánto le queda?

Teniendo $*a* recibió $8, por tanto tenía $($a$ + 8). Si gasta $*c* le quedan $($a + 8 – c$)

3) Compré 3 libros por $*a* cada uno; 6 sombreros por $*b* cada uno y *m* trajes por $*x* cada uno. ¿Cuánto he gastado?

3 libros por $*a* importan $3*a*
6 sombreros por $*b* importan $6*b*
m trajes por $*x* importan $*mx*

Luego, el gasto total ha sido por:

$($3a + 6b + mx$)

4) Compro *x* libros iguales por $*m*. ¿Cuánto me costó cada uno?

Cada libro costó $\$\frac{m}{x}$

5) Tenía $9 y gasté $*x* . ¿Cuánto me queda?

$($9 – x$)

EJERCICIOS

1. Escribe la diferencia entre *m* y *n*
R. *m-n*

2. Debía *x* dólares y pagué 6. ¿Cuánto debo?
R. $($x$-6)

3. De una jornada de *x* km se han recorrido *m* km. ¿Cuánto falta por recorrer?
R. *(x-m)*km

4. Escribe la suma de *a, b* y *m.*
R. *a*+*b*+*m*

5. Escribe la suma del cuadrado de *m*, el cubo de *b* y la cuarta potencia de *x* .
R. $m^2+b^3+x^4$

6. Siendo *a* un número entero, escribe los 2 números enteros consecutivos posteriores a *a*.
R. *a*+1, *a*+2

7. Siendo *x* un número entero, escribe los dos números consecutivos anteriores a *x* .
R. *x*-1, *x*-2

8. Siendo *y* un número entero par, escribe 3 números pares consecutivos posteriores a *y*.
R. *y*+2, *y*+4, *y*+6

9. Arturo tenía $*a*, cobró $*x* y le regalaron $*m.* ¿Cuánto tiene?
R. $(*a*+*x*+*m*)

10. Al vender un auto en $*n* gano $300. ¿Cuánto me costó el auto?
R. $(*n*-300)

11. Si han transcurrido *x* días de un año, ¿cuántos días faltan por transcurrir?
R. (365 -*x*) días

12. Si un pantalón cuesta $*a*, ¿cuánto costarán 8 pantalones; 15 pantalones; *m* pantalones?
R. $8*a*; $15*a*; $*ma*

13. Tenía $*a* y cobré $*b*. Si uso este dinero en comprar (*m* – 2) libros, ¿a cómo sale cada libro?
R. $\$\frac{a+b}{m-2}$

14. En el primer piso de un edificio hay *x* habitaciones. En el segundo piso hay el doble número de habitaciones que en el primero; en el tercero la mitad de las que hay en el primero. ¿Cuántas habitaciones tiene ese edificio?
R. $\left(x+2x+\frac{x}{2}\right)$ habitaciones.

15. Recibo $*x* y después $*a*. Si gasto $*m*, ¿cuánto me queda?
R. $(*x*+*a*-*m*)

16. Tengo que recorrer *m* km. El lunes avanzo *a* km, el martes *b* km y el miércoles *c* km. ¿Cuánto me falta por recorrer?
R. [*m*-(*a*+*b*+*c*)] km

CONCEPTO DE NÚMERO

El concepto de **número natural** que satisface las exigencias de la Aritmética elemental no responde a la generalización y abstracción características de la operatoria algebraica.

En Álgebra se desarrolla un cálculo de validez general aplicable a cualquier tipo especial de número.

Conviene pues a considerar cómo se ha ampliado el campo de los números por la introducción de nuevos entes, que satisfacen las leyes que regulan las operaciones fundamentales, ya que, como veremos más adelante, el número natural no nos sirve para efectuar la resta y la división en todos los casos. Basta por el momento, dado el nivel matemático que alcanzaremos a lo largo de este texto, explicar cómo se ha llegado al concepto de **número real**.

Con el objeto de hacer más comprensible la ampliación del campo de los números, adoptaremos un doble criterio. Por un lado, un criterio histórico que nos haga conocer la aparición gradual de las distintas clases de números; por otro, un criterio intuitivo que nos ponga de manifiesto cómo ciertas necesidades materiales han obligado a los matemáticos a introducir nuevos entes numéricos.

Este doble criterio, justificable por la índole didáctica de este libro, permitirá al principiante alcanzar una comprensión clara del concepto formal (abstracto) de los números reales.

NÚMERO ENTERO Y NÚMERO FRACCIONARIO

Mucho antes de que los griegos (Euclides, Apolonio, etc.) realizaran la sistematización de los conocimientos matemáticos, los babilonios (según muestran, las tablillas cuneiformes que datan de 2000–1800 a.C.) y los egipcios (como se ve en el papiro de Rhind) ya conocían las fracciones.

La necesidad de medir magnitudes continuas tales como la longitud, el volumen, el peso, etc., llevó al hombre a introducir los números fraccionarios.

Al tomar una unidad cualquiera, por ejemplo la vara, para medir una magnitud continua (magnitud escalar o lineal), puede ocurrir una de dos cosas: que la unidad esté contenida un número entero de veces, o que no esté contenida un número entero de veces. En el primer caso, representamos el resultado de la medición con un número entero. En el segundo tendremos que **fraccionar** la unidad elegida en dos, tres o cuatro partes iguales; de este modo hallaremos una fracción de la unidad que esté contenida en la magnitud que tratamos de medir. Expresamos el resultado de esta última medición con un par de números enteros, distintos de cero, llamados respectivamente numerador y denominador. El denominador nos dará el número de partes en que hemos dividido la unidad, y el numerador, el número de subunidades contenidas en la magnitud que acabamos de medir. De este modo surgen los números fraccionarios, como 1/2, 1/3, 3/5, etc.

También son números fraccionarios los que nos permiten expresar el cociente de una división inexacta, o lo que es lo mismo, una división en la cual es dividendo no es múltiplo del divisor.

En oposición a los números fraccionarios tenemos los números enteros, que podemos definir como aquellos que expresan el cociente de una división exacta, por ejemplo 1, 2, 3, etc.

5	5	8	4	6 ÷ 2 = 3
0	1	0	2	

NÚMERO RACIONAL Y NÚMERO IRRACIONAL

Indudablemente fueron los griegos los primeros en conocer los números irracionales. Los historiadores de la Matemática están de acuerdo en atribuir a Pitágoras de Samos (540 a.C.) el descubrimiento de es-tos números, al establecer la relación entre el lado de un cuadrado y la diagonal del mismo. Más tarde, Teodoro de Cirene (400 a.C.), matemático de la escuela pitagórica, demostró geométricamente que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ □, $\sqrt{7}$, etc., son irracionales. Euclides (300 a.C.) estudió en el Libro X de sus "Elementos" ciertas magnitudes que al medirse no dejan ver ningún número entero ni fraccionario que las exprese. Estas magnitudes se llaman inconmensurables, y los números originados al medirlas se llaman **irracionales**. Ejemplos de tales magnitudes son la relación del lado de un cuadrado con la diagonal del mismo, que se expresa con el número irracional $\sqrt{a^2 + b^2}$; y la relación de la circunferencia con el diámetro, que se expresa con la letra π = 3.141592...

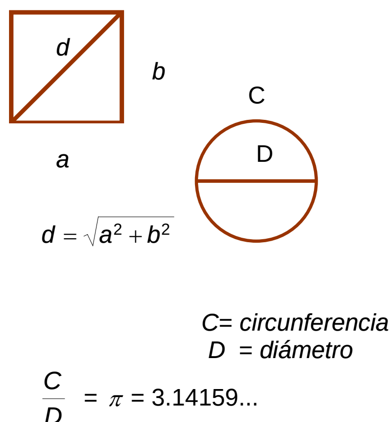


Figura 3

Como consecuencia de la introducción de los números irracionales, consideramos racionales al conjunto de números fraccionarios y al conjunto de números enteros. El número racional aquel que puede expresarse como cociente de dos enteros, y el irracional es aquel número real que no puede expresarse como el cociente de dos enteros. Se llama números reales al conjunto de números racionales e irracionales.

NÚMEROS POSITIVOS Y NÚMEROS NEGATIVOS

Los números negativos no fueron conocidos por los matemáticos de la antigüedad, salvo en el caso de Diofanto (siglo III d.C.?), que en su Aritmética, al explicar el producto de dos diferencias, introduce un número con signo +. En el siglo VI, los hindúes Brahmagupta y Bháskara utilizaron los números negativos de un modo práctico, sin dar una definición.

Durante la Edad Media y el Renacimiento los matemáticos rehuyeron usar los números negativos, y fue Newton el primero en comprender su verdadera naturaleza.

Posteriormente Harriot (1560–1621) introdujo los signos + y – para caracterizar números positivos y negativos.

La significación de los **números relativos o con signos** (positivos y negativos) se comprende claramente cuando los utilizamos para representar el resultado de medir magnitudes relativas, es decir, magnitudes cuyas cantidades pueden tomarse en sentidos opuestos, tal como sucede cuando tratamos de medir la longitud geográfica de una región determinada o de expresar el grado de temperatura de un lugar. En el primer caso, podemos hablar de longitud este u oeste con respecto a un meridiano fijado arbitrariamente (Greenwich). En el segundo, podemos referirnos a grados sobre cero o grados bajo cero.

Convencionalmente fijamos los números positivos o con signo + en una dirección, y los números negativos o con signo – en la dirección opuesta.

Si fijamos sobre una semirrecta un punto cero, a partir del cual, hacia la derecha, señalamos puntos que representan una de-terminada unidad, nos resultan los puntos *A*, *B*, *C*, etc. Si sobre esa misma semirrecta, a partir del punto cero (llamado origen), procedemos del mismo modo hacia la izquierda, tendremos los puntos *a*, *b*, *c*, etc. Si convenimos en que los puntos de la semirrecta indicados a la derecha del punto cero representan números positivos (*A*, *B*,

C, etc.), entonces los puntos señalados a la izquierda (*a*, *b*, *c*, etc.) representarán números negativos.



Figura4

Históricamente, los números negativos surgen para hacer posible la resta, que es la operación inversa de la suma, y la cual permite restarle a un minuendo menor un sustraendo mayor.

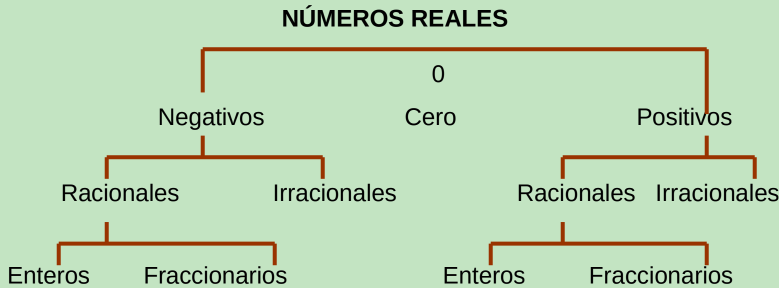
Tanto los números como los símbolos literales negativos se distinguen por el signo –, mientras que los números positivos y su representación literal llevan el signo +, siempre que no inicien una expresión algebraica.

El **número cero.** Cuando tratamos de aprender el concepto de número natural, ve-mos que surge de la comparación de conjuntos equivalentes o coordinables entre sí. Por extensión llamamos conjunto al que tiene un solo elemento y se representa por el número 1. Por otra parte consideramos el número cero como expresión de un conjunto nulo o vacío, es decir, que carece de elementos.

El cero representa un elemento de separación entre números negativos y positivos, de modo que es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier número positivo.

A continuación veremos un diagrama que aclara las distintas clases de números con los cuales trabajaremos:

NÚMEROS REALES



IGUALDAD

I. Axioma de **identidad:** $a = a$

II. Axioma de **reciprocidad:** si $a = b$, tenemos que $b = a$

III. Axioma de **transitividad:** si $a = b$ y $b = c$, tenemos que $a = c$

SUMA O ADICIÓN

I. Axioma de **uniformidad:** La suma de dos números siempre es igual, es decir, única:

si $a = b$ y $c = d$, tenemos que $a + c = b + d$

II. Axioma de **conmutatividad:**

$a + b = b + a$

III. Axioma de **asociatividad:**

$(a + b) + c = a + (b + c)$

IV. Axioma de **identidad** o **módulo de la suma:** hay un número y sólo un número, el cero, de modo que $a + 0 = 0 + a = a$, para cualquier valor de *a*. De ahí que el cero reciba el nombre de elemento idéntico o módulo de la suma.

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS REALES

Hemos visto sumariamente cómo, a través del curso de la historia de las Matemáticas, se ha ido ampliando sucesivamente el campo de los números, hasta llegar al concepto de número real. El camino recorrido ha sido, unas veces, el geométrico, que siempre desemboca en la Aritmética pura, formal; otras veces, el camino puro, formal, desemboca en lo intuitivo, en lo geométrico. En el primer caso surgen los números irracionales, introducidos como razón de dos segmentos con el propósito de representar magnitudes inconmensurables, y que hacen posible la expresión del resultado de la radicación inexacta. Asimismo, los números fraccionarios surgen para expresar el resultado de medir magnitudes conmensurables, y que hacen posible la división inexacta. Como ejemplo del segundo caso están los números negativos, que aparecen por primera vez como raíces de ecuaciones y hacen posible la resta en todos los casos, ya que cuando el minuendo es menor que el sustraendo esta operación carece de sentido al trabajar con números naturales. Estos números negativos (relativos) servirán posteriormente para expresar los puntos a uno y otro lados de una recta indefinida.

Sin pretensiones de profundizar prematuramente en el campo numérico, vamos a exponer las leyes formales (esto es, que no toman en cuenta la naturaleza de los números) de la suma y la multiplicación, ya que las demás operaciones fundamentales pueden explicarse como inversas de éstas, como la resta, la división, la potenciación, la logaritmación y la radicación. Es conveniente ir adaptando la mentalidad del principiante al carácter formal (abstracto) de estas leyes, pues ello contribuirá a la comprensión de los problemas que ulteriormente le plantearán las Matemáticas superiores. Por otra parte, el conjunto de estas leyes formales constituirá una definición indirecta de los números reales y de las operaciones fundamentales. Estas leyes que no requieren demostración, pues son de comprensión inmediata, se llaman **axiomas**.

MULTIPLICACIÓN

I. Axioma de **uniformidad:** el producto de dos números siempre es igual, o sea, único: si $a = b$ y $c = d$, tenemos que $ac = bd$

II. Axioma de **conmutatividad:** $ab = ba$

III. Axioma de **asociatividad:** $(ab)c = a(bc)$

IV. Axioma de **distributividad:** con respecto a la suma tenemos que $a(b + c) = ab + ac$

V. Axioma de **identidad** o **módulo del producto:** hay un número y sólo un número, el uno (1), de modo que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para cualquier valor de a.

VI. Axioma de **existencia del inverso:** para todo número real a ¹ 0 (a distinto de cero) corresponde un número real, y sólo uno x, de modo que $ax = 1$. Este número x se llama inverso o recíproco de a, y se representa por $1/a$.

AXIOMAS DE ORDEN

I. Tricotomía: Si tenemos dos números reales a y b sólo puede haber una relación, entre ellos, que $a > b$; $a = b$ o $a < b$

II. Monotonía de la suma: si $a > b$ tenemos que $a + c > b + c$

III. Monotonía de la multiplicación: si $a > b$ y $c > 0$ tenemos que $ac > bc$

AXIOMA DE CONTINUIDAD

I. Si tenemos dos conjuntos de números reales A y B, de modo que todo número de A es menor que cualquier número de B, existirá siempre un número real c con el que se verifique $a \le c \le b$, donde a es un número que está dentro del conjunto A, y b es un número que está dentro del conjunto B.

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS RELATIVOS

Suma de números relativos

Respecto de la suma o adición de números relativos podemos considerar cuatro casos: sumar dos números positivos; sumar dos números negativos; sumar un positivo con otro negativo, y sumar el cero con un número positivo o negativo.

1) Suma de dos números positivos

Para sumar dos números positivos se procede a la suma aritmética de los valores absolutos y al resultado se le antepone el signo +:

$$(+4) + (+2) = +6$$

La suma de dos números positivos se puede representar del siguiente modo:

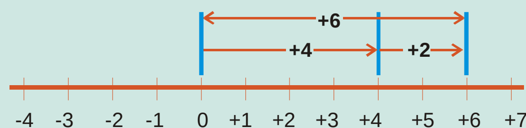


Figura 5

2) Suma de dos números negativos

Para sumar dos números negativos se procede a la suma aritmética de los valores absolutos y al resultado se le antepone el signo –:

$$(-4) + (-2) = -6$$

La suma de dos números negativos se puede representar del siguiente modo:



Figura 6

3) Suma de un número positivo y otro negativo

Para sumar un número positivo y un número negativo primero se busca la diferencia aritmética de los valores absolutos de ambos números, y al resultado se le antepone el signo del número mayor. Cuando los dos números tienen igual valor absoluto y signos distintos, la suma es cero:

$(+6) + (1 - 2) = +5$
$(-6) + (+2) = -4$
$(-6) + (+6) = 0$
$(+6) + (-6) = 0$

La suma de un número positivo y otro negativo se puede representar de los siguientes modos:

Representación gráfica de la suma de un número positivo y un número negativo, donde el número positivo tiene mayor valor absoluto que el negativo:

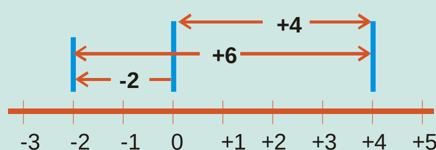


Figura 7

Representación gráfica de la suma de un número positivo y un número negativo, donde el número negativo tiene mayor valor absoluto que el positivo:

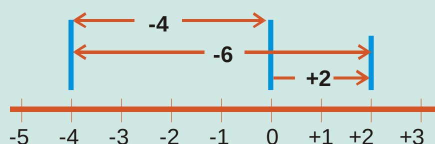


Figura 8

Representación gráfica de la suma de un número positivo y un número negativo, donde el valor absoluto de ambos números es igual.

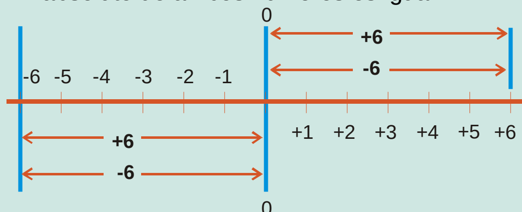


Figura 9

4) Suma de cero y un número positivo o negativo.

La suma de cero con cualquier número positivo o negativo nos dará el mismo número positivo o negativo.

Así, tenemos: (+ 4) + 0 = + 4

(– 4) + 0 = – 4

En general: *a* + 0 = 0 + *a* = *a*

Donde *a* puede ser positivo, negativo o nulo.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS RELATIVOS

Por medio de la interpretación geométrica de la sustracción de números relativos, podemos expresar la distancia (en unidades) que hay entre el punto que representa al minuendo y el punto que representa al sustraendo, así como el sentido (negativo o positivo) de esa distancia.

Para expresar la diferencia (+ 4) – (– 8) = + 12, tendremos:



Figura 10

Para expresar la diferencia (– 8) – (+ 4) = – 12, tendremos:

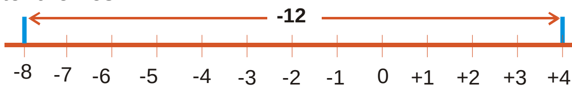


Figura 11

SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS RELATIVOS

Se le llama opuesto de un número al mismo número con signo contrario. Así, decimos que – *m* es opuesto de + *m*.

Ya vimos en un caso de la suma que: ® (+ *m*) + (– *m*) = 0

La sustracción es una operación inversa de la suma que consiste en hallar un número *x* (llamado diferencia) tal que, sumado con un número dado *m*, dé un resultado igual a otro número *n*, de modo que se verifique:

$x + m = n$ (1)

Llamando *m* ’ al opuesto de *m*, podemos determinar la diferencia *x*, sumando en ambos miembros de la igualdad (1) el número *m* ’; en efecto:

$x + m + m' = n + m'$ (2)

Si observamos el primer miembro de esta igualdad (2), veremos que aplicando el axioma de asociatividad tenemos:

m + m ’ = 0, y como x + 0 = x , tendremos: x = n + m ’ (3)

que es lo que queríamos demostrar. Es decir, que para hallar la diferencia entre *n* y *m* basta sumarle a *n* el opuesto de *m* (*m* ’). Y como ya vimos que para hallar el opuesto de un número basta cambiarle el signo, podemos enunciar la siguiente Regla:

Para hallar la diferencia entre dos números relativos se suma el minuendo el sustraendo, cambiándole el signo.

Así: (+ 8) – (+ 4) = (+ 8) + (– 4) = + 4
(+ 8) – (– 4) = (+ 8) + (+ 4) = + 12
(– 8) – (+ 4) = (– 8) + (– 4) = – 12
(– 8) – (– 4) = (– 8) + (+ 4) = – 4

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RELATIVOS

El producto de dos números relativos se encuentra multiplicando los valores absolutos de ambos, y el resultado llevará signo positivo (+), si los signos de ambos factores son iguales; o signo negativo (–), si los factores tienen signos distintos. Si uno de los factores es 0, el producto será 0.

Al operar con símbolos literales el producto siempre se indica en la forma *a* × *b* o bien en la forma *a* • *b*, y más usualmente como *ab*.

Así: (+ 2) (+ 3) = + 6 (0) (+ 3) = 0
(– 2) (– 3) = + 6 (0) (– 3) = 0
(+ 2) (– 3) = – 6 00 = 0
(– 2) (+ 3) = – 6

Este cuadro nos permite recordar fácilmente la ley de los signos en la multiplicación de números relativos.

+ por + da + + por – da –
– por – da + – por + da –

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PRODUCTO DE DOS NÚMEROS RELATIVOS

Este producto puede expresarse geométricamente como el área de un rectángulo cuyo largo y ancho están dados por ambos números. A esta área le podemos atribuir un valor positivo o negativo, según sus lados tengan valores de un mismo sentido o de sentidos distintos, respectivamente.

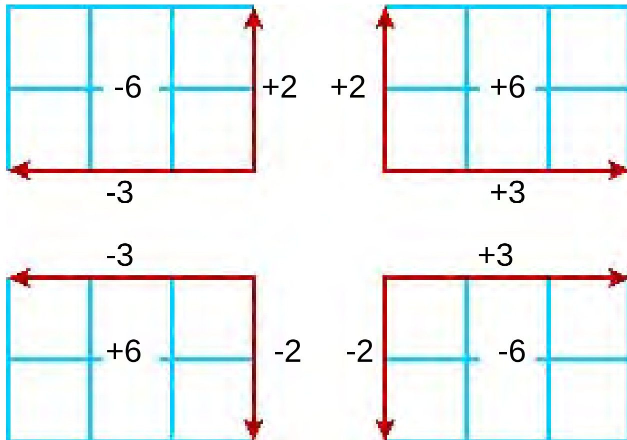


Figura 12

POTENCIA DE NÚMEROS RELATIVOS

La potencia de un número relativo es el producto de tomarlo como factor tantas veces como se quiera. Si a es un número relativo cualquiera y $n > 1$ es un número natural, tendremos la notación a^n, que se lee a elevado a la **enésima** potencia e indica que a debe tomarse como factor n veces.

$$A^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots\ldots\ldots a}_{n \text{ veces}}$$

En la notación $a^n = x$, llamamos potencia al producto x, base al número que tomamos como factor a, y exponente a n, que nos indica las veces que debemos tomar a como factor. La operación de hallar el producto x se llama **potenciación** o **elevación** a **potencia**.

Ejemplo

$$4^5 = 1024$$

Donde 4 es la base, 5 el exponente y 1024 la potencia.

La potencia de un número positivo siempre es positiva.

La potencia de un número negativo será positiva si el exponente es entero y par o negativa si el exponente entero es impar.

Así:

$$a^2 = +A$$
$$(-a)^2 = +A$$
$$a^3 = +A$$
$$(-a)^3 = -A$$

PRODUCTO DE DOS POTENCIAS DE IGUAL BASE

Para multiplicar dos potencias de igual base se eleva dicha base a la potencia que resulte de la suma de los exponentes respectivos.

Ejemplo

$$a^m \bullet a^n = a^{m+n}$$

$$(3)^2(3)^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$$

POTENCIA DE UNA POTENCIA

Para hallar la potencia de una potencia se multiplican los exponentes y se mantiene la base primitiva.

Ejemplo

$$(a^n)^m = a^{n \times m} = a^{nm}$$
$$(-2^2)^3 = 2^{2\times 3} = -2^6 = 64$$

Es muy importante no confundir la potencia de una potencia con la elevación de un número a una potencia, cuyo exponente a la vez esté afectado por otro exponente. No es lo mismo $(4^2)^3$ que (4^{2^3})

Ejemplo

$$(4^2)^3 = 4^{2\times 3} = 4^6 = 4096$$
$$\left(4^{2^3}\right) = 4^{2\times 2\times 2} = 65536$$

POSIBILIDAD DE AMPLIAR EL CAMPO NUMÉRICO

Los números reales no cierran la posibilidad de ampliar el campo numérico, sino que se mantiene abierta para introducir nuevos entes, siempre que tales entes cumplan las leyes formales. Dentro de los límites de este texto, el estudiante conocerá una nueva ampliación del campo numérico: el **número complejo**, que es un par de números dados en un orden determinado y está constituido por un número real y un número imaginario. Con estos números podremos representar un punto cualquiera en el plano y se analizarán con detalle en un capítulo posterior de esta obra.

DIVISIÓN DE NÚMEROS RELATIVOS

Como ya vimos al tratar las leyes formales de la multiplicación, de acuerdo con el axioma VI (existencia del inverso), a todo número real *a* ≠ 0, corresponde un número real, y sólo uno, *x* , de modo que *ax* = 1. Este número *x* se llama inverso o recíproco de *a*, y se representa por 1/*a*.

El inverso o recíproco de un número relativo cualquiera distinto de cero tiene su mismo signo.

El inverso de + 4 es + $\frac{1}{4}$

El inverso de – 4 es – $\frac{1}{4}$

El inverso de $-\sqrt{3}$ es $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

El inverso de $+\frac{1}{2}$ es + 2

La división es una operación inversa de la multiplicación y consiste en hallar uno de los factores, una vez conocidos el otro factor y el producto. Es decir, dado el dividendo *d* y el divisor *d* ’ hallar el cociente *c*, de modo que se verifique *d* ’*c* = *d*.

Esta operación sólo es posible si *d* ’ es distinto de cero. Así, al aplicar el axioma de existencia del inverso, tenemos:

1/*d* ’ (*d* ’*c*) = 1/*d* ’ *d*

Sabemos que: 1/*d* ’ (*d* ’*c*) = (1/*d* ’ *d* ’) *c* = (+ 1) *c* = *c*

Al eliminar nos queda: *c* = 1/*d* ’ *d*

De lo cual deducimos la siguiente Regla:

Para dividir un número cualquiera *d* por otro número distinto de cero *d* ’, multiplicamos *d* por el recíproco *d* ’ (1/*d* ’). El cociente que resulte será positivo si los dos números son del mismo signo y negativo si son de signos contrarios.

Este cuadro nos permite recordar fácilmente la ley de los signos de la división con números relativos.

+ entre + da +
– entre – da +
+ entre – da –
– entre + da –

En la división podemos enunciar tres casos de elevación a potencia de un número cualquiera.

1) Si un número cualquiera *a* ≠ 0 se eleva a la potencia 0 es igual *a* + 1:

$a^0 = +1$
$3^0 = +1$

2) Si un número cualquiera *a* ≠ 0 se eleva a un exponente negativo cualquiera – *m* es igual al recíproco de la potencia *a* ^{m}, de exponente positivo:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$
$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

3) La división de dos potencias de igual base es igual a la base elevada a la potencia que dé la diferencia de ambos exponentes:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$$

UNIFORMIDAD DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS RELATIVOS

En las operaciones estudiadas (suma, resta, multiplicación, potenciación y división) se cumple el axioma de uniformidad, lo cual significa que cuando sometemos dos números relativos a cualquiera de las operaciones mencionadas el resultado es uno, y sólo uno, es decir, único. Sin embargo, cuando extraemos la raíz cuadrada de un número positivo, tenemos un resultado doble. Al estudiar la extracción de las raíces, veremos que un número positivo cualquiera siempre tiene dos raíces de grado par, una positiva y otra negativa.

Así: $\sqrt{+a} = \pm\ a'$ porque:

(+ a ')^2 = (+ a ')(+ a ') = + a
(- a ')^2 = (- a ')(- a ') = + a

y del mismo modo: $\sqrt{+64} = \pm\ 8$ porque:

$(+8)^2 = (+8)(+8) = +64$
$(-8)^2 = (-8)(-8) = +64$



Debido a las diversas actividades que se desarrollaban en el antiguo Egipto, el uso de la Aritmética, el Álgebra y la Geometría, eran ciencias que se perfeccionaban constantemente

CAPÍTULO II

SUMA

La **Suma o adición** tiene por objeto reunir dos o más expresiones algebraicas (**sumandos**) en una sola (**suma**). Así, la suma de a y b es $a + b$, porque esta última expresión es la **reunión** de las dos expresiones algebraicas dadas: a y b.

En otro ejemplo, la suma de a y $-b$ es $a - b$, porque esta última expresión es la reunión de las dos expresiones dadas: a y $-b$.

En Aritmética la suma siempre significa **aumento**, pero en Álgebra es un concepto más general por lo que puede significar **aumento** o **disminución.**

CARÁCTER GENERAL DE LA SUMA ALGEBRAICA

Sumar una cantidad **negativa** equivale a **restar una cantidad positiva** de igual valor absoluto.

La suma de m y $-n$ es $m - n$, que equivale a **restar** de m el valor absoluto de $-n$, que es $|n|$.

La suma de $-2x$ y $-3y$ es $-2x - 3y$, que equivale a restar de $-2x$ el valor absoluto de $-3y$, que es $|3y|$.

REGLA GENERAL PARA SUMAR MONOMIOS

Para sumar dos o más expresiones algebraicas, se escriben unas a continuación de las otras con sus propios signos y se reducen los términos semejantes, si los hay.

1) Sumar $5a$, $6b$ y $8c$

Escribimos unos a continuación de otros con sus propios signos, y como $5a = +5a$, $6b = +6b$ y $8c = +8c$ la suma será:

$$5a + 6b + 8c$$

La **Ley Conmutativa de la suma**, señala que el orden de los sumandos no altera la suma. Así, $5a + 6b + 8c$ es lo mismo que $5a + 8c + 6b$ o que $6b + 8c + 5a$

2) Sumar $3a^2b, 4ab^2, a^2b, 7ab^2, 6b^3$

Escribimos: $3a^2b + 4ab^2 + a^2b + 7ab^2 + 6b^3$

Reduciendo los términos semejantes, queda:

$$4a^2b + 11ab^2 + 6b^3$$

3) Sumar $3a$ y $-2b$

Si algún sumando es **negativo**, suele incluirse dentro de un paréntesis para indicar la suma:

$$3a + (-2b)$$

En este caso la suma será: $3a - 2b$

4) Sumar $7a$, $-8b$, $-15a$, $9b$, $-4c$ y 8

Escribimos:

$7a + (-8b) + (-15a) + 9b + (-4c) + 8 =$
$7a - 8b - 15a + 9b - 4c + 8 =$
$-8a + b - 4c + 8$

EJERCICIOS

1. $5a, 7a$ **R.** $12a$

2. $-11m, 8m$ **R.** $-3m$

3. $9ab, -15ab$ **R.** $-6ab$

4. $-xy, -9xy$ **R.** $10xy$

5. $-3a, 4b$ **R.** $4b - 3a$

6. $\frac{1}{2}a, -\frac{2}{3}b$ **R.** $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$

7. $a, -b, c$ **R.** $a - b + c$

8. $\frac{3}{8}mn, -\frac{3}{4}mn$ **R.** $\frac{3}{8}mn$

9. $a, -b, 2c$ **R.** $a - b + 2c$

10. $-7a, 8a, -b$ **R.** $a - b$

11. $x^2, -3xy, -4y^2$ **R.** $x^2 - 3xy - 4y^2$

12. $\frac{1}{2}x, \frac{2}{3}y, -\frac{3}{4}x$ **R.** $\frac{2}{3}y - \frac{1}{4}x$

13. $3a, \frac{1}{2}b, -4, -b, -\frac{1}{2}a, 6$

R. $\frac{5}{2}a - \frac{1}{2}b + 2$

14. $m^3, -4m^2n, 5m^3, -7mn^2, -4m^2n, -5m^3$

R. $m^3 - 8m^2n - 7mn^2$

15. $8a^2b, 5ab^2, -a^2b, -11ab^2, -7b^3$

R. $-+9a^2b - 6ab^2 - 7b^3$

16. $a, -3b, -8c, 4b, -a, 8c$ **R.** b

17. $9x, -11y, -x, -6y, 4z, -6z$

R. $8x - 17y - 2z$

18. $\frac{3}{4}x^2, -\frac{2}{3}xy, \frac{1}{3}y^2, -\frac{1}{3}xy, x^2, 5y^2$

R. $\frac{7}{4}x^2 - xy + \frac{16}{3}y^2$

19. $7a^2, 5ab, 3b^2, -a^2$

R. $3b^2 + 5ab - 8a^2$

20. m, n **R.** $m+n$

21. $-3a, 4b$ **R.** $4b - 3a$

22. $-6, 9$ **R.** 3

23. $m, -n$ **R.** $m-n$

24. $5b, -6a$ **R.** $5b - 6a$

SUMA DE POLINOMIOS

1) Sumar $a - b$, $2a + 3b - c$ y $-4a + 5b$

En esta suma suelen incluirse los sumandos entre paréntesis:

$$(a - b) + (2a + 3b - c) + (-4a + 5b)$$

En seguida colocamos todos los términos de estos polinomios unos a continuación de otros, con sus propios signos, y tendremos:

$$a - b + 2a + 3b - c - 4a + 5b = -a + 7b - c$$

En la práctica se colocan los polinomios unos debajo de otros de modo que los términos semejantes queden en columna; luego se hace la reducción, separándolos unos de otros con sus propios signos.

La suma anterior se verifica de esta manera:

$$\begin{array}{rrr} a & -b & \\ 2a & +3b & -c \\ -4a & +5b & \\ \hline -a & +7b & -c \end{array}$$

2) Sumar $3m - 2n + 4$, $6n + 4p - 5$, $8n - 6$ y $m - n - 4p$

Escribimos:

$$\begin{array}{rrrr} 3m & -2n & & +4 \\ & 6n & +4p & -5 \\ & 8n & & -6 \\ m & -n & -4p & \\ \hline 4m & +11n & & -7 \end{array}$$

Para probar la **suma** por el **valor numérico** debe encontrarse el valor numérico de los sumandos y de la suma para los mismos valores de las letras (que fijamos nosotros).

Si la operación está correcta, la suma algebraica de los valores numéricos de los sumandos debe ser igual al valor numérico de la suma.

Ejemplo

Sumar $8a - 3b + 5c - d$, $-2b + c - 4d$ y $-3a + 5b - c$ y probar el resultado por el valor numérico para $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$

Tendremos:

$$\begin{array}{rrrrl} 8a & -3b & +5c & -d = & 8 - 6 + 15 - 4 = 13 \\ & -2b & +c & -4d = & -4 + 3 - 16 = -17 \\ -3a & +5b & -c & = & -3 + 10 - 3 = 4 \\ \hline 5a & & +5c & -5d & 5 + 15 - 20 = 0 \end{array}$$

La suma de los valores numéricos de los sumandos es 13 – 17 + 4 = 0, igual al valor numérico de la suma, que también es cero.

EJERCICIOS

Encuentra la suma de:

1. $m+n-p$; $-m-n+p$ **R.** 0

2. $5x-7y+8$; $-y+6-4x$; $9-3x+8y$ **R.** $-2x+23$

3. $a+b-c$; $2a+2b-2c$; $-3a-b+3c$ **R.** $2b$

4. $ab+bc+cd$; $-8ab-3bc-3cd$; $5ab+2bc+2cd$ **R.** $-2ab$

5. $-7x-4y+6z$; $10x-20y-8z$; $-5x+24y+2z$ **R.** $-2x$

6. $-am+6mn-6s-am-5mn$; $-2s-5mn+3am$ **R.** $am-4mn-85$

7. $6m-3n$; $-4n+5p$; $-m-5p$ **R.** $5m-7n$

8. $8a+3b-c$; $5a-b+c$; $-a-b-c$; $7a-b+4c$ **R.** $19a+3c$

9. $p+q+r$; $-2p-6q+3r$; $p+5q-8r$ **R.** $-4r$

10. $a-b$; $b-c$; $c+d$; $a-c$; $c-d$; $d-a$; $a-d$ **R.** $2a$

11. $7a-4b+5c$; $-7a+4b-6c$ **R.** $-c$

ORDENACIÓN DE POLINOMIOS

Sumar:

$3x^2-4xy+y^2$,$5xy+6x^2-3y^2$$y-6y^2-8xy-9x^2$

Si es posible, los polinomios deben ordenarse todos con relación a una misma letra, antes de sumar.

En este caso los colocaremos en orden descendente con relación a x , con lo que tendremos:

$$\begin{array}{r} 3x^2-4xy+y^2 \\ 6x^2-5xy-3y^2 \\ -9x^2-8xy-6y^2 \\ \hline -17xy-8y^2 \end{array}$$

Sumar:

$a^3b-b^4+ab^3$,$-2a^2b^2+4ab^3+2b^4$ y $5a^3b-4ab^3$ $6a^2b^2-b^4-6$

Al ordenar con relación a la a se tiene:

$$\begin{array}{l} a^3b \qquad\qquad\quad +ab^3-b^4 \\ \qquad -2a^2b^2+4ab^3+2b^4 \\ 5a^3b-6a^2b^2-4ab^3-b^4-6 \\ \hline 6a^3b-8a^2b^2+ab^3 \qquad -6 \end{array}$$

EJERCICIOS

Encuentra la suma de:

1. x^2-4x;$-7x+6$; $3x^2-5$ **R.** $4x^2-11x+1$

2. $3x+x^3$;$-4x^2+5$;$-3x^3+4x^2-6$ **R.** $3x-1$

3. a^2+ab;$-2ab+b^2$ **R.** a^2-ab+b^2

4. m^2+n^2;$-3mn+4n^2$;$-5m^2-5n^2$ **R.** $-4m^2-3mn$

5. a^3-b^3; $5a^2b-4ab^2$; $a^3-7ab^2-b^3$ **R.** $2a^3+5a^2b-11ab^2-2b^3$

6. $-7m^2n+4n^3$; $m^3+6mn^2-n^3$;$-m^3+7m^2n+5n^3$ **R.** $6mn^2+8n^3$

7. a^3+a; a^2+5; $7a^2+4a$;$-8a^2-6$ **R.** a^3+5a-1

8. a^4-b^4;$-a^3b+a^2b^2-ab^3$;$-3a^4+5a^3b-4a^2b^2$; $-4a^3b+3a^2b^2-3b^4$ **R.** $-2a^4-ab^3-4b^4$

9. x^5+x-9; $3x^4-7x^2+6$; $3x^3-4x+5$ **R.** $x^5+3x^4-3x^3-7x^2-3x+2$

10. x^2+4x ; $-5x+x^2$ **R.** $2x^2-x$

SUMA DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

Sumar:

$\frac{1}{3}x^3+2y^3-\frac{2}{5}x^2y+3$,$-\frac{1}{10}x^2y+\frac{3}{4}xy^2-\frac{3}{7}y^3$,

$-\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{8}xy^2-5$

Escribimos:

$$\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{5}x^2y+2y^3+3$$

$$-\frac{1}{10}x^2y+\frac{3}{4}xy^2-\frac{3}{7}y^3$$

$$-\frac{1}{8}xy^2-\frac{1}{2}y^3-5$$

$$\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2y+\frac{7}{8}xy^2+\frac{15}{14}y^3-2$$

.

EJERCICIOS

Encuentra la suma de:

1. $a^6 - a^4 + a^2\,;\ \frac{3}{5}a^5 - \frac{3}{8}a^3 - \frac{1}{2}a\,;\ \frac{3}{7}a^4 - \frac{5}{8}a^2 + 6\,;\ \frac{3}{8}a - 6$ **R.** $a^6 + \frac{3}{5}a^5 - \frac{10}{7}a^4 - \frac{3}{8}a^3 + \frac{3}{8}a^2 - \frac{7}{8}a$

2. $a^2 + \frac{1}{2}ab\,;\ -\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}b^2\,;\ -\frac{1}{4}ab - \frac{1}{5}b^2$ **R.** $a^2 + \frac{3}{10}b^2$

3. $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2;\ -\frac{2}{5}xy + \frac{1}{6}y^2;\ \frac{1}{10}xy + \frac{1}{3}y^2$ **R.** $\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{10}xy$

4. $x^4 + 2x^2y^2 + \frac{2}{7}y^4;\ -\frac{5}{6}x^4 + \frac{3}{8}x^2y^2 - \frac{1}{6}xy^3 - \frac{1}{14}y^4;\ -\frac{5}{6}x^3y - \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{7}y^4$

R. $\frac{1}{6}x^4 - \frac{5}{6}x^3y + \frac{17}{8}x^2y^2 - \frac{1}{6}xy^3 + \frac{5}{14}y^4$

5. $x^4 - x^2 + 5\,;\ \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{8}x - 3\,;\ -\frac{3}{5}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{3}{4}x$ **R.** $\frac{2}{5}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - x^2 - \frac{9}{8}x + 2$

EJERCICIOS

Suma las siguientes expresiones y encuentra el valor numérico del resultado para:

$a = 2,\ b = 3,\ c = 10,\ x = 5,\ y = 4,\ m = \frac{2}{3},\ n = \frac{1}{5}$

1. $nx + cn - ab\,;\ -ab + 8nx - cn\,;\ -ab + nx - 5$ **R.** $10nx - 3ab - cn - 5;\ -15$

2. $x^2 - 5x + 8\,;\ -x^2 + 10x - 30\,;\ -6x^2 + 5x - 50$ **R.** $-6x^2 + 10x - 72\,;\ -172$

3. $x^3y - xy^3 + 5\,;\ x^4 - x^2 + 5x^3y - 6\,;\ -6xy^3 + x^2y^2 + 2\,;\ -y^4 + 3xy^3 + 1$ **R.** $x^4 + 6x^3y - 4xy^3 - y^4 + 2\,;\ 2091$

4. $\frac{3}{4}a^2 + \frac{2}{3}b^2\,;\ -\frac{1}{3}ab + \frac{1}{9}b^2\,;\ \frac{1}{6}ab - \frac{1}{3}b^2$ **R.** $\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{6}ab + \frac{4}{9}b^2\,;\ 6$

5. $4x - 5y\,;\ -3x + 6y - 8;\ -x + y$ **R.** $2y - 8;\ 0$



Recientemente se ha descubierto en unas tablillas de arcilla, que los caldeos y asirios ya usaban las ecuaciones de segundo grado y las tablas de potencias, lo cual requería un alto grado de conocimiento.

CAPÍTULO III

RESTA

La **resta** o **sustracción** tiene por objeto, dada una suma de dos sumandos (**minuendo**) y uno de ellos (**sustraendo**), hallar el otro sumando (**resta** o **diferencia**), con lo que resulta evidente que la suma del **sustraendo** y la diferencia tiene que ser el **minuendo.**

Si de a (minuendo) queremos restar b (sustraendo), la diferencia será $a - b$. En efecto: $a - b$ será la diferencia si sumada con el sustraendo b reproduce el minuendo a :

$$a - b + b = a$$

Por regla general, para restar se escribe el minuendo con sus propios signos y a continuación el sustraendo con los signos cambiados, y luego se reducen los términos semejantes, si los hay.

RESTA DE MONOMIOS

1) De – 4 restar 7

Escribimos el minuendo – 4 con su propio signo y a continuación el sustraendo 7 con el **signo cambiado**, con lo que la resta será:

$$-4-7=-11$$

En efecto: – 11 es la diferencia, porque sumada con el sustraendo 7 reproduce el minuendo – 4:

$$-11+7=-4$$

2) Restar $4b$ de $2a$

Escribimos el minuendo $2a$ con su signo y a continuación el sustraendo $4b$ con el **signo cambiado**, con lo que la resta será:

$$2a-4b$$

En efecto: $2a-4b$ es la diferencia, porque sumada con el sustraendo $4b$ reproduce el minuendo:

$$2a-4b+4b=2a$$

3) Restar $4a^2b$ de $-5a^2b$

Escribimos el minuendo $-5a^2b$ y a continuación el sustraendo $4a^2b$ con el **signo cambiado**, con lo que tenemos:

$$-5a^2b-4a^2b=-9a^2b$$

$-9a^2b$ es la diferencia, porque sumada con el sustraendo $4a^2b$ reproduce el minuendo:

$$-9a^2b+4a^2b=-5a^2b$$

4) De 7 restar – 4

Si el sustraendo es **negativo**, suele incluirse dentro de un paréntesis para indicar la operación, de este modo distinguimos el signo – que indica la resta del signo – que señala el carácter negativo del sustraendo. Así:

$$7-(-4)=7+4=11$$

El signo – delante del paréntesis indica la resta y su única finalidad es decirnos, de acuerdo con la regla general para restar, que debemos cambiar el signo al sustraendo – 4. Por eso, a continuación del minuendo 7 escribimos + 4.

5) De $7x^3y^4$ restar $-8x^3y^4$

Tendremos: $7x^3y^4-(-8x^3y^4)=$
$7x^3y^4+8x^3y^4=15x^3y^4$

6) De $-\frac{1}{2}ab$ restar $-\frac{3}{4}ab$

Tendremos: $-1\,ab-\left(-\frac{3}{4}\right)ab=$
$\frac{1}{4}ab+\frac{3}{4}ab=\frac{1}{4}ab$

RESTA ALGEBRAICA

En Aritmética la resta siempre implica **disminución**, mientras que la resta algebraica tiene un carácter más general, por lo que puede significar **disminución** o **aumento**.

En algunas restas algebraicas (como las de los ejemplos 4 y 5 anteriores) la diferencia es mayor que el minuendo.

En los ejemplos 4, 5 y 6 se muestra que restar una cantidad **negativa** equivale a sumar la misma cantidad **positiva.**

EJERCICIOS

De:

1. $-9a^2$ restar $5b$ **R.** $-9a^2-5b^2$

2. $-7xy$ restar $-5yz$ **R.** $5yz-7xy$

3. $3a$ restar $4a$ **R.** $-a$

4. $11m^2$ restar $25m^2$ **R.** $-14m^2$

5. $-6x^2y$ restar $-x^2y$ **R.** $-5x^2y$

6. – 8 restar 5 **R.** - 13

7. – 7 restar 4 **R.** -11

8. 8 restar 11 **R.** -3

9. – 8 restar 11 **R.** 3

10. – 1 restar – 9 **R.** 8

11. $2a$ restar $3b$ **R.** $2a-3b$

12. $3b$ restar 2 **R.** $3b-2$

13. $4x$ restar $6b$ **R.** $4x-6b$

14. $-5a$ restar $6b$ **R.** $-5a-6b$

15. $-8x$ restar -3 **R.** $3-8x$

16. $-\frac{2}{3}$ restar $\frac{3}{4}$ **R.** $-\frac{17}{12}$

17. $+\frac{1}{3}x^2$ restar $-\frac{2}{3}x^2$ **R.** x^2

18. $\frac{4}{5}x^3y$ restar $-\frac{5}{6}x^3y$ **R.** $\frac{49}{30}x^3y$

19. $-\frac{1}{8}ab^2$ restar $-\frac{3}{4}ab^2$ **R.** $\frac{5}{8}ab^2$

20. $-8x^{a+2}$ restar 11 **R.** $-8x^{a+2}-11$

21. $-a$ restar de $3a$ **R.** $4a$

22. $-3b$ restar de $-4b$ **R.** $-b$

23. $-11x^3$ restar de $54x^3$ **R.** $65x^3$

24. $14a^2b$ restar de $78a^2b$ **R.** $64a^2b$

25. – 25 restar de $25ab$ **R.** $25ab+25$

26. $-5a^3$ restar de $8b$ **R.** $5a^3+8b$

27. $-19m^a$ restar de $-236m^a$ **R.** $-217m^a$

28. $18a^{x-1}$ restar de $-31a^{x-1}$ **R.** $-49a^{x-1}$

29. a^x restar de $-3a^x$ **R.** $-4a^x$

30. $9m^x$ restar de $105m^x$ **R.** $96m^x$

31. $5m$ restar de $-2n$ **R.** $-5m-2n$

32. $-6a$ restar de $3b$ **R.** $6a+3b$

33. – 9 restar de $25ab$ **R.** $9-25ab$

34. $9ab$ $-ab$ **R.** $-10ab$

35. $-31x^2y$ restar de $-31x^2y$ **R.** 0

RESTA DE POLINOMIOS

En el caso de que el sustraendo sea un polinomio, hay que restar del minuendo cada uno de los términos del sustraendo, por lo que a continuación del minuendo escribiremos el sustraendo cambiándole el signo a todos sus términos.

Ejemplos

1) De $4x - 3y + z$ restar $2x + 5z - 6$

Se indica la sustracción incluyendo el sustraendo en un paréntesis precedido del signo –:

$$4x - 3y + z - (2x + 5z - 6)$$

Dejamos el minuendo con sus propios signos y a continuación escribimos el sustraendo cambiándole el signo a todos sus términos, con lo que tendremos:

$$4x - 3y + z - 2x - 5z + 6$$

Reduciendo los términos semejantes nos queda:

$$2x - 3y + 4z + 6$$

En la práctica suele escribirse el sustraendo con sus signos cambiados debajo del minuendo, de modo que los términos semejantes queden en columna, y luego se hace la reducción, separándolos unos de otros con sus propios signos.

La resta anterior se verifica de esta manera:

$$\begin{array}{l} 4x - 3y + z \\ -2X \qquad -5Z + 6 \\ \hline 2x - 3y - 4z + 6 \end{array}$$

Prueba

La diferencia sumada con el sustraendo debe dar el minuendo.

En el ejemplo anterior, sumando la diferencia $2x - 3y - 4z + 6$ con el sustraendo $2x + 5z - 6$ tendremos:

$$\begin{array}{l} 2x - 3y - 4z + 6 \\ 2x \qquad + 5z - 6 \\ 4x - 3y + z \end{array} \quad \text{(minuendo)}$$

2) Restar:

$4a^5b - ab^5 + 6a^3b^3 - a^2b^4 - 3b^6$ de $8a^4b^2 + a^6 - 4a^2b^4 + 6ab^5$

a

Al escribir el sustraendo (con sus signos cambiados) debajo del minuendo, deben ordenarse ambos con relación a una misma letra.

En este caso, colocando en orden descendente con relación a la a tendremos:

$$\begin{array}{l} a^6 \qquad + 8a^4b^2 \qquad - 4a^2b^4 + 6ab^5 \\ + 4a^5b \qquad - 6a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + 3b^6 \\ \hline a^6 + 4a^5b + 8a^4b^2 - 6a^3b^3 - 3a^2b^4 + 7ab^5 + 3b^6 \end{array}$$

La diferencia sumada con el sustraendo debe darnos el minuendo:

$$\begin{array}{l} a^6 + 4a^5b + 8a^4b^2 - 6a^3b^3 - 3a^2b^4 + 7ab^5 + 3b^6 \\ -4a^5b \qquad + 6a^3b^3 - a^2b^4 - ab^5 - 3b^6 \\ \hline a^6 \qquad + 8^4b^2 \qquad -4a^2b^4 + 6ab^5 \end{array} \quad \text{(minuendo)}$$

3) Restar $-8a^2x + 6 - 5ax^2 - x^3$ de $7a^3 + 8a^2 + 7ax^2 - 4$ y probar el resultado por el valor numérico.

Efectuamos la resta ordenando con relación a la x:

$$\begin{array}{l} 7ax^2 + 8a^2x + 7a^3 - 4 \\ x^3 + 5ax^2 + 8a^2x \qquad -6 \\ \hline x^3 + 12ax^2 + 13a^2x + 7a^3 - 10 \end{array}$$

Para probar el *valor numérico* se busca el valor numérico del minuendo, del sustraendo con los signos cambiados y de la diferencia para un mismo valor de las letras (el valor de cada letra lo escogemos nosotros). Al reducir el valor numérico de minuendo y sustraendo con el signo cambiado, debe darnos el valor numérico de la diferencia.

Así, en el ejemplo anterior para $a = 1$, $x = 2$, tendremos:

$$\begin{array}{l} 7ax^2 + 8a^2x + 7a^3 - 4 = 28 + 16 + 7 - 4 = 47 \\ x^3 + 5ax^2 + 8a^2x \qquad -6 = 8 + 20 + 16 - 6 = 38 \\ \hline x^3 + 12ax^2 + 16a^2x + 7a^3 - 10 = 8 + 48 + 32 + 7 - 10 = 85 \end{array}$$

EJERCICIOS

De:

1. $x^2 + y^2 - 3xy$ restar $-y^2 + 3x^2 - 4xy$
R. $-2x^2 + xy + 2y^2$

2. $y^5 - 9y^3 + 6y^2 - 31$ restar $-11y^4 + 31y^3 - 8y^2 - 19y$
R. $y^5 + 11y^4 - 40y^3 + 14y^2 + 19y - 31$

3. $5m^3 - 9n^3 + 6m^2n - 8mn^2$ restar $14mn^2 - 21m^2n + 5m^3 - 18$
R. $27m^2n - 22mn^2 - 9n^3 + 18$

4. $a^3 - a^2b$ restar de $7a^2b + 9ab^2$
R. $a^3 - 8a^2b - 9ab^2$

5. $ab + 2ac - 3cd - 5de$ restar $-4ac + 8ab - 5cd + 5de$
R. $-7ab + 6ac + 2cd - 10de$

6. $x + y - z$ restar $-x - y + z$
R. $2x + 2y - 2z$

7. $x^3 - x^2 + 6$ restar $5x^2 - 4x + 6$
R. $x^3 - 6x^2 + 4x$

8. $x^4 + 9xy^3 - 11y^4$ restar $-8x^3y - 6x^2y^2 + 20y^4$
R. $x^4 + 8x^3y + 6x^2y^2 + 9xy^3 - 31y^4$

9. $a - b$ restar $b - a$
R. $+2a - 2b$

10. $m^2 - n^2 - 3mn$ restar $-5m^2 - n^2 + 6mn$
R. $-6m^2 - 9mn$

EJEMPLO DE RESTA POLINOMIOS

1) De 1 restar $x^2 + x + 5$

$$\begin{array}{r} 1 \\ -5 - x - x^2 \\ \hline -4 - x - x^2 \end{array}$$

El sustraendo $x^2 + x + 5$ sumado con la diferencia $-4 - x - x^2$ nos da el minuendo:

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 5 \\ -x^2 - x - 4 \\ \hline 1 \text{ (minuendo)} \end{array}$$

2) Restar $9ab - 11a^3b + 8a^2b^2 - b^4$ de $a^4 - 1$

Tendremos:

$$\begin{array}{l} a^4 \qquad\qquad\qquad\qquad -1 \\ \quad 11a^3b - 8a^2b^2 - 9ab^3 - b^4 \\ \hline a^4 + 11a^3b - 8a^2b^2 - 9ab^3 + b^4 - 1 \end{array}$$

EJERCICIOS

De:

1. 16 restar $5xy - x^2 + 16$
R. $x^2 - 5xy$

2. x^3 restar $-x^3 - 8x^2y - 6xy^2$
R. $2x^3 + 8x^2y + 6xy^2$

3. 0 restar $a - 8$
R. $8 - a$

4. Restar $m^2n + 7mn^2 - 3n^3$ de $m^3 - 1$
R. $m^3 - m^2n - 7mn^2 + 3n^3 - 1$

5. $x^2 - 1$ restar $xy + y^2$
R. $x^2 - xy - y^2 - 1$

6. Restar $-x^2 + 5x - 34$ de $x^4 + x^3 - 11x$
R. $x^4 + x^3 + x^2 - 16x + 34$

7. $a^3 + 6$ restar $5a^2b - 8ab^2 + b^3$
R. $a^3 - 5a^2b + 8ab^2 - b^3 + 6$

8. -1 restar $a - 1$ **R.** $2 - a$

9. m^4 restar $a^3m - a^4 + 7a^2m^2 - 18am^3 + 5m$
R. $a^4 - a^3m - 7a^2m^2 + 18am^3 - 4m^4$

10. y^4 restar $-5x^3y + 7x^2y^2 - 8xy^3$
R. $y^4 + 8xy^3 - 7x^2y^2 + 5x^3y$

EJERCICIOS

De:

1. $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$ restar $\frac{4}{5}a + \frac{2}{9}b - \frac{1}{2}$ **R.** $\frac{3}{10}a - \frac{8}{9}b + \frac{1}{2}$

2. $\frac{3}{5}bc$ restar $-\frac{3}{4}ab + \frac{1}{6}bc - \frac{2}{9}cd$
R. $\frac{3}{4}ab + \frac{18}{30}bc + \frac{2}{9}cd$

3. $\frac{1}{2}a^2$ restar $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{5}b^2$
R. $\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{3}ab - \frac{2}{5}b^2$

4. $\frac{3}{7}a^2 + \frac{1}{3}ab - \frac{3}{5}b^2$ restar $\frac{5}{14}a^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}$
R. $1\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{6}ab - \frac{3}{5}b^2 + \frac{1}{8}$

5. $a^3 + a^2 - a + \frac{5}{6}$ restar $\frac{7}{5}a^2 + \frac{9}{10}a + \frac{7}{8}$
R. $a^2 + \frac{15}{8}a^2 - \frac{19}{10}a - \frac{1}{24}$

6. 15 restar $\frac{4}{5}xy + \frac{2}{3}yz - \frac{5}{9}$ **R.** $-\frac{4}{5}xy - \frac{2}{3}yz + 15\frac{5}{9}$

7. $\frac{5}{9}x^2 - \frac{3}{8}y^2$ restar $\frac{5}{7}xy + \frac{1}{10}y^2 - \frac{3}{11}$
R. $\frac{5}{9}x^2 - \frac{5}{7}xy - \frac{19}{40}y^2 + \frac{3}{11}$

8. $\frac{5}{6}m^3 + \frac{2}{9}n^3$ restar $-\frac{1}{2}m^2n + \frac{3}{8}mn^2 - \frac{1}{5}n^3$
R. $\frac{5}{6}m^3 + \frac{1}{2}m^2n - \frac{3}{8}mn^2 + \frac{19}{45}n^3$

RESTA DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

Ejemplos

1) De $\frac{3}{5}x^3$ restar $-\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}xy^2 + \frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{2}y^3$

Escribimos:

$$\begin{array}{l} \frac{3}{5}x^3 \\ \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 + \frac{1}{2}y^3 \\ \frac{11}{10}x^3 - \frac{3}{4}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{1}{2}y^3 \end{array}$$

2) Restar $-4a^3b^3 - \frac{1}{10}ab + \frac{2}{3}a^2b^2 - 9$ de $--\frac{3}{5}ab + \frac{1}{6}a^2b^2 - 8$

Escribimos:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{6}a^2b^2 - \frac{3}{5}ab - 8 \\ 4a^3b^3 - \frac{2}{3}a^2b^2 + \frac{1}{10}ab + 9 \\ 4a^3b^3 - \frac{1}{2}a^2b^2 - \frac{1}{2}ab + 1 \end{array}$$

SUMA Y RESTA COMBINADAS DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES ENTEROS

Ejemplos

1) De a^2 restar la suma de $3ab - 6$ y $3a^2 - 8ab + 5$

Primero realizamos la suma:

$$\begin{array}{r} 3a^2 - 8ab + 5 \\ 3ab - 6 \\ \hline 3a^2 - 5ab - 1 \end{array}$$

Esta suma, que es el sustraendo, hay que restarla de a^2 que es el minuendo, luego debajo de a^2 se escribe $3a^2 - 5ab - 1$ con los signos cambiados, y tendremos:

$$\begin{array}{l} a^2 \\ -3a^2 + 5ab + 1 \\ \hline 2a^2 - 5 \quad + 1 \end{array}$$

2) De $x^3 - 4x^2y + 5y^3$ restar la suma de $-x^3 + 5x^2y - 6xy^2 + y^3$ con $-6x^2y + 9xy^2 - 16y^3$

Primero realizamos la suma:

$$\begin{array}{r} -x^3 + 5x^2y - 6xy^2 + y^3 \\ -6x^2y + 9xy^2 - 16y^3 \\ \hline -x^3 - x^2y + 3xy^2 - 15y^3 \end{array}$$

Esta suma, que es el sustraendo, hay que restarla de $x^3 - 4x^2y + 5y^3$ que es el minuendo, luego debajo de este minuendo se escribe el sustraendo con los signos cambiados, y tendremos:

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2y \qquad + 5y^3 \\ x^3 + x^2y - 3xy^2 + 15y^3 \\ \hline 2x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 20y^3 \end{array}$$

3) De la suma $x^3 + 4x^2 - 6$ y $-5x^2 - 11x + 5$ restar $x^4 - 1$

Realizamos la suma:

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 \qquad - 6 \\ -5x^2 - 11x + 5 \\ \hline x^3 - x^2 - 11x - 1 \end{array}$$

Esta suma es el minuendo, luego debajo de ella se escribe el sustraendo $x^4 - 1$ con lo signos cambiados, y tendremos:

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 11x - 1 \\ -x^4 \qquad\qquad\qquad + 1 \\ \hline -x^4 + x^3 - x^2 - 11x \end{array}$$

EJERCICIOS

1. $\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b + \frac{2}{3}c$ de $a + b - c$ — **R.** $\frac{1}{2}a + \frac{7}{4}b - \frac{5}{3}c$
2. $m + n - p$ de $\frac{2}{3}m + \frac{5}{6}n + \frac{1}{2}p$ — **R.** $-\frac{1}{3}m - \frac{1}{6}n + \frac{2}{3}p$
3. $\frac{1}{2}a - \frac{3}{5}b$ de $8a + 6b - 5$ — **R.** $\frac{15}{2}a + \frac{33}{5}b - 5$
4. $\frac{7}{9}x^2y$ de $x^3 + 2x^2y - 6$ — **R.** $x^3 - \frac{1}{9}x^2y - 6$
5. $\frac{5}{6}a^2$ de $\frac{3}{8}a^2 - \frac{5}{6}a$ — **R.** $\frac{11}{24}a^2 - \frac{5}{6}a$

EJERCICIOS

Realiza las restas siguientes y encuentra el valor numérico del resultado para:

$a = 1, b = 2, c = 3, x = 4, y = 5, m = \frac{3}{2}, n = \frac{2}{5}$

De:

1. $a^3 - 7am^2 + m^3$ restar $-5am^2 + 8a^2m - 5m^3$
   R. $a^3 - 8a^2m - 2am^2 + 6m^3$; $\frac{19}{4}$
2. $a^3 + b^3$ restar $-5a^2b + 6ab^2 - 2b^3$
   R. $a^3 + 5a^2b - 6ab^2 + 3b^3$; 11
3. $x^4 - 18x^2y^2 + 15y^4$ restar $-16x^3y - 6xy^3 + 9y^4$
   R. $x^4 + 16x^3y - 18x^2y^2 + 6xy^3 + 6y^4$; 4926
4. $15ab$ de $-ab + 10mn - 8mx$
   R. $-16ab + 10mn - 8mx$; -74
5. $11a^2b - 9ab^2 + b^2$ de a^3
   R. $a^3 - 11a^2b + 9ab^2 - b^3$; 7
6. $a^2 - ab$ restar $3ab + b^2$
   R. $a^2 - 4ab - b^2$; -11
7. $a^4b^2 - 5a^3b^3$ de $a^5 - 3a^2b^4 + b^5$
   R. $a^5 - a^4b^2 + 5a^3b^3 - 3a^2b^4 + b^5$; 21
8. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{3}{8}$ de $\frac{1}{64}x^4$
   R. $\frac{1}{64}x^4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{3}{8}$; $-9\frac{5}{8}$

POLINOMIOS COMBINADOS

Restar la suma de:
$5x^4y^2 + 6x^2y^4 – 5y^6$ con $– 3x^6 + x^2y^4 – 11y^6$ de la suma
de $x^6 + 2x^2y^4 – y^6$ con $– 4x^4y^2 + 3x^2y^4 + 3y^6$

Efectuamos la primera suma, que será el sustraendo:

$$\begin{array}{rrrr} & 5x^4y^2 & + 6x^2y^4 & - 5y^6 \\ -3x^6 & & + x^2y^4 & - 11y^6 \\ \hline -3x^6 & + 5x^4y^2 & + 7x^2y^4 & - 16y^6 \end{array}$$

Luego hacemos la segunda suma, que será el minuendo:

$$\begin{array}{rrrr} x^6 & & + 2x^2y^4 & - y^6 \\ & -4x^4y^2 & + 3x^2y^4 & + 3y^6 \\ \hline x^6 & -4x^4y^2 & + 5x^2y^4 & + 2y^6 \end{array}$$

Dado que esta suma es el minuendo, escribimos debajo de ella, con los signos cambiados, la suma anterior que es el sustraendo y tenemos:

$$\begin{array}{rrrr} x^6 & - 4x^4y^2 & + 5x^2y^4 & + 2y^6 \\ 3x^6 & - 5x^4y^2 & - 7x^2y^4 & + 16y^6 \\ \hline 4x^6 & - 9x^4y^2 & - 2x^2y^4 & + 18y^6 \end{array}$$

EJERCICIOS

1. Restar la suma de $a – 1$ con $– a + 1$ de la suma de $a^2 – 3$; $a – 4$; $– 3a + 8$
R. $a^2 – 2a + 1$

2. De la suma de $x^2 + 5$ con $2x – 6$ restar la suma de $x – 4$ con $– x + 6$
R. $x^2 + 2x – 3$

3. De la suma de $a^2 + 1$ con $a^3 – 1$ restar la suma de $a^4 + 2$ con $a – 2$
R. $– a^4 + a^3 + a^2 – a$

4. De la suma de $ab + bc + ac$ con $– 7bc + 8ac – 9$ restar la suma de $4ac – 3bc + 5ab$ con $3bc + 5ac – ab$
R. $– 3ab – 6bc – 9$

5. De la suma de $3a – 5b + c$ con $a – b – 3c$ restar la suma de $7a + b$ con $– 8b – 3c$
R. $– 3a + b + c$

6. De la suma de $x^3 + 1$ con $5x^3 + 7 – x^2$ restar la suma de $9x + 4$ con $– 3x^2 – x + 1$
R. $6x^3 + 2x^2 – 8x + 3$

EJERCICIOS

1. De la suma de $8x + 9$ con $6y – 5$ restar $– 2$
R. $8x + 6y + 6$

2. De $m – n + p$ restar la suma de $– m + n – p$ con $2m – 2n + 2p$
R. 0

3. De a^2 restar la suma de $ab + b^2$ con $a^2 – 5b^2$
R. $– ab + 4b^2$

4. De 1 restar la suma de $a + 8$ con $– a + 6$
R. $– 13$

5. De $5m^4$ restar la suma de $– 3m^3n + 4mn^2 – n^3$ con $3m^3n – 4mn^2 + 5n^3$
R. $5m^4 – 4n^3$

6. De $6a$ restar la suma de $8a + 9b – 3c$ con $– 7a – 9b + 3c$
R. $5a$

7. De $a + b + c$ restar la suma de $a – b + c$ con $– 2b + b – c$
R. $2a + b – c$

8 De $a^3 – 1$ restar la suma de $5a^2 + 6a – 4$ con $2a^3 – 8a + 6$
R. $– a^3 – 5a^2 + 2a – 3$

9. De $x^4 – 1$ restar la suma de $5x^3 – 9x^2 + 4$ con $–11x^4 – 7x^3 – 6x$
R. $12x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 6x – 5$

10. De $a^3 + b^3$ restar la suma de $– 7ab^2 + 35a^2b – 11$ con $– 7a^3 + 8ab^2 – 35a^2b + 6$
R. $8a^3 – ab^2 + b^3 + 5$

11. De $n^5 – 7n^3 + 4n$ restar la suma de $– 11n^4 + 14n^2 – 25n + 8$ con $19n^3 – 6n^2$
R. $n^5 + 11n^4 – 26n^3 – 8n^2 + 20n – 4$

12. De la suma de $a + b$ con $a – b$ restar $2a – b$
R. b

13. De la suma $x^2 – 6y^2$ con $– 7xy + 40y^2$ restar $– 9y^2 + 16$
R. $x^2 – 7xy + 43y^2 – 16$

14. De $– 7x^2y$ restar la suma de $4xy^2 – x^3$ con $5x^2y + y^3$
R. $x^3 – 12x^2y – 4xy^2 – y^3$

15. De $x^2 – 5ax + 3a^2$ restar la suma de $9ax – a^2$ con $25x^2 – 9ax + 7a^2$
R. $– 24x^2 – 5ax – 3a^2$

SUMA Y RESTA COMBINADAS DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

Ejemplos

1) De $\frac{1}{25}a^2-\frac{3}{5}b^2$ restar la suma de $\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{6}b^2-\frac{1}{8}ab$

con $-\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{12}b^2-\frac{7}{8}ab$

Primero hacemos la suma, que será el sustraendo:

$$\begin{array}{rrr}
\frac{3}{4}a^2 & -\frac{1}{8}ab & +\frac{1}{6}b^2 \\
-\frac{1}{8}a^2 & -\frac{7}{8}ab & +\frac{1}{2}b^2 \\
\hline
\frac{5}{8}a^2 & -ab & +\frac{1}{4}b^2
\end{array}$$

Debajo del minuendo $\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{5}b^2$ escribimos el resultado de esta suma con los signos cambiados, y tendremos:

$$\begin{array}{rrr}
\frac{1}{2}a^2 & & -\frac{3}{5}b^2 \\
-\frac{5}{8}a^2 & +ab & -\frac{1}{4}b^2 \\
\hline
-\frac{1}{8}a^2 & +ab & -\frac{17}{20}b^2
\end{array}$$

2) Restar la suma de $\frac{3}{5}m^3-\frac{1}{8}mn^2+6$ con

$\frac{3}{4}m^2n+\frac{1}{6}mn^2-\frac{3}{8}n^3$ de la suma de

$\frac{2}{3}m^3+\frac{1}{2}n^3-\frac{2}{5}mn^2$ con $\frac{3}{4}m^2n+\frac{1}{3}mn^2-\frac{1}{5}$

Efectuamos la segunda suma, que será el minuendo.

$$\begin{array}{rrrrr}
\frac{2}{3}m^3 & & -\frac{2}{5}mn^2 & +\frac{1}{2}n^3 & \\
 & \frac{3}{4}m^2n & +\frac{1}{3}mn^2 & & -\frac{1}{5} \\
\hline
\frac{2}{2}m^3 & +\frac{3}{4}m^2n & -\frac{1}{5}mn^2 & +\frac{1}{2}n^3 & -\frac{1}{5}
\end{array}$$

Realizamos la primera suma, que será el sustraendo:

$$\begin{array}{rrrrr}
\frac{3}{5}m^3 & & -\frac{1}{8}mn^2 & & +6 \\
 & \frac{3}{4}m^2n & +\frac{1}{6}mn^2 & -\frac{3}{8}n^3 & \\
\hline
\frac{3}{5}m^3 & +\frac{3}{4}m^2n & +\frac{1}{24}mn^2 & -\frac{3}{8}n^3 & +6
\end{array}$$

Ahora, de la primera suma restamos esta última suma y tendremos:

$$\begin{array}{rrrrr}
\frac{3}{5}m^3 & +\frac{3}{4}m^2n & -\frac{1}{15}mn^2 & +\frac{1}{2}n^3 & -\frac{1}{5} \\
-\frac{3}{5}m^3 & -\frac{3}{4}m^2n & -\frac{1}{24}mn^2 & +\frac{3}{8}n^3 & -6 \\
\hline
\frac{1}{15}m^3 & & -\frac{13}{120}mn^2 & +\frac{7}{8}n^3 & -\frac{31}{5}
\end{array}$$

EJERCICIOS

1. De 3 *a* restar la suma de *a* + 1 *b* con - 2 *a* + 3 *b*

R. $\frac{5}{12}a-\frac{5}{4}b$

2. De 1 a^3 + 3 a^2 restar la suma de 3 *a* - 6

con 3 a^2 - 5 a^3 2 5 8 5 6

R. $\frac{4}{3}a^3-\frac{3}{8}a+6$

3. Encuentra la expresión que sumada con $x^3 - x^2 + 5$ dé $3x - 6$ R. $- x^3 + x^2 + 3x - 11$ **R.** $- x^3 + x^2 + 3x - 11$

4. Encuentra la expresión que sumada con $- 5a + 9b - 6c$ dé $8x + 9$ R. $5a - 9b + 6c + 8x + 9$

R. $5a - 9b + 6c + 8x + 9$

5. ¿Qué expresión sumada con $a^3 - b^3$ da $- 8a^2b + 5ab^2 - 4b^3$? **R.** $- a^3 - 8a^2b + 5ab^2 - 3b^3$

R. $- a^3 - 8a^2b + 5ab^2 - 3b^3$

6. Para obtener como resto $x - 5$, ¿qué expresión debe restarse de $x^3 - 4x^2 + 8$? **R.** $x^3 - 4x^2 - x + 13$

7. ¿Qué expresión hay que restar de $m^4 - 3mn^3 + 6n^4$ para que la diferencia sea $4m^2n^2 - 8$?

R. $m^4 - 4m^2n^2 - 3mn^3 + 6n^4 + 8$

8. Si $4x^3 - 9x + 6$ el resto y $5x^2 + 4x - 8$ el sustraendo, ¿cuál es el minuendo? R. $4x^3 + 5x^2 - 5x - 2$

9. ¿Qué expresión hay que sumar con $- 7xy + 5x^2 - 8y^2$ para que la suma sea 1?

R. $- 5x^2 + 7xy + 8y^2 + 1$

10. Si $a^3 - 5a + 8$ es el sustraendo de una diferencia y el resto es $- a^3 + 5a - 8$, ¿de qué expresión se restó la primera ? **R.** De 0



Thales de Mileto, uno de los siete sabios de Grecia, fue el primero en predecir el eclipse de sol que ocurrió en 585; en sus viajes a Egipto calculó el volumen de las pirámides basándose en las sombras que proyectaban éstas.

CAPÍTULO IV

SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Hay cuatro clases de signos de agrupación: el **paréntesis ordinario** ( ), el **paréntesis angular** o **corchete** [ ], las **llaves** { } y el **vínculo** o **barra** ————.

Estos signos de agrupación se utilizan para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como **un todo**, es decir como una **sola cantidad**.

De este modo $a + (b - c)$, que equivale a $a + (+b - c)$, indica que la diferencia $b - c$ debe sumarse con a, y ya sabemos que para efectuar esta suma escribimos a continuación de a las demás cantidades con su **propio signo**:

$$a + (b - c) = a + b - c$$

USO DE LOS SIGNOS DE AGRUPACIÓN

La expresión $x + (-2y + z)$ indica que a x hay que sumarle $-2y + z$; a continuación de x, escribimos $-2y + z$ con sus propios signos:

$$x + (-2y + z) = x - 2y + z$$

Aquí vemos que se ha suprimido el paréntesis precedido del signo +, dejando cada una de las cantidades que estaban dentro de él con su **propio signo.**

La expresión $a - (b + c)$, que equivale a a $(+ b + c)$, indica que de a hay que restar la suma $b + c$ y como para restar escribimos el **sustraendo** con los signos **cambiados** a continuación del minuendo, tendremos:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

La expresión $x - (-y + z)$ indica que de x hay que restar $-y + z$; cambiando los signos al sustraendo, tendremos:

$$x - (-y + z) = x + y - z$$

Aquí se ha **suprimido** el paréntesis precedido del signo **-, cambiando el signo** a cada una de las cantidades que estaban encerradas en paréntesis.

Cabe señalar que el **paréntesis angular [ ], las llaves { } y el vínculo o barra** ——— tienen la misma significación que el paréntesis ordinario y se suprimen del mismo modo.

Estos signos, que tienen distinta forma pero igual significación, dan mayor claridad en los casos donde una expresión que ya tiene uno o más signos de agrupación se incluye en otro signo de agrupación.

SUPRESIÓN DE SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Regla General

1) Para suprimir signos de agrupación precedidos de + se deja el mismo signo que tenga cada cantidad dentro de él.

2) Para quitar signos de agrupación precedidos de - se cambia el signo a cada cantidad dentro de él.

Ejemplos

1) Cómo suprimir los signos de agrupación en la expresión $a + (b - c) + 2a - (a + b)$ que equivale a + a $(+ b - c) + 2a - (+ a + b)$

Como el primer paréntesis va precedido del signo +, lo suprimimos dejando las cantidades que contiene con su propio signo, y como el segundo paréntesis va precedido del signo -, lo suprimimos cambiando el signo a las cantidades que se hallan dentro, con lo que tendremos:

$$a + (b - c) + 2a - (a + b) = a + b - c + 2a - a - b = 2a - c$$

2) Cómo suprimir los signos de agrupación en $5x + (-x - y) - [-y + 4x] + \{x - 6\}$

Suprimimos el paréntesis y las llaves precedidas del signo +, dejando las cantidades que están dentro con su propio signo, y como el corchete va precedido de -, lo suprimimos cambiando el sig-no a las cantidades que se hallan dentro, con lo que tendremos:

$$5x + (-x - y) - [-y + 4x] + \{x - 6\} = 5x - x - y + y - 4x + x - 6 = x - 6$$

3) Cómo simplificar $m + 4n - 6 + 3m - n + 2m - 1$

En este caso el vínculo o barra equivale a un paréntesis que encierra las cantidades debajo de él y su signo es el de la primera cantidad debajo de él.

De tal modo, la expresión anterior equivale a: $m + (4n - 6) + 3m –$

$(n + 2m - 1)$

Al suprimir los vínculos tendremos:

$$m + 4n - 6 + 3m - n + 2m - 1 = m + 4n - 6 + 3m - n - 2m + 1 = 2m + 3n - 5$$

4) Cómo simplificar la expresión $3a + \{-5x - [-a + (9x - a + x)]\}$

En este ejemplo unos signos de agrupación están incluidos dentro de otros, por lo que se suprime uno en cada paso, empezando por el más interior. En este caso primero suprimimos el vínculo, con lo que tendremos:

Al suprimir el paréntesis tenemos: $3a + \{-5x - [-a + 9x - a - x]\}$

Al suprimir el corchete tenemos: $3a + \{-5x + a - 9x + a + x\}$

Al suprimir las llaves tenemos: $3a - 5x + a - 9x + a + x$

Al reducir los términos semejantes queda: $5a - 13x$

5) Cómo simplificar la expresión $-[-3a - \{b + [-a + (2a - b) - (-a + b)] + 3b\} + 4a]$

Si empezamos por los más interiores, que son los paréntesis ordinarios, tenemos:

$-[-3a - \{b + [-a + 2a - b + a - b] + 3b\} + 4a]$

$= -[-3a - \{b - a + 2a - b + a - b + 3b\} + 4a]$

$= -[-3a - b - a + 2a + b - a + b - 3b + 4a]$

$= 3a + b - a + 2a - b + a - b + 3b - 4a = a + 2b$

EJERCICIOS

Suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo los términos semejantes, simplifica las siguientes expresiones:

1. $2a - \{- x + a - 1\} - \{a + x - 3\}$ **R.** 4

2. $x^2 + y^2 - (x^2 + 2xy - y^2) - [-x^2 + y^2]$ **R.** $x^2 + y^2 - 2xy$

3. $4m - (- 2m - n)$ **R.** $6m + n$

4. $2x + 3y - 4x + 3y$ **R.** $- 2x + 6y$

5. $a + (a - b) + (- a + b)$ **R.** a

6. $a^2 + [- b^2 + 2a^2] - [a^2 - b^2]$ **R.** $2a^2$

7. $- (a + b) + (- a - b) - (- b + a) + (3a + b)$ **R.** 0

8. $2m - [(m - n) - (m + n)$ **R.** $2m + 2n$

9. $4x^2 + [- (x^2 - xy) + (- 3y^2 + 2xy) - (- 3x^2 + y^2)]$

R. $6x^2 + 3xy - 4y^2$

10. $a + \{(- 2a + b) - (- a + b - c) + a\}$ **R.** $a + c$

11. $4m - [2m + n - 3] + [- 4n - 2m + 1]$ **R.** $2 - 5n$

12. $2x + [- 5x - (- 2y + \{- x + y\})]$ **R.** $y - 2x$

13. $x^2 - \{- 7xy + [- y^2 + (- x^2 + 3xy - 2y^2)]\}$ **R.** $2x^2 + 4xy + 3y^2$

14. $- (a + b) + [- 3a + b - \{- 2a + b - (a - b)\} + 2a]$ **R.** $a - 2b$

15. $(- x + y) - \{4x + 2y + [- x - y - x + y]\}$ **R.** $- 3x + y$

INTRODUCCIÓN DE SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Sabemos que → $a + (- b + c) = a - b + c$

luego, recíprocamente → $a - b + c = a + (- b + c)$

Vimos asimismo que → $a - (b - c) = a - b + c$

luego, recíprocamente → $a - b + c = a - (b - c)$

Del mismo modo, → $a + b - c - d - e = a + (b - c) - (d + e)$

Lo anterior nos dice que los términos de una expresión pueden agruparse de cualquier modo, lo que es la Ley Asociativa de la suma y la resta.

Regla General

1) Para introducir cantidades dentro de un signo de agrupación precedido de + se deja cada una de las cantidades con el signo que tengan.

2) Para introducir cantidades dentro de un signo de agrupación precedido de - se cambia el signo a cada una de las cantidades incluidas en él.

Ejemplos

1) Para introducir los tres últimos términos de la expresión $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ en un paréntesis precedido del signo + dejamos cada cantidad con el signo que tiene: $x^3 + (- 2x^2 + 3x - 4)$

2) Para introducir los tres últimos términos de la expresión $x^2 - a^2 + 2ab - b^2$ en un paréntesis precedido del signo - cambiamos el signo a cada una de las tres últimas cantidades:

$x^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$

3) Introduce todos los términos, excepto el primero, de la expresión:

$3a + 2b - (a + b) - (- 2a + 3b)$ en un paréntesis precedido del signo -.

Cambiaremos el signo a $2b$ y pondremos $- 2b$, y también cambiamos los signos delante de los paréntesis, con lo que cambian los signos de las cantidades encerradas en ellos, y tendremos:

$3a - [- 2b + (a + b) + (- 2a + 3b)]$

EJERCICIOS

Introduce los tres últimos términos de las expresiones siguientes dentro de un paréntesis precedido del signo + :

1. $x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

R. $x^4 - x^3 + (2x^2 - 2x + 1)$

2. $a - b + c - d$

R. $a + (- b + c - d)$

3. $x^2 - 3xy - y^2 + 6$

R. $x^2 + (- 3xy - y^2 + 6)$

4. $x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

R. $x^3 + (4x^2 - 3x + 1)$

5. $a^3 - 5a^2b + 3ab^2 - b^3$

R. $a^3 + (- 5a^2b + 3ab^2 - b^3)$

Introduce los tres últimos términos de las expresiones siguientes dentro de un paréntesis precedido del signo -:

1. $a^2 - x^2 - 2xy - y^2$

R. $a^2 - (x^2 + 2xy + y^2)$

2. $a^2 + b^2 - 2bc - c^2$

R. $a^2 - (-b^2 + 2bc + c^2)$

3. $2a + b - c + d$

R. $2a - (- b + c - d)$

4. $x^3 + x^2 + 3x - 4$

R. $x^3 - (- x^2 - 3x + 4)$

5. $x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - y^3$

R. $x^3 - (5x^2y - 3xy^2 + y^3)$

EJERCICIOS

Introduce todos los términos, excepto el primero, de las expresiones siguientes, en un paréntesis precedido del signo -:

1. $4m - 2n + 3 - (m + n) + (2m - n)$

R. $4m - [2n - 3 + (+ m + n) - (2m - n)]$

2. $x^3 - 3x^2 + [- 4x + 2] - 3x - (2x + 3)$

R. $x^3 - \{3x^2 - [- 4x + 2] + 3x + (2x + 3)\}$

3. $2a + 3b - \{- 2a + [a + (b - a)]\}$

R. $2a - (3b + \{- 2a + [a + (b - a)]\})$

Introduce las expresiones siguientes en un paréntesis precedido del signo -:

1. $- 2a + (- 3a + b)$

R. $- [2a - (- 3a + b)]$

2. $2x^2 + 3xy - (y^2 + xy) + (- x^2 + y^2)$

R. $- [- 2x^2 - 3xy + (y^2 + xy) - (- x 2 + y 2)]$

3. $[m^4 - (3m^2 + 2m + 3)] + (- 2m + 3)$

R. $- \{- [m^4 - (3m^2 + 2m + 3)] - (- 2m + 3)\}$



Pitágoras hizo que el número fuera el principio universal por excelencia y sentó las bases fundamentales de la matemática. Realizó diversos viajes a Oriente y Egipto. Fundó la escuela de Crotona que era una sociedad política-religiosa-científica.

CAPÍTULO V

MULTIPLICACIÓN

Esta operación (dadas dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador) tiene por objeto hallar una tercera cantidad (producto) que sea respecto del multiplicando (en valor absoluto y signo) lo que es el multiplicador respecto de la unidad positiva. El multiplicando y el multiplicador son los factores del producto.

La propiedad de que el orden de los factores no altera el producto, se cumple tanto en Aritmética como en Álgebra.

LEYES DE LA MULTIPLICACIÓN

El producto *ab* puede escribirse *ba* y el producto *abc* puede escribirse *bac* o *ac b*, lo cual representa la **Ley Conmutativa** de la multiplicación.

Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier modo.

Así, en el producto *abcd* tenemos:

$abcd =$

$a \times (bcd) = (ab) \times (cd) = (abc) \times d$

que es la **Ley Asociativa** de la multiplicación.

LEY DE LOS EXPONENTES

Para multiplicar potencias de la misma base se escribe la misma base y se le pone por exponente la suma de los exponentes de los factores:

$a^4 \times a^3 \times a^2 = a^{4+3+2} = a^9$

En efecto:

$a^4 \times a^3 \times a^2 = aaaa \times aaa \times aa =$

$aaaaaaaaa = a^9$

LEY DE LOS COEFICIENTES

El coeficiente del producto de dos factores es el producto de los coeficientes de los factores:

$3a \times 4b = 12\,ab$

Dado que el orden de los factores no altera el producto, tendremos:

$3a \times 4b = 3 \times 4 \times a \times b = 12ab$

CASOS DE LA MULTIPLICACIÓN

Hay tres casos: 1) Multiplicación de monomios 2) Multiplicación de un polinomio por un monomio 3) Multiplicación de polinomios.

LEY DE LOS SIGNOS

1) Signo del producto de dos factores. A este respecto la regla dice que signos iguales dan + y signos diferentes dan -:

Veamos los siguientes casos:

1. $(+a) \times (+b) = +ab$, porque según la definición para multiplicar, el signo del producto debe ser respecto del signo del multiplicando lo que el signo del multiplicador es respecto de la **unidad positiva**, pero en este caso el multiplicador tiene el mismo signo que la unidad positiva; luego, el producto necesita tener el **mismo signo** que el multiplicando, que es +, por tanto el signo del producto será +.

2. $(-a) \times (+b) = -ab$, porque teniendo el multiplicador el **mismo signo** que la unidad positiva, el producto necesita el mismo signo que el multiplicando, que es -, por tanto el producto será -.

3. $(+a) \times (-b) = -ab$, porque teniendo el multiplicador **signo contrario** a la unidad positiva, el producto tendrá **signo contrario** al multiplicando, que es +, por tanto el producto tendrá -.

4. $(-a) \times (-b) = +ab$, porque teniendo el multiplicador **signo contrario** a la unidad positiva, el producto debe tener **signo contrario** al multiplicando, que es -, por tanto el producto tendrá +.

Podemos resumir lo anterior con este cuadro:

+ por + da +
- por - da +
+ por - da –
- por + da -

2) Signo del producto de más de dos factores. En este caso, la regla señala que:

a) El signo del producto de varios factores es + cuando tiene un número par de factores negativos o ninguno.

Así, $(-a) \times (-b) \times (-c) \times (-d) = abcd$

Según se demostró antes, el signo del producto de dos factores negativos es +, por lo que tendremos:

$(-a) \times (-b) \times (-c) \times (-d) = (-a \bullet -b) \times (-c \bullet -d) = (+ab) \times (cd) = abcd$

b) El signo del producto de varios factores es - cuando tiene un número impar de factores negativos.

Así, $(-a) \times (-b) \times (-c) = -abc$

En efecto:

$(-a) \times (-b) \times (-c) = [(-a) \times (-b)] \times (-c) = (+ab) \times (-c) = -abc$

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS

La regla dice que se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto estará dado por la **Ley de los Signos** que ya mencionamos.

Ejemplos

1) Multiplicar $2a^2$ por $3a^3$

$$2a^2 \times 3a^3 = 2 \times 3a^{2+3} = 6a^5$$

El signo del producto es +, porque + por + da +

2) Multiplicar xy^2 por $-5mx^4y^3$

$$(-xy^2) \times (-5mx^4y^3) = 5mx^{1+4}y^{2+3} = 5mx^5y^5$$

El signo del producto es +, porque - por - da +

3) Multiplicar $3a^2b$ por $-4b^2x$

$$3a^2b \times (-4b^2x) = -3 \times 4a^2b^{1+2}x = -12a^2b^3x$$

El signo del producto es -, porque + por - da -

4) Multiplicar $-ab^2$ por $4a^mb^nc^3$

$$(-ab^2) \times 4a^mb^nc^3 = -1 \times 4a^{1+m}b^{2+n}c^3 =$$
$$-4a^{m+1}b^{n+2}c^3$$

El signo del producto es -, porque - por + da -

5) Multiplica $a^{x+1}b^{x+2}$ por $-3a^{x+2}b^3$

$$(a^{x+1}b^{x+2}) \times (-3a^{x+2}b^3) - 3a^{x+1+x+2}b^{x+2+3} =$$
$$-3a^{2x+3}b^{x+5}$$

6) Multiplica $\frac{2}{3}a^2b$ por $-\frac{3}{4}a^3m$

$$\left(\frac{2}{3}a^2b\right) \times \left(-\frac{3}{4}a^3m\right) = -\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}a^5bm$$

$$-\frac{1}{2}a^5bm$$

EJERCICIOS

Multiplica:

1. a^2b^3 por $3a^2x$ — **R.** $3a^4b^3x$

2. $-4m^2$ por $-5mn^2p$ — **R.** $20m^3n^2p$

3. 2 por - 3 — **R.** - 6

4. - 4 por - 8 — **R.** 32

5. $2x^2$ por $-3x$ — **R.** $-6x^3$

6. $-4a^2b$ por $-ab^2$ — **R.** $4a^3b^3$

7. $-5x^3y$ por xy^2 — **R.** $-5x^4y^3$

8. $5a^2y$ por $-6x^2$ — **R.** $-30a^2x^2y$

9. - 15 por 16 — **R.** - 240

10. ab por $-ab$ — **R.** $-a^2b^2$

11. a^m por a^{m+1} — **R.** a^{2m+1}

12. $-x^a$ por $-x^{a+2}$ — **R.** x^{2a+2}

13. $4a^nb^x$ por $-ab^{x+1}$ — **R.** $-4a^{n+1}b^{2x+1}$

14. $-a^{n+1}b^{n+2}$ por $a^{n+2}b^n$ — **R.** $-a^{2n+3}b^{2n+2}$

15. $-3a^{n+4}b^{n+1}$ por $-4a^{n+2}b^{n+3}$ — **R.** $12a^{2n+6}b^{2n+4}$

EJERCICIOS

Realiza las operaciones siguientes:

1. $\frac{1}{2}a^2$ por $\frac{4}{5}a^3b$ — **R.** $\frac{2}{5}a^5b$

2. $-\frac{3}{7}m^2n$ por $-\frac{7}{14}a^2m^3$ — **R.** $\frac{3}{14}a^2m^5n$

3. $\frac{2}{3}x^2y^3$ por $-\frac{3}{5}a^2x^4y$ — **R.** $-\frac{2}{5}a^2x^6y^4$

4. $-\frac{1}{8}m^3n^4$ por $-\frac{4}{5}a^3m^2n$ — **R.** $\frac{1}{10}a^3m^5n^5$

5. $-\frac{7}{8}abc$ por $\frac{2}{7}a^3$ — **R.** $-\frac{1}{4}a^4bc$

6. $\frac{1}{3}a$ por $\frac{3}{5}a^m$ — **R.** $\frac{1}{5}a^{m+1}$

7. $-\frac{3}{4}a^m$ por $-\frac{2}{5}ab^3$ — **R.** $\frac{3}{10}a^{m+1}b^3$

8. $\frac{5}{6}a^mb^m$ por $-\frac{3}{10}ab^2c$ — **R.** $\frac{1}{4}a^{m+1}b^{m+2}c$

PRODUCTO CONTINUADO

Multiplicación de más de dos monomios.

Ejemplos

1) Efectuar $(2a)(3a^2b)(-ab^3)$

$$(2a)(-3a^2b)(-ab^3) = 6a^4b^4$$

El signo del producto es +, porque tiene un número par de factores negativos.

2) Efectuar $(-x^2y)\left(-\frac{2}{3}x^m\right)\left(-\frac{3}{4}a^2y^n\right)$

$$(-x^2y)\left(-\frac{2}{3}x^m\right)\left(-\frac{3}{4}a^2y^n\right) = -1\,a^2x^{m+2}y^{n+1}$$

El signo del producto es -, porque tiene un número impar de factores negativos

EJERCICIOS

Multiplica:

1. $(-a^m)(-2ab)(-3a^2b^x)$	**R.** $-6a^{m+3}b^{x+1}$
2. $(a)(-3a)(a^2)$	**R.** $-3a^4$
3. $(3x^2)(-x^3y)(-a^2x)$	**R.** $3a^2x^6y$
4. $(-m^2n)(-3m^2)(-5mn^3)$	**R.** $-15m^5n^4$
5. $(4a^2)(-5a^3x^2)(-ay^2)$	**R.** $20a^6x^2y^2$
6. $\left(\frac{2}{3}a^m\right)\left(\frac{3}{4}a^2b^4\right)-3a^4b^{x+1}$	**R.** $-\frac{3}{2}a^{m+6}b^{x+5}$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR MONOMIOS

Siendo el producto $(a + b)c$, multiplicar $(a + b)$ por c equivale a tomar la suma $(a + b)$ como sumando c veces; luego:

$(a + b)c = (a + b) + (a + b) + (a + b)$... c veces

$= (a + a + a \ldots c$ veces$) + (b + b + b \ldots c$ veces$)$

$= ac + bc$

Siendo el producto $(a _ b)c$, tendremos:

$(a - b)c = (a - b) + (a - b) + (a - b)$... c veces

$= (a + a + a \ldots c$ veces$) - (b + b + b \ldots c$ veces$)$

$= ac - bc$

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS POR POLINOMIOS

La regla para multiplicar un polinomio por un monomio dice que se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos, y se separan los productos parciales con sus propios signos, lo que representa la Ley Distributiva de la multiplicación.

Ejemplos

1) Multiplicar $3x^2 - 6x + 7$ por $4ax^2$

Tendremos:

$(3x^2 - 6x + 7) \times 4ax^2 = 3x^2(4ax^2) - 6x(4ax^2) + 7(4ax^2)$

$= 12ax^4 - 24ax^3 + 28ax^2$

Esta operación suele disponerse así:

$$\begin{array}{l} 3x^2 \quad -6x \;+\; 7 \\ 4ax^2 \\ \hline 12ax^2 \;-24ax^3 \;+28ax^2 \end{array}$$

2) Multiplicar $a^3x - 4a^2x^2 + 5ax^3 - x^4$ por $-2a^2x$

$$\begin{array}{l} a^3x - 4a^2x^2 + 5ax^3 - x^4 \\ -2a^2x \\ \hline -2a^5x^2 + 8a^4x^3 - 10a^3x^4 + 2a^2x^5 \end{array}$$

3) Multiplicar $\frac{2}{3}x^4y^2 - \frac{3}{5}x^2y^4 + \frac{5}{6}y^6$

por $-\frac{2}{9}a^2x^3y^2$

$$\frac{2}{3}x^4y^2 - \frac{3}{5}x^2y^4 + \frac{5}{6}y^6$$

$$-\frac{2}{9}a^2x^3y^2$$

$$-\frac{4}{27}a^2x^7y^4 + \frac{2}{15}a^2x^5y^6 - \frac{5}{27}a^2x^3y^8$$

4) Multiplicar $x^{a+1}y - 3x^ay^2 + 2x^{a-1}y^3 - x^{a-2}y^4$ por $-3x^2y^m$

$$\begin{array}{l} x^{a+1}y - 3x^ay^2 + 2x^{a-1}y^3 - x^{a-2}y^4 \\ -3x^2y^m \\ \hline -3x^{a+3}y^{m+1} + 9x^{a+2}y^{m+2} - 6x^{a+1}y^{m+3} + 3x^ay^{m+4} \end{array}$$

EJERCICIOS

Multiplicar:

1. $a^2 - 2ab + b^2$ por $-ab$
R. $-a^3b + 2a^2b^2 - ab^3$

2. $x^5 - 6x^3 - 8x$ por $3a^2x^2$
R. $3a^2x^7 - 18a^2x^5 - 24a^2x^3$

3. $3x^3 - x^2$ por $-2x$
R. $-6x^4 + 2x^3$

4. $8x^2y - 3y^2$ por $2ax^3$
R. $16ax^5y - 6ax^3y^2$

5. $x^2 - 4x + 3$ por $-2x$
R. $-2x^3 + 8x^2 - 6x$

6. $a^3 - 4a^2 + 6a$ por $3ab$
R. $3a^4b - 12a^3b + 18a^2b$

7. $a^3 - 5a^2b - 8ab$ por $-4a^4m^2$
R. $-4a^7m^2 + 20a^6bm^2 + 32a^5bm^2$

8. $m^4 - 3m^2n^2 + 7n^4$ por $-4m^3x$
R. $-4m^7x + 12m^5n^2x - 28m^3n^4x$

9. $x^3 - 4x^2y + 6xy^2$ por ax^3y
R. $ax^6y - 4ax^5y^2 + 6ax^4y^3$

10. $3a - 5b + 6c$ por $-\frac{3}{10}a^2x^3$

R. $-\frac{9}{10}a^3x^3 + \frac{3}{2}a^2bx^3 - \frac{9}{5}a^2cx^3$

11. $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$ por $\frac{2}{5}a^2$

R. $\frac{1}{5}a^3 - \frac{4}{15}a^2b$

12. $\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b$ por $-\frac{2}{3}a^3b$

R. $-\frac{4}{9}a^4b + \frac{1}{2}a^3b^2$

13. $\frac{3}{5}a - \frac{1}{6}b + \frac{2}{5}c$ por $-\frac{5}{3}ac^2$

R. $-a^2c^2 + \frac{5}{18}abc^2 - \frac{2}{3}ac^3$

14. $\frac{2}{5}a^2 - \frac{1}{3}ab - \frac{2}{9}b^2$ por $3a^2x$

R. $\frac{6}{5}a^4x + a^3bx - \frac{2}{3}a^2b^2x$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR POLINOMIOS

Siendo el producto $(a + b - c)(m + n)$, y haciendo $m + n = y$, tendremos:

$$(a + b - c)(m + n) = (a + b - c)y = ay + by - cy$$

(sustituyendo y por su valor $(m + n)$)

$$= a(m + n) + b(m + n) - c(m + n)$$

$$= am + an + bm + bn - cm - cn$$

$$= am + bm - cm + an + bn - cn$$

REGLA PARA MULTIPLICAR DOS POLINOMIOS

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la **Ley de los Signos**, y se reducen los términos semejantes.

Ejemplos

1) Multiplicar $a - 4$ por $3 + a$

Los dos factores deben ordenarse con relación a una misma letra.

Tendremos:

$$\begin{array}{r} a \quad -4 \\ a \quad +3 \\ \hline a(a) \ -4(a) \quad \\ \hline +3(a) - 3(4) \end{array} \quad \text{o sea} \quad \begin{array}{r} a - 4 \\ a + 3 \\ \hline a^2 - 4a \quad \\ 3a - 12 \\ \hline a^2 - a - 12 \end{array}$$

Aquí multiplicamos el primer término del multiplicador a por los dos términos del multiplicando, y el segundo término del multiplicador 3 por los dos términos del multiplicando, escribiendo los productos parciales de modo que los términos semejantes queden en columna, y reducimos los términos semejantes.

2) Multiplicar $4x - 3y$ por $-2y + 5x$

Al colocar en orden descendente con relación a la x, tendremos:

$$\begin{array}{r} 4x - 3y \quad \\ 5x - 2y \quad \\ \hline 4x(5x) - 3y(5x) \quad \\ -4x(2y) + 3y(2y) \\ \hline \end{array} \quad \text{o sea} \quad \begin{array}{r} 4x - 3y \quad \\ 5x - 2y \quad \\ \hline 20x^2 - 15xy \quad \\ -8xy + 6y^2 \\ \hline 20x^2 - 23xy + 6y^2 \end{array}$$

EJERCICIOS

Multiplicar:

1. $x + 5$ por $x - 4$ **R.** $- a^3b + 2a^2b^2 - ab^3$

2. $8n - 9m$ por $4n + 6m^2$ **R.** $3a^2x^7 - 18a^2x^5 - 24a^2x^3$

3. $- x + 3$ por $- x + 5$ **R.** $- 6x^4 + 2x^3$

4. $3x - 2y$ por $y + 2x^2$ **R.** $6x^2 - xy - 2y^2$

5. $5a - 7b$ por $a + 3b$ **R.** $5a^2 + 8ab - 21b^2$

6. $- a + b$ por $- 4b + 8a$ **R.** $- 8a^2 + 12ab - 4b^2$

7. $a + 3$ por $a - 1$ **R.** $a^2 + 2a - 3$

8. $x^3 + 2x^2 - x$ por $x^2 - 2x + 5$ **R.** $x^5 + 12x^2 - 5x$

9. $x^2 + 1 + x$ por $x^2 - x - 1$ **R.** $x^4 - x^2 - 2x - 1$

10. $2 - 3x^2 + x^4$ por $x^2 - 2x + 3$
R. $x^6 - 2x^5 + 6x^3 - 7x^2 - 4x + 6$

11. $m^3 - 4m + m^2 - 1$ por $m^3 + 1$
R. $m^6 + m^5 - 4m^4 + m^2 - 4m - 1$

12. $a^3 - 5a + 2$ por $a^2 - a + 5$
R. $a^5 - a^4 + 7a^2 - 27a + 10$

13. $x^2 - 2xy + y^2$ por $xy - x^2 + 3y^2$
R. $- x^4 + 3x^3y - 5xy^3 + 3y^4$

14. $n^2 - 2n + 1$ por $n^2 - 1$
R. $n^4 - 2n^3 + 2n - 1$

15. $8x^3 - 9y^3 + 6xy^2 - 12x^2y$ por $2x + 3y$
R. $16x^4 - 24x^2y^2 - 27y^4$

16. $2y^3 + y - 3y^2 - 4$ por $2y + 5$
R. $4y^4 + 4y^3 - 13y^2 - 3y - 20$

17. $3x^3 - a^3 + 2ax^2$ por $2a^2 - x^2 - 3ax$
R. $- 3x^5 - 11ax^4 + 5a^3x^2 + 3a^4x - 2a^5$

18. $x^2 + xy + y^2$ por $x - y$ **R.** $x - y^3$

19. $a^2 + b^2 - 2a$ por $a - b$ **R.** $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

20. $a^2 + b^2 + 2ab$ por $a + b$ **R.** $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

21. $x^3 - 3x^2 + 1$ por $x + 3$ **R.** $x^4 - 9x^2 + x + 3$

22. $a^3 - a + a^2$ por $a - 1$ **R.** $a^4 - 2a^2 + a$

23. $m^4 + m^2n^2 + n^4$ por $m^2 - n^2$ **R.** $m^6 - n^6$

24. $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ por $2x + 3$ **R.** $2x^4 - x^3 + 7x - 3$

25. $3y^3 + 5 - 6y$ por $y^2 + 2$ **R.** $3y^5 + 5y^2 - 12y + 10$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

1) Multiplicar $2 + a^2 - 2a - a^3$ por $a + 1$

Al colocar en orden ascendente con relación a la a, tendremos:

$2 - 2a + a^2 - a^3$
$1 + a$
$2 - 2^a + a^2 - a^3$
$2a - 2a^2 + a^3 - a^4$
$2 - a^2 - a^4$

2) Multiplicar $6y^2 + 2x^2 - 5xy$ por $3x^2 - 4y^2 + 2xy$

Al colocar en orden descendente con relación a la x, tendremos:

$2x^2 - 5xy + 6y^2$
$3x^2 + 2xy - 4y^2$
$6x^4 - 15x^3y + 18x^2y^2$
$4x^3y - 10x^2y^2 + 12xy^3$
$- 8x^2y^2 + 20xy^3 - 24y^4$
$6x^4 - 11x^3y + 32xy^3 - 24y^4$

3) Multiplicar $x - 4x^2 + x^3 - 3$ por $x^3 - 1 + 4x^2$

Al colocar en orden descendente con relación a x, tendremos:

$x^3 - 4x^2 + x - 3$
$x^3 + 4x^2 - 1$
$x^6 - 4x^5 + x^4 - 3x^3$
$4x^5 - 16x^4 + 4x^3 - 12x^2$
$- x^3 + 4x^2 - x + 3$
$x^6 - 15x^4 - 8x^2 - x + 3$

4) Multiplicar $2x - y + 3z$ por $x - 3y - 4z$

$2x - y + 3z$
$x - 3y - 4z$
$2x^2 - xy + 3xz$
$- 6xy + 3y^2 - 9yz$
$- 8xz + 4yz - 12z^2$
$2x^2 - 7xy - 5xz + 3y^2 - 5yz - 12z^2$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS CON EXPONENTES LITERALES

Ejemplo

1) Multiplicar:

x^{a+2} $3x^{a} - x^{a-1} + x^{a+1}$ por $x^{a+1} + x^{a} + 4x^{a-1}$

$x^{a+2} - x^{a+1} - 3x^{a} + x^{a-1}$

$x^{a+1} + x^{a} + 4x^{a-1}$

$x^{2a+3} - x^{2a+2} - 3x^{2a+1} + x^{2a}$

$x^{2a+2} - x^{2a+1} - 3x^{2a} + x^{2a-1}$

$4x^{2a+1} - 4x^{2a} - 12x^{2a-1} + 4x^{2a-2}$

x^{2a2+3} $-6x^{2a} - 11x^{2a-1} + 4x^{2a-2}$

EJERCICIOS

Multiplica:

1. $a^{x} + b^{x}$ por $a^{m} + b^{m}$

R. $a^{m+x} + a^{m}b^{x} + a^{x}b^{m} + b^{m+x}$

2. $a^{x-1} - b^{n-1}$ por $a - b$

R. $a^{x} - ab^{n-1} - a^{x-1}b + b^{n}$

3. $a^{x} - a^{x+1} + a^{x+2}$ por $a + 1$

R. $a^{x+3} + a^{x}$

4. $x^{n+1} + 2x^{n+2} - x^{n+3}$ por $x^{2} + x$

R. $x^{n+2} + 3x^{n+3} + x^{n+4} - x^{n+5}$

5. $m^{a-1} + m^{a+1} + m^{a+2} - m^{a}$ por $m^{2} - 2m + 3$

R. $m^{a+4} - m^{a+3} + 6m^{a+1} - 5m^{a} + 3m^{a-1}$

6. $a^{n+2} - 2a^{n} + 3a^{n+1}$ por $a^{n} + a^{n+1}$

R. $a^{2n+3} + 4a^{2n+2} + a^{2n+1} - 2a^{2n}$

7. $x^{a+2} - x^{a} + 2x^{a+1}$ por $x^{a+3} - 2x^{a+1}$

R. $x^{2a+5} + 2x^{2a+4} - 3x^{2a+3} - 4x^{2a+2} + 2x^{2a+1}$

8. $3a^{x-2} - 2a^{x-1} + a^{x}$ por $a^{2} + 2a - 1$

R. $a^{x+2} - 2a^{x} + 8a^{x-1} - 3a^{x-2}$

9. $3a^{x-1} + a^{x} - 2a^{x-2}$ por $a^{x} - a^{x-1} + a^{x-2}$

R. $a^{2x} + 2a^{2x-1} - 4a^{2x-2} + 5a^{2x-3} - 2a^{2x-4}$

10. $m^{a+1} - 2m^{a+2} - m^{a+3} + m^{a+4}$ por $m^{a-3} - m^{a-1} + m^{a-2}$

R. $m^{2a-2} - m^{2a-1} - 4m^{2a} + 2m^{2a+1} + 2m^{2a+2} - m^{2a+3}$

11. $x^{a-1} + 2x^{a-2} - x^{a-3} + x^{a-4}$ por $-x^{a-3} + x^{a-1} - x^{a-2}$

R. $x^{2a-2} + x^{2a-3} - 4x^{2a-4} - x^{2a-7}$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

Ejemplos

1) Multiplicar $\frac{1}{2}x^{2} - \frac{1}{3}xy$ por $\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y$

$$\frac{1}{2}x^{2} - \frac{1}{3}xy$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y$$

$$\frac{1}{3}x^{3} - \frac{2}{9}x^{2}y$$

$$-\frac{2}{5}x^{2}y + \frac{4}{15}xy^{2}$$

$$-\frac{1}{3}x^{3} - \frac{28}{45}x^{2}y + \frac{4}{15}xy^{2}$$

Al simplificar los productos de los coeficientes tenemos:

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ \frac{4}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

EJERCICIOS

Multiplica:

1. $\frac{2}{5}m^{2} + \frac{1}{3}mn - \frac{1}{2}n^{2}$ por $\frac{3}{2}m^{2} + 2n^{2} - mn$

R. $\frac{3}{5}m^{4} + \frac{1}{10}m^{3}n - \frac{17}{60}m^{2}n^{2} + \frac{7}{6}mn^{3} - n^{4}$

2. $\frac{3}{8}x^{2} + \frac{1}{4}x - \frac{2}{5}$ por $2x^{3} - \frac{1}{3}x + 2$

R. $\frac{3}{4}x^{5} + \frac{1}{2}x^{4} - \frac{37}{40}x^{3} + \frac{2}{3}x^{2} + \frac{19}{30}x - \frac{4}{5}$

3. $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b$ por $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$

R. $\frac{1}{6}a^{2} + \frac{5}{36}ab - \frac{1}{6}b^{2}$

4. $x - 2y$ por $5y + 1x$

R. $\frac{1}{3}x^{2} + \frac{7}{10}xy - \frac{1}{3}y^{2}$

5. $\frac{1}{2}x^{2} - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^{2}$ por $\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y$

R. $\frac{1}{3}x^{3} - \frac{35}{36}x^{2}y + \frac{2}{3}xy^{2} - \frac{3}{8}y^{3}$

MULTIPLICACIÓN POR COEFICIENTES SEPARADOS

En la multiplicación de polinomios por el método de coeficientes separados se abrevia la operación, y se aplica en los dos casos siguientes:

I. Multiplicación de dos polinomios con una sola letra y en el mismo orden con relación a esa letra.

Ejemplos

1) Multiplicar $3x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ por $2x^2 + 4x - 3$ por coeficientes separados.

Sólo se escriben los coeficientes con sus signos y se efectúa la multiplicación:

$$
\begin{array}{l}
3-2+5-2 \\
2+4-3 \\
\hline
6-4+10-4 \\
\quad +12-8+20-8 \\
\qquad\quad -9+6\quad -15+6 \\
\hline
6+8\quad -7+22-23\quad +6
\end{array}
$$

El primer término del multiplicando tiene x^3 y el primer término del multiplicador x^2, por lo que el primer término del producto tendrá x^5, y como en los factores el exponente de x disminuye una unidad en cada término, en el producto el exponente de x disminuirá también una unidad en cada término, por tanto el producto será:

$$6x^5 + 8x^4 - 7x^3 + 22x^2 - 23x + 6$$

2) Multiplicar $a^4 - 6a^2 + 2a - 7$ por $a^3 - 2a + 4$ coeficientes separados.

Sólo se escriben los coeficientes, pero como en el multiplicando falta el término en a^3 y en el multiplicador falta el término en a^2 se escribe cero en los lugares correspondientes a esos términos, con lo que tendremos:

$$
\begin{array}{l}
1+0-6+2-7 \\
1+0-2+4 \\
\hline
1+0-6+2-7 \\
\qquad -2-0+12-4+14 \\
\qquad\quad +4+0\ -24+8\ \ -28 \\
\hline
1+0-8+6+5\ -28+22-28
\end{array}
$$

El primer término del multiplicando tiene a^4 y el primer término del multiplicador a^3, por lo que el primer término del producto tendrá a^7, y como en los factores el exponente de a disminuye de uno en uno, en el producto también disminuirá de uno en uno, por tanto el producto será:

$$a^7 - 8a^5 + 6a^4 + 5a^3 - 28a^2 + 22a - 28$$

Cuando en ambos factores el exponente de la letra común disminuye de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc., no es necesario poner cero en los lugares de los términos que falten; pero se debe tener presente que en el producto los exponentes también bajarán de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc.

II) Multiplicación de dos polinomios homogéneos con sólo dos letras comunes y en el mismo orden con relación a una de esas letras.

Un polinomio es **homogéneo** cuando todos sus términos son homogéneos, es decir, cuando la suma de los exponentes de las letras en cada término es una cantidad constante. El producto de dos polinomios homogéneos es otro polinomio homogéneo.

Ejemplo

Multiplicar $a^4 - 5a^3m + 7a^2m^2 - 3m^4$ por $3a^2 - 2m^2$ por coeficientes separados.

El primer polinomio es homogéneo, porque la suma de los exponentes de las letras en todos los términos es 4, y el segundo también, porque la a tiene de exponente 2, al igual que m.

Sólo se escriben los coeficientes, poniendo cero en el multiplicando donde corresponde al término en am^3 que falta y poniendo cero en el multiplicador en el lugar correspondiente al término que falta, en am y tendremos:

El primer término del producto tendrá a^6 y, como el producto es homogéneo, la suma de los exponentes de las letras en cada término será 6.

Debido a que en los factores el exponente de a disminuye una unidad en cada término y el de m aumenta una unidad, la misma ley se cumple en el producto:

$3a^6 - 15a^5m + 19a^4m^2 + 10a^3m^3 - 23a^2m^4 + 6m^6$

EJERCICIOS

Multiplica por coeficientes separados:

1. $6a^5 - 4a^2 + 6a - 2$ por $a^4 - 2a^2 + a - 7$

R. $6a^9 - 12a^7 + 12a^6 - 36a^5 + 6a^4 - 16a^3 + 38a^2 - 44a + 14$

2. $3x^4 - 4x^3y - y^4$ por $x^3 - 5xy^2 + 3y^3$

R. $3x^7 - 4x^6y - 15x^5y^2 + 29x^4y^3 - 13x^3y^4 + 5xy^6 - 3y^7$

3. $x^3 - x^2 + x$ por $x^2 - 1$

R. $x^5 - x^4 + x^2 - x$

4. $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 8$ por $x^3 - 2x^2 - 7$

R. $x^7 + x^6 - 11x^5 + 3x^4 - 13x^3 + 19x^2 - 56$

5. $a^4 + 3a^3b - 2a^2b^2 + 5ab^3 - b^4$ por $a^2 - 2ab + b^2$

R. $a^6 + a^5b - 7a^4b^2 + 12a^3b^3 - 13a^2b^4 + 7ab^5 - b^6$

6. $m^3 + n^3 + 6mn^2 - 5m^2n$ por $m^3 - 4mn^2 - n^3$

R. $m^6 - 5m^5n + 2m^4n^2 + 20m^3n^3 - 19m^2n^4 - 10mn^5 - n^6$

7. $x^4\ 8x^2 + 3$ por $x^4 + 6x^2 - 5$

R. $x^8 - 2x^6 - 50x^4 + 58x^2 - 15$

8. $a^6 - 3a^4 - 6a^2 + 10$ por $a^8 - 4a^6 + 3a^4 - 2a^2$

R. $a^{14} - 7a^{12} + 9a^{10} + 23a^8 - 52a^6 + 42a^4 - 20a^2$

9. $x^9 - 4x^6 + 3x^3 - 2$ por $3x^6 - 8x^3 + 10$

R. $3x^{15} - 20x^{12} + 51x^9 - 70x^6 + 46x^3 - 20$

10. $a^m - 3a^{m-1} + 5a^{m-3}$ por $a^2 - 5$

R. $a^{m+2} - 3a^{m+1} - 5a^m + 20a^{m-1} - 25a^{m-3}$

PRODUCTO CONTINUADO DE POLINOMIOS

Ejemplo

Efectuar $3x\,(x + 3)(x - 2)(x + 1)$

Con los factores entre paréntesis, la multiplicación está indicada y la operación se desarrolla efectuando el producto de dos factores cualesquiera, mismo que se multiplica por el tercer factor y este nuevo producto por el factor que queda. En este caso multiplicamos el producto de $3x\,(x + 3) = 3x^2 + 9x$ por $x - 2$ y tendremos:

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 9x \\ \underline{x \;\; - 2 } \\ 3x^3 + 9x^2 \\ \underline{- 6x^2 - 18x} \\ 3x^3 + 3x^2 - 18x \end{array}$$

Este producto se multiplica por $x + 1$:

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 3x^2 - 18x \\ \underline{x \;\; + 1 } \\ 3x^4 + 3x^3 - 18x^2 \\ \underline{3x^3 + 3x^2 - 18x} \\ 3x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 18x \end{array}$$

Siguiendo la Ley Asociativa de la multiplicación, se puede encontrar primero el producto $3x\,(x + 3)$; después el producto $(x - 2)(x + 1)$ y luego multiplicar ambos productos parciales.

EJERCICIOS

Simplifica:

1. $(a - b)(a^2 - 2ab + b^2)(a + b)$
R. $a^4 - 2a^3b + 2ab^3 - b^4$

2. $3x\,(x^2 - 2x + 1)(x - 1)(x + 1)$
R. $3x^5 - 6x^4 + 6x^2 - 3x$

3. $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x - 2)$
R. $x^5 - 2x^4 - x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

4. $4(a + 5)(a - 3)$
R. $4a^2 + 8a - 60$

5. $3a^2(x + 1)(x - 1)$
R. $3a^2x^2 - 3a^2$

6. $2(a - 3)(a - 1)(a + 4)$
R. $2a^3 - 26a + 24$

7. $(x^2 + 1)(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
R. $x^6 + x^4 - x^2 – 1$

8. $m\,(m - 4)(m - 6)(3m + 2)$
R. $3m^4 - 28m^3 + 52m^2 + 48m$

MULTIPLICACIÓN COMBINADA CON SUMA Y RESTA

1) Simplificar $(x + 3)(x - 4) + 3\,(x - 1)(x + 2)$

Primero se obtiene el primer producto $(x + 3)(x - 4)$, luego se efectúa el segundo producto $3(x - 1)(x + 2)$ y se suman ambos.

Se efectúa el primer producto: $(x + 3)(x - 4) = x^2 - x - 12$

Se efectúa el segundo producto: $3(x - 1)(x + 2) = 3(x^2 + x - 2) = 3x^2 + 3x - 6$
Sumamos este segundo producto con el primero:

$(x^2 - x - 12) + (3x^2 + 3x - 6) = x^2 - x - 12 + 3x^2 + 3x - 6 = 4x^2 + 2x - 18$

2) Simplificar $x\,(a - b)^2 - 4x\,(a + b)^2$

Para elevar una cantidad al cuadrado se multiplica por sí misma: $(a - b)^2$ equivale a $(a - b)(a - b)$

Al desarrollar $x\,(a - b)^2$

$x\,(a - b)^2 = x\,(a^2 - 2ab + b^2) = a^2x - 2abx + b^2x$

Al desarrollar $4x\,(a + b)^2$

$4x\,(a + b)^2 = 4x\,(a^2 - 2ab + b^2) = 4a^2x + 8abx + 4b^2x$

Y al restar este segundo producto del primero:

$a^2x - 2abx + b^2x - (4a^2x + 8abx + 4b^2x)$
$= a^2x - 2abx + b^2x - (4a^2x + 8abx + 4b^2x)$
$= - 3a^2x - 10abx - 3b^2x$

EJERCICIOS

Simplifica

1. $(a + c)^2 - (a - c)^2$ **R.** $4ac$

2. $3(x + y)^2 - 4(x - y)^2 + 3x^2 - 3y^2$
R. $2x^2 + 14xy - 4y^2$

3. $4(x + 3) + 5(x + 2)$ **R.** $9x + 22$

4. $6(x^2 + 4) - 3(x^2 + 1) + 5(x^2 + 2)$ **R.** $8x^2 + 31$

5. $a\,(a - x) + 3a\,(x + 2a) - a\,(x - 3a)$ **R.** $10a^2 + ax$

6. $x^2(y^2 + 1) + y^2(x^2 + 1) - 3x^2y^2$
R. $x^2 - x^2y^2 + y^2$

7. $4m^3 - 5mn^2 + 3m^2(m^2 + n^2) - 3m\,(m^2 - n^2)$
R. $3m^4 + m^3 + 3m^2n^2 - 2mn^2$

8. $y^2 + x^2y^3 - y^3(x^2 + 1) + y^2(x^2 + 1) - y^2(x^2 - 1)$ **R.** $- y^3 + 3y^2$

9. $5(x + 2) - (x + 1)(x + 4) - 6x$
R. $- x^2 - 6x + 6$

10. $(a + 5)(a - 5) - 3(a + 2)(a - 2) + 5\,(a + 4)$
R. $- 2a^2 + 5a + 7$

SUPRESIÓN DE SIGNOS DE AGRUPACIÓN CON PRODUCTOS INDICADOS

Ejemplos

1) Simplificar $5a + \{a - 2\,[a + 3b - 4(a + b)]\}$

Un coeficiente colocado junto a un signo de agrupación nos indica que hay que multiplicarlo por cada uno de los términos encerrados en el signo de agrupación. En este caso multiplicamos - 4 por $a + b$ y tendremos:

$$5a + \{a - 2\,[a + 3b - 4a - 4b]\}$$

En el curso de la operación podemos reducir los términos semejantes dentro del corchete, con lo que tenemos:

$$5a + \{a - 2\,[- 3a - b]\}$$

Al efectuar la multiplicación de - 2 por $(- 3a - b)$ tenemos:

$$5a + \{a + 6a + 2b\}$$

$$= 5a + \{7a + 2b\}$$

$$= 5a + 7a + 2b = 12a + 2b$$

2) Simplificar:

$- 3(x + y) - 4[- x + 2\{- x + 2y - 3(x - y + 2)\} - 2x]$

Al suprimir primero el vínculo tendremos:

$$- 3(x + y) - 4[- x + 2\{- x + 2y - 3(x - y - 2)\} - 2x]$$
$$= - 3x - 3y - 4[- x + 2\{- x + 2y - 3x + 3y + 6\} - 2x]$$
$$= - 3x - 3y - 4[- x + 2\{- 4x + 5y + 6\} - 2x]$$
$$= - 3x - 3y - 4[- x - 8x + 10y + 12 - 2x]$$
$$= - 3x - 3y - 4[- 11x + 10y + 12]$$
$$= - 3x - 3y + 44x - 40y - 48$$
$$= 41x - 43y - 48$$

EJERCICIOS

Simplifica:

1. $x - [3a + 2(- x + 1)]$ **R.** $3x - 3a - 2$

2. $- (a + b) - 3[2a + b(- a + 2)]$ **R.** $3ab - 7a - 7b$

3. $- [3x - 2y + (x - 2y) - 2(x + y) - 3(2x + 1)]$ **R.** $4x + 6y + 3$

4. $4x^2 - \{- 3x + 5 - [- x + x(2 - x)]\}$ **R.** $3x^2 + 4x - 5$

5. $2a - \{- 3x + 2\,[- a + 3x - 2\,(- a + b \overline{- 2 + a})]\}$ **R.** $- 4a + 4b - 3x - 8$

6. $a - (x + y) - 3(x - y) + 2[- (x - 2y) - 2(- x - y)]$ **R.** $a - 2x + 10y$

7. $m - (m + n) - 3\{- 2m + [- 2m + n + 2(- 1 + n) - \overline{m + n - 1}]\}$ **R.** $15m - 7n + 3$

8. $- 2(a - b) - 3(a + 2b) - 4\{a - 2b + 2\,[- a + b - 1 + 2(a - b)]\}$ **R.** $- 17a + 12b + 8$

CAMBIOS DE SIGNO EN LA MULTIPLICACIÓN

Las **reglas generales** para cambiar de signos en la multiplicación son las siguientes:

$$(+ a)(+ b) = + ab \text{ y } (- a)(- b) = + ab$$

1) Al cambiar el signo a un número par de factores, el signo del producto no varía.

Sabemos que

$(+ a)(+ b) = + ab$ y $(- a)(- b) = + ab$

donde al cambiar el signo a **dos factores**, el signo del producto no varía.

2) Al cambiar el signo a un número impar de factores, el signo del producto varía. Sabemos que

$(+ a)(+ b) = + ab$ y $(+ a)(- b) = - ab$ o $(- a)(+ b) = - ab$

donde al cambiar el signo a **un factor**, el signo del producto varía.

Si los **factores son polinomios**, para cambiarles el signo hay que hacerlo con **cada término**. En el producto $(a - b)(c - d)$, para cambiar el signo al factor $(a - b)$ hay que escribir $(b - a)$, donde vemos que a, que tenía +, ahora tiene -, y b, que tenía -, tiene +; para cambiar el signo a $(c - d)$ hay que escribir $(d - c)$.

Por tanto, y dado que al cambiar el signo a **un factor** el producto varía su signo, tendremos:

$$(a - b)(c - d) = - (b - a)(c - d)$$
$$(a - b)(c - d) = - (a - b)(d - c)$$

y como al cambiar el signo a **dos factores** el producto no varía de signo, tendremos:

$$(a - b)(c - d) = - (b - a)(d - c)$$

Si se trata de **más de dos factores**, aplicamos las reglas generales que nos dicen que cambiando el signo a un número **par** de factores el producto no varía de signo, y cambiando el signo a un número **impar** de factores el producto varía de signo.

Así, tendremos:

$$(+ a)(+ b)(+ c) = - (- a)(+ b)(+ c)$$
$$(+ a)(+ b)(+ c) = - (+ a)(- b)(+ c)$$
$$(+ a)(+ b)(+ c) = - (- a)(- b)(+ c)$$

y también:

$$(+ a)(+ b)(+ c) = (- a)(- b)(+ c)$$
$$(+ a)(+ b)(+ c) = (+ a)(- b)(- c)$$
$$(+ a)(+ b)(+ c) = (- a)(+ b)(- c)$$

Si se trata de polinomios, tendremos:

$$(a - b)(c - d)(m - n) = - (b - a)(c - d)(m - n)$$
$$(a - b)(c - d)(m - n) = - (a - b)(d - c)(m - n)$$
$$(a - b)(c - d)(m - n) = - (b - a)(d - c)(n - m)$$

y también:

$$(a - b)(c - d)(m - n) = (b - a)(d - c)(m - n)$$
$$(a - b)(c - d)(m - n) = (a - b)(d - c)(n - m)$$
$$(a - b)(c - d)(m - n) = (b - a)(c - d)(n - m)$$



Platón, alumno consentido de Sócrates, junto con otros grandes sabios de su época, fue fundador de la Academia, donde se enseñaban las ciencias y principalmente las Matemáticas en la Grecia Antigua.

CAPÍTULO VI

DIVISIÓN

Esta operación dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), tiene por objeto hallar el otro factor (cociente), de lo que se deduce que el cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo.

De este modo, la operación de dividir $6a^2$ entre $3a$, que se indica $6a^2 \div 3a$ ó $\frac{6a^2}{3a}$, consiste en hallar una cantidad que multiplicada por $3a$ dé $6a^2$. Esa cantidad (**cociente**) es $2a$.

Es evidente que $6a^2 \div 2a = \frac{6a^2}{2a} = 3a$, donde vemos que si el dividendo se divide entre el cociente nos da como cociente lo que antes era el divisor.

LEY DE LOS SIGNOS

En la división aplica la misma ley que en la multiplicación, es decir que signos iguales dan + y signos diferentes dan -.
Veamos los siguientes casos:

1. $+ab \div +a = \frac{+ab}{+a} = +b$

porque el cociente multiplicado por el divisor tiene que dar el dividendo con su signo, y siendo el dividendo positivo, como el divisor también es positivo, el cociente tiene que ser positivo para que multiplicado por el divisor reproduzca el dividendo:

$(+a) \times (+b) = +ab$

El cociente no puede ser $-b$ porque multiplicado por el divisor no reproduce el dividendo: $(+a) \times (-b) = -ab$.

2. $-ab \div -a = \frac{-ab}{-a} = +b$ porque $(-a) \times (+b) = -ab$

3. $+ab \div -a = \frac{+ab}{-a} = -b$ porque $(-a) \times (-b) = +ab$

4. $-ab \div +a = \frac{-ab}{+a} = -b$ porque $(+a) \times (-b) = -ab$

Podemos resumir lo anterior con este cuadro:

+ entre + da + - entre - da +	+ entre - da - - entre + da –

LEY DE LOS EXPONENTES

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se le pone por exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.
Siendo el cociente $a^5 \div a^3$, decimos que

$$a^5 \div a^3 = \frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

a^2 será el cociente de esta división si al multiplicarla por el divisor a^3 reproduce el dividendo, y en efecto: $a^2 \times a^3 = a^5$.

LEY DE LOS COEFICIENTES

El coeficiente del cociente es el producto de dividir el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor:

$20a^2 \div 5a = 4a$

$4a$ es el cociente, porque $4a \times 5a = 20a^2$, donde el coeficiente del cociente 4 es el cociente de dividir 20 entre 5.

DIVISIÓN DE MONOMIOS

La regla dice que se divide el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor y a continuación se escriben las letras en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene en el dividendo y el que tiene en el divisor. El signo estará dado por la Ley de los Signos.

Ejemplos

1) Dividir $4a^3b^2$ entre $-2ab$

$$4a^3b^2 \div -2ab = \frac{4a^3b^2}{-2ab} = -2a^2b$$

porque $(-2ab) \times (-2a^2b) = 4a^3b^2$

2) Dividir $-5a^4b^3c$ entre $-a^2b$

$$-5a^4b^3c \div -a^2b = \frac{-5a^4b^3c}{-a^2b} = +5a^2b^2c$$

porque $+5a^2b^2c \times (-a^2b) = -5a^4b^3c$

En este caso, cuando hay una letra en el dividendo que no existe en el divisor, en este caso c, dicha letra aparece en el cociente. Sucede lo mismo que si la c estuviera en el di-visor con exponente cero, porque tendríamos:

3) Dividir $-20mx^2y^3 \div 4xy^3$

$$-20mx^2y^3 \div 4xy^3 \frac{-20mx^2y^3}{4xy^3} = -5mx$$

porque $4xy^3 \times (-5mx) = -20mx^2y^3$

Aquí las letras iguales en el dividendo y el divisor se cancelan porque su cociente es 1. Así, y^3 del dividendo se cancela con y^3 del divisor, igual que en Aritmética suprimimos los factores comunes en el numerador y el denominador de un quebrado.

Por otra parte, de acuerdo con la Ley de los Exponentes, $y^3 \div y^3 = y^{3-3} = y^0$; más adelante veremos que $y^0 = 1$, como factor puede suprimirse en el cociente.

4) Dividir $-x^my^nz^a$ entre $3xy^2z^3$

$$-x^my^nz^a \div 3xy^2z^3 = \frac{-x^my^nz^a}{3xy^2z^3} = -\frac{1}{3}x^{m-1}y^{n-2}z^{a-3}$$

EJERCICIOS

Divide:

1. - 24 entre 8 **R.** - 3

2. - 63 entre - 7 **R.** 9

3. $-5a^2$ entre $-a$ **R.** $5a$

4. $14a^3b^4$ entre $-2ab^2$ **R.** $-7a^2b^2$

5. $-a^3b^4c$ entre a^3b^4 **R.** $-c$

6. $-a^2b$ entre $-ab$ **R.** a

7. $54x^2y^2z^3$ entre $-6xy^2z^3$ **R.** $-9x$

8. $-5m^2n$ entre m^2n **R.** - 5

9. $-8a^2x^3$ entre $-8a^2x^3$ **R.** 1

10. $-xy^2$ entre $2y$ **R.** $-\frac{1}{2}xy$

11. $5x^4y^5$ entre $-6x^4y$ **R.** $-\frac{5}{6}y^4$

12. $-a^8b^9c^4$ entre $8c^4$ **R.** $-\frac{1}{8}a^8b^9$

DIVISIÓN DE DOS MONOMIOS

1) Dividir $a^{x+3}b^{m+2}$ entre $a^{x+2}b^{m+1}$

$$\frac{a^{x+3}b^{m+2}}{a^{x+2}b^{m+1}} = a^{x+3-(x+2)}b^{m+2-(m+1)} = a^{x+3-x-2}b^{m+2-m-1} = ab$$

2) Dividir $-3x^{2a+3}y^{3a-2}$ entre $-5x^{a-4}y^{a-1}$

$$\frac{-3x^{2a+3}y^{3a-2}}{-5x^{a-4}y^{a-1}} = \frac{3}{5}x^{2a+3-(a-4)}y^{3a-2-(a-1)} = \frac{3}{5}x^{2a+3-a+4}y^{3a-2-a+1} =$$

$$\frac{3}{5}x^{a+7}y^{2a-1}$$

3) Dividir $\frac{2}{3}a^2b^3c$ entre $-\frac{5}{6}a^2bc$

$$\frac{\frac{2}{3}a^2b^3c}{\frac{5}{6}a^2bc} = \frac{4}{5}b^2$$

EJERCICIOS

Divide:

1. a^{m+3} entre a^{m+2} **R.** a

2. $2x^{a+4}$ entre $-x^{a+2}$ **R.** $-2x^2$

3. $-3a^{m-2}$ entre $-5a^{m-5}$ **R.** $\frac{3}{5}a^3$

4. x^{2n+3} entre $4x^{n+4}$ **R.** $+\frac{1}{4}x^{n-1}$

5. $-4a^{x-2}b^n$ entre $-5a^3b^2$

R. $\frac{4}{5}a^{x-5}b^{n-2}$

6. $7x^{m+3}y^{m-1}$ entre $-8x^4y^2$

R. $-\frac{7}{8}x^{m-1}y^{m-3}$

7. $5a^{2m-1}b^{x-3}$ entre $-6a^{2m-2}b^{x-4}$

R. $-\frac{5}{6}ab$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS POR MONOMIOS

Siendo la operación $(a + b - c) \div m$, tendremos

$$(a+b-c)\div m = \frac{a+b-c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$$

En efecto: $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$ es el cociente de la división porque multiplicado por el divisor reproduce el dividendo:

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}\right)m = \frac{a}{m}\times m + \frac{b}{m}\times m - \frac{c}{m}\times m = a + b - c$$

EJERCICIOS

Divide:

1. $1x^2$ entre 2 **R.** $\frac{3}{4}x^2$

2. $-3a^3b$ entre $-4a^2b$ **R.** $\frac{3}{4}a$

3. $2xy^5z^3$ entre $-1z^3$ **R.** $-4xy^5$

4. $-7a^mb^n$ entre $-3ab^2$ **R.** $\frac{7}{6}a^{m-1}b^{n-2}$

5. $-2x^4y^5$ entre -2 **R.** $\frac{1}{9}x^4y^5$

6. $3m^4n^5p^6$ entre $-1m^4np^5$ **R.** $-9n^4p$

7. $-7a^2b^5c^6$ entre $-5ab^5c^6$ **R.** $\frac{7}{20}a$

8. $2a^xb^m$ entre $-3ab^2$ **R.** $-\frac{10}{9}a^{x-1}b^{m-2}$

REGLAS PARA LA DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO

La regla para dividir un polinomio por un monomio dice que se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio separando los cocientes parciales con sus propios signos, lo que representa la **Ley Distributiva** de la división.

Ejemplos

1) Dividir $3a^3 - 6a^2b + 9ab^2$ entre $3a$

$$3a^3 - 6a^2b + 9ab^2 \div 3a = \frac{3a^3 - 6a^2b + 9ab^2}{3a} = \frac{3a^3}{3a} - \frac{6a^2b}{3a} + \frac{9ab^2}{3a}$$

$$= a^2 - 2ab + 3b^2$$

2) Dividir $2a^xb^m - 6a^{x+1}b^{m-1} - 3a^{x+2}b^{m-2}$ entre $-2a^3b^4$

$$(2a^xb^m - 6a^{x+1}b^{m-1} - 3a^{x+2}b^{m-2}) \div -2a^3b^4 = -\frac{2a^xb^m}{2a^3b^4}$$

$$+\frac{6a^{x+1}b^{m-1}}{2a^3b^4} + \frac{3a^{x+2}b^{m-2}}{2a^3b^4} = -a^{x-3}b^{m-4} + 3a^{x-2}b^{m-5} + \frac{3}{2}a^{x-1}b^{m-6}$$

3) Dividir $\frac{3}{4}x^3y - \frac{2}{3}x^2y^2 + \frac{5}{6}xy^3 - \frac{1}{2}y^4$ entre $\frac{5}{6}y$

$$\left(\frac{3}{4}x^3y - \frac{2}{3}x^2y^2 + \frac{5}{6}xy^3 - \frac{1}{2}y^4\right) \text{ entre } \frac{5}{6}y$$

$$\frac{\frac{3}{4}x^3y}{\frac{5}{6}y} - \frac{\frac{2}{3}x^2y^2}{\frac{5}{6}y} + \frac{\frac{5}{6}xy^3}{\frac{5}{6}y} - \frac{\frac{1}{2}y^4}{\frac{5}{6}y} =$$

$$= \frac{9}{10}x^3 - \frac{4}{5}x^2y + xy^2 - \frac{3}{5}y^3$$

DIVISIÓN DE DOS POLINOMIOS

La regla para verificar esta operación indica lo siguiente:

Primero se ordenan el dividendo y el divisor con relación a una misma letra, luego se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor, con lo que tendremos el primer término del cociente, mismo que se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, para lo cual se le cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante.

Si algún término de este producto no tiene término semejante en el dividendo, se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor.

Dividimos el primer término del resto entre el primer término del divisor y tendremos el segundo término del cociente, mismo que se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, cambiando los signos.

Dividimos el primer término del segundo resto entre el primero del divisor y se efectúan las operaciones anteriores, y así sucesivamente hasta que el residuo sea cero.

Ejemplos

1) Dividir:

$3x^2 + 2x - 8$ entre $x + 2$

```
  3x² + 2x - 8    | x + 2
 - 3x² - 6x         3x – 4
        - 4x - 8
          4x + 8
```

EJERCICIOS

Dividir

1. $a^2 - ab$ entre a
R. $a - b$

2. $3x^2y^3 - 5a^2x^4$ entre $-3x^2$
R. $-y^3 + \frac{5}{3}a^2x^2$

3. $3a^3 - 5ab^2 - 6a^2b^3$ entre $-2a$
R. $-\frac{3}{2}a^2 + \frac{5}{2}b^2 + 3ab^3$

4. $x^3 - 4x^2 + x$ entre x
R. $x^2 - 4x + 1$

5. $4x^8 - 10x^6 - 5x^4$ entre $2x^3$
R. $2x^5 - 5x^3 - \frac{5}{2}x$

6. $6m^3 - 8m^2n + 20mn^2$ entre $-2m$
R. $-3m^2 + 4mn - 10n^2$

7. $6a^8b^8 - 3a^6b^6 - a^2b^3$ entre $3a^2b^3$
R. $2a^6b^5 - a^4b^3 - \frac{1}{3}$

8. $x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 15x$ entre $-5x$
R. $-\frac{1}{5}x^3 + x^2 + 2x - 3$

9. $a^x + a^{m-1}$ entre a^2
R. $a^{x-2} + a^{m-3}$

EXPLICACIÓN A LA REGLA

Tanto el dividendo como el divisor están en orden descendente con relación a x.

Dividimos el primer término del dividendo $3x^2$ entre el primero del divisor x y tenemos $3x^2 \div x = 3x$, que es el primer término del cociente.

Multiplicamos $3x$ por cada uno de los términos del divisor, y como hay que restar estos productos del dividendo, tendremos

$3x \times x = 3x^2$, para restar $-3x^2$;

$3x \times 2 = 6x$ para restar $-6x$

Escribimos estos productos con sus signos cambiados debajo de los términos semejantes del dividendo y hacemos la reducción; esto nos da $-4x$ y bajamos el -8.

Dividimos $-4x$ entre x : $-4x \div x$ y este es el segundo término del cociente, el cual hay que multiplicar por cada uno de los términos del divisor y restar los productos del dividendo, con lo que tendremos:

$(-4) \times x = -4x$, para restar $+4x$;

$(-4) \times 2 = -8$, para restar 8.

Escribimos estos términos debajo de sus semejantes y al hacer la reducción nos da cero de residuo.

RAZONAMIENTO

Al dividir $3x^2 + 2x - 8$ entre $x + 2$ se busca una cantidad que multiplicada por $x + 2$ nos dé $3x^2 + 2x - 8$, de acuerdo con la definición que se hizo de la división.

El término $3x^2$ que contiene la mayor potencia de x en el dividendo tiene que ser el producto del término con la mayor potencia de x en el divisor (que es x) por el término con la mayor potencia de x en el cociente; luego, dividiendo $3x^2 \div x = 3x$ tendremos el término que contiene la mayor potencia de x en el cociente.

Multiplicamos $3x$ por $x + 2$, que nos da $3x^2 + 6x$ y este producto lo restamos del dividendo.

El residuo resultante, $-4x - 8$, se considera un nuevo dividendo, porque tiene que ser el producto del divisor $x + 2$, por lo que aún nos falta del cociente.

Dividimos $-4x$ entre x y nos da -4 de cociente que es el segundo término. Multiplicando -4 por $x + 2$ obtenemos $-4x - 8$ y al restar este producto del dividendo $-4x - 8$ nos da cero de residuo. Luego, $3x - 4$ es la cantidad que multiplicada por el divisor $x + 2$ nos da el dividendo $3x^2 + 2x - 8$, por tanto $3x - 4$ es el cociente de la división.

1) Dividir $28x^3 - 30y^2 - 11xy$ entre $4x - 5y$

Al colocar el dividendo y el divisor en orden descendente con relación a x tendremos:

$28x^3 - 11xy - 30y^2$	$4x - 5y$
$-28x^3 + 35xy$	$7x + 6y$
$24xy - 30y^2$	
$24xy + 30y^2$	

EXPLICACIÓN AL RAZONAMIENTO

Dividimos $28x^2 \div 4x = 7x$ y multiplicamos este primer término del cociente por cada uno de los términos del divisor:

$7x \times 4x = 28x^2$, para restar

$-28x^2$; $7x \times (-5y) = -35xy$, para restar $+35xy$. Escribimos estos términos debajo de sus semejantes en el dividendo y los reducimos. El residuo es $24xy - 30y^2$. Dividimos el 1er. término del residuo entre el primero del divisor: $24xy \div 4x = +6$, que es el segundo término del cociente.

Multiplicamos $6y$ por cada uno de los términos del divisor. $6y \times 4x = 24xy$ para restar $-24xy$; $6y \times (-5y) = -30y^2$, para restar $+30y^2$. Escribimos estos términos debajo de sus semejantes y al hacer la reducción nos da cero de residuo.

$7x + 6y$ es el cociente de la división.

EJERCICIOS

Divide:

1. $2x^4y^3 - 1x^3y^4 + 1x^2y^5 - xy^6$ entre $-1xy^3$

R. $-\frac{10}{3}x^3 + x^2y - \frac{5}{4}xy^2 + 5y^3$

2. $2a^5 - 1a^3b^3 - ab^5$ entre $5a$

R. $\frac{2}{25}a^4 - \frac{1}{15}a^2b^3 - \frac{1}{5}b^5$

3. $1x^2 - 2x$ entre $2x$

R. $\frac{3}{4}x - 1$

4. $1a^3 - 3a^2 + 1a$ entre -3

R. $-\frac{5}{9}a^3 + a^2 - \frac{5}{12}a$

5. $1m^4 - 2m^3n + 3m^2n^2$ entre $1m^2$

R. $m^2 - \frac{8}{3}mn + \frac{3}{2}n^2$

6. $1a^m + 1a^{m-1}$ entre $1a$

R. $\frac{2}{3}a^{m+1} + \frac{1}{2}a^{m-2}$

PRUEBA DE LA DIVISIÓN

Cuando la división es exacta, puede verificarse multiplicando el divisor por el cociente, lo que nos debe dar el dividendo si la operación está correcta.

1) Dividir $2x^3 - 2 - 4x$ entre $2 + 2x$

Al ordenar el dividendo y el divisor debemos tener presente que en el dividendo falta el término en x^2, por lo que debemos dejar un lugar para ese término:

$$\begin{array}{lll} 2x^3 \quad\quad\quad - 4x - 2 & & | \; 2 + 2x \\ \underline{-2x^3 - 2x^2} & & x^2 - x - 1 \\ \quad - 2x^2 - 4x & & \\ \quad \underline{2x^2 + 2x} & & \\ \quad\quad - 2x - 2 & & \\ \quad\quad \underline{2x + 2} & & \end{array}$$

2) Dividir $3a^5 + 10a^3b^2 + 64a^2b^3 - 21a^4b + 32ab^4$ entre $a^3 - 4ab^2 - 5a^2b$

Al colocar con relación a la a en orden descendente:

$$\begin{array}{ll} 3a^5 - 21a^4b + 10a^3b^2 + 64a^2b^3 + 32ab^4 & | \; a^3 - 5a^2b - 4ab^2 \\ 3a^5 + 15a^4b + 12a^3b^2 & 3a^2 - 6ab - 8b^2 \\ \quad - 6a^4b + 22a^3b^2 + 64a^2b^3 & \\ \quad \underline{6a^4b - 30a^3b^2 - 24a^2b^3} & \\ \quad\quad -8a^3b^2 + 40a^2b^3 + 32ab^4 & \\ \quad\quad \underline{8a^3b^2 - 40a^2b^3 - 32ab^4} & \end{array}$$

3) Dividir $x^{12} + x^6y^6 - x^8y^4 - x^2y^{10}$ entre $x^8 + x^6y^2 - x^4y^4 - x^2y^6$

Al ordenar el dividendo tenemos $x^{12} - x^8y^4 + x^6y^6 - x^2y^{10}$

Observaremos que faltan los términos en $x^{10}y^2$ y en x^4y^8, por lo que dejaremos un espacio entre x^{12} y $-x^8y^4$ para el término en $x^{10}y^2$ y otro espacio entre x^6y^6 para el término en x^4y^8, y tendremos:

$$\begin{array}{ll} x^{12} \quad\quad - x^8y^4 + x^6y^6 \quad - x^2y^{10} & | \; x^8 + x^6y^2 - x^4y^4 - x^2y^6 \\ \underline{-x^{12} - x^{10}y^2 + x^8y^4 + x^6y^6} & x^4 - x^2y^2 + y^4 \\ \quad - x^{10}y^2 \quad\quad + 2x^6y^6 & \\ \quad \underline{x^{10}y^2 + x^8y^4 + \quad x^6y^6 - x^4y^8} & \\ \quad\quad x^8y^4 + \quad x^6y^6 - x^4y^8 - x^2y^{10} & \\ \quad\quad \underline{-x^8y^4 - \quad x^6y^6 + x^4y^8 + x^2y^{10}} & \end{array}$$

4) Dividir $11a^3 - 3a^5 - 46a^2 + 32$ entre $8 - 3a^2 - 6a$

Colocamos en orden ascendente para que el primer término del divisor sea positivo, lo cual siempre es más cómodo. Además, como en el dividendo faltan los términos en a^4 y en a, dejaremos los lugares vacíos correspondientes y tendremos:

$$\begin{array}{ll} 32 \quad\quad - 46a^2 + 11a^3 \quad - 3a^5 & | \; 8 - 6a - 3a^2 \\ \underline{-32 + 24a + 12a^2} & 4 + 3a - 2a^2 + a^3 \\ \quad 24a - 34a^2 + 11a^3 & \\ \quad \underline{-24a + 18a^2 + 9a^3} & \\ \quad\quad 16a^2 + 20a^3 & \\ \quad\quad \underline{-16a^2 - 12a^3 - 6a^4} & \\ \quad\quad\quad 8a^3 - 6a^4 - 3a^5 & \\ \quad\quad\quad \underline{-8a^3 + 6a^4 + 3a^5} & \end{array}$$

EJERCICIOS

Divide:

1. $a^2 + 2a - 3$ entre $a + 3$ **R.** $a - 1$
2. $a^2 - 2a - 3$ entre $a + 1$ **R.** $a - 3$
3. $x^2 - 20 + x$ entre $x + 5$ **R.** $x - 4$
4. $m^2 - 11m + 30$ entre $m - 6$ **R.** $m - 5$
5. $x^2 + 15 - 8x$ entre $3 - x$ **R.** $5 - x$
6. $6 + a^2 + 5a$ entre $a + 2$ **R.** $a + 3$
7. $6x^2 - xy - 2y^2$ entre $y + 2x$
R. $3x - 2y$
8. $-15x^2 - 8y^2 + 22xy$ entre $2y - 3x$
R. $5x - 4y$
9. $5a^2 + 8ab - 21b^2$ entre $a + 3b$
R. $5a - 7b$
10. $14x^2 - 12 + 22x$ entre $7x - 3$
R. $2x + 4$
11. $-8a^2 + 12ab - 4b^2$ entre $b - a$
R. $8a - 4b$
12. $5n^2 - 11mn + 6m^2$ entre $m - n$
R. $6m - 5n$
13. $a^4 - a^2 - 2a - 1$ entre $a^2 + a + 1$
R. $a^2 - a - 1$
14. $x^5 + 12x^2 - 5x$ entre $x^2 - 2x + 5$
R. $x^3 + 2x^2 - x$
15. $x^4 - x^2 - 2x - 1$ entre $x^2 - x - 1$
R. $x^2 + x + 1$
16. $a^5 - a^4 + 10 - 27a + 7a^2$ entre $a^2 + 5 - a$
R. $a^3 - 5a + 2$
17. $2n - 2n^3 + n^4 - 1$ entre $n^2 - 2n + 1$
R. $n^2 - 1$
18. $4y^4 - 13y^2 + 4y^3 - 3y - 20$ entre $2y + 5$
R. $2y^3 + 3y^2 + y - 4$
19. $a^6 - 5a^5 + 31a^2 - 8a + 21$ entre $a^3 - 2a - 7$
R. $a^3 - 5a^2 + 2a - 3$
20. $4y^3 - 2y^5 + y^6 - y^4 - 4y + 2$ entre $y^4 + 2 - 2y^2$
R. $y^2 - 2y + 1$
21. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$ entre $a + b - c$
R. $a - b + c$
22. $-2x^2 + 5xy - xz - 3y^2 - yz + 10z^2$ entre $2x - 3y + 5z$
R. $-x + y + 2z$
23. $a^4 + b^5$ entre $a + b$
R. $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$
24. $21x^5 - 21y^5$ entre $3x - 3y$
R. $7x^4 + 7x^3y + 7x^2y^2 + 7xy^3 + 7y^4$
25. $16x^8 - 16y^8$ entre $2x^2 + 2y^2$
R. $8x^6 - 8x^4y^2 + 8x^2y^4 - 8y^6$
26. $x^{10} - y^{10}$ entre $x^2 - y^2$
R. $x^8 + x^6y^2 + x^4y^4 + x^2y^6 + y^8$
27. $x^{15} + y^{15}$ entre $x^3 + y^3$
R. $x^{12} - x^9y^3 + x^6y^6 - x^3y^9 + y^{12}$
28. $x^5 + y^5$ entre $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$
R. $x + y$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS CON EXPONENTES LITERALES

Ejemplos

1) Dividir $3a^{x+5} + 19a^{x+3} - 10a^{x+4} - 8a^{x+2} + 5a^{x+1}$ entre $a^2 - 3a + 5$

En orden descendente con relación a la *a* tendremos:

$$3a^{x+5} - 10a^{x+4} + 19a^{x+3} - 8a^{x+2} + 5a^{x+1} \quad | \; a^2 - 3a + 5$$
$$-3a^{x+5} + 9a^{x+4} - 15a^{x+3} \qquad 3a^{x+3} - a^{x+2} + a^{x+1}$$
$$-a^{x+4} + 4a^{x+3} - 8a^{x+2}$$
$$a^{x+4} - 3a^{x+3} + 5a^{x+2}$$
$$a^{x+3} - 3a^{x+2} + 5a^{x+1}$$
$$-a^{x+3} - 3a^{x+2} - 5a^{x+1}$$

Explicación

La división $3a^{x+5} \div a^2 = 3a^{x+5-2} = 3a^{x+3}$
La división $-a^{x+4} \div a^2 = -a^{x+4-2} = -a^{x+2}$
La división $a^{x+3} \div a^2 = a^{x+3-2} = a^{x+1}$

2) Dividir $x^{3a} - 17x^{3a-2} + x^{3a-1} + 3x^{3a-4} + 2x^{3a-3} - 2x^{3a-5}$ entre $x^{2a-1} - 2x^{2a-3} - 3x^{2a-2}$

En orden descendente con relación a la *x* tendremos:

$$x^{3a} - x^{3a-1} - 17x^{3a-2} + 2x^{3a-3} + 3x^{3a-4} - 2x^{3a-5} \quad | \; x^{2a-1} - 3x^{2a-2} - 2x^{2a-3}$$
$$-x^{3a} + 3x^{3a-1} + 2x^{3a-2} \qquad x^{a-1}\,4x^{a} - 3x^{a-1} + x^{a-2}$$
$$4x^{3a-1} + 15x^{3a-2} + 2x^{3a-3}$$
$$-4x^{3a-1} - 12x^{3a-2} + 8x^{3a-3}$$
$$-3x^{3a-2} + 10x^{3a-3} + 3x^{3a-4}$$
$$3x^{3a-2} \quad -9x^{3a-3} - 6x^{3a-4}$$
$$x^{3a-3} - \quad 3x^{3a-4} - 2x^{3a-5}$$
$$-X^{3a-3} + 3x^{3a-4} + 2x^{3a-5}$$

Explicación
La división: $x^{3a} \div x^{2a-1} = x^{3a-2a-1} = x^{3a-2a+1} = x^{a+1}$
La división $4x^{3a-1} \div x^{2a-1} = 4x^{3a-(2a-1)} = 4x^{3a-1-2a+1} = 4x^{a}$
La división $-3x^{3a-2} \div x^{2a-1} = 3x^{3a-(2a-1)} = -3x^{3a-2-2a+1} = 3x^{a-1}$
La división $x^{3a} \div x^{2a-1} = x^{3a-3-(2a-1)} = x^{3a-3-2a+1} = x^{a-2}$

EJERCICIOS

Divide:

1. $a^{x+3} + a^{x}$ entre $a + 1$
R. $a^{x} - a^{x-1} + a^{x-2}$

2. $x^{n+2} + 3x^{n+3} + x^{n+4} - x^{n+5}$ entre $x^2 + x$
R. $x^{n+1} + 2x^{n+2} - x^{n+3}$

3. $m^{a+4} - m^{a+3} + 6m^{a+1} - 5m^{a} + 3m^{a-1}$ entre $m^2 - 2m + 3$
R. $m^{a+2} + m^{a+1} - m^{a} + m^{a-1}$

4. $a^{2n+3} + 4a^{2n} + a^{2n+1} - 2a^{2n}$ entre $a^{n} + a^{n+1}$
R. $a^{n+2} + 3a^{n+1} - 2a^{n}$

5. $a^{x-2} - 2a^{x} + 8a^{x+1} - 3a^{x-2}$ entre $3a^{x-2} - 2a^{x-1} - a^{x}$
R. $a^2 + 2a - 1$

6. $x^{2a-2} + x^{2a-3} - 4x^{2a-4} - x^{2a-7}$ entre $-x^{a-3} + x^{a-1} - x^{a-2}$
R. $x^{a-1} + 2x^{a-2} - x^{a-3} + x^{a-4}$

7. $a^{m+x} + a^{m}b^{x} + a^{x}b^{m} + b^{m+x}$ entre $a^{x} + b^{x}$
R. $a^{m} + b^{m}$

8. $a^{x} - ab^{n-1} - a^{x-1}b + b^{n}$ entre $a - b$
R. $a^{x-1} - b^{n-1}$

9. $a^{2n}b^{3} - a^{2n-1}b^{4} + a^{2n-2}b^{5} - 2a^{2n-4}b^{7} + a^{2n-5}b^{8}$ entre $a^{n}b - a^{n-1}b^{2} + 2a^{n-2}b^{3} - a^{n-3}b^{4}$
R. $a^{n}b^{2} - a^{n-2}b^{4}$

EJERCICIOS

Divide:

1. $\frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{36}ab - \frac{1}{6}b^2$ entre $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$
R. $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b$

2. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{10}xy - \frac{1}{3}y^2$ entre $x - \frac{2}{5}$
R. $\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y$

3. $\frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{8}a^2b - b^3 + \frac{5}{3}ab^2$ entre $\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b$
R. $\frac{1}{4}a^2 - ab\frac{2}{3}b^2$

4. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{35}{36}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{3}{8}y^3$ entre $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2$
R. $\frac{2}{3}X - \frac{3}{2}Y$

5. $\frac{3}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{37}{40}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{5} + \frac{19}{30}$ 19 x entre $2x^3$ -1x+2
R. $\frac{3}{8}X^2 + \frac{1}{4}X - \frac{2}{5}$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

Ejemplo

Dividir $\frac{1}{3}x^3-\frac{35}{36}x^2y+\frac{2}{3}xy^2-\frac{3}{8}y^3$ entre $\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y$

$$\frac{1}{3}x^3-\frac{35}{36}x^2y+\frac{2}{3}xy^2-\frac{3}{8}y^3 \quad \Big| \ \frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y$$

$$-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{4}x^2y \qquad \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2$$

$$-\frac{2}{9}x^2y+\frac{2}{3}2xy^2$$

$$\frac{2}{9}x^2y+\frac{1}{2}xy^2$$

$$\frac{1}{6}xy^2-\frac{3}{8}y^3$$

$$-\frac{1}{6}xy^2-\frac{3}{8}y^3$$

Aquí se puede observar que todo quebrado obtenido en el cociente al dividir, lo mismo que los quebrados que se obtienen al multiplicar el cociente por el divisor, deben reducirse a su más simple expresión.

EJERCICIOS

Divide por coeficientes separados:

1. $x^5 - x^4 + x^2 - x$ entre $x^3 - x^2 + x$
R. $x^2 – 1$

2. $a^6 + a^5b - 12a^3b^3 - 13a^2b^4 + 7ab^5 - b^6$ entre $a^2 - 2ab + b^2$
R. $a^4 + 3a^3b - 2a^2b^2 + 5ab^3 - b^4$

3. $x^8 - 2x^6 - 50x^4 + 58x^2 - 15$ entre $x^4 + 6x^2 - 5$
R. $x^4 - 8x^2 + 3$

4. $a^{14} + 9a^{10} - 7a^{12} + 23a^8 - 52a^6 + 42a^4 + 20a^2$ entre $a^8 - 4a^6 + 3a^4 - 2a^2$
R. $a^6 - 3a^4 - 6a^2 + 10$

5. $3x^{15} - 20x^{12} - 70x^6 + 51x^9 + 46x^3 - 20$ entre $3x^6 - 8x + 10$
R. $x^9 - 4x^6 + 3x^3 – 2$

6. $2x^7 - 6x^6y - 8x^5y^2 - 20x^4y^3 - 24x^3y^4 - 18x^2y^5 - 4y^7$ entre $2x^2 - 4y^2$
R. $x^5 - 3x^4y - 6x^3y^2 - 4x^2y^3 - y^5$

7. $6a^9 - 12a^7 + 2a^6 - 36a^5 + 6a^4 – 16a^3 + 38a^2 - 44a + 14$ entre $a^4 - 2a^2 + a - 7$
R. $6a^5 - 4a^2 + 6a - 2$

8. $3x^7 - 4x^6y - 15x^5y^2 + 29x^4y^3 - 13x^3y^4 + 5xy^6 - 3y^7$ entre $x^3 - 5xy^2 + 3y^3$
R. $3x^4 - 4x^3y - y^4$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS POR COEFICIENTES SEPARADOS

En la división de polinomios por coeficientes separados se abrevia mucho la operación y puede usarse en los mismos casos que en la multiplicación.

División de dos polinomios con una sola letra y en el mismo orden con relación a esa letra.

Ejemplos

1) Dividir $8x^6 - 16x^5 + 6x^4 + 24x^4 + 18x - 36$ entre $4x^3 + 3x - 6$ por coeficientes separados.

Sólo se escriben los coeficientes con sus signos, teniendo cuidado de poner cero donde falte algún término, y se efectúa la división:

```
 8 - 16 + 6 + 0 + 24 + 18 - 36      | 4 + 0 + 3 - 6
- 8 – 6 – 6 + 12                      2 - 4 + 0 + 6
    - 16 + 0 + 12 + 24
      16 + 0 + 12 - 24
             + 24 + 0 + 18 - 36
             - 24 +  0 – 18 + 36
```

El primer término del cociente tiene x porque proviene de dividir x entre x, y como en el dividendo y el divisor el exponente de x disminuye una unidad en cada término, en el cociente también disminuirá una unidad, por tanto el cociente es:

$2x^3 - 4x^2 + 6$

División de dos polinomios homogéneos con sólo dos letras.

Ejemplo

1) Dividir $a^5 - 7a^4b + 21a^3b^2 - 37a^2b^3 + 38ab^4 - 24b^5$ entre $a^2 - 3ab + 4b^2$ por coeficientes separados.

Tendremos:

```
 1 - 7 + 21 - 37 + 38 - 24     | 1 - 3 + 4
- 1  + 3 - 4                     1 - 4 + 5 - 6
     - 4 + 17 - 37
       4 - 12 + 16
           5 - 21 + 38
          -5 + 15 – 20
             - 6 + 18 - 24
               6 - 18 + 24
```

El primer término del cociente tiene a porque proviene de dividir a^5 entre a^2.

Como el cociente es homogéneo y en el dividendo y el divisor el exponente de a disminuye una unidad y el de b aumenta una unidad en cada término, el cociente será:

$$a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 6b^3$$

COCIENTE MIXTO

En todas las divisiones estudiadas hasta aquí, el dividendo era divisible exactamente por el divisor. Sin embargo, cuando no es así, la división no es exacta, pues nos da un residuo y esto origina los cocientes mixtos que constan de entero y quebrado.

Si una división no es exacta, debemos interrumpirla cuando el primer término del residuo es de grado inferior al primer término del divisor con relación a una misma letra, es decir, cuando el exponente de una letra en el residuo es menor que el exponente de la misma letra en el divisor y sumamos el cociente el quebrado que se forma, poniendo como numerador el residuo y como denominador el divisor.

Ejemplos

1) Dividir $x^2 - x - 6$ entre $x - 3$

$$\begin{array}{l|l} x^2 - x - 6 & x + 3 \\ -x^2 - 3x & x - 4 \quad \dfrac{6}{x+3} \\ \hline \quad -4x - 6 & \\ \quad 4x + 12 & \\ \hline \qquad 6 & \end{array}$$

Como el residuo no tiene x, es de grado cero con relación a la x y el divisor es de primer grado con relación a la x, por lo tanto interrumpimos la división porque el residuo es de grado inferior al divisor. Ahora añadimos al cociente $x - 4$ el quebrado $\frac{6}{x+3}$, de modo similar al procedimiento de la Aritmética cuando sobra un residuo.

2) Dividir $6m^4 - 4m^3n^2 - 3m^2n^4 + 4mn^6 - n^8$ entre $2m^2 - n^4$

$$\begin{array}{l|l} 6m^4 - 4m^3n^2 - 3m^2n^4 + 4mn^6 - n^8 & 2m^2 - n^4 \\ -6m^4 \qquad\qquad + 3m^2n^4 & 3m^2 - 2mn^2 + \dfrac{2mn^6 - n^8}{2m^2 - n^4} \\ \hline \quad -4m^3n^2 \qquad\qquad + 4mn^6 & \\ \quad 4m^3n^2 \qquad\qquad - 2mn^6 & \\ \hline \qquad\qquad\qquad 2mn^6 - n^8 & \end{array}$$

Interrumpimos la operación porque el primer término del residuo es $2mn$, en el cual la m no tiene de exponente 1 mientras que en el primer término del divisor la m tiene de exponente 2, y añadimos al cociente el quebrado que se forma poniendo como numerador el residuo y como denominador el divisor.

VALOR NUMÉRICO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS CON EXPONENTES ENTEROS PARA VALORES POSITIVOS Y NEGATIVOS

Una vez conocidas las operaciones fundamentales con cantidades negativas, así como las reglas de los signos en la multiplicación y la división, podemos hallar el valor de expresiones algebraicas para cualesquiera valores de las letras, como se explica en el título de Potencias de cantidades negativas.

EJERCICIOS

Encuentra el cociente mixto de:

1. $a^2 + b^2$ entre a^2
R. $1 + \frac{b^2}{a^2}$

2. $a^4 + 2$ entre a^3
R. $a + \frac{2}{a^3}$

3. $9x^3 + 6x^2 + 7$ entre $3x^2$
R. $3x + 2 + \frac{7}{3x^2}$

4. $16a^4 - 20a^3b + 8a^2b^2 + 7ab^3$ entre $4a^2$
R. $4a^2 - 5ab + 2b^2 + \frac{7b^3}{4a}$

5. $x^2 + 7x + 10$ entre $x + 6$
R. $x + 1 + \frac{4}{x+6}$

6. $x^2 - 5x + 7$ entre $x - 4$
R. $x - 1 + \frac{3}{x-4}$

7. $m^4 - 11m^2 + 34$ entre $m^2 - 3$
R. $m^2 - 8 + \frac{10}{m^2 - 3}$

8. $x^2 - 6xy + y^2$ entre $x + y$
R. $x - 7y + \frac{8y^2}{x+y}$

9. $x^3 + y^3$ entre $x - y$
R. $x^2 + xy + y^2 + \frac{2y^3}{x-y}$

10. $x^5 + y^5$ entre $x - y$
R. $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + \frac{2y^5}{x-y}$

POTENCIAS DE CANTIDADES NEGATIVAS

1) Toda potencia par de una cantidad negativa es positiva, porque equivale a un producto donde entra un número par de factores negativos.

Así, $(-2)^2 = +4$ porque $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4$

$(-2)^4 = +16$ porque $(-2)^4 = (-2)^2 \times (-2)^2 = (+4) \times (+4) = +16$

$(-2)^6 = +64$ porque $(-2)^6 = (-2)^4 \times (-2)^2 = (+16) \times (+4) = +64$

$(-2)^8 = +256$ porque $(-2)^8 = (-2)^6 \times (-2)^2 = (+64) \times (+4) = +256$

y así sucesivamente.

En general, siendo N un número entero tenemos: $(-a)^{2N} = a^{2N}$

2) Toda potencia impar de una cantidad negativa es negativa, porque equivale a un producto donde entra un número impar de factores negativos.

Así, $(-2)^1 = -2$

$(-2)^3 = -8$ porque $(-2)^3 = (-2)^2 \times (-2) = (+4) \times (-2) = -8$

$(-2)^5 = -32$ porque $(-2)^5 = (-2)^4 \times (-2) = (+16) \times (-2) = -32$

$(-2)^7 = -128$ porque $(-2)^7 = (-2)^6 \times (-2) = (+64) \times (-2) = -128$

y así sucesivamente.

En general tenemos $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$

Ejemplos

1) Valor numérico de $x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ para $x = -2$

Al sustituir x por -2, tenemos

$$(-2)^3 - 3(-2)^2 + 2(-2) - 4$$
$$= -8 - 3(4) + 2(-2) - 4$$
$$= -8 - 12 - 4 - 4$$
$$= -28$$

2) Valor numérico de $\frac{a^4}{4} - \frac{3a^2b}{6} + \frac{5ab^2}{3} - b^3$ para $a = -2$, $b = -3$

Tendremos: $\frac{a^4}{4} - \frac{3a^2b}{6} + \frac{5ab^2}{3} - b^3$

$$= \frac{(-2)^4}{4} - \frac{3(-2)^2(-3)}{6} + \frac{5(-2)(-3)^2}{3} - (-3)^3$$

$$= \frac{16}{4} - \frac{3(4)(-3)}{6} + \frac{5(-2)(9)}{3} - (-27)$$

$$= 4 - \left(\frac{-36}{6}\right) + \left(\frac{-90}{3}\right) + 27$$

$$= 4 - (-6) + (-30) + 27$$

$$= 4 - (-6) + (-30) + 27$$

$$= 4 + 6 - 30 + 27 = 7$$

EJERCICIOS

Encuentra el valor numérico de las expresiones siguientes para:

$a = -1$, $b = 2$, $c = -\frac{1}{2}$

1. $a^2 - 2ab + b^2$

R. 9

2. $(b + a)^3 - (b - c)^3 - (a - c)^3$

R. $-14\frac{1}{2}$

3. $3a^3 + 4a^2b + 3ab^2 - b^3$

R. – 31

4. $ab + ac - bc\ c\ b\ a$

R. $3\frac{1}{4}$

5. $a^4 - 3a^3 + 2ac - 3bc$

R. 8

6. $a^5 - 8a^4c + 16a^3c^2 - 20a^2c^3 + 40ac^4 - c^5$

R. $-\frac{31}{32}$

7. $(a + b + c)^2 - (a - b - c^2) + c$

R. $-6\frac{1}{2}$

8. $(a - b)^2 + (b - c)^2 - (a - c)^2$

R. 15

9. $3(2a + b) - 4a(b + c) - 2c(a - b)$

R. 3

Encuentra el valor numérico de las expresiones siguientes para:

$a = 2$, $b = \frac{1}{3}$, $x = -2$, $y = -1$,

$m = 3$, $n = \frac{1}{2}$

10. $\frac{X^4}{8} - \frac{X^2Y}{2} + \frac{3XY^2}{2} - Y^3$

R. 2

11. $(a - x)^2 + (x - y)^2 + (x^2 - y^2)$

$(m + x - n)$

R. $18\frac{1}{2}$

EJERCICIOS

Diversos problemas de suma, resta, multiplicación y división.

1.¿Qué expresión hay que añadir a $3xy - y^2$ para que la suma sea $3x$?
R. $-3x^2 + 8x - 6$

2. Restar $-2a^2 + 3a - 5$ de 3 y sumar el resultado con $8a + 5$.
R. $2a^2 + 5a + 13$

3.Simplificar $-3x^2 - \{-[4x^2 + 5x - (x^2 - x + 6]\}$
R. $6x + 6$

4. Simplificar $(x + y)(x - y) - (x + y)^2$
R. $-2y^2 - 2xy$

5. Valor numérico de $3(a + b) - 4(c - b) + \sqrt{\frac{c-b}{-a}}$ para $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$
R. 24

6. Restar $x^2 - 3xy + y^2$ de $3x^2 - 5y^2$ y sumar la diferencia con el resultado de restar $5xy + x^2$ de $2x^2 + 5xy + 6y^2$
R. $3x^2 + 3xy$

7. Multiplicar $\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{5}b^2$ por $\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}ab - 2b^2$
R. $\frac{1}{3}a^4 + \frac{1}{4}a^3b - \frac{193}{120}a^2b^2 + \frac{23}{20}ab^3 - \frac{2}{5}b^4$

8. Dividir la suma de $x^5 - x^3 + 5x^2$, $-2x^4 + 2x^2 - 10x$, $6x^3 - 6x + 30$ entre $x^2 - 2x + 6$
R. $x^3 - x + 5$

9. Restar la suma de $-3ab^2 - b^3$ y $2a^2b + 3ab^2$ - de $a^3 - a^2b + b^3$ y multiplicar la diferencia por $a^2 - ab + b^2$
R. $a^5 - 4a^4b + 4a^3b^2 - 3ab^4 + 3b^5$

10. Restar la suma de $x^3 - 5x^2 + 4x$, $-6x^2 - 6x + 3$, $-8x + 8x - 3$ de $2x^3 - 16x^2 + 5x + 12$ y dividir esta diferencia entre $x^2 - x + 3$
R. $x + 4$

11. Probar que $(2 + x)^2(1 + x^2) - (x^2 - 2)(x^2 + x - 3) = x^2(3x + 10) + 2(3x - 1)$

12. Encuentra el valor numérico de $(x + y)^2(x - y)^2 + 2(x + y)(x - y)$ para $x = -2$, $y = 1$
R. 15

13. ¿Qué expresión hay que agregar a la suma de $x + 4$, $x - 6$ y $x^2 + 2x + 8$ para obtener $5x^2 - 4x + 3$?
R. $4x^2 - 8x - 3$

14. Restar $-\{3a + (-b + a) - 2(a + b)\}$ de
- $2[(a + b) - (a - b)]$
- **R.** $2a - 7b$
-

15. Multiplicar por $5x + [-3x - x - y)]$ por $8x + [-2x + (-x + y)]$
R. $15x^2 - 2xy - y^2$

16. Probar que $[x^2 - (3x + 2)][x^2 + (-x + 3)] = x^2(x^2 - 4x + 4) - (7x + 6)$

17. ¿Qué expresión hay que sumar al producto de $[x(x + y) - x(x - y)][2(x^2 + y^2) - 3(x^2 - y^2)]$ para obtener $2x^3y + 3xy^3$?
R. $4x^3y - 7xy^3$

18. Restar $-x^2 - 3xy + y^2$ de cero y multiplicar la diferencia por el cociente de dividir $x^3 - y^3$ entre $x - y$.
R. $x^4 + 4x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 - y^4$

19. Simplificar $(x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
R. $-2y^3$

20. Simplificar $4x^2 - \{3x - (x^2 - 4 + x)\} + [x^2 - \{x + -3\}]$ y hallar su valor para $x = -2$.
R. 33

21. ¿De cuál expresión hay que restar $-18x^3 + 14x^2 + 84x - 45$ para que la diferencia dividida entre $x^2 + 7x - 5$ dé como cociente $x^2 - 9$?
R. De $x^4 - 11x^3 + 21x$

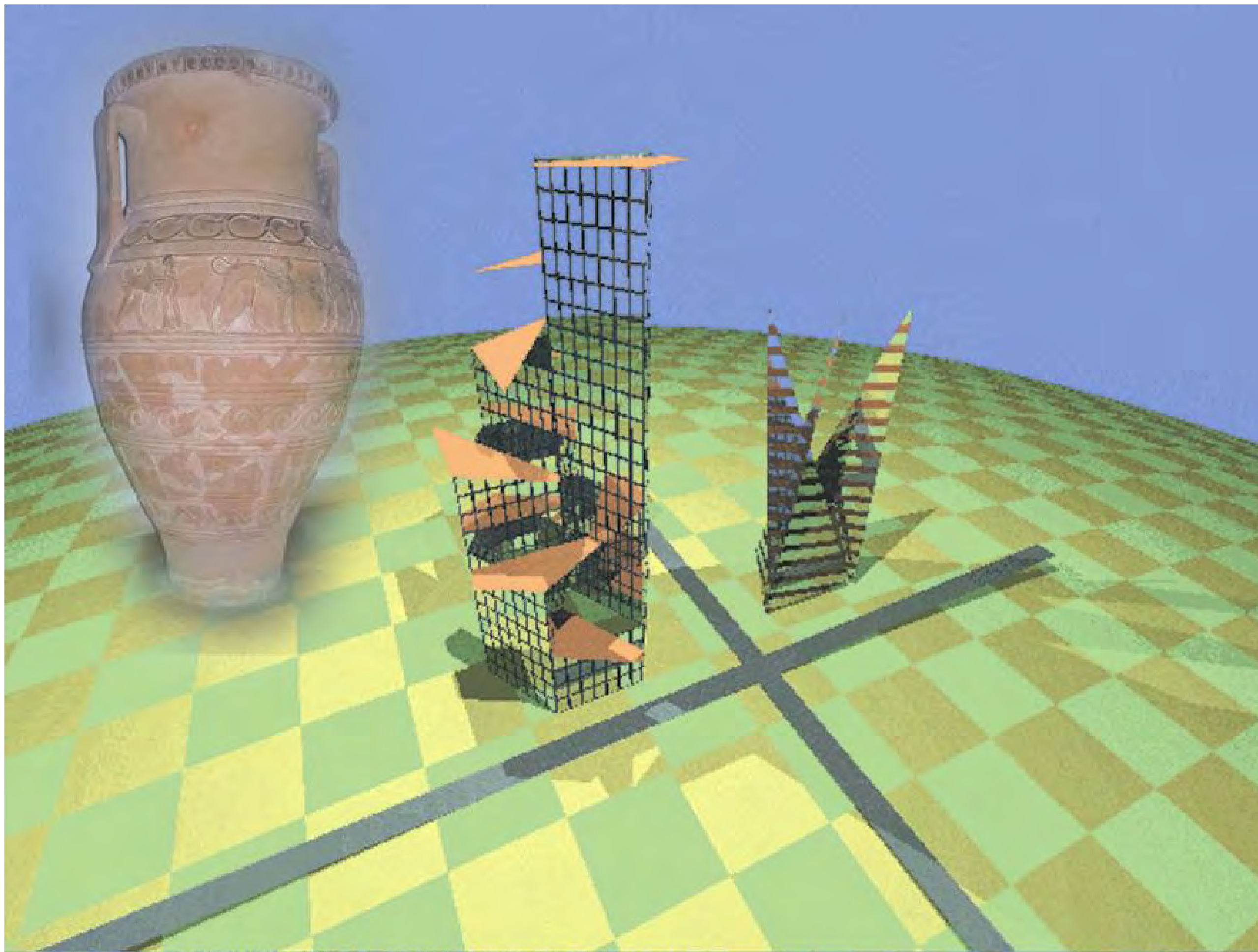
22. Probar que $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b) = a^4 - [3a + 2(a + 2) - 4(a + 1) - a + b^4]$.

23. Restar $-x^3 - 5x^2 + 6$ y sumar la diferencia con la suma de $x^2 - x + 2y - [x^2 + (-3x + 4) - (-x + 3)$
R. $x^3 + 5x^2 + x - 2$

24. A las 7 a.m. un termómetro marca + 5° y de las 7 a las 10 a.m. baja a razón de 3° por hora. ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m., 9 a.m. y 10 a.m.?
R. + 2°, - 1°, - 4°

25. Tomando como escala 1 cm = 10 m, representar gráficamente que un punto *B* está situado *a* + 40 m de *A* y otro punto *C* a - 35 m de *B*.

26. Sumar $x^2 - 3xy$ con $3xy - y^2$ y restar el resultado de x^2.
R. y^2



La Geometría construida por Euclides se mantuvo incólume hasta el siglo XIX, la piedra angular de sus estudios es el postulado: "Por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una perpendicular a la misma y sólo una". Su obra *Elementos* es conocida en todos los ámbitos y traducida a diversos idiomas**.**

CAPÍTULO VII

LOS PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables son ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede escribirse por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación.

Las letras representan números reales, razón por la cual se pueden aplicar las propiedades operatorias de los números reales para verificar la validez de cada fórmula.

Los símbolos que aparecen en las fórmulas, por ejemplo *x* ó *a* representan números reales, las cuales pueden sustituirse por expresiones algebraicas en general.

CUADRADO DE LA SUMA DE DOS CANTIDADES

Elevar al cuadrado $a+b$ equivale a multiplicar este binomio por sí mismo:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$

Al desarrollar este producto tenemos:

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

o sea $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Por tanto, el cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad más el duplo de la primera por la segunda más el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplos

1) Desarrollar $(x+4)^2$

Cuadrado del primero x^2

Duplo del primero por el segundo $2x\times 4=8x$

Cuadrado del segundo 16

Por tanto:

$$(x+4)^2=x^2+8x+16$$

Realiza estas operaciones mentalmente y escribe el producto de manera directa.

Cuadrado de un monomio. Se eleva su coeficiente al cuadrado y se multiplica el exponente de cada letra por 2.

Siendo el monomio $4ab^2$ decimos que:

$$(4ab^2)^2=4^2a^{1\times 2}b^{2\times 2}=16a^2b^4$$

En efecto:

$$(4ab^2)^2=4ab^2\times 4ab^2=16a^2b^4$$

Del mismo modo:

$$(5x^3y^4z^5)^2=25x^6y^8z^{10}$$

2) Desarrollar $(4a+5b^2)^2$

Cuadrado del primero

$$(4a)^2=16a^2$$

Duplo del primero por el segundo

$$2\times 4a\times 5b^2=40ab^2$$

Cuadrado del segundo

$$(5b^2)^2=25b^4$$

Luego

$$(4a+5b^2)^2=16a^2+40ab^2+25b^4$$

Las operaciones detalladas para mayor facilidad, no deben escribirse sino verificarse mentalmente.

3) Desarrollar $(3a^2+5x^3)^2$

$$(3a^2+5x^3)^2=9a^4+30a^2x^3+25x^6$$

4) Efectuar $(7ax^4+9y^5)(7ax^4+9y^5)$

$(7ax^4+9y^5)+(7ax^4+9y^5)=(7ax^4+9y^5)^2=$

$$49a^2x^8+126ax^4y^5+81y^{10}$$

EJERCICIOS

Por simple inspección, escribe el resultado de:

1. $(m+3)^2$ **R.** m^2+6m+9

2. $(x+y)^2$ **R.** $x^2+2xy+y^2$

3. $(5+x)^2$ **R.** $25+10x+x^2$

4. $(1+3x)^2$ **R.** $1+6x^2+9x^4$

5. $(6a+b)^2$ **R.** $36a^2+12ab+b^2$

6. $(2x+3y)^2$ **R.** $4x^2+12xy+9y^2$

7. $(9+4m)^2$ **R.** $81+72m+16m^2$

8. $(a^2x+by^2)^2$ **R.** $a^4x^2+2a^2bxy^2+b^2y^4$

9. $(7x+11)^2$ **R.** $49x^2+154x+121$

10. $(3a^3+8b^4)^2$ **R.** $9a^6+48a^3b^4+64b^8$

ADOS

tidades puede
s valores son

do, es decir, de



b ^{2}

b

ho b :





tra la figura 16,
es de lado cuya
puede verse en
de área a^2, un
ea ab cada uno,

$= a^2 + 2ab + b^2$

PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES

Siendo el producto $(a + b)(a - b)$

Al desarrollar esta multiplicación tenemos:

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 - \quad b^2 \end{array}$$

o sea $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

por tanto la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo (en la diferencia) menos el cuadrado del sustraendo.

Ejemplos

1) Efectuar $(a + x)(a - x)$

$(a + x)(a - x) = a^2 - x^2$

2) Efectuar $(2a + 3b)(2a - 3b)$

$(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$

3) Efectuar $(5a^{n+1} + 3a^m)(3a^m - 5a^{n+1})$

Dado que el orden de los sumandos no altera la suma, $5a^{n+1} + 3a^m$ es lo mismo que $3a^m + 5a^{n+1}$ pero debe considerarse que $3a^m - 5a^{n+1}$ no es lo mismo que $5a^{n+1} + 3a^m$. Por eso hay que fijarse en la diferencia y escribir el cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo:

$(5a^{n+1} + 3a^m)(3a^m - 5a^{n+1}) = (3a^m)^2 - (5a^{n+1})^2$

$= 9a^2m - 25a^{2n+2}$

$$\begin{array}{l} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

ea $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

la segunda más el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplos

1) Desarrollar $(x - 5)^2$

$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$

EJERCICIOS

Por simple inspección, escribe el resultado de:

1. $(a - 3)^2$ **R.** $a^2 - 6a + 9$

2. $(4ax - 1)^2$ **R.** $16a^2x^2 - 8ax + 1$

3. $(x - 7)^2$ **R.** $x^2 - 14x + 49$

4. $(a^3 - b^3)^2$ **R.** $a^6 - 2a^3b^3 - b^6$

5. $(9 - a)^2$ **R.** $81 - 18a + a^2$

6. $(3a^4 - 5b^2)^2$ **R.** $9a^8 - 30a^4b^2 + 25b^4$

7. $(2a - 3b)^2$ **R.** $4a^2 - 12ab + 9b^2$

8. $(x^2 - 1)^2$ **R.** $x^4 + 2x^2 + 1$

9. $(x^5 - 3ay^2)^2$ **R.** $x^{10} - 6ax^5y^2 + 9a^2y^4$

10. $(a^7 - b^7)^2$ **R.** $a^{14} - 2a^7b^7 + b^{14}$

11. $(2m - 3n)^2$ **R.** $4m^2 - 12mn + 9n^2$

12. $(10x^3 - 9xy^5)^2$ **R.** $100x^6 - 180x^4y^5 + 81x^2y^{10}$

13. $(x^m - y^n)^2$ **R.** $x^{2m} - 2x^my^n + y^{2n}$

14. $(a^{x-2} - 5)^2$ **R.** $a^{2x-4} - 10a^{x-2} + 25$

15. $(x^{a+1} - 3x^{a-2})^2$ **R.** $x^{2a+2} - 6x^{2a-1} + 9x^{2a-4}$

16. $(x + y)(x - y)$ **R.** $x^2 - y^2$

17. $(n - 1)(n + 1)$ **R.** $n^2 - 1$

18. $(m - n)(m + n)$ **R.** $m^2 - n^2$

19. $(1 - 3ax)(3ax + 1)$ **R.** $1 - 9a^2x^2$

20. $(a - x)(x + a)$ **R.** $a^2 - x^2$

21. $(2m + 9)(2m - 9)$ **R.** $4m^2 - 81$

22. $(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)$ **R.** $x^4 - a^4$

23. $(a^3 - b^2)(a^3 + b^2)$ **R.** $a^6 - b^4$

24. $(2a - 1)(1 + 2a)$ **R.** $4a^2 - 1$

25. $(y^2 - 3y)(y^2 + 3y)$ **R.** $y^4 - 9y^2$

RESULTADO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA

1) Efectuar $(a + b + c)(a + b - c)$

Este producto puede convertirse en la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia:

$(a + b + c)(a + b - c) = [(a + b) + c][(a + b) - c]$

$= (a + b)^2 - c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

donde desarrollamos $(a + b)^2$ según la regla del primer caso.

2) Efectuar $(a + b + c)(a - b - c)$

Si introducimos los dos últimos términos del primer trinomio en un paréntesis precedido del signo + , lo cual no hace variar los signos, y los dos últimos términos del segundo trinomio en un paréntesis precedido del signo -, donde sí cambian los signos, tendremos:

$(a + b + c)(a - b - c) = [a + (b + c)][a - (b + c)]$

$= a^2 - (b + c)^2$

$= a^2 - (b^2 + 2bc + c^2)$

$= a^2 - b^2 - 2bc - c^2$

3) Efectuar $(2x + 3y - 4z)(2x - 3y + 4z)$

$(2x + 3y - 4z)(2x - 3y + 4z) = [2x + (3y - 4z)][2x - (3y - 4z)]$

$= (2x)^2 - (3y - 4z)^2$

$= 4x^2 - (9y^2 - 24yz + 16z^2)$

$= 4x^2 - 9y^2 - 24yz + 16z^2$

EJERCICIOS

Por simple inspección, escribe el resultado de:

1. $(x + y + z)(x + y - z)$ **R.** $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$

2. $(x - y + z)(x + y - z)$ **R.** $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$

3. $(x + y + z)(x - y - z)$ **R.** $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$

4. $(m + n + 1)(m + n - 1)$ **R.** $m^2 + 2mn + n^2 - 1$

5. $(m - n - 1)(m - n + 1)$ **R.** $m^2 - 2mn + n^2 - 1$

6. $(x + y - 2)(x - y + 2)$ **R.** $x^2 - y^2 + 4y - 4$

7. $(n^2 + 2n + 1)(n^2 - 2n - 1)$ **R.** $n^4 - 4n^2 - 4n - 1$

8. $(a^2 - 2a + 3)(a^2 + 2a + 3)$ **R.** $a^4 + 2a^2 + 9$

9. $(m^2 - m - 1)(m^2 - m + 1)$ **R.** $m^4 - 3m^2 + 1$

10. $(2a - b - c)(2a - b + c)$ **R.** $4a^2 - 4ab + b^2 - c^2$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA

El **producto** de la **suma** por la **diferencia de dos cantidades** puede representarse geométricamente cuando los valores son positivos, de la siguiente manera:

Siendo $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Construimos un cuadrado de a unidades de lado, es decir, de lado a:

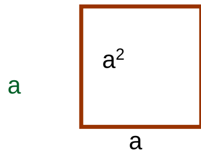
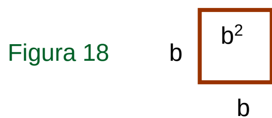


Figura 17

Construimos un cuadrado de b unidades de lado, es decir, de lado b:

Figura 18



Le quitamos al cuadrado de lado a el cuadrado de lado b (figura 19), y trazando la línea de puntos obtenemos el rectángulo c, cuyos lados son b y $(a - b)$. Si trasladamos el rectángulo c en la forma indicada por la flecha como se muestra en la figura 20, obtendremos el rectángulo $ABCD$, cuyos lados son $(a + b)$ y $(a - b)$, y su área (figura 21) será:

$(a + b)$ y $(a - b) = a^2 - b^2$

$(10 + 6)(10 - 6) = (10)^2 - (6)^2$
$16 \times 4 = 100 - 36$
$= 64$

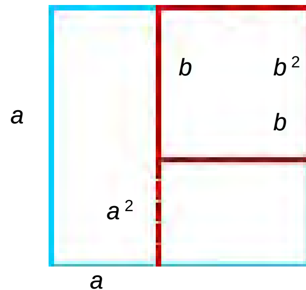


Figura 19

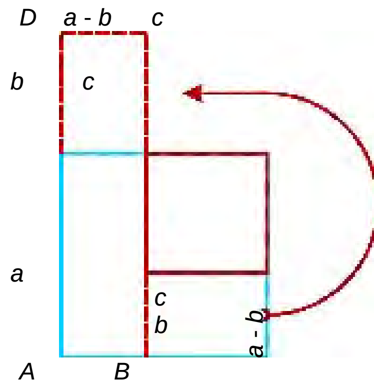


Figura 20

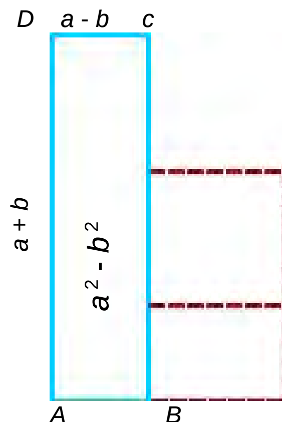


Figura 21

CUBO DE UN BINOMIO

1) Si elevamos $a + b$ al cubo tendremos:

$(a + b)^3 =$

$(a + b)(a + b)(a + b) =$

$(a + b)^2(a + b) =$

$(a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$

Al desarrollar esta multiplicación queda:

$$
\begin{array}{l}
a^2 + 2ab + b^2 \\
\underline{a + b} \\
a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
\underline{\quad a^2b + 2ab^2 + b^3} \\
a^3 + 3a^2b + \quad ab^2 + b
\end{array}
$$

o sea $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Esto significa que el cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad más el triple del cuadrado de la primera por la segunda, más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda cantidad.

2) Si elevamos $a - b$ al cubo tendremos:

$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) =$
$(a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$

y al desarrollar esta multiplicación:

$$
\begin{array}{l}
a^2 - 2ab + b^2 \\
\underline{a - b} \\
a^3 - 2a^2b + ab^2 \\
\underline{- a^2b + 2ab^2 - b^3} \\
a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
\end{array}
$$

o sea $(a - b)^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Esto significa que el cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad, menos el triple del cuadrado de la primera por la segunda, más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda cantidad.

Ejemplos

1) Desarrollar $(a + 1)^3$

$(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2(1) + 3a(1^2) + 1^3 =$
$a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

2) Desarrollar $(x - 2)^3$

$(x - 2)^3 =$
$x^3 - 3x^2(2) + 3x(2^2) - 2^3 =$
$x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

3) Desarrollar $(4x + 5)^3$

$(4x + 5)^3 =$
$(4x)^3 + 3(4x)^2(5) + 3(4x)(5^2) + 5^3 =$
$64x^3 + 240x^2 + 300x + 125$

4) Desarrollar $(x^2 - 3y)^3$

$(x^2 - 3y)^3 =$
$(x^2)^3 - 3(x^2)^2(3y) + 3x^2(3y)^2 - (3y)^3 =$
$x^6 - 9x^4y + 27x^2y^2 - 27y^3$

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS DE LA FORMA ($a + x$)($x + b$)

La multiplicación nos da:

$x + 2$	$x - 3$	$x - 2$	$x + 6$
$x + 3$	$x - 4$	$x + 5$	$x - 4$
$x^2 + 2x$	$x^2 - 3x$	$x^2 - 2x$	$x^2 + 6x$
$3x + 6$	$- 4x + 12$	$+ 5x - 10$	$- 4x - 24$
$x^2 + 5x + 6$	$x^2 - 7x + 12$	$x^2 + 3x - 10$	$x^2 + 2x - 24$

En los cuatro ejemplos expuestos se cumplen las siguientes reglas:

1) El primer término del producto es el producto de los primeros términos de los binomios.

2) El coeficiente del segundo término del producto es la suma algebraica de los segundos términos de los binomios y en este término la x está elevada a un exponente, que es la mitad del que tiene esta letra en el primer término del producto.

3) El tercer término del producto es el producto de los segundos términos de los binomios.

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS DE LA FORMA ($mx + a$) ($nx + b$)

En esta forma los términos en x tienen distintos coeficientes, y el producto de dos binomios puede hallarse fácilmente siguiendo los pasos de este esquema:

Para hallar el producto de ($3x + 5$)($4x + 6$):

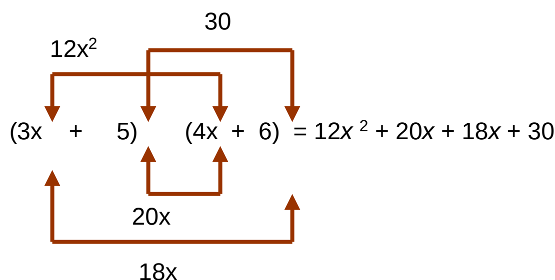


Figura 22

Al reducir los términos semejantes tenemos: $12x^2 + 38x + 30$

Ejemplos

1) Multiplicar ($x + 7$)($x - 2$)

Coeficiente del segundo término..................... $7 - 2 = 5$

Tercer término .... $7 \times (- 2) = - 14$

luego ($x + 7$)($x - 2$) = $x^2 + 5x - 14$

2) Efectuar ($x - 7$)($x - 6$)

Coeficiente del segundo término ....$(- 7) + (- 6) = - 13$

Tercer término ....$(- 7) \times (- 6) = + 42$

luego ($x + 7$)($x - 6$) = $x^2 + 13x + 42$

Suprime los pasos intermedios y escribe el producto directamente.

3) Al efectuar ($a - 11$)($a + 9$), tenemos ($a - 11$)($a + 9$) = $a^2 - 2a - 99$

4) Al efectuar ($x^2 + 7$)($x^2 + 3$), tenemos ($x^2 + 7$)($x^2 + 3$) = $x^4 + 10x^2 + 21$
Obsérvese que, como el exponente de x en el primer término del producto es 4, el exponente de x en el segundo término es la mitad de 4, o sea x^2.

5) Al efectuar ($x^3 - 12$)($x^3 - 3$), tenemos ($x^3 - 12$)($x^3 - 3$) = $x^6 - 15x^3 + 36$

EJERCICIOS

Desarrollar:

1. $(1 - 2n)^3$

R. $1 - 6n + 12n^2 - 8n^3$

2. $(4n + 3)$

R. $64n^3 + 144n^2 + 108n + 27$

3. $(a^2 - 2b)^3$

R. $a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8b^3$

4. $(a + 2)^3$

R. $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

5. $(x - 1)^3$

R. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

6. $(m + 3)^3$

R. $m^3 + 9m^2 + 27m + 27$

7. $(n - 4)^3$

R. $n^3 - 12n^2 + 48n - 64$

8. $(2x + 1)^3$

R. $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

9. $(1 - 3y)^3$

R. $1 - 9y + 27y^2 - 27y^3$

10. $(2 + y^2)^3$

R. $8 + 12y^2 + 6y^4 + y^6$

Por simple inspección, escribe el resultado de:

11. $(x + 2)(x + 4)$

R. $x^2 + 6x + 8$

12. $(x - 5)(x + 4)$

R. $x^2 + x - 20$

13. $(x + 5)(x - 2)$

R. $x^2 + 3x - 10$

14. $(a + 11)(a + 10)$

R. $a^2 - a - 110$

15. $(m - 6)(m - 5)$

R. $m^2 - 11m + 30$

16. $(n - 19)(n + 10)$

R. $n^2 - 9n - 190$

EJERCICIOS

Escribe el resultado por simple inspección:

1. $(a + b - 1)(a + b + 1)$

R. $a^2 + 2ab + b^2 - 1$

2. $(1 + b)^3$

R. $1 + 3b + 3b^2 + b^3$

3. $(a^2 + 4)(a^2 - 4)$

R. $a^4 - 16$

4. $(3ab - 5x^2)^2$

R. $9a^2b^2 - 30abx^2 + 25x^4$

5. $(ab + 3)(3 - ab)$

R. $9 - a^2b^2$

6. $(1 - 4ax)^2$

R. $1 - 8ax + 16a^2x^2$

7. $(a^2 + 8)(a^2 - 7)$

R. $a^4 + a^2 - 56$

8. $(x + y + 1)(x - y - 1)$

R. $x^2 - y^2 - 2y - 1$

9. $(1 - a)(a + 1)$

R. $1 - a^2$

10. $(m - 8)(m + 12)$

R. $m^2 + 4m - 96$

11. $(x^2 - 1)(x^2 + 3)$

R. $x^4 + 2x^2 - 3$

12. $(x^3 + 6)(x^3 - 8)$

R. $x^6 - 2x^3 - 48$

13. $(5x^3 + 6m^4)^2$

R. $25x^6 + 60m^4x^3 + 36m^8$

14. $(x^4 - 2)(x^4 + 5)$

R. $x^8 + 3x^4 - 10$

15. $(1 - a + b)(b - a - 1)$

R. $a^2 - 2ab + b^2 - 1$

16. $(ax + bn)(ax - bn)$

R. $a^2x - b^2n$

17. $(x^{a+1} - 8)(x^{a+1} + 9)$

R. $x^{2a+2} + x^{a+1} - 72$

18. $(2a + x)^3$

R. $8a^3 + 12a^2x + 6ax^2 + x^3$

19. $(11 - ab)^2$

R. $121 - 22ab + a^2b^2$

COCIENTES NOTABLES DIFERENCIA DE LOS CUADRADOS

Son ciertos cocientes que obedecen a reglas fijas y que se pueden escribir por simple inspección.

1) Siendo el cociente $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$ efectuamos la división y tenemos:

$$\begin{array}{rr|l} a^2 & -b^2 & a+b \\ \hline -a^2 - ab & & a-b \\ -ab - b^2 & & \\ ab + b^2 & & \end{array}$$

o sea $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$

2) Siendo el cociente $a^2 - b^2$, efectuamos la división y tenemos:

$$\begin{array}{rr|l} a^2 & -b^2 & a-b \\ \hline -a^2 + ab & & a+b \\ ab - b^2 & & \\ -ab + b^2 & & \end{array}$$

o sea $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$

Lo anterior nos dice que:

1) La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma es igual a la diferencia de esas cantidades.

2) La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la diferencia es igual a la suma de esas cantidades.

Ejemplos

1) Dividir $9x^2 - y^2$ entre $3x + y$

$$\frac{9x^2 - y^2}{3x + y} = 3x - y$$

2) Dividir $1 - x^4$ entre $1 - x^2$

$$\frac{1 - x^4}{1 - x^2} = 1 + x^2$$

3) Dividir $(a + b)^2 - c^2$ entre $(a + b) + c$

$$\frac{(a + b)^2 - c^2}{(a + b) + c} = a + b - c$$

4) Dividir $1 - (a + n)^2$ entre $1 - (a + n)$

$$\frac{1 - (a + n)^2}{1 - (a + n)} = 1 + a + n$$

EJERCICIOS

Por simple inspección, encuentra el cociente de:

1. $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ **R.** $x - 1$

2. $\frac{a^2 - 4ab^2}{a + 2b}$ **R.** $a - 2b$

3. $\frac{1 + x^2}{1 - x}$ **R.** $1 + x$

4. $\frac{25 - 36x^2}{5 - 6x^2}$ **R.** $5 + 6x^2$

5 $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$ **R.** $x - y$

6. $\frac{4x^2 - 9m^2n^4}{2x + 3mn^2}$ **R.** $2x - 3mn^2$

7. $\frac{y^2 - x^2}{y - x}$ **R.** $x + y$

8. $\frac{36m^2 - 49n^2x^4}{6m - 7nx^2}$ **R.** $6m + 7nx^2$

9. $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$ **R.** $x - 2$

10. $\frac{81a^6 + 100b^8}{9a^3 + 10b^2}$ **R.** $9a^3 - 10b^4$

11. $\frac{9 - x^4}{3 - x^2}$ **R.** $3 + x^2$

12. $\frac{a^4b^6 - 4x^8y^{10}}{a^2b^3 + 2x^4y^5}$ **R.** $a^2b^3 - 2x^4y^5$

13. $\frac{1 - (a + b)^2}{1 + (a + b)}$ **R.** $1 - a - b$

14 $\frac{4 - (m + n)^2}{2 + (m + n)}$ **R.** $2 - m - n$

15. $\frac{x^2 - (x - y)^2}{x + (x - y)}$ **R.** y

16. $\frac{(a + x)^2 - 9}{(a + x) + 3}$ **R.** $a + x - 3$

17. $\frac{x^{2n} - y^{2n}}{x^n + y^n}$ **R.** $x^n - y^n$

COCIENTE DE LA SUMA O DIFERENCIA DE LOS CUBOS DE DOS CANTIDADES ENTRE LA SUMA O DIFERENCIA DE LAS CANTIDADES

Ejemplos

1) Siendo el cociente $\frac{a^3 - b^3}{a + b}$ efectuamos la división y tenemos:

$$
\begin{array}{llll}
a^3 & & +b^3 & \underline{|\,a+b} \\
-a^3 - a^2b & & & a^2 - ab + b^2 \\
\hline
-a^2b & & & \\
a^2b + ab^2 & & & \\
\hline
& ab^2 + b^3 & & \\
& -ab^2 - b^3 & & \\
\hline
\end{array}
$$

o sea $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$ = $a^2 - ab + b^2$

2) Siendo el cociente $a^3 - b^3$, efectuamos la división y tenemos:

$$
\begin{array}{llll}
a^3 & & -b^3 & \underline{|\,a-b} \\
-a^3 + a^2b & & & a^2 + ab + b^2 \\
\hline
a^2b & & & \\
-a^2b + ab^2 & & & \\
\hline
& ab^2 - b^3 & & \\
& -ab^2 + b^3 & & \\
\hline
\end{array}
$$

o sea $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$ = $a^2 + ab + b^2$

Lo anterior nos dice que:

1) La suma de los cubos de dos cantidades dividida por la suma es igual al cuadrado de la primera cantidad menos el producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

2) La diferencia de los cubos de dos cantidades dividida por la diferencia es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplos

1) Dividir $8x^3 + y^3$ entre $2x + y$

$$\frac{8x^3 + y^3}{2x + y} = (2x)^2 - 2x(y) + y^2 = 4x^2 - 2xy + y^2$$

2) Dividir $27x^6 + 125y^9$ entre $3x^2 + 5y^3$

$$\frac{27x^6 + 125y^9}{3x^2 + 5y^3} =$$

$$= (3x^2)^2 - 3x^2(5y^3) + (5y^3)^2 = 9x^4 - 15x^2y^3 + 25y^6$$

3) Dividir $1 - 64a^3$ entre $1 - 4a$

$$\frac{1 - 64a^3}{1 - 4a} = 1 + 4a + 16a^2$$

4) Dividir $8x^{12} - 729y^6$ entre $2x^4 - 9y^2$

$$\frac{8x^{12} - 729y^6}{2x^4 - 9y^2} = 4x^8 + 18x^4y^2 + 81y^4$$

Suprime los pasos intermedios y escribe directamente el resultado final.

EJERCICIOS

Por simple inspección, encuentra el cociente de:

1. $\frac{1 + a^3}{1 + a}$ **R.** $1 - a + a^2$

2. $\frac{64a^3 + 343}{4a + 7}$ **R.** $16a^2 - 28a + 49$

3. $\frac{1 - a^3}{1 - a}$ **R.** $1 + a + a^2$

4. $\frac{216 - 125y^3}{6 - 5y}$ **R.** $36 + 30y + 25y^2$

5. $\frac{x^3 + y^3}{x + y}$ **R.** $x^2 - xy + y^2$

6. $\frac{1 + a^3b^3}{1 + ab}$ **R.** $1 - ab + a^2b^2$

7. $\frac{8a^3 + 1}{2a - 1}$ **R.** $4a^2 + 2a + 1$

8. $\frac{729 - 512b^3}{9 - 8b}$ **R.** $81 + 72b + 64b^2$

9. $\frac{8x^3 + 27y^3}{2x + 3y}$ **R.** $4x^2 - 6xy + 9y^2$

10. $\frac{a^3x^3 + b^3}{ax + b}$ **R.** $a^2x^2 - abx + b^2$

11. $\frac{27m^3 - 125n^3}{3m - 5n}$ **R.** $9m^2 + 15mn + 25n^2$

12. $\frac{n^3 - m^3x^3}{n - mx}$ **R.** $n^2 + mnx + m^2x^2$

13. $\frac{x^4 - y^4}{x - y}$ **R.** $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

14. $\frac{m^5 - n^5}{m + n}$ **R.** $m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4$

15. $\frac{a^5 - n^5}{a - n}$ **R.** $a^4 + a^3n + a^2n^2 + an^3 + n^4$

16. $\frac{x^6 - y^6}{x + y}$ **R.** $x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$

COCIENTE DE LA SUMA O DIFERENCIA DE POTENCIAS IGUALES DE DOS CANTIDADES ENTRE LA SUMA O DIFERENCIA

La división nos da:

I.
$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$
$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

II. $$\frac{a^4 + b^4}{a + b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$$

III. $$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3b + a^2b^2 + b^4$$

IV.
$\frac{a^4 + b^4}{a + b}$ la división no es exacta

$\frac{a^4 + b^4}{a - b}$ la división no es exacta

Lo anterior nos dice que:

1) La **diferencia** de potencias iguales, ya sean **pares** o **impares**, siempre es di-visible por la **diferencia** de las bases.

2) La **diferencia** de potencias iguales **pares** siempre es divisible por la **suma** de las bases.

3) La **suma** de potencias iguales **impares** siempre es divisible por la **suma** de las bases.

4) La **suma** de potencias iguales **pares** nunca es divisible por la **suma ni por la diferencia** de las bases.

Dichos resultados pueden expresarse abreviadamente:

1) $a^n - b^n$ siempre es divisible por $a - b$, siendo n **cualquier** número entero, par o impar.

2) $a^n - b^n$ es divisible por $a + b$ siendo n un número entero **par.**

3) $a^n + b^n$ es divisible por $a + b$ siendo n un número entero **impar.**

4) $a^n + b^n$ nunca es divisible por $a + b$ ni por $a - b$ siendo n un número entero **par.**

LEYES DE LOS COCIENTES

Los resultados de los casos I, II y III anteriores pueden comprobarse en otros casos del mismo tipo, permitiéndonos establecer inductivamente las siguientes leyes:

1) El cociente tiene tantos términos como unidades tiene el exponente de las letras en el dividendo.

2) El primer término del cociente se obtiene dividiendo el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y el exponente de *a* disminuye 1 en cada término.

3) El exponente de *b* en el segundo término del cociente es 1, y este exponente aumenta 1 en cada término posterior.

4) Cuando el divisor es $a - b$ todos los signos del cociente son + y cuando el divisor es $a + b$ los signos son alternativamente + y - .

Ejemplos

1) Hallar el cociente de $x^7 - y^7$ entre $x - y$
Aplicando las leyes anteriores, tenemos:

$$\frac{x^7 - y^7}{x - y} = x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$$

Como el divisor es $x - y$, todos los signos del cociente son + .

2) Hallar el cociente de $m^8 - n^8$ entre $m + n$

$$\frac{m^8 - n^8}{m + n} = m^7 - m^6n + m^5n^2 - m^4n^3 - m^3n^4 + m^2n^5 + mn^6 - n^7$$

Como el divisor es $m + n$, los signos del cociente son alternativos.

3) Hallar el cociente de $x^5 + 32$ entre $x + 2$

Como $32 = 2^5$, tendremos:

$$\frac{x^5 + 32}{x + 2} = \frac{x^5 + 2^5}{x + 2}$$

$= x^4 - 2x^3 + 2^2x^2 - 2^3x - 2^4 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$

4) Hallar el cociente de $64a^6 - 729b^6$ entre $2a + 3b$

Como $64a^6 = (2a)^6$ y $729b^6 = (3b)^6$, tendremos:

$$\frac{64a^6 - 729b^6}{2a + 3b} = \frac{(2a)^6 - (3b)^6}{2a + 3b}$$

$= (2a)^5 - (2a)^4(3b) + (2a)^3(3b)^2 - (2a)^2(3b)^3 - (3b)^5$

$= 32a^5 - 48a^4b + 72a^3b^2 - 108a^2b^3 + 162ab^4 - 243b^5$

EJERCICIOS

Por simple inspección, encuentra el cociente de:

1. $\frac{a^6-b^6}{a-b}$ **R.** $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$
2. $\frac{x^7+y^7}{x+7}$ **R.** $x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6$
3. $\frac{a^7-m^7}{a-m}$ **R.** $a^6 + a^5m + a^4m^2 + a^3m^3 + a^2m^4 + am^5 + m^6$
4. $\frac{a^8-b^8}{a+b}$ **R.** $a^7 - a^6b + a^5b^2 - a^4b^3 + a^3b^4 - a^2b^5 + ab^6 - b^7$
5. $\frac{x^{10}-y^{10}}{x-y}$ **R.** $x^9 + x^8y + x^7y^2 + x^6y^3 + x^5y^4 + x^4y^5 +$ $x^3y^6 + x^2y^7 + xy^8 + y^9$
6. $\frac{m^9+n^9}{m+n}$ **R.** $m^8 - m^7n + m^6n^2 - m^5n^3 + m^4n^4 + m^3n^5 +$ $m^2n^6 - mn^7 + n^8$
7. $\frac{m^9-n^9}{m-n}$ **R.** $m^8 + m^7n + m^6n^2 + m^5n^3 + m^4n^4 + m^3n^5 +$ $m^2n^6 + mn^7 + n^8$
8. $\frac{a^{10}-x^{10}}{a+x}$ **R.** $a^9 - a^8x + a^7x^2 - a^6x^3 + a^5x^4 + a^4x^5 + a +$ $x\,a^3x^6 - a^2x^7 + ax^8 - x^9$
9. $\frac{1-n^5}{1-n}$ **R.** $1 + n + n^2 + n^3 + n^4$
10. $\frac{1-a^6}{1-a}$ **R.** $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$
11. $\frac{1+a^7}{1+a}$ **R.** $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6$
12. $\frac{1-m^8}{1-m}$ **R.** $1 - m + m^2 - m^3 + m^4 - m^5 + m^6 - m^7$

LEYES

1) Hallar el cociente de $a^{10} + b^{10}$ entre $a^2 + b^2$

En los casos estudiados hasta ahora los exponentes del divisor han sido siempre 1. Pero cuando los exponentes del divisor sean 2, 3, 4, 5, etc., el exponente de *a* disminuirá en cada término 2, 3, 4, 5, etc.; la *b* aparece en el segundo término del cociente elevada a un exponente igual al que tiene en el divisor, y este exponente, en cada término posterior, aumentará 2, 3, 4, 5, etc.

Así, en este caso tendremos:

$$\frac{a^{10}+b^{10}}{a^2+b^2} = a^8 - a^6b^2 + a^4b^4 - a^2b^6 + b^8$$

donde el exponente de *a* disminuye 2 en cada término y el de *b* aumenta 2 en cada término.

2) Hallar el cociente de $x^{15} - y^{15}$ entre $x^3 - y^3$

$$\frac{x^{15}-y^{15}}{x^3-y^3} = x^{12} - x^9y^3 + x^6y^6 + x^3y^9 + y^{12}$$

EJERCICIOS

Por simple inspección, escribe el cociente de:

1. $\frac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$ **R.** $x^4 + x^2y^2 + y^4$
2. $\frac{a^8-b^8}{a^2+b^2}$ **R.** $a^6 - a^4b^2 + a^2b^4 - b^6$
3. $\frac{m^{10}-n^{10}}{m^2-n^2}$ **R.** $m^8 + m^6n^2 + m^4n^4 + m^2n^6 + n^8$
4. $\frac{a^{12}-b^{12}}{a^3+b^3}$ **R.** $a^9 - a^6b^3 + a^3b^6 - b^9$
5. $\frac{a^{12}-x^{12}}{a^3-x^3}$ **R.** $a^9 + a^6x^3 + a^3x^6 + x^9$
6. $\frac{x^{15}+y^{15}}{x^3+y^3}$ **R.** $x^{12} - x^9y^3 + x^6y^6 - x^3y^9 + y^{12}$
7. $\frac{m^{12}+1}{m^4+1}$ **R.** $m^8 - m^4 + 1$
8. $\frac{m^{16}-n^{16}}{m^4-n^4}$ **R.** $m^{12} + m^8n^4 + m^4n^8 + n^{12}$

Escribe el cociente sin efectuar la división:

9. $\frac{x^4-1}{1+x^2}$ **R.** $x^2 - 1$
10. $\frac{8m^3+n^6}{2m+n^2}$ **R.** $4m^2 - 2mn^2 + n^4$
11. $\frac{1-a^5}{1-a}$ **R.** $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$
12. $\frac{x^6-27y}{x^2+3y}$ **R.** $x^4 + 3x^2y + 9y^2$
13. $\frac{x^6-49y^6}{x^3+7y^3}$ **R.** $x^3 - 7y^3$
14. $\frac{a^{14}-b^{14}}{a^2-b^2}$ **R.** $a^{12} + a^{10}b^2 + a^8b^4 + a^6b^6 + a^4b^8$ $+ a^2b^{10} + b^{12}$
15. $\frac{1+a^3}{1+a}$ **R.** $1 - a + a^2$
16. $\frac{16x^2y^4-25m^6}{4xy^2+5m^3}$ **R.** $4xy^2 - 5m^3$
17. $\frac{x^{27}+y^{27}}{x^3+y^3}$ **R.** $x^{24} - x^{21}y^3 + x^{18}y^6 - x^{15}y^9$ $+ x^{12}y^{12} - x^9y^{15} + x^6y^{18} - x^3y^{21} + y^{24}$



El primero en aplicar metódicamente las ciencias a los problemas de la vida real fue Arquímedes, quien es considerado el más importante matemático de la antigüedad, fue el creador de la Hidrostática. Defendió Siracusa de los romanos; fue asesinado por un soldado enemigo mientras intentaba resolver un problema matemático.

CAPÍTULO VIII

TEOREMA DEL RESIDUO

El residuo de dividir un polinomio entero y racional en x por un binomio de la forma $x - a$ se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por a.

Siendo el polinomio: $Ax^{m} + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots + Mx + N$

Dividimos este polinomio por $x - a$ y continuamos la operación hasta que el residuo R sea independiente de x. Q es el cociente de esta división.

Como en toda división inexacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo, con lo que tendremos:

$$Ax^{m} + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots + Mx + N = (x - a)Q + R$$

POLINOMIO ENTERO Y RACIONAL

Un polinomio como $x^3 + 5x^2 - 3x + 4$ es entero porque ninguno de sus términos tiene letras en el denominador y es racional porque ninguno de sus términos tiene raíz inexacta. Este es un polinomio entero y racional en x y su grado es 3.
El polinomio $a^5 + 6a^4 - 3a^3 + 5a^2 + 8a + 3$ es entero y racional en a y su grado es 5.

RESIDUO DE LA DIVISIÓN DE UN POLINOMIO ENTERO Y RACIONAL EN *x* POR UN BINOMIO DE LA FORMA *x - a*

1) Hallar el residuo de la división de $x^3 - 7x^2 + 17x - 6$ entre $x - 3$. Efectuamos la división

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 7x^2 + 17x - 6 & x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 & x^2 - 4x + 5 \\ \hline \quad -4x^2 + 17x & \\ \quad 4x^2 - 12x & \\ \hline \qquad 5x - 6 & \\ \qquad -5x + 15 & \\ \hline \qquad\quad 9 & \end{array}$$

Esta división no es exacta y el residuo es 9.

Si en el dividendo $x^3 - 7x^2 + 17x - 6$ sustituimos la x por 3, tendremos:

$$3^3 - 7(3)^2 + 17(3) - 6 = 27 - 63 + 51 - 6 = 9$$

y vemos que el **residuo** de dividir el polinomio dado entre $x - 3$ se obtiene **sustituyendo** en el **polinomio dado la *x*** por + 3

2) Hallar el residuo de la división de $3x^3 - 2x^2 - 18x - 1$ entre $x + 2$. Efectuamos la división:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 - 2x^2 - 18x - 1 & x + 2 \\ -3x^3 - 6x^2 & 3x^2 - 8x - 2 \\ \hline \quad -8x^2 - 18x & \\ \quad 8x^2 + 16x & \\ \hline \qquad -2x - 1 & \\ \qquad 2x + 4 & \\ \hline \qquad\quad 3 & \end{array}$$

Si en el dividendo $3x^3 + 2x^2 - 18x - 1$ sustituimos la x por - 2, tendremos:

$$3(-2)^3 - 2(-2)^2 - 18(-2) - 1 = -24 - 8 + 36 - 1 = 3$$

el **residuo** de dividir el polinomio dado entre $x + 2$ se obtiene **sustituyendo** en el **polinomio** dado la ***x*** **por - 2**.

Lo expuesto anteriormente se prueba en el Teorema del residuo.

TEOREMA DEL RESIDUO

El polinomio $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots + Mx + N$ lo dividimos entre $x - a$ y continuamos la operación hasta que el residuo R sea independiente de x. Q es el cociente de esta división.

Como en toda división inexacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo, con lo que tendremos:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots + Mx + N = (x - a)Q + R$$

Esta igualdad es cierta para todos los valores de x. Al sustituir la x por a tendremos:

$$Aa^m + Ba^{m-1} - Ca^{m-2} + \ldots\ldots + Ma + N = (a - a)Q + R$$

Pero $(a - a) = 0$ y $(a - a)Q = 0 \times Q = 0$; por tanto, la igualdad anterior se convierte en:

$$Aa^m + Ba^{m-1} - Ca^{m-2} + \ldots\ldots + Ma + N = R$$

Esta igualdad prueba el teorema, pues nos dice que R, el residuo de la división, es igual a lo que se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por a, que es lo que queríamos demostrar.

Un polinomio ordenado en x suele expresarse abreviadamente con la notación $P(x)$, y el resultado de sustituir la x por a se escribe $P(a)$.

Si el divisor es $x + a$, como $x + a = x - (-a)$, el residuo de la división del polinomio ordenado en x entre $x + a$ se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por $-a$.

En los casos anteriores el coeficiente de x en $x - a$ y $x + a$ es 1. Estos binomios pueden escribirse $1x - a$ y $1x + a$

El residuo de dividir un polinomio ordenado en x entre $x - a$ ó $1x - a$ se obtiene sustituyendo la x por a, o sea por $\frac{a}{1}$, y que el residuo de dividirlo entre x + a ó 1x + a se obtiene sustituyendo la x por - a, o sea por $-\frac{a}{1}$.

Por tanto, cuando el divisor sea la forma $bx - a$, donde b, que es el coeficiente de x, es distinto de 1, el residuo de la división se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por $\frac{a}{b}$, y cuando el divisor sea de la forma $bx + a$ el residuo se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por $-\frac{a}{b}$.

En general, el **residuo** de dividir un polinomio ordenado en x por un binomio de la forma $bx - a$ se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por el quebrado que resulta de dividir el segundo término del binomio con el signo cambiado entre el coeficiente del primer término del binomio.

APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL RESIDUO

1) Sin efectuar la división, hallar el residuo de dividir $x^2 - 7x + 6$ entre $x - 4$

Sustituyendo la x por 4 tendremos:

$$4^2 - 7(4) + 6 = 16 - 28 + 6 = -6$$

2) Hallar, por inspección, el residuo de dividir $a^3 + 5a^2 + a - 1$ entre $a + 5$

Sustituyendo la a por - 5 tendremos:

$$(-5)^3 + 5(-5)^2 + (-5) - 1 = -125 + 125 - 5 - 1 = -6$$

3) Hallar, por inspección, el residuo de $2x^3 + 6x - 12x + 1$ entre $2x + 1$

Sustituyendo la x por $-\frac{1}{2}$ tendremos:

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 6 + 1 = \frac{33}{4}$$

4) Hallar, por inspección, el residuo de $a^4 - 9a^2 - 3a + 2$ entre $3a - 2$

Sustituyendo la a por $\frac{2}{3}$, tendremos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = \frac{16}{81} - 4 - 2 + 2 = \frac{308}{81}$$

EJERCICIOS

Sin efectuar la división, encuentra el residuo de dividir:

1. $x^2 - 2x$ entre $x - 1$
R. - 1
2. $x^3 - 3x^2 - 2x$ entre $x - 1$
R. - 4
3. $x^4 - x^3 + 5$ entre $x - 2$
R. 13
4. $a^4 - 5a^3 + 2a^2 - 6$ entre $a + 3$
R. 228
5. $m^4 + m^3 - m^2 + 5$ entre $m - 4$
R. 309
6. $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x + 2$ entre $x + 3$
R. 98

7. $a^5 - 2a^3 + 2a - 4$ entre $a - 5$
R. 2881

8. $6x^3 + x^2 + 3x + 5$ entre $2x + 1$
R. 3
9. $12x^2 - 21x + 90$ entre $3x - 3$
R. 81

DIVISIÓN SINTÉTICA

Regla práctica para hallar el cociente y el residuo de la división de un polinomio entero en x por $x - a$

1) Dividamos $x^3 - 5x^2 + 3x + 14$ entre $x - 3$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 5x^2 + 3x + 14 & x - 3 \\ \hline -x^3 + 3x^2 & x^2 - 2x - 3 \\ \quad -2x^2 + 3x & \\ \quad\ \ 2x^2 - 6x & \\ \qquad -3x + 14 & \\ \qquad\ \ 3x - 9 & \\ \qquad\qquad 5 & \end{array}$$

El cociente $x^2 - 2x - 3$ es un polinomio en x cuyo grado es 1 **menos** que el grado del dividendo; además el coeficiente del primer término del cociente es igual al coeficiente del primer término del dividendo y el residuo es 5.

El cociente y el residuo pueden hallarse **sin efectuar la división** siguiendo una **regla práctica** llamada **división sintética:**

1) El cociente es un polinomio en x cuyo grado es 1 menos que el grado del dividendo.

2) El coeficiente del primer término del cociente es igual al coeficiente del primer término del dividendo.

3) El coeficiente de un término cualquiera del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el segundo término del binomio divisor cambiado de signo y sumando este producto con el coeficiente del término que ocupa el mismo lugar en el dividendo.

4) El residuo se obtiene multiplicando el coeficiente del último término del cociente por el segundo término del divisor cambiado de signo y sumando este producto con el término independiente del dividendo.
Para aplicar esta regla a la división anterior escribimos solamente los coeficientes del dividendo:

				Divisor
D. x^3	$-5x^2$	$+3x$	$+14$	$x - 3$
C. 1	- 5	+ 3	+ 14	+ 3
1 × 3 =	3	(- 2) × 3 = - 6	(- 3) × 3 = - 9	
1	- 2	- 3	+ 5	

D. = Dividendo

C. = Coeficientes

(Segundo término del divisor con el signo cambiado)

El cociente será un polinomio en x de segundo grado, porque el dividendo es de tercer grado.

El coeficiente del **primer** término del cociente es 1, igual que en el dividendo.

El coeficiente del **segundo** término del cociente es - 2, mismo que se obtuvo al multiplicar el segundo término del divisor con el signo cambiado + 3, por el coeficiente del **primer** término del cociente y sumando este producto: 1 × 3 = 3, con el coeficiente del término que ocupa en el dividendo el mismo lugar que el que buscamos del cociente, el **segundo** del dividendo - 5 y tenemos - 5 + 3 = - 2.

El coeficiente del **tercer** término del cociente es - 3, mismo que se obtuvo multiplicando el **segundo** término del divisor con el signo cambiado + 3, por el coeficiente del segundo término del cociente - 2 y sumando este producto: (- 2) × 3 = - 6, con el coeficiente del término que ocupa en el dividendo el mismo lugar que el que buscamos del cociente, el **tercero** del dividendo + 3 y tenemos + 3 - 6 = - 3.

El **residuo** es 5, mismo que se obtiene multiplicando el coeficiente del último término del cociente - 3, por el segundo término del divisor cambiado de signo + 3 y sumando este producto: (- 3) × 3 = - 9, con el término independiente del dividendo + 14 y tenemos + 14 - 9 = + 5

Por tanto, el **cociente** de la división es

$x^2 - 2x -$ y el **residuo 5**,

que son el cociente y el residuo obtenidos al efectuar la división.

En realidad, con este método, lo que se hace es **sustituir** en el polinomio dado la x por + 3.

2) Encontramos, por división sintética, el cociente y el resto de las divisiones:

$$2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x - 105 \text{ entre } x + 2$$

Coeficientes del dividendo

2	- 5		+ 6
2 × (- 2) =	- 4	(- 9) × (- 2) =	18
2	- 9		+ 24

(2o. término del divisor con el signo cambiado)

- 4		- 105	- 2
24 × (- 2) = - 48	(- 52) × (- 2) =	104	
- 52		- 1	
		(residuo)	

Dado que el dividendo es de cuarto grado, el cociente es de tercer grado

Los **coeficientes** del cociente son 2, - 9, + 24 y - 52; luego, el **cociente** es:

$$2x^3 - 9x^2 + 24x - 52 \text{ y el residuo es } - 1$$

Con este método sustituimos en el polinomio dado la x por - 2

3) Encontremos, por división sintética, el cociente y el residuo de dividir

$$x^5 - 16x^3 - 202x + 81 \text{ entre } x - 4$$

Este polinomio es incompleto, pues le faltan los términos en x^4 y en x^2, por tanto, al escribir los coeficientes ponemos 0 en los lugares que debían ocupar los coeficientes de estos términos:

1	+0	- 16	+ 0	- 202	+ 81	+ 4
	4	16	0	0	808	
1	+ 4	0	0	- 202	- 727	
					(residuo)	

Dado que el dividendo es de quinto grado, el cociente es de cuarto grado.

Los coeficientes del cociente son 1, + 4, 0, 0 y - 202; luego, el **cociente** es:

$$x^4 + 4x^3 - 202 \text{ y el residuo es } - 727$$

4) Encontraremos, por división sintética, el cociente y el resto de la división de

$$2x^4 - 3x^3 - 7x - 6 \text{ entre } 2x + 1$$

Pongamos el divisor en la forma $x + a$ dividiendo sus dos términos por 2 y tendremos $\frac{2x}{2} + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}$.

Ahora bien, como el divisor lo hemos dividido entre 2, el cociente quedará multiplicado por 2; luego, dividimos entre 2 los coeficientes que encontremos para el cociente, para destruir esta operación:

2	- 3	+ 0	- 7	- 6	$-\frac{1}{2}$
	- 1	+ 2	- 1	4	
2	- 4	+ 2	- 8	- 2	
				(residuo)	

2, - 4, + 2 y - 8 son los coeficientes del cociente multiplicados por 2; para destruir esta operación hay que dividirlos entre 2 y tendremos 1, - 2, + 1 y - 4. Como es de tercer grado, el cociente será:

$$x^3 - 2x^2 + x - 4$$

y el residuo es - 2, porque al residuo no le afecta la división del divisor entre 2.

.

EJERCICIOS

Por división sintética, encuentra el cociente y el residuo de estas divisiones:

1. $x^2 - 7x + 5$ entre $x - 3$
R. Coc. $x - 4$; Res. $- 7$

2. $a^2 - 5a + 1$ entre $a + 2$
R. Coc. $a - 7$; Res. 15

3. $x^3 - x^2 + 2x - 2$ entre $x + 1$
R. Coc. $x^2 - 2x + 4$; Res. $- 6$

4. $x^3 - 2x^2 + x - 2$ entre $x - 2$
R. Coc. $x^2 + 1$; Res. 0

5. $a^3 - 3a^2 - 6$ entre $a + 3$
R. Coc. $a^2 - 6a + 18$; Res. $- 60$

6. $n^4 - 5n^3 + 4n - 48$ entre $n + 2$
R. Coc. $n^3 - 7n^2 + 14n - 24$; Res. 0

7. $x^4 - 3x + 5$ entre $x - 1$
R. Coc. $x^3 + x^2 + x - 2$; Res. $- 3$

8. $x^5 + x^4 - 12x^3 - x^2 - 4x - 2$ entre $x + 4$
R. Coc. $x^4 - 3x^3 - x$; Res. $- 2$

DIVISIBILIDAD DE UN POLINOMIO

Para que un polinomio en x sea divisible por un binomio de la forma $x - a$ es condición necesaria que el término independiente del polinomio sea múltiplo del término a del binomio, sin tener en cuenta los signos.

Así, el polinomio $3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 8x + 7$ no es divisible por el binomio $x - 3$, porque el término independiente del polinomio 7 no es divisible por el término numérico del binomio, que es 3.

Sin embargo, esta condición **no es suficiente**, es decir, que aun cuando el término independiente del polinomio sea divisible por el término a del binomio, no podemos afirmar que el polinomio en x sea divisible por el binomio $x - a$.

DIVISIBILIDAD POR *x* - *a*

Un polinomio entero en x que se anula para $x = a$, o sea sustituyendo la x por a, es divisible por $x - a$.

Siendo el polinomio entero $P(x)$, que suponemos se anula para $x = a$, es decir, sustituyendo la x por a, decimos que $P(x)$ es divisible por $x - a$.

Según lo demostrado en el Teorema del Residuo, el residuo de dividir un polinomio entero en x por $x - a$ se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por a; pero por hipótesis $P(x)$ se anula al sustituir la x por a, o sea $P(a) = 0$; luego, el residuo de la división de $P(x)$ entre $x-a$ es cero; luego, $P(x)$ es divisible por $x- a$

Del mismo modo, si $P(x)$ se anula para $x = - a$, $P(x)$ es divisible por $x - (- a) = x + a$; si $P(x)$ se anula para $x = \frac{a}{b}$. será divisible por $x - \frac{a}{b}$ o por $bx - a$; si $P(x)$ se anula para $x = -\frac{a}{b}$ será divisible por $x - \left(-\frac{a}{b}\right) = x + \frac{a}{b}$ o por $bx + a$

Recíprocamente, si $P(x)$ es divisible por $x - a$ tiene que anularse para $x = a$, es decir, sustituyendo la x por a; si $P(x)$ es divisible por $x + a$ tiene que anularse para $x = - a$; si $P(x)$ es divisible por $bx - a$ tiene que anularse para $x = \frac{a}{b}$ y si es divisible por $bx + a$ tiene que anularse para $x = -\frac{a}{b}$.

Ejemplos

1) Hallar, sin efectuar la división, si $x^3 - 4x^2 + 7x - 6$ es divisible por $x - 2$
Este polinomio será divisible por $x - 2$ si se anula para $x = + 2$
Sustituyendo la x por 2, tendremos: $2^3 - 4(2)^2 + 7(2) - 6 = 8 - 16 + 14 - 6 = 0$
luego es divisible por $x - 2$

2) Hallar, por inspección, si $x^3 - 2x^2 + 3$ es divisible por $x + 1$
Este polinomio será divisible por $x + 1$ si se anula para $x = - 1$
Sustituyendo la x por $- 1$ tendremos: $(- 1)^3 - 2(- 1)^2 + 3 = - 1 - 2 + 3 = 0$
luego es divisible por $x + 1$

3) Hallar, por inspección, si $x^4 + 2x^8 - 2x^2 + x - 6$ es divisible por $x + 3$ y encontrar el cociente de la división.
Aplicaremos la división sintética que vimos en la regla práctica anterior, con la cual hallamos simultáneamente el cociente y el residuo, si lo hay.

Tendremos:

1	+ 2	- 2	+ 1	- 6	- 3
	- 3	+3	- 3	+ 6	
1	- 1	+1	- 2	0	
				(residuo)	

Lo anterior dice que el polinomio se anula al sustituir la x por $- 3$; luego es divisible por $x + 3$

El cociente es de tercer grado y sus coeficientes son 1, - 1, + 1 y - 2, luego el cociente es: $x^3 - x^2 - x - 2$

Por tanto, si el dividendo es $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 6$, el divisor $x + 3$ y el cociente $x^3 - x^2 + x - 2$, y la división es exacta, podemos escribir:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 6 = (x + 3)(x^3 - x^2 + x - 2)$$

EJERCICIOS

Sin efectuar la división, menciona si son exactas las siguientes divisiones:

1. $x^2 - x - 6$ entre $x - 3$

R. Exacta

2. $x^3 + 4x^2 - x - 10$ entre $x + 2$

R. Exacta

3. $2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9x + 3$ entre $x - 1$

R. Inexacta

4. $x^5 + x^4 - 5x^3 - 7x + 8$ entre $x + 3$

R. Inexacta

5. $4x^3 - 8x^2 + 11x - 4$ entre $2x - 1$

R. Exacta

6. $6x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x + 3$ entre $3x + 1$

Sin efectuar la división, probar que:

7. $a + 1$ es factor de $a^3 - 2a^2 + 2a + 5$

8. $x - 5$ divide a $x^5 - 6x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 2x - 10$

9. $4x - 3$ divide a $4x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 7x + 3$

10. $3n + 2$ no es factor de $3n^5 + 2n^4 - 3n^3 - 2n^2 + 6n + 7$

Sin efectuar la división, menciona si las siguientes divisiones son o no exactas y determinar el cociente en cada caso y el residuo, si lo hay.

11. $2a^3 - 2a^2 - 4a + 16$ entre $a + 2$

R. Exacta, cociente $2a^2 - 6a + 8$

12. $a^4 - a^2 + 2a + 2$ entre $a + 1$

R. Exacta, cociente $a^3 - a^2 + 2$

13. $x^4 + 5x - 6$ entre $x - 1$

R. Exacta, cociente $x^3 + x^2 + x + 6$

14. $x^6 - 39x^4 + 26x^3 - 52x^2 + 29x - 30$ entre $x - 6$

R. Exacta, cociente $x^5 + 6x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 4x + 5$

15. $a^6 - 4a^5 - a^4 + 4a^3 + a^2 - 8a + 25$ entre $a - 4$

R. Inexacta, cociente $a^5 - a^3 + a - 4$; residuo 9

16. $16x^4 - 24x^3 + 37x^2 - 24x + 4$ entre $4x - 1$

R. Exacta, Coc. $4x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

17. $15n^5 + 25n^4 - 18n^3 - 18n^2 + 17n - 11$ entre $3n + 5$

R. Inexacta, cociente $5n^4 - 6n^2 + 4n - 1$, residuo – 6

Encuentra en los siguientes ejemplos, el valor de la constante K (término independiente del polinomio) para que:

18. $7x^2 - 5x + K$ sea divisible por $x - 5$

R. – 150

19. $x^3 - 3x^3 + 4x + K$ sea divisible por $x - 2$

R. – 4

20. $2a^4 + 25a + K$ sea divisible por $a + 3$

R. – 4

21. $20x^3 - 7x^2 + 29x + K$ sea divisible por $4x + 1$

R. 8

DIVISIBILIDAD DE $a^n + b^n$ y $a^n - b^n$ POR $a + b$ y $a - b$

Apliquemos el Teorema del Residuo a la demostración de las reglas establecidas.
Siendo n un número entero y positivo, se verifica lo siguiente:

1) $a^n - b^n$ es siempre divisible por $a - b$, ya sea n par o impar.
De acuerdo con el

Teorema del Residuo, $a^n - b^n$ será divisible por $a - b$ si se anula sustituyendo a por $+ b$.

Al sustituir a por $+ b$ en $a^n - b^n$ tenemos:

$a^n - b^n = b^n - b^n = 0$

Se anula; luego, $a^n - b^n$ siempre es divisible por $a - b$.

2) $a^n + b^n$ es divisible por $a + b$ si n es impar.

Siendo n impar, $a^n + b^n$ será divisible por $a + b$ si se anula al sustituir a por $- b$.

Al sustituir a por $- b$ en $a^n + b^n$ tenemos:
$a^n + b^n = (- b)^n + b^n = - b^n + b^n = 0$
Se anula; luego, $a^n - b^n$ es divisible por $a + b$ siendo n impar. $(- b)^n = - b^n$ porque n es impar y toda cantidad negativa elevada a un exponente impar da una cantidad negativa.

3) $a^n - b^n$ es divisible por $a + b$ si n es par.

Siendo n par, $a^n - b^n$ será divisible por $a + b$ si se anula al sustituir a por $- b$.

Al sustituir a por $- b$ en $a^n - b^n$ tenemos:
$a^n - b^n = (- b)^n - b^n = b^n - b^n = 0$

Se anula; luego, $a^n - b^n$ es divisible por $a + b$ siendo n par. $(- b)^n = b^n$ porque n es par y toda cantidad negativa elevada a un exponente par da una cantidad positiva.

4) $a^n + b^n$ no es divisible por $a + b$ si n es par.

Siendo n par, para que $a^n + b^n$ sea divisible por $a + b$ es necesario que se anule al sustituir a por $- b$.

Al sustituir a por $- b$ tenemos:
$a^n + b^n = (- b)^n + b^n = b^n + b^n = 2b^n$

No se anula; luego, $a^n + b^n$ no es divisible por $a + b$ cuando n es par.

5) $a^n + b^n$ nunca es divisible por $a - b$, ya sea n par o impar.

Siendo n par o impar, para que $a^n - b^n$ sea divisible por $a - b$ es necesario que se anule al sustituir a por $+ b$.

Al sustituir tenemos: $a^n + b^n = b^n + b^n = 2b^n$

No se anula; luego, $a^n - b^n$ nunca es divisible por $a - b$.

EJERCICIOS

Por simple inspección, menciona si son exactas las siguientes divisiones, y en caso negativo señala cuál es el residuo:

1. $\frac{a^6-b^6}{a^2+b^2}$ **R.** Inexacta; residuo $2b^6$

2. $\frac{x^7+1}{x-1}$ **R.** Exacta

3. $\frac{x^3-8}{x+2}$. **R.** Inexacta; residuo - 16

4. $\frac{x^5+1}{x-1}$ **R.** Inexacta; residuo 2

5. $\frac{a^4+b^4}{a+b}$ **R.** Inexacta residuo $2b^4$

6. $\frac{x^8-1}{x^2+1}$ **R.** Exacta

7. $\frac{a^{11}+1}{a-1}$ **R.** Inexacta; residuo 2

8. $\frac{x^4-16}{x+2}$ **R.** Exacta

9. $\frac{a^5+32}{a-2}$ **R.** Inexacta; residuo 64

10. $\frac{x^7-128}{x+2}$ **R.** Inexacta; residuo - 256

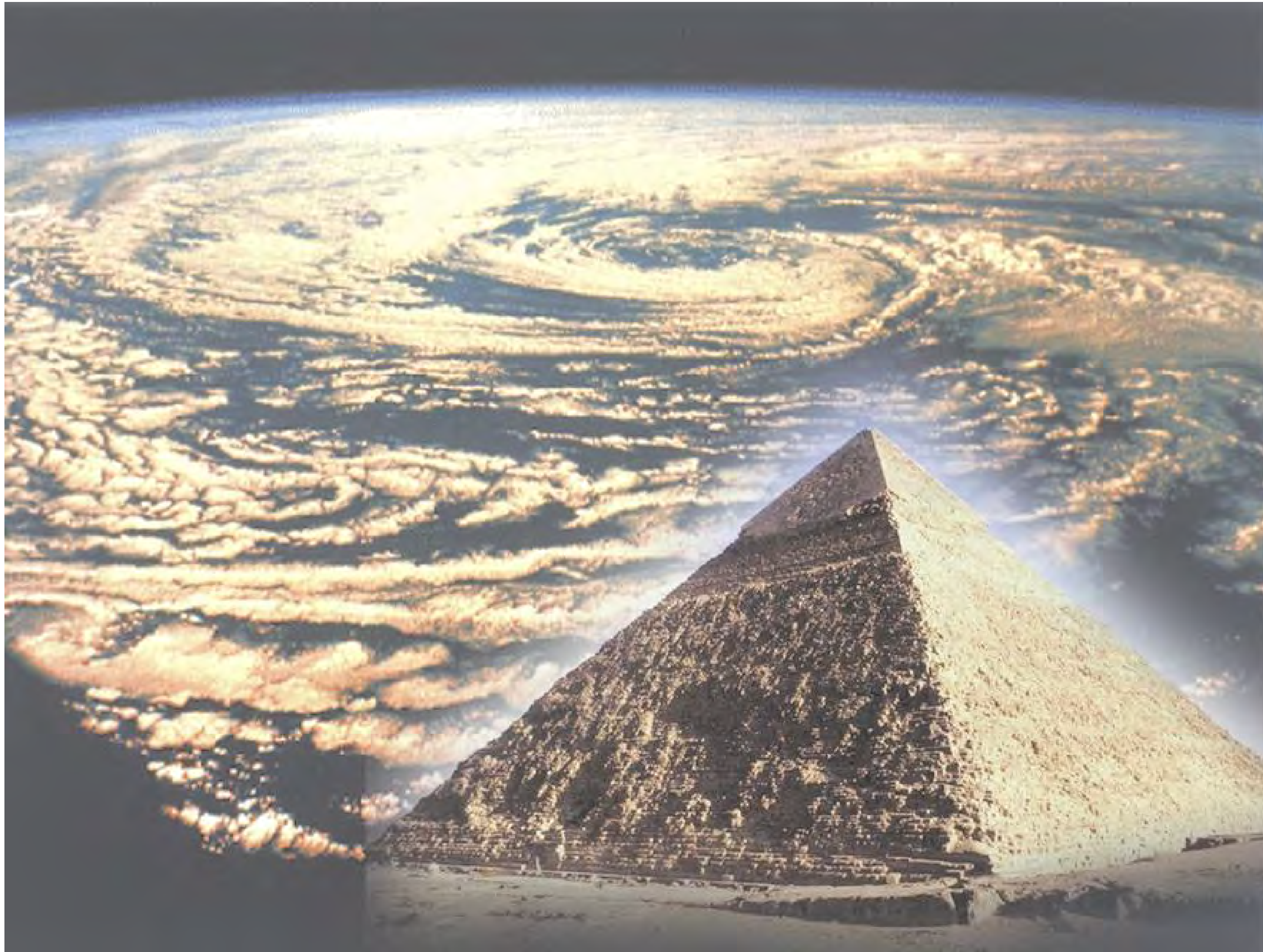
DIVISIBILIDAD DE $\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b}$

1) $\frac{a^n-b^n}{a-b}$ siempre es divisible.

2) $\frac{a^n+b^n}{a+b}$ es divisible si *n* es impar.

3) $\frac{a^n-b^n}{a+b}$ es divisible si *n* es par.

4) $\frac{a^n+b^n}{a-b}$ nunca es divisible.



Claudio Ptolomeo. Su sistema geocéntrico dominó la Astronomía durante catorce siglos hasta la aparición de Copérnico. Aunque es más conocido por estos trabajos, fue uno de los fundadores de la Trigonometría. Su obra principal, fue el Almagesto.

CAPÍTULO IX

ECUACIONES ENTERAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

El planteamiento de problemas de la vida real requiere para su solución, la representación de números reales mediante símbolos lo cual hace posible encontrar valores específicos de estos símbolos (incógnitas) que satisfacen una relación de igualdad. Dichas relaciones de igualdad se denominan ecuaciones y los números reales que las satisfacen son soluciones de las mismas.

Basados en la relación de orden que tiene el conjunto de los números reales también se plantean expresiones simbólicas que se llaman desigualdades o inecuaciones.

Una **igualdad** significa que dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor.

$a = b + c$ $\qquad\qquad$ $3x^2 = 4x + 15$

ECUACIONES

La **ecuación** es una igualdad con una o varias cantidades desconocidas llamadas **incógnitas** y que sólo se verifica o es verdadera para **determinados valores** de las incógnitas. Dichas **incógnitas** se representan por las últimas letras del alfabeto: x, y, z, u, v.

Así, $5x + 2 = 17$

es una **ecuación**, porque es una igualdad en la que hay una incógnita, la x, y esta igualdad sólo se verifica (sólo es verdadera) para el **valor** $x = 3$. En efecto, si sustituimos la x por 3 tenemos:

$5(3) + 2 = 17$, o sea: $17 = 17$

Si damos a x un valor distinto de 3, la igualdad **no se verifica** o no es verdadera.

La igualdad $y^2 - 5y = -6$ es una ecuación porque sólo se verifica para $y = 2$ e $y = 3$. En efecto, sustituyendo la y por 2 tenemos:

$2^2 - 5(2) = -6$

$4 - 10 = -6$

$-6 = -6$

Si hacemos $y = 3$ tenemos:

$3^2 - 5(3) = -6$

$9 - 15 = -6$

$-6 = -6$

Al dar a y un valor distinto de 2 ó 3, la igualdad no se verifica.

MIEMBROS

El **primer miembro** de una ecuación o de una identidad es la expresión que está a la **izquierda** del signo de **igualdad** o **identidad**, y el **segundo miembro** es la expresión que está a la derecha.

En la ecuación

$3x - 5 = 2x - 3$

el primer miembro es $3x - 5$ y el segundo $2x - 3$

Los **términos** son cada una de las cantidades que están conectadas con otra por el signo + ó - , o la cantidad que está sola en un miembro.

En la ecuación $3x - 5 = 2x - 3$, los términos son $3x$, -5, $2x$ y -3.

Un error muy frecuente es confundir los **miembros** de una ecuación con los **términos.**

Por eso no hay que olvidar que **miembro** y **término** sólo son equivalentes cuando en un miembro de una ecuación hay una sola cantidad.

En la ecuación

$3x = 2x + 3$

$3x$ es el **primer miembro** de la ecuación y también es un **término** de la ecuación.

CLASES DE ECUACIONES

La **ecuación numérica** no tiene más letras que las incógnitas, como

$4x - 5 = x + 4$

donde la única letra es la incógnita x.

La **ecuación literal**, además de las incógnitas, tiene otras letras que representan cantidades conocidas, como

$3x + 2a = 5b - bx$

En la ecuación **entera** ninguno de sus términos tiene denominador como en los ejemplos anteriores, y es **fraccionaria** cuando algunos o todos sus términos tienen denominador, como

$$\frac{3x}{2} + \frac{6x}{5} = 5 + \frac{x}{5}$$

El **grado** de una ecuación con una sola incógnita es el mayor exponente que tiene la incógnita en la ecuación. Así,

$4x - 6 = 3x - 1$ y $ax + b = b^2x + c$

son ecuaciones de **primer grado** porque el mayor exponente de x es 1.

La ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ es de **segundo grado** porque el mayor exponente de x es 2. A las ecuaciones de **primer grado** se les llama **simples** o **lineales.**

Las **raíces** o **soluciones** de una ecuación son los valores de las incógnitas que verifican o **satisfacen** la ecuación, es decir, que sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en **identidad.**

En la ecuación $5x - 6 = 3x + 8$ la **raíz** es 7 porque haciendo $x = 7$ se tiene

$5(7) - 6 = 3(7) + 8$, o sea $29 = 29$

donde 7 **satisface** la ecuación.

Las **ecuaciones de primer grado** con una incógnita tienen una **sola** raíz.

Para **resolver** una ecuación hay que hallar sus raíces, o sea el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación.

IDENTIDAD

La identidad es una igualdad que se verifica para cualesquiera valores de las letras que involucra.

Así,

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

$a^2 - m^2 = (a + m)(a - m)$

son **identidades** porque se verifican para **cualesquiera** valores de las letras a y b, en el primer ejemplo, y de las letras a y m, en el segundo ejemplo.

El **signo de identidad** es º , que se lee **"idéntico a"**.

La identidad de $(x + y)^2$ con

$x^2 + 2xy + y^2$ se escribe

$(x + y)^2 \; x^2 + 2xy + y^2$

y se lee $(x + y)^2$ **idéntico** a:

$x^2 + 2xy + y^2$

AXIOMA FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES

Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales, entonces los resultados serán iguales.

De este axioma se derivan las siguientes reglas:

1) Si a los dos miembros de una ecuación se les suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

2) Si a los dos miembros de una ecuación se les resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

3) Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

4) Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

5) Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia, o si a los dos miembros se les extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

CAMBIO DE SIGNOS

Los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que ésta varíe, porque equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por - 1, con lo cual la igualdad no varía (Regla 3).

De este modo, si en la ecuación

$$-2x - 3 = x - 15$$

multiplicamos ambos miembros por - 1 (para lo cual hay que multiplicar por - 1 todos los términos de cada miembro), tendremos:

$$2x + 3 = -x + 15$$

que es la ecuación dada con los signos de todos sus términos cambiados.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES ENTERAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Reglas generales

1) Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.

2) Se hace la transposición de términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contengan la incógnita y en el otro todas las cantidades conocidas.

3) Se reducen términos semejantes en cada miembro.

4) Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $3x - 5 = x + 3$

Pasando x al primer miembro *y* - 5 al segundo, cambiándoles los signos, tenemos $3x - x = 3 + 5$.

Reduciendo términos semejantes:

$$2x = 8$$

Despejando x, para lo cual dividimos los dos miembros de la ecuación entre 2, tenemos:

$\frac{2X}{2} = \frac{8}{2}$ y simplificando $x = 4$

Verificación

La verificación es la prueba de que el valor obtenido para la incógnita es correcto, y se realiza sustituyendo en los dos miembros de la ecuación dada la incógnita por el valor obtenido, y si éste es correcto, la ecuación dada se convertirá en identidad.

Así, en el caso anterior, haciendo $x = 4$ en la ecuación dada tenemos:

$$3(4) - 5 = 4 + 3$$

$$12 - 5 = 4 + 3$$

$$7 = 7$$

El valor $x = 4$ satisface la ecuación.

2) Resolver la ecuación:

$35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32$

Pasando $-30x$ al primer miembro y 35 y 6 al segundo:

$$-22x - 18x + 30x$$

$$= 14 + 32 - 35 - 6$$

Reduciendo: $-10x = 5$

Dividiendo entre - 5: $2x = -1$

Despejando x, para lo cual dividimos ambos miembros entre 2:

$$x = -\frac{1}{2}$$

Verificación

Haciendo $x = -\frac{1}{2}$ en la ecuación dada, se tiene:

$$35 - 22\left(-\frac{1}{2}\right) + 6 - 18\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$14 - 30\left(-\frac{1}{2}\right) + 32$$

$$35 + 11 + 6 + 9 = 14 + 15 + 32$$

$$61 = 61$$

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $5x + 6 = 10x + 5$ **R.** $x = \frac{1}{5}$

2. $9y - 11 = -10 + 12y$ **R.** $x = -\frac{1}{3}$

3. $21 - 6x = 27 - 8x$ **R.** $x = 3$

4. $5x = 8x - 15$ **R.** $x = 5$

5. $4x + 1 = 2$ **R.** $x = \frac{1}{4}$

6. $y - 5 = 3y - 25$ **R.** $y = 10$

7. $11x + 5x - 1 = 65x - 36$ **R.** $x = \frac{5}{7}$

8. $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$ **R.** $x = 6$

TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS

La transposición de términos consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro, siguiendo una regla:

Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo.

En efecto:

1) Siendo la ecuación $5x = 2a - b$

Si sumamos b a los dos miembros de esta ecuación, la igualdad subsiste (Regla 1), y tendremos:

$$5x + b = 2a - b + b$$

y como $-b + b = 0$, queda

$$5x + b = 2a$$

donde $-b$, que estaba en el segundo miembro de la ecuación dada, ha pasado al primer miembro con signo + .

2) Siendo la ecuación $3x + b = 2a$

Si restamos b a los dos miembros de esta ecuación, la igualdad subsiste (Regla 2), y tendremos:

$$3x + b - b = 2a - b$$

y como $b - b = 0$, queda

$$3x = 2a - b$$

donde $+b$, que estaba en el primer miembro de la ecuación dada, ha pasado al segundo miembro con signo - .

Otra regla dice que términos iguales con signos iguales en distinto miembro de una ecuación, pueden suprimirse.

En la ecuación: $x + b = 2a + b$

tenemos el término b con signo + en los dos miembros, el cual puede suprimirse, quedando

$$x = 2a$$

porque equivale a restar b a los dos miembros.

En la ecuación

$$5x - x^2 = 4x - x^2 + 5$$

tenemos el término x^2 con signo $-x^2$ en los dos miembros, el cual puede suprimirse y queda

$$5x = 4x + 5$$

porque equivale a sumar x^2 a los dos miembros.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Ejemplos

1) Resolver $3x - (2x - 1) = 7x - (3 - 5x) + (-x + 24)$

Suprimiendo los signos de agrupación:

$3x - 2x + 1 = 7x - 3 + 5x + - x + 24$

Transponiendo: $3x - 2x - 7x - 5x + x = 3 + 24 - 1$

Reduciendo: $-10x = 20$

$$X = -\frac{20}{10} = -2$$

2) Resolver $5x + \{-2x + (-x + 6)\} = 18 - \{-(7x + 6) - (3x - 24)\}$

Suprimiendo los paréntesis interiores:

$5x + \{-2x + - x + 6\} = 18 - \{-7x - 6 - 3x + 24\}$

Suprimiendo las llaves:

$$5x - 2x - x + 6 = 18 + 7x + 6 + 3x - 24$$

$$5x - 2x - x - 7x - 3x = 18 + 6 - 24 - 6$$

$$-8x = -6$$

Multiplicando por -1: $8x = 6$

Dividiendo entre 2: $4x = 3$

$$X = \frac{3}{4}$$

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$ **R.** $x = 3$

2. $15x - 10 = 6x - (x + 2) + (-x + 3)$ **R.** $x = 1$

3. $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$ **R.** $x = \frac{9}{2}$

4. $30x - (-x + 6) + (-5x + 4) = -(5x + 6) + (-8 + 3x)$ **R.** $x = -\frac{3}{7}$

5. $3x + [-5x - (x + 3)] = 8x + (-5x - 9)$ **R.** $x = 1$

6. $16x - [3x - (6 - 9x)] = 30x + [-(3x + 2) - (x + 3)]$ **R.** $x = \frac{1}{2}$

7. $x - [5 + 3x - \{5x - (6 + x)\}] = -3$ **R.** $x = 4$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON PRODUCTOS INDICADOS

Ejemplos

1) Resolver la ecuación

$10(x - 9) - 9(5 - 6x) = 2(4x - 1) + 5(1 + 2x)$

Efectuando los productos indicados:

$10x - 90 - 45 + 54x = 8x - 2 + 10x + 5$

Suprimiendo $10x$ en ambos miembros, por ser cantidades iguales con signos iguales en distintos miembros, queda:

$- 90 - 45 + 54x = 8x - 2 + 5$

$54x - 8x = - 2 + 5 + 90 + 45$

$46x = 138$

$$x = \frac{138}{46} = 3$$

Verificación

Haciendo $x = 3$ en la ecuación dada, se tiene:

$10(3 - 9) - 9(5 - 18) = 2(12 - 1) + 5(1 + 6)$

$10(-6) - 9(-13) = 2(11) + 5(7)$

$-60 + 117 = 22 + 35$

$57 = 57$

$x = 3$ satisface la ecuación.

2) Resolver $4x - (2x + 3)(3x - 5) = 49 - (6x - 1)(x - 2$

Efectuando los productos indicados:

$(2x + 3)(3x - 5) = 6x^2 - x - 15$

$(6x - 1)(x - 2) = 6x^2 - 13x + 2$

El signo - delante de los productos indicados en cada miembro de la ecuación nos dice que hay que efectuar los productos y cambiar el signo a cada uno de sus términos; una vez efectuados los productos, los introducimos en paréntesis precedidos del signo - y la ecuación dada se convierte en:

$4x - (6x^2 - x - 15) = 49 - (6x^2 - 13x + 2)$

Suprimiendo los paréntesis:

$4x - 6x^2 + x + 15 = 49 - 6x^2 + 13x - 2$

$4x + x - 13x = 49 - 2 - 15$

$- 8x = 32$

$x = - 4$

3) Resolver:

$(x + 1)(x - 2) - (4x - 1)(3x + 5) - 6 = 8x - 11(x - 3)$
$(x + 7)$

Efectuando los productos indicados:

$x^2 - x - 2 - (12x^2 + 17x - 5) - 6 = 8x - 11(x^2 + 4x - 21)$

Suprimiendo los paréntesis:

$x^2 - x - 2 - 12x^2 - 17x + 5 - 6 = 8x - 11x^2 - 44x - 231$

En el primer miembro tenemos x^2 y $- 12x^2$ que reducidos dan $- 11x^2$, y como en el segundo miembro hay otro $- 11x^2$, los suprimimos y queda:

$- x - 2 - 17x + 5 - 6 = 8x - 44x + 231$

$x - 17x - 8x + 44x = 231 + 2 - 5 + 6$

$18x = 234$

$$x = \frac{234}{18} = 13$$

4) Resolver $(3x - 1)^2 - 3(2x + 3)^2 + 42 = 2x(- x - 5) - (x - 1)^2$

Desarrollando los cuadrados de los binomios:

$9x^2 - 6x + 1 - 3(4x^2 + 12x + 9) + 42 = 2x(- x - 5) - (x^2 - 2x + 1)$

Suprimiendo los paréntesis:

$9x^2 - 6x + 1 - 12x^2 - 36x - 27 + 42 = 2x - 10x - x^2 + 2x - 1$

$6x - 36x + 10x - 2x = - 1 - 1 + 27 - 42$

$- 34x = - 17$

$34x = 17$

$$x = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x + 3(x - 1) = 6 - 4(2x + 3)$ **R.** $x = -\frac{1}{4}$

2. $5(x - 1) + 16(2x + 3) = 3(2x - 7) - x$ **R.** $x = - 2$

3. $2(3x + 3) - 4(5x - 3) = x(x - 3) - x(x + 5)$ **R.** $x = 3$

4. $184 - 7(2x + 5) = 301 + 6(x - 1) - 6$ **R.** $x = - 7$

5. $7(18 - x) - 6(3 - 5x) = - (7x + 9) - 3(2x + 5) - 12$ **R.** $x = - 4$

6. $3x(x - 3) + 5(x + 7) - x(x + 1) - 2(x^2 + 7) + 4 = 0$ **R.** $x = 5$

7. $- 3(2x + 7) + (- 5x + 6) - 8(1 - 2x) - (- x - 3) = 0$ **R.** $x = 5$

8. $(3x - 4)(4x - 3) = (6x - 4)(2x - 5)$ **R.** $x = \frac{8}{13}$

9. $(4 - 5x)(4x - 5) = (10x - 3)(7 - 2x)$ **R.** $x = \frac{1}{35}$

10. $(x + 1)(2x + 5) = (2x + 3)(x - 4) + 5$ **R.** $x = - 1$

11. $(x - 2)^2 - (3 - x)^2 = 1$ **R.** $x = 3$

12. $14 - (5x - 1)(2x + 3) = 17 - (10x + 1)(x - 6)$ **R.** $x = -\frac{1}{12}$



Famoso matemático griego perteneciente a la Escuela de Alejandría. Diofanato fue el primero en enunciar una teoría clara sobre las ecuaciones de primer grado. También ofreció la fórmula para la resolución de las ecuaciones de segundo grado.

CAPÍTULO X

PROBLEMAS SOBRE ECUACIONES ENTERAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

En toda ecuación pueden distinguirse dos miembros: el primer miembro es la expresión que queda a la izquierda del signo de igualdad mientras que el segundo miembro es la expresión que queda a la derecha del signo de igualdad.

Así, por ejemplo en este caso $x - 3 = 2x - 4$, $x - 3$ es el primer miembro de la ecuación mientras que $2x - 4$ es el segundo miembro.

Se denomina **término** de una ecuación a cada una de las cantidades que están relacionadas con otras mediante los signos + ó -, o bien la cantidad que aparece sola en un miembro.
Una ecuación es literal cuando las cantidades conocidas vienen representadas por letras.

PROBLEMAS 1

a) La suma de las edades de *A* y *B* es 84 años, y *B* tiene 8 años menos que *A*. Encontrar ambas edades.

Siendo x = edad de *A*

Como *B* tiene 8 años menos que *A*:

$x - 8$ = edad de *B*

La suma de ambas edades es 84 años; luego, tenemos la ecuación:

$x + x - 8 = 84$

Resolviendo:

$x + x = 84 + 8$

$2x = 92$

$x = \frac{92}{2} =$ 46 años, edad de A

La edad de *B* será: $x - 8 = 46 - 8 = 38$ años.

En los problemas la **verificación** consiste en ver si los resultados obtenidos **satisfacen** las condiciones del problema.

En el caso anterior encontramos que la edad de *B* es 38 años y la de *A* 46 años, por lo que se cumple la condición dada en el problema de que *B* tiene 8 años menos que *A* y ambas edades suman 46 + 38 = 84 años, que es la otra condición dada en el problema.

Por tanto, los resultados obtenidos **satisfacen** las condiciones del problema.

b) Pagué $87 por una pluma, una agenda y una cartera La cartera costó $5 más que la pluma y $20 . menos que la agenda.

¿cuánto pagué por cada artículo?

Siendo x = precio de la pluma

Como la cartera costó $5 más que la pluma:

$x + 5$ = precio de la cartera.

La cartera costo $20 menos que la agenda, por lo que está costo $20más que la cartera:

X+5+20=x+25 precio de la agenda

Como todo costó $87, la suma de los precios de la pluma, la agenda y la cartera tiene que ser igual a $87; entonces tenemos la ecuación:

$x + x + 5 + x + 25 = 87$

Resolviendo $3x + 30 = 87$

$3x = 87 - 30$

$3x = 57$

$x = \frac{57}{3} =$ $19, precio de la pluma

$x + 5 = 19 + 5 =$ $24, precio de la cartera

$x + 25 = 19 + 25 =$ $44, precio de la agenda

c) La suma de tres números enteros consecutivos es 156. Hallar los números.

Siendo x = número menor

$x + 1$ = número intermedio

$x + 2$ = número mayor

Dado que la suma de los tres números es 156, se tiene la ecuación

$x + x + 1 + x + 2 = 156$

Resolviendo: $3x + 3 = 156$

$3x = 156 - 3$

$3x = 153$

$x = \frac{153}{3} = 51$, número menor

$x + 1 = 51 + 1 = 52$, número intermedio

$x + 2 = 51 + 2 = 53$, número mayor

Si designamos con x el número mayor, el número intermedio sería $x - 1$ y el menor $x - 2$.

Si designamos con x el número intermedio, el mayor sería $x + 1$ y el menor $x - 1$.

EJERCICIOS

1. La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8. Hallar los números.
R. 57 y 49

2. La suma de dos números es 540 y su diferencia 32. Hallar los números.
R. 286 y 254

3. Entre *A* y *B* tienen 1,154 dólares y *B* tiene 506 menos que *A*. ¿Cuánto tiene cada uno? R. *A*, 830 dlls.; *B*, 324 dlls.
R. A,830 dlls.; B,324 dlls.

4 Dividir el número 106 en dos partes tales que la mayor exceda a la menor en 24.
R. 65 y 41

5. *A* tiene 14 años menos que *B* y ambas edades suman 56 años. ¿Qué edad tiene cada uno?
R. *A*, 21 años; *B*, 35 años

6. Repartir 1,080 dólares entre *A* y *B* de modo que *A* reciba 1,014 más que *B*. **R.** *A*, 1,047 dlls; *B*, 33 dlls

7. Hallar dos números enteros consecutivos cuya suma sea 103.
R. 51 y 52

8. Tres números enteros consecutivos suman 204. Hallar los números.
R. 67, 68 y 69

9. Hallar cuatro números enteros consecutivos cuya suma sea 74.
R. 17, 18, 19 y 20

10. Hallar dos números enteros pares consecutivos cuya suma sea 194.
R. 96 y 98

11. Hallar tres números enteros consecutivos cuya suma sea 186.
R. 61, 62 y 63

12. La suma de tres números es 200. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 65. Hallar los números.
R. 99, 67 y 34

PROBLEMAS 2

a) La edad de A es el doble que la de B, y ambas suman 36 años. Encontrar las dos edades.

Siendo x = edad de B

Como, según las condiciones, la edad de A es el doble que la de B, tendremos:

$2x$ = edad de A

Dado que la suma de ambas edades es 36 años, se tiene la ecuación:

$x + 2x = 36$

Resolviendo:

$3x = 36$

x = 12 años, edad de B

$2x$ = 24 años, edad de A

b) Un vaquero compra una carreta, una mula y sus arreos por \$350. La carreta costó el triple de los arreos, y la mula el doble de lo que costó la carreta. Hallar el costo de los arreos, la carreta y la mula.

Siendo x = costo de los arreos

Si la carreta costó el triple de los arreos: $3x$ = costo de la carreta. Si la mula costó el doble de la carreta: $6x$ = costo de la mula.

Si los arreos, la carreta y la mula costaron \$350, se tiene la ecuación:

$x + 3x + 6x = 350$

Resolviendo:

$10x = 350$

$x = \frac{350}{10}$ = \$35, costo arreos

$3x = 3 \times \$35 = \$105$, costo carreta

$6x = 6 \times \$35 = \$210$, costo mula

c) Repartir 180 dólares entre A, B y C de modo que la parte de A sea la mitad de la de B y un tercio de la de C .

Si la parte de A es la mitad de la de B, la parte de B es el doble que la de A; y si la parte de A es un tercio de la de C, la parte de C es el triple de la de A. Entonces, siendo

x = parte de A

$2x$ = parte de B

$3x$ = parte de C

Como la cantidad repartida es de 180 dólares, la suma de las partes de cada uno tiene que ser igual a 180 dólares, por lo que tendremos la ecuación:

$x + 2x + 3x = 180$

Resolviendo:

$6x = 180$

$x = \frac{180}{6}$ = 30 dólares, parte de A

$2x$ = 60 dólares, parte de B

$3x$ = 90 dólares, parte de C

EJERCICIOS

1. La edad de Francisco triplica la de Antonio y ambos suman 40 años. Encuentra las edades de ambos.
R. Francisco 30 a; Antonio, 10 a

2. Se compró un caballo y sus arreos por \$600. Si el caballo costó 4 veces lo de los arreos, ¿cuánto costó el caballo y cuánto los arreos?
R. Caballo, \$480; arreos, \$120

3. En un hotel de 2 pisos hay 48 habitaciones. Si las del segundo piso son la mitad que las del primero, ¿cuántas habitaciones hay en cada piso?
R. 1er. piso, 32 habitaciones; 2o. piso, 16 habitaciones

4. Repartir 300 dólares entre A, B y C de modo que la parte de B sea el doble que la de A y la de C el triple que la de A.
R. A, 50; B, 100; C , 150 dólares

5. Repartir 133 dólares entre A, B y C de modo que la parte de A sea la mitad de la de B y la de C el doble que la de B.
R. A, 19; B, 38; C , 76 dólares

6. El mayor de dos números es 6 veces el menor y ambos suman 147. Hallar los números.
R. 126 y 127

7. Repartir 140 dólares entre A, B y C de modo que la parte de B sea la mitad de la de A y un cuarto de la de C.
R. A, 40; B, 20; C , 80 dólares

8. Dividir el número 850 en tres partes de modo que la primera sea el cuarto de la segunda y el quinto de la tercera.
R. 1a, 85; 2a., 340; 3a, 425

9. El doble de un número equivale a un número aumentado en 111. Encuentra ese número.
R. 111

10. La edad de Sofía triplica la de Guadalupe más quince años y ambas suman 59 años. ¿Cuáles son sus edades?
R. Sofía 48 años; Guadalupe, 11 años.

11. Si un número se multiplica por 8 el resultado es un número aumentado en 21. ¿Cuál es ese número?
R. 3

12. Si al triple de mi edad le añado 7 años, tendría 100 años. ¿Qué edad tengo?
R. 31 años.

13. Dividir 96 en tres partes tales que la primera sea el triple de la segunda y la tercera igual a la suma de la primera y la segunda.
R. 36, 12 y 48.

14. Roberto tiene la mitad de la edad de Sergio y la de Luis es el triple que la de Roberto; la edad de Francisco es el doble que la de Luis. Si las cuatro suman 132 años, ¿qué edad tiene cada uno?
R. Sergio 22 años, Roberto, 11 años; Luis, 33 años; Francisco, 66 años.

PROBLEMAS 3

La suma de las edades de *A*, *B* y *C* es 69 años. La edad de *A* es el doble que la de *B* y 6 años mayor que la de *C*. Hallar las edades.

Siendo x = edad de *B*

$2x$ = edad de *A*

Si la edad de *A* es 6 años mayor que la de *C*, la edad de *C* es 6 años menor que la de *A*; luego, $2x - 6$ = edad de *C*.

Como las tres edades suman 69 años, tendremos la ecuación

$$x + 2x + 2x - 6 = 69$$

Resolviendo:

$5x - 6 = 69$

$5x = 69 + 6$

$5x = 75$

$x = \frac{75}{5} = 15$ años, edad de B

$2x = 30$ años, edad de *A*

$2x - 6 = 24$ años, edad de *C*

EJERCICIOS

1. Dividir 254 en tres partes tales que la segunda sea el triple de la primera y 40 unidades mayor que la tercera.
R. 42, 126 y 86

2. Entre *A*, *B* y *C* tienen 130 dólares. *C* tiene el doble que *A* y 15 dólares menos que *B.* ¿Cuánto tiene cada uno? **R.** *A*, 23; *B*, 61; *C*, 46 dólares.

3. La suma de tres números es 238. El primero excede al doble del segundo en 8 y al tercero en 18. Hallar los números. **R.** 104, 48, 86.

4. Un traje, un bastón y un sombrero costaron $259. El traje costó 8 veces lo que el sombrero y el bastón $30 menos que el traje. Encuentra los precios respectivos. **R.** Traje, $136.00; bastón, $106.00; sombrero $17.00.

5. La suma de tres números es 72. El segundo es 1/5 del tercero y el primero excede al tercero en 6. Hallar los números. **R.** 36, 6, 30

6. Entre *A* y *B* tienen 99 dólares. La parte de *B* excede al triple de la de *A* en 19. Hallar la parte de cada uno.
R. *A*, dlls. 20, *B*, dlls. 79.

7. El exceso de un número sobre 80 equivale al exceso de 220 sobre el duplo del número. Hallar el número.
R. 100

EJERCICIOS

1. Al sumar dos números tenemos 100 y el doble del número mayor equivale al triple del menor. Hallar los números.
R. 60 y 40

2. Las edades de un padre y su hijo suman 60 años. Si la del padre se disminuyera en 15 años tendría el doble de la edad del hijo. ¿Cuáles son sus edades?
R. Padre, 45 años; hijo, 15 años.

3. Divide 1,080 en dos partes tales que la mayor, disminuida en 132, equivalga a la menor, aumentada en 100.
R. 656 y 424

4. Entre *A* y *B* tienen 150 dólares. Si *A* pierde 46, lo que le queda equivale a lo que tiene *B*. ¿Cuánto tiene cada uno?
R. *A*, 98; *B*, 52 dólares.

5. Dos ángulos suman 180° y el doble del menor excede en 45° al mayor. Encuentra los ángulos.
R. 75° y 105°

6. La suma de dos números es 540 y el mayor excede al triple del menor en 88. Hallar los números.
R. 427 y 113

PROBLEMAS 4

a) Dividir 85 en dos partes tales que el triple de la parte menor equivalga al doble de la mayor.

Siendo x = la parte menor, tendremos $85 - x$ = parte mayor

El problema indica que el triple de la parte menor, $3x$ equivale al doble de la parte mayor, $2(85 - x)$; tenemos la ecuación

$$3x = 2(85 - x)$$

Resolviendo: $3x = 170 - 2x$

$3x + 2x = 170$

$5x = 170$

$x = \frac{170}{5} = 34$, parte menor

$85 - x = 85 - 34 = 51$, parte mayor.

b) Entre *A* y *B* tienen $81. Si *A* pierde $36, el doble de lo que le queda equivale al triple de lo que tiene *B* ahora. ¿Cuánto tiene cada uno?

x = número de pesos *A*

$81 - x$ = número de pesos de *B*

Si *A* pierde $36, se queda con $\$(x - 36)$, y el doble de esta cantidad $2(x - 36)$ equivale al triple de lo que tiene *B* ahora, o sea, al triple de $81 - x$; tenemos la ecuación:

$$2(x - 36) = 3(81 - x)$$

Resolviendo: $2x - 72 = 243 - 3x$

$2x + 3x = 243 + 72$

$5x = 315$

$x = \frac{315}{5} = \$63$ *de A*

$81 - x = 18 - 63 = \$18$ de *B*

PROBLEMAS 5

a) La edad de *A* es el doble que la de *B* y hace 15 años la edad de *A* era el triple que la de *B*. ¿Cuáles son las edades actuales?

Siendo x = número de años de *B*

$2x$ = número de años de *A*

Hace 15 años, la edad de *A* era $2x - 15$ años y la de *B* $(x - 15)$ años, y como el problema indica que la edad de *A* hace 15 años $(2x - 15)$ era igual al triple de la edad de *B* hace 15 años, o sea el triple de $x - 15$, tendremos la ecuación:

$2x - 15 = 3(x - 15)$

Resolviendo:

$2x - 15 = 3x - 45$

$2x - 3x = - 45 + 15$

$- x = - 30$

$x = 30$ años, edad actual de *B*

$2x = 60$ años, edad actual de *A*

b) La edad de *A* es el triple de la de *B* y dentro de 20 años será el doble. Hallar las edades actuales.

Siendo x = número de años de *B*

$3x$ = número de años de *A*

Dentro de 20 años, la edad de *A* será $(3x + 20)$ años y la de *B* $(x + 20)$ años.

El problema indica que la edad de *A* dentro de 20 años, $3x + 20$, será igual al doble de la edad de *B* dentro de 20 años, o sea, igual al doble de $x + 20$; por tanto, tendremos la ecuación:

$3x + 20 = 2(x + 20)$

Resolviendo:

$3x + 20 = 2x + 40$

$3x - 2x = 40 - 20$

$x = 20$ años, edad actual de *B*

$3x = 60$ años, edad actual de *A*

EJERCICIOS

1. La edad actual de *A* es el doble que la de *B*, y hace 10 años la edad de *A* era el triple de la de *B*. Hallar las edades actuales. **R.** *A*, 40; *B*, 20 años.

2. La edad de *A* es el triple que la de *B* y dentro de 5 años será el doble. Hallar las edades actuales. **R.** *A*, 15 años; *B*, 5 años.

3. *A* tiene el doble de dinero que *B*. Si *A* pierde \$10 y *B* pierde \$5, *A* tendrá \$20 más que *B*, ¿cuánto tiene cada uno? **R.** *A*, \$50.00; *B*, \$25.00

4. *A* tiene la mitad de lo que tiene *B*. Si *A* gana 66 dólares y *B* pierde 90, *A* tendrá, el doble de lo que le quede a *B*. ¿Cuánto tiene cada uno?
R. *A*, 82; *B*, 164 dólares.

5. En un salón el número de señoritas es 1/3 del número de varones. Si ingresaran 20 señoritas y dejaran de asistir 10 varones, habría 6 señoritas más que varones. ¿Cuántos varones y cuántas señoritas hay?
R. 12 señoritas, 36 varones.

PROBLEMAS 6

a) Un hacendado compró el doble del número de vacas que de bueyes. Por cada vaca pagó \$70 y por cada buey \$85. Si el importe de la compra fue de \$2,700, ¿cuántas vacas y cuántos bueyes compró?

Siendo x = número de bueyes

$2x$ = número de vacas

Si se compraron x bueyes y cada uno costó \$85, los x bueyes costaron $\$85x$, y si se compraron $2x$ vacas y cada una costó \$70, las $2x$ vacas costaron $\$70 \times 2x = \$140x$

Si el importe total de la compra fue de \$2,700, tendremos la ecuación:

$85x + 140x = 2700$

Resolviendo:

$225x = 2700$

$$x = \frac{2700}{225} = 12, \text{ bueyes}$$

$2x = 2 \times 12 = 24$, vacas

b) Un granjero compró 96 aves entre gallinas y palomas. Cada gallina costó \$80 y cada paloma \$65. Si el importe de la compra fue de \$6,930, ¿cuántas gallinas y cuántas palomas compró?

Siendo x = número de gallinas

$96 - x$ = número de palomas

Como el granjero compró x gallinas y cada una costó \$80, las x gallinas costaron $\$80x$.

Además compró $96 - x$ palomas y cada una costó \$65, por lo que las $96 - x$ palomas costaron $\$65(96 - x)$

Si el importe total de la compra fue de \$6,930, tendremos la ecuación:

$80x + 65(96 - x) = 6930$

Resolviendo:

$80x + 6240 - 65x = 6930$

$80x - 65x = 6930 - 6240$

$15x = 690$

$$x = \frac{690}{15} = 46 \text{ gallinas}$$

$96 - x = 96 - 46 = 50$ palomas

EJERCICIOS

1. Compré el doble de pantalones que de camisas por 702 dólares. Cada pantalón costó 2 dólares y cada camisa 50 dólares. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas compré?
R. 26 pantalones, 13 camisas.

2. El profesor pone 16 problemas a un alumno con la condición de que por cada problema que resuelva el alumno recibirá $12 y por cada uno que no resuelva perderá $5. Después de trabajar en los 16 problemas el alumno recibe $73. ¿Cuántos problemas resolvió? **R.** Resolvió 9, no resolvió 7.

3. Se contrata a un obrero por 50 días pagándole $3 por cada día de trabajo, con la condición de que por cada día que el obrero deje de asistir al trabajo perderá $2. Al cabo de los 50 días el obrero recibe $90. ¿Cuántos días trabajó? **R.** Trabajó 38 días no trabajó 12 días.

4. Un comerciante compró 35 tostadores de 30 dólares y 25 dólares, pagando por todos 1,015 dólares. ¿Cuántos tostadores de cada precio compró? **R.** 28 de $30, y 7 de $25.

5. Dividir 196 en tres partes tales que la segunda sea el doble de la primera y la suma de las dos primeras exceda a la tercera en 20. **R.** 36, 72 y 88.

6. La edad de *A* es el triple que la de *B* y hace 5 años era el cuádruple de la de *B*. Hallar las edades actuales. **R.** *A*, 45 años; *B*, 15 años.

7. Un comerciante adquiere 50 trajes y 35 pares de zapatos por 1,600 dólares. Cada traje costó el doble de lo que costó cada par de zapatos más 50 dólares. Encuentra el precio de cada traje y de cada par de zapatos. **R.** Traje 250; zapatos 100 dólares.

8. Seis personas iban a comprar una casa contribuyendo por partes iguales, pero dos de ellas desistieron del negocio y entonces cada una de las restantes tuvo que poner 2,000 dólares más. ¿Cuál era el valor de la casa? **R.** 24,000 dólares.

9. La suma de dos números es 108 y el doble del mayor excede al triple del menor en 156. Hallar los números. **R.** 96 y 12

10. El largo de un buque de 461 pies excede en 11 pies a 9 veces el ancho. Hallar el ancho. **R.** 50 pies.

11. Tenía $85, gasté una parte y me queda el cuádruple de lo que gasté. ¿Cuánto gasté? **R.** $17.00

12. Hace 12 años la edad de *A* era el doble de la de *B*, y dentro de 12 años la edad de *A* será 68 años menos que el triple de la de *B*. ¿Cuáles son las edades actuales? **R.** *A*, 52 años; *B*, 32 años.

13. Tengo $1.85 en monedas de 10 y 5 centavos. Si en total tengo 22 monedas, ¿cuántas son de 10 y cuántas de 5 centavos? **R.** 15 monedas de 10 centavos; 7 monedas de 5 centavos.

14. Si a un número se le resta 24 y la diferencia se multiplica por 12, el resultado es el mismo que si se le resta 27 y la diferencia se multiplica por 24. ¿Cuál es ese número? **R.** 30

15. Un hacendado compró 35 caballos, si hubiera comprado 5 más por el mismo precio, cada caballo le habría costado $10 menos. ¿Cuánto le costó cada caballo? **R.** $80.00

16. El exceso del triple de un número sobre 55 equivale al exceso de 233 sobre ese número. ¿Cual es el número? **R.** 72

17. Hallar tres números enteros consecutivos tales que el doble del menor más el triple del medio más el cuádruple del mayor equivalga a 740. **R.** 81, 82 y 83

18. Un hombre recorre 150 kilómetros. En auto recorrió una distancia del triple que a caballo, y a pie 20 kilómetros menos que a caballo. ¿Cuántos kilómetros recorrió de cada modo? **R.** En auto, 102 km; a caballo, 34 km y a pie, 14 km.

19. Un hombre deja una herencia de 16,500 dólares para repartir entre 3 hijos y 2 hijas, y ordena que cada hija reciba 2,000 más que cada hijo. Hallar la parte de cada hijo e hija. **R.** Hijo 2,500 dólares; hija, 4500 dólares.

20. La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 31. Hallar los números. **R.** 15 y 16.

21. La edad de *A* es el triple de la de *B*, y la de *B* 5 veces la de *C* . *B* tiene 12 años más que *C* . ¿Qué edad tiene cada uno? **R.** *A*, 45 años; *B*, 15 años; *C* , 3 años.



Hija del filósofo y matemático Teón, Hypatia se hizo célebre por su sapiencia y belleza. Es uno de los últimos matemáticos griegos. Se distinguió por sus comentarios a las obras de Apolonio y Diofanto.

CAPÍTULO XI

FACTORES

Los **factores** o **divisores** de una expresión algebraica son las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión:

Si multiplicamos a por $a + b$ tendremos: $a(a + b) = a^2 + ab$

a y $a + b$ multiplicadas entre sí dan como producto $a^2 + ab$, y son factores o divisores de $a^2 + ab$.

Del mismo modo, $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$

luego $x + 2$ y $x + 3$ son factores de $x^2 + 5x + 6$

DESCOMPOSICIÓN DE FACTORES

Para descomponer en factores o **factorar** una expresión algebraica se convierte en el producto indicado de sus factores.

Los factores de un monomio se pueden hallar por simple inspección. Así, los factores de $15ab$ son 3, 5, a y b. Por tanto:

$15ab = 3 \bullet 5\, a\, b$

Por otra parte, no todos los polinomios se pueden descomponer en dos o más factores distintos de 1, pues del mismo modo que en Aritmética hay números primos sólo divisibles por ellos mismos y por 1, algunas expresiones algebraicas sólo son divisibles por ellas mismas y por 1, y por tanto no son el producto de otras expresiones algebraicas. Así, $a + b$ no puede descomponerse en dos factores distintos de 1 porque sólo es divisible por $a + b$ y por 1.

EJERCICIOS

Factorar o descomponer en dos factores estas expresiones:

1. $5m^2 + 15m^3$ **R.** $5m^2(1 + 3m)$

2. $ab - bc$ **R.** $b(a - c)$

3. $x^2y + x^2z$ **R.** $x^2(y + z)$

4. $2a^2x + 6ax^2$ **R.** $2ax(a + 3x)$

5. $8m^2 - 12mn$ **R.** $4m(2m - 3n)$

6. $9a^3x^2 - 18ax^3$ **R.** $9ax^2(a^2 - 2x)$

7. $15c^3d^2 + 60c^2d^3$ **R.** $15c^2d^2(c + 4d)$

8. $35m^2n^3 - 70m^3$ **R.** $35m^2(n^3 - 2m)$

9. $abc + abc^2$ **R.** $abc(1 + c)$

10. $24z^2xy^2 - 36x^2y^4$ **R.** $12xy^2(2z^2 - 3xy^2)$

11. $a^3 + a^2 + a$ **R.** $a(a^2 + a + 1)$

12. $4x^2 - 8x + 2$ **R.** $2(2x^2 - 4x + 1)$

13. $15y^3 + 20y^2 - 5y$ **R.** $5y(3y^2 + 4y - 1)$

14. $a^3 - a^2x + ax^2$ **R.** $a(a^2 - ax + a^2)$

15. $2a^2x + 2ax^2 - 3ax$ **R.** $ax(2a + 2x - 3)$

16. $x^3 + x^5 - x^7$ **R.** $x^3(1 + x^2 - x^4)$

17. $14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$ **R.** $14x^2(y^2 - 2x + 4x^2)$

18. $34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$ **R.** $17a(2x^2 + 3ay - 4ay^2)$

19. $a^2 + ab$ **R.** $a(a + b)$

20. $b + b^2$ **R.** $b(1 + b)$

21. $x^2 + x$ **R.** $x(x + 1)$

22. $3a^3 - a^2$ **R.** $a^2(3a - 1)$

23. $x^2 + x^4$ **R.** $x^3(1 - 4x)$

24. $96-48mn^2$ **R.** $48(2 - mn^2 + 3n^3)$

25. $a^2b^2c^2 – a^2c^2x^2 + a^2c^2y^2$ **R.** $a^2c^2(b^2 - x^2 + y^2)$

26. $x - x^2 + x^3 - x^4$ **R.** $x(1 - x + x^2 - x^3)$

27. $a^6 - 3a^4 + 8a^3 - 4a^2$ **R.** $a^2(a^4 - 3a^2 + 8a - 4)$

28. $25x^7 - 10x^5 + 15x^3 - 5x^2$ **R.** $5x^2(5x^5 - 2x^3 + 3x - 1)$

29. $x^{15} - x^{12} + 2x^9 - 3x^6$ **R.** $x^6(x^9 - x^6 + 2x^3 - 3)$

TODOS LOS TÉRMINOS DE UN POLINOMIO CON UN FACTOR COMÚN

Factor común monomio

1. Descomponer en factores $a^2 + 2a$

a^2 y $2a$ contienen el factor común a. Escribimos el factor común a como coeficiente de un paréntesis dentro del cual escribimos los cocientes obtenidos de dividir $a^2 \div a = a$ y $2a \div a = 2$ y tendremos:

$a^2 + 2a = a(a + 2)$

2. Descomponer $10b - 30ab$.

Los coeficientes 10 y 30 tienen los factores comunes 2, 5 y 10. Tomamos el 10 porque siempre se saca el **mayor** factor común. De las letras, el único factor común es b, porque está en los dos términos de la expresión da-da, y la tomamos con su menor exponente b.

El factor común es $10b$. Lo escribimos como coeficiente de un paréntesis dentro del cual ponemos los cocientes de dividir $10b \div 10b = 1$ y $- 30ab^2 \div 10b = - 3ab$, y tendremos:

$10b - 3ab^2 = 10b(1 - 3ab)$

3. Descomponer $10a^2 - 5a + 15a^3$

El factor común es $5a$. Tendremos:

$10a^2 - 5a + 15a^3 = 5a(2a - 1 + 3a^2)$

4. Descomponer:

$18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2$

El factor común es $18my^2$. Tendremos:

$18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2 =$

$18my^2(x - 3mx^2 + 2)$

5. Factorar $6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3$

El factor común es $3xy^3$. Tendremos:

$6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 + 3n^2x^4y^3 =$

$3xy^3(2 - 3nx + 4nx^2 - n^2x^3)$

Prueba general de los factores

Para hacer la prueba en cualquiera de los diez casos que estudiaremos en este capítulo, basta multiplicar los factores obtenidos y su producto debe ser igual a la expresión factorada.

TÉRMINOS QUE TIENEN UN FACTOR COMÚN

Factor común polinomio

1. Descomponer $x(a+b)+m(a+b)$

Estos dos términos tienen como factor común el binomio $(a+b)$, por lo que ponemos $(a+b)$ como coeficiente de un paréntesis dentro del cual escribimos los cocientes de dividir los dos términos de la expresión dada entre el factor común $(a+b)$, o sea:

$$\frac{x(a+b)}{(a+b)}=x \text{ y } \frac{m(a+b)}{(a+b)}=m \quad \text{y tendremos:}$$

$$x(a+b)+m(a+b)=(a+b)(x+m)$$

2. Descomponer $2x(a-1)-y(a-1)$

El factor común es $(a-1)$, por lo que al dividir los dos términos de la expresión dada entre el factor común $(a-1)$, con lo que tenemos:

$$\frac{2x(a-1)}{(a-1)}=2x \text{ y } \frac{-y(a-1)}{(a-1)}=-y$$

Luego tendremos:

$$2x(a-1)-y(a-1)=(a-1)(2x-y)$$

3. Descomponer $m(x+2)+x+2$

Podemos escribir esta expresión así: $m(x+2)+(x+2)=m(x+2)+1(x+2)$

El factor común es $(x+2)$ con lo que tenemos:

$$m(x+2)+1(x+2)=(x+2)(m+1)$$

4. Descomponer $a(x+1)-x-1$

Al introducir los dos últimos términos en un paréntesis precedido del signo - , se tiene:

$$a(x+1)-x-1=a(x+1)-(x+1)=$$

$$a(x+1)-1(x+1)=(x+1)(a-1)$$

5. Factorar $2x(x+y+z)-x-y-z$

Con esto tendremos:

$$2x(x+y+z)-x-y-z=$$

$$2x(x+y+z)-(x+y+z)=$$

$$(x+y+z)(2x-1)$$

6. Factorar $(x-a)(y+2)+b(y+2)$

El factor común es $(y+2)$, y dividiendo los dos términos de la expresión dada entre $(y+2)$ tenemos:

$$\frac{(x-a)(y+2)}{(y+2)}=x-a \text{ y } \frac{b(y+2)}{(y+2)}=b \text{ ; luego:}$$

$$(x-a)(y+2)+b(y+2)=(y+2)(x-a+b)$$

7. Descomponer $(x+2)(x-1)+(x-1)(x-3)$

Al dividir entre el factor común $(x-1)$ tenemos:

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)}=(x+2) \text{ y } \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)}=-(x-3)$$

Por tanto:

$$(x+2)(x-1)-(x-1)(x-3)=(x-1)(x+2)-(x-3)$$

$$=(x-1)(x+2-x+3)=(x-1)(5)=(x-1)$$

8. Factorar $x(a-1)+y(a-1)-a+1$

$$x(a-1)+y(a-1)-a+1=$$

$$x(a-1)+y(a-1)-(a-1)=$$

$$(a-1)(x+y-1)$$

EJERCICIOS

Factorar o descomponer en dos factores estas expresiones:

1. $a(x+1)+b(x+1)$ **R.** $(x+1)(a+b)$

2. $a(a+1)+3(a+1)$ **R.** $(a+1)(a+3)$

3. $2(x-1)+y(x-1)$ **R.** $(x-1)(y+2)$

4. $m(a-b)+(a-b)n$ **R.** $(a-b)(m+n)$

5. $2x(n-1)+-3y(n-1)$ **R.** $(n-1)(2x-3y)$

6. $a(n+2)+n+2$ **R.** $(n+2)(a+1)$

7. $x(a+1)-a-1$ **R.** $(a+1)(x-1)$

8. $a^2+1-b(a^2+1)$ **R.** $(a^2+1)(1-b)$

9. $3x(x-2)-2y(x-2)$ **R.** $(x-2)(3x-2y)$

10. $1-x+2a(1-x)$ **R.** $(1-x)(1+2a)$

11. $4x(m-n)+n-m$ **R.** $(m+n)(4x-1)$

12. $-m-n+x(m+n)$ **R.** $(m+n)(x-1)$

13. $a^3(a-b+1)-b^2(a-b+1)$ **R.** $(a-b+1)(a^3-b^2)$

14. $4m(a^2+x-1)+3n(x-1+a^2)$ **R.** $(a^2+x-1)(4m+3n)$

15. $x(2a+b+c)-2a-b-c$ **R.** $(2a+b+c)(x-1)$

16. $(x+y)(n+1)-3(n+1)$ **R.** $(n+1)(x+y-3)$

17. $(x+1)(x-2)+3y(x-2)$ **R.** $(x-2)(x+3y+1)$

18. $(a+3)(a+1)-4(a+1)$ **R.** $(a+1)(a-1)$

FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

Ejemplos

1) Descomponer $ax + bx + ay + by$

Los dos primeros términos tienen el factor común x y los dos últimos el factor común y. Agrupamos los dos primeros en un paréntesis y los dos últimos en otro precedido del signo + porque el tercer término tiene el signo + :

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by)$$
$$= x(a + b) + y(a + b)$$
$$= (a + b)(x + y)$$

Hay varias formas de hacer la agrupación, con la condición de que los dos términos agrupados tengan algún factor común, y siempre que las cantidades que quedan dentro de los paréntesis después de sacar el factor común en cada grupo, sean exactamente iguales. Si esto no es posible, la expresión dada no se puede descomponer por este método.

En el ejemplo anterior podemos agrupar el 1o. y 3er. términos con el factor común a y el 2o. y 4o. con el factor común b, y tendremos:

$$ax + bx + ay + by = (ax + ay) + (bx + by)$$
$$= a(x + y) + b(x + y)$$
$$= (x + y)(a + b)$$

Este resultado es idéntico al anterior, ya que el orden de los factores es indiferente.

2) Factorar $3m^2 - 6mn + 4m - 8n$. Los dos primeros términos tienen el factor común $3m$ y los dos últimos el factor común 4. Agrupando, tenemos:

$$3m^2 - 6mn + 4m - 8n = (3m^2 - 6mn) + (4m - 8n)$$
$$= 3m(m - 2n) + 4(m - 2n)$$
$$= (m - 2n)(3m + 4)$$

3) Descomponer $2x^2 - 3xy - 4x + 6y$. Los dos primeros términos tienen el factor común x y los dos últimos el factor común 2, entonces los agrupamos pero introduciendo los dos últimos términos en un paréntesis precedido del signo - (porque el signo del 3er. término es -) para lo cual hay que cambiarles el signo, y tendremos:

$$2x^2 - 3xy - 4x + 6y = (2x^2 - 3xy) - (4x - 6y)$$
$$= x(2x - 3y) - 2(2x - 3y)$$
$$= (2x - 3y)(x - 2)$$

Otra alternativa es agrupar el 1o. y 3o. términos con factor común $2x$, y el 2o. y 4o. con factor común $3y$, con lo que tendremos:

$$2x^2 - 3xy - 4x + 6y = (2x^2 - 4xy) - (3xy - 6y)$$
$$= 2x(x - 2) - 3y(x - 2)$$
$$= (x - 2)(2x - 3y)$$

4) Descomponer $x + z^2 - 2ax - 2az^2$

$$x + z^2 - 2ax - 2az^2 = (x + z^2) - (2ax + 2az^2)$$
$$= (x + z^2) - 2a(x + 2az^2)$$
$$= (x + z^2)(1 - 2a)$$

Al agrupar los términos 1o. y 3o., 2o. y 4o., tenemos:

$$x + z^2 - 2ax - 2az^2 = (x - 2ax) + (z^2 - 2az^2)$$
$$= x(1 - 2a) + z^2(1 - 2a)$$
$$= (1 - 2a)(x + z^2)$$

5) Factorar $3ax - 3x + 4y - 4ay$

$$3ax - 3x + 4y - 4ay = (3ax - 3x) + (4y - 4ay)$$
$$= 3x(a - 1) + 4y(1 - a)$$
$$= 3x(a - 1) - 4y(a - 1)$$
$$= (a - 1)(3x - 4y)$$

En la segunda línea del ejemplo anterior, los binomios $(a - 1)$ y $(1 - a)$ tienen **signos distintos**; para hacerlos iguales los cambiamos al binomio $(1 - a)$ convirtiéndolo en $(a - 1)$, pero para que el producto $4y(1 - a)$ no varíe de signo le cambiamos el signo al otro factor $4y$ convirtiéndolo en $-4y$. De este modo, como cambiamos los signos a un número par de factores, el signo del producto no varía.

En el ejemplo anterior, al agrupar los términos 1o. y 4o., 2o. y 3o., tenemos:

$$3ax - 3x + 4y - 4ay = (3ax - 4ay) + (3x - 4y)$$
$$= a(3x - 4y) - (3x - 4y)$$
$$= (3x - 4y)(a - 1)$$

6) Factorar: $ax - ay + az + x - y + z$

$$ax - ay + az + x - y + z = (ax - ay + az) + (x - y + z)$$
$$= a(x - y + z) + (x - y + z)$$
$$= (x - y + z) + (a + 1)$$

7) Descomponer $a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y$

Agrupando los términos 1o. y 3o., 2o., y 4o., 5o. y 6o., tenemos:

$$a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y = (a^2x - 2a^2y) - (ax^2 - 2axy) + (x^3 - 2x^2y)$$
$$= a^2(x - 2y) - ax(x - 2y) + x^2(x - 2y)$$
$$= (x - 2y)(a^2 - ax + x^2)$$

y al agrupar de otro modo:

$$a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y = (a^2x - ax^2 + x^3) - (2a^2y - 2axy + 2x^2y)$$
$$= x(a^2 - ax + x^2) - 2y(a^2 - ax + x^2)$$
$$= (a^2 - ax + x^2)(x - 2y)$$

EJERCICIOS

Factorar o descomponer en dos factores las expresiones siguientes:

1. $a^2 + ab + ax + bx$

R. $(a + b)(a + x)$

2. $am - bm + an - bn$

R. $(a - b)(m + n)$

3. $ax - 2bx - 2ay + 4by$

R. $(x - 2y)(a - 2b)$

4. $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$

R. $(a^2 - 3b)(x^2 + y^2)$

5. $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$

R. $(1 - x^4)(3m - 2n)$

6. $x^2 - a^2 + x - a^2x$

R. $(x + a^2)(x + 1)$

7. $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$

R. $(a^2 + 1)(4a - 1)$

8. $x + x^2 - xy^2 - y^2$

R. $(x - y^2)(1 - x)$

9. $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$

R. $(3ab - 2)(x^2 + y^2)$

10. $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax$

R. $(1 + 2x)(3a - b^2)$

11. $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$

R. $(ax - b)(4a^2 - 3m)$

12. $6ax + 3a + 1 + 2x$

R. $(2x + 1)(3a + 1)$

13. $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$

R. $(3x^2 - 1)(x - 3a)$

14. $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$

R. $(a^2 - 3b)(2x - 5y)$

15. $2x^2y + 2xz^2 + y^2z^2 + xy^3$

R. $(2x + y^2)(xy + z^2)$

16. $6m - 9n + 21nx - 14mx$

R. $(2m - 3n)(3 - 7x)$

17. $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$

R. $(5a^2 + n^2)(x - y^2)$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Se dice que una cantidad es un **cuadrado perfecto** cuando es el cuadrado de otra cantidad, o sea el producto de dos factores iguales.

Así, $4a^2$ es cuadrado perfecto porque es el cuadrado de $2a$.

En efecto: $(2a)^2 = 2a \times 2a = 4a^2$ y $2a$, que multiplicada por sí misma da $4a^2$, es la **raíz cuadrada** de $4a^2$.

Observamos que $(-2a)^2 = (-2a) \times (-2a) = 4a^2$; luego, $-2a$ es también la raíz cuadrada de $4a^2$, con lo que se concluye que la raíz cuadrada de una cantidad positiva tiene dos signos, + y - .

En este capítulo sólo nos referimos a la raíz **positiva.**

RAÍZ CUADRADA DE UN MONOMIO

Para extraer la raíz cuadrada de un monomio se extrae la raíz cuadrada de su coeficiente y se divide el exponente de cada letra por 2.

Así, la raíz cuadrada de $9a^2b^4$ es $3ab^2$ porque $(3ab^2)^2 = 3ab^2 \times 3ab^2 = 9a^2b^4$.

Y la raíz cuadrada de $36x^6y^8$ es $6x^3y^4$

Un trinomio es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de un binomio, o sea el producto de dos binomios iguales.

Así, $a^2 + 2ab + b^2$ es cuadrado perfecto porque es el cuadrado de $a + b$.

En efecto:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Del mismo modo, $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$ luego $4x^2 + 12xy + 9y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto.

REGLA PARA CONOCER SI UN TRINOMIO ES CUADRADO PERFECTO

Para saber si un trinomio ordenado con relación a una letra es cuadrado perfecto, se verifica que el primero y tercer términos sean cuadrados perfectos (o tengan raíz cuadrada exacta) y positivos, y que el segundo término sea el doble producto de sus raíces cuadradas.

De tal modo, $a^2 - 4ab + 4b^2$ es cuadrado perfecto porque:

Raíz cuadrada de a^2 a

Raíz cuadrada de $4b^2$ $2b$

El doble producto de estas raíces es $2 \times a \times 2b = 4ab$, que es el segundo término.

$36x^2 - 18xy^4 + 4y^8$ no es cuadrado perfecto porque:

Raíz cuadrada de $36x^2$ $6x$

Raíz cuadrada de $4y^8$ $2y^4$

El doble producto de estas raíces $2 \times 6x \times 2y^4 = 24xy^4$, que no es el segundo término.

EJERCICIOS

1. $4am^3 - 12amn - m^2 + 3n$

R. $(m^2 - 3n)(4am - 1)$

2. $20ax - 5bx - 2by + 8ay$

R. $(4a - b)(5x + 2y)$

3. $3 - x^2 + 2abx^2 - 6ab$

R. $(1 - 2ab)(3 - x^2)$

4. $a^3 + a^2 + a + 1$

R. $(a + 1)(a^2 + 1)$

5. $3a^2 - 7b^2x + 3ax - 7ab^2$

R. $(3a - 7b^2)(a + x)$

REGLA PARA FACTORAR UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

La regla para factorar un trinomio cuadrado perfecto dice que se extrae la raíz cuadrada al primer y tercer términos del trinomio y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio así formado, que es la raíz cuadrada del trinomio, se multiplica por sí mismo o se eleva al cuadrado.

Ejemplos

1) Factorar $m^2 + 2m + 1$

$m^2 + 2m + 1 = (m + 1)(m + 1) = (m + 1)^2$

m $\quad$ 1

2) Descomponer $4x^2 + 25y^2 - 20xy$

Al ordenar el trinomio tenemos:

$4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x - 5y)(2x - 5y) = (2x - 5y)^2$

$2x$ $\quad$ $5y$

Es importante destacar que cualquiera de las dos raíces puede ponerse como minuendo, por lo que en el ejemplo anterior también tendríamos:

$4x^2 - 20xy + 25y^2 = (5y - 2x)(5y - 2x) = (5y - 2x)^2$

$2x$ $\quad$ $5y$

porque al desarrollar este binomio resulta:

$(5y - 2x)^2 = 25y^2 - 20xy + 4x^2$

que es una expresión idéntica a $4x^2 - 20xy + 25y^2$, ya que tiene las mismas cantidades con los mismos signos.

3) Descomponer $1 - 16ax^2 + 64a^2x^4$

$1 - 16ax^2 + 64a^2x^4 = (1 - 8ax^2)^2 = (8ax^2 - 1)^2$

1 $\quad$ $8ax^2$

4) Factorar $x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$

Este trinomio es cuadrado perfecto, porque la raíz cuadrada de $x^2 = x$; la raíz cuadrada de $\frac{b^2}{4} = \frac{b}{2}$ y el doble producto de estas raíces es $2 \times x \times \frac{b}{2} = bx$,

luego:

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

5) Factorar $\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9}$

que es un cuadrado perfecto, porque la raíz cuadrada de: $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; la raíz cuadrada de $\frac{b^2}{9} = \frac{b}{3}$ y $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{b}{3} = \frac{b}{3}$

luego:

$$\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9} = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{b}{3} - \frac{1}{2}\right)^2$$

6) Descomponer $a^2 + 2a(a - b) + (a - b)^2$

La regla para factorar puede aplicarse a casos donde el primer o tercer términos del trinomio o ambos son expresiones compuestas.

En este caso tenemos:

$a^2 + 2a(a - b) + (a - b)^2 = [a + (a - b)]^2 =$

$(a - b)$

$(a + a - b)^2 = (2a - b)^2$

7) Factorar $(x + y)^2 - 2(x + y)(a + x) + (a + x)^2$

$(x + y)^2 - 2(x + y)(a + x) + (a + x)^2 = [(x + y) - (a + x)]^2$

$(x + y)$ $\quad$ $(a + x)$

$= (x + y - a - x)^2$

$= (y - a)^2 = (a - y)^2$

EJERCICIOS

Factorar o descomponer en dos factores:

1. $a^2 - 2ab + b^2$
R. $(a - b)^2$

2. $a^2 + 2ab + b^2$
R. $(a + b)^2$

3. $x^2 - 2x + 1$
R. $(x + 1)^2$

4. $y^4 + 1 + 2y^2$
R. $(y^2 + 1)$

5. $a^2 - 10a + 25$
R. $(a - 5)^2$

6. $9 - 6x + x^2$
R. $(3 - x)^2$

7. $16 + 40x^2 + 25x^4$
R. $(4 + 5x^2)^2$

8. $1 + 49a^2 - 14a$
R. $(1 - 7a)^2$

9. $36 + 12m^2 + m^4$
R. $(m^2 + 6)^2$

10. $1 - 2a^3 + a^6$
R. $(1 - a^3)^2$

11. $a^8 + 18a^4 + 81$
R. $(a^4 + 9)^2$

12. $a^6 - 2a^3b^3 + b^6$
R. $(a^3 - b^3)^2$

13. $4x^2 - 12xy + 9y^2$
R. $(2x - 3y)^2$

14. $9b^2 - 30a^2b + 25a^2$
R. $(3b - 5a^2)^2$

15. $1 + 14x^2y + 49x^4y^2$
R. $(1 + 7x^2y)^2$

16. $1 + a^{10} - 2a^5$
R. $(1 - a^5)^2$

17. $49m^6 - 70am^3 + 25a^2n^4$
R. $(7m^3 - 5an^2)^2$

DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS

En un capítulo anterior, al hablar de los productos notables, vimos que la suma de dos cantidades multiplicadas por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo, o sea $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; luego, recíprocamente.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

La regla para factorar una diferencia de cuadrados dice que se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre las raíces del minuendo y del sustraendo.

1) Factorar $1-a^2$

La raíz cuadrada de 1 es 1; la raíz cuadrada de a^2 es a. Multiplicamos la suma de estas raíces $(1+a)$ por la diferencia $(1-a)$ y tendremos:

$$1-a^2=(1+a)(1-a)$$

2) Descomponer $16x^2-25y^4$

La raíz cuadrada de $16x^2$ es $4x$; la raíz cuadrada de $25y^4$ es $5y^2$.

Multiplicamos la suma de estas raíces $(4x+5y^2)$ por su diferencia $(4x-5y^2)$ y tendremos:

$$16x^2-25y^4=(4x+5y^2)(4x-5y^2)$$

3) Factorar $49x^2y^6z^{10}-a^{12}$

$$49x^2y^6z^{10}-a^{12}=(7xy^3z^5+a^6)(7xy^3z^5-a^6)$$

4) Descomponer $\frac{a^2}{4}-\frac{b^4}{9}$

La raíz cuadrada de $\frac{a^2}{4}$ es $\frac{a}{2}$ y la raíz cuadrada de $\frac{b^4}{9}$ es $\frac{b^2}{3}$

con lo que tendremos:

$$\frac{a^2}{4}-\frac{b^4}{9}=\left(\frac{a}{2}+\frac{b^2}{3}\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{b^2}{3}\right)$$

5) Factorar $a^{2n}-9b^{4m}$

$$a^{2n}-9b^{4m}=(a^n+3b^{2m})(a^n-3b^{2m})$$

EJERCICIOS

Factorar o descomponer en dos factores:

1. x^2-y^2 **R.** $(x+y)(x-y)$

2. a^2-1 **R.** $(a+1)(a-1)$

3. a^2-4 **R.** $(a+2)(a-2)$

4. $9-b^2$ **R.** $(3+b)(3-b)$

5. $1-4m^2$ **R.** $(1+2m)(1-2m)$

6. $16-n^2$ **R.** $(4+n)(4-n)$

7. a^2-25 **R.** $(a+5)(a-5)$

8. $1-y^2$ **R.** $(1+y)(1-y)$

9. $4a^2-9$ **R.** $(2a+3)(2a-3)$

10. $25-36x^4$ **R.** $(5+6x^2)(5-6x^2)$

11. $1-49a^2b^2$ **R.** $(1+7ab)(1-7ab)$

12. $4x^2-81y^4$ **R.** $(2x+9y^2)(2x-9y^2)$

13. $a^2b^8-c^2$ **R.** $(ab^4+c)(ab^4-c)$

14. $100-x^2y^6$ **R.** $(10+xy^3)(10-xy^3)$

15. $a^{10}-49b^{12}$ **R.** $(a^5+7b^6)(a^5-7b^6)$

16. $25x^2y^4-121$ **R.** $(5xy^2+11)(5xy^2-11)$

17. $100m^2n^4-169y^6$ **R.** $(10mn^2+13y^3)(10mn^2-13y^3)$

18. $a^2m^4n^6-144$ **R.** $(am^2n^3+12)(am^2n^3-12)$

19. $196x^2y^4-225z^{12}$ **R.** $(14xy^2+15z^2)(14xy^2-15z^6)$

20. $1-9a^2b^4c^6d^8$ **R.** $(1+3ab^2c^3d^4)(1-3ab^2c^3d^4)$

21. $361x^{14}-1$ **R.** $(19x^7+1)(19x^7-1)$

22. $1-9a^2$ **R.** $\left(\frac{1}{2}+3a\right)\left(\frac{1}{2}-3a\right)$

23. $1-a^2$ **R.** $\left(1+\frac{a}{5}\right)\left(1-\frac{a}{5}\right)$

24. $a^{2n}-b^{2n}$ **R.** $(a^n+b^n)(a^n-b^n)$

UN CASO ESPECIAL

1. Factorar $(a+b)^2 - c^2$

La regla de los ejemplos anteriores es aplicable a las diferencias de cuadrados donde uno o ambos cuadrados son expresiones compuestas.

En este caso:

La raíz cuadrada de $(a+b)^2$ es $(a+b)$

La raíz cuadrada de c^2 es c

Multiplicamos la suma de estas raíces $(a+b)+c$ por la diferencia $(a+b)-c$:

$(a+b)^2 - c^2 = [(a+b)+c]\,[(a+b)-c]$

$= (a+b+c)(a+b-c)$

2. Descomponer $4x^2 - (x+y)^2$

La raíz cuadrada de $4x^2$ es $2x$

La raíz cuadrada de $(x+y)^2$ es $(x+y)$

Al multiplicar la suma de estas raíces $2x+(x+y)$ por la diferencia $2x-(x+y)$ tenemos:

$4x^2 - (x+y)^2 = [2x+(x+y)]\,[2x-(x+y)]$

$= (2x+x+y)(2x-x-y)$

$= (3x+y)(x-y)$

3. Factorar $(a+x)^2 - (x+2)^2$

La raíz cuadrada de $(a+x)^2$ es $(a+x)$

La raíz cuadrada de $(x+2)^2$ es $(x+2)$

Multiplicamos la suma de estas raíces $(a+x)+(x+2)$ por la diferencia $(a+x)-(x+2)$:

$(a+x)^2 - (x+2)^2 = [(a+x)+(x+2)]\,[(a+x)-(x+2)]$

$= (a+x+x+2)(a+x-x-2)$

$= (a+2x+2)(a-2)$

EJERCICIOS

Descomponer en dos factores y simplificar, si es posible:

1. $(x+y)^2 - a^2$	**R.** $(x+y+a)(x+y-a)$
2. $4-(a+1)^2$	**R.** $(a+3)(1-a)$
3. $9-(m+n)^2$	**R.** $(3+m+n)(3-m-n)$
4. $(m-n)^2 - 16$	**R.** $(m-n+4)(m-n-4)$
5. $(x-y)^2 - 4z^2$	**R.** $(x-y+2z)(x-y-2z)$
6. $(a+2b)^2 - 1$	**R.** $(a+2b+1)(a+2b-1)$

DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS

A continuación veremos la descomposición de expresiones compuestas en las cuales, mediante un arreglo conveniente de sus términos, se obtiene uno o dos trinomios cuadrados perfectos, y al descomponer estos trinomios (Caso III) se obtiene una diferencia de cuadrados (Caso IV).

1. Factorar $a^2 + 2ab + b^2 - 1$

En este caso $a^2 + 2ab + b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto; luego:

$a^2 + 2ab + b^2 - 1 = (a^2 + 2ab + b^2) - 1$

(factorando el trinomio) $= (a+b)^2 - 1$

(factorando la diferencia de cuadrados) $= (a+b+1)(a+b-1)$

2) Descomponer $a^2 + m^2 - 4b^2 - 2am$

Al ordenar esta expresión se puede escribir así: $a^2 - 2am + m^2 - 4b^2$, donde $a^2 - 2am + m^2$ es un trinomio cuadrado perfecto; luego:

$a^2 + 2am - m^2 - 4b^2 = (a^2 - 2am + m^2) - 4b^2$

(factorando el trinomio) $= (a-m)^2 - 4b^2$

(factorando la diferencia de cuadrados) $=(a-m+2b)(a-m-2b)$

3) Factorar $9a^2 - x^2 + 2x - 1$

Introducimos los tres últimos términos en un paréntesis precedido del signo - para que x^2 y 1 se hagan positivos, con lo que tendremos:

$9a^2 - x^2 + 2x - 1 = 9a^2 - (x^2 - 2x + 1)$

(factorando el trinomio) $= 9a^2 - (x-1)^2$

(factorando la diferencia de cuadrados) $= [3a+x-1]\,[3a-(x-1)]$

$= (3a+x-1)(3a-(x-1)$

4) Descomponer $4x^2 - a^2 + y^2 - 4xy + 2ab - b^2$

Aquí $4xy$ nos sugiere que es el segundo término de un trinomio cuadrado perfecto, cuyo primer término tiene x^2, al tercer término y^2 y el término $2ab$ nos sugiere que es el segundo de un trinomio cuadrado perfecto cuyo primer término tiene a^2 y el tercer término b^2; pero como $a^2 - b^2$ son negativos, tenemos que introducir este último trinomio en un paréntesis precedido del signo - para hacerlos positivos:

$4x^2 - a^2 + y^2 - 4xy + 2ab - b^2 = (4x^2 - 4xy + y^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$

(factorando los trinomios) $= (2x-y)^2 - (a-b)^2$

(descomponiendo la diferencia de cuadrados) =

$[(2x-y)+(a-b)]\,[(2x-y)-(a-b)$

$= (2x-y+a-b)(2x-y-a+b)$

5) Factorar $a^2 - 9n^2 - 6mn - 10ab + 25b^2 - m^2$

Aquí el término $10ab$ nos sugiere que es el segundo de un trinomio cuadrado perfecto cuyo primer término tiene a^2 el tercer término b^2, y $6mn$ nos sugiere que es el segundo término de un trinomio cuadrado perfecto cuyo primer término tiene m^2 y el tercer término n^2 tendremos:

$a^2 - 9n^2 - 6mn + 10ab + 25b^2 - m^2 =$

$(a^2 + 10ab + 25b^2) - (m^2 + 6mn + 9n^2)$

(descomponiendo los trinomios) $= (a+5b)^2 - (m+3n)^2$

(descomponiendo la diferencia de cuadrados)

$= [(a+5b)+(m+3n)]\,[(a+5b)-(m+3n)]$

$= (a+5b+m+3n)(a+5b-m-3n)$

EJERCICIOS

Factorar o descomponer en dos factores:

1. $a^2 + 2ab + b^2 - x^2$
R. $(a + b + x)(a + b - x)$

2. $x^2 - 2xy + y^2 - m^2$
R. $(x - y + m)(x - y - m)$

3. $m^2 + 2mn + n^2 - 1$
R. $(m + n + 1)(m + n - 1)$

4. $a^2 - 2a + 1 - b^2$
R. $(a + b - 1)(a - b - 1)$

5. $n^2 + 6n + 9 - c^2$
R. $(n + c + 3)(n - c + 3)$

6. $a^2 + x^2 + 2ax - 4$
R. $(a + x + 2)(a + x - 2)$

7. $a^2 + 4 - 4a - 9b^2$
R. $(a + 3b - 2)(a - 3b - 2)$

8. $x^2 + 4y^2 - 4xy - 1$
R. $(x - 2y + 1)(x - 2y - 1)$

9. $a^2 - 6ay + 9y^2 - 4x^2$
R. $(a + 2x - 3y)(a - 2x - 3y)$

10. $4x^2 - 25y^2 - 36 + 20xy$
R. $(2x + 5y + 6)(2x + 5y - 6)$

11. $9x^2 - 1 + 16a^2 - 24ax$
R. $(3x - 4a + 1)(3x - 4a - 1)$

12. $1 + 64a^2b^2 - x^4 - 16ab$
R. $(1 - 8ab + x^2)(1 - 8ab - x^2)$

13. $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$
R. $(a + b + c)(a - b - c)$

14. $1 - a^2 + 2ax - x^2$
R. $(1 + a - x)(1 - a + x)$

15. $m^2 - x^2 - 2xy - y^2$
R. $(m + x + y)(m - x - y)$

16. $c^2 - a^2 + 2a - 1$
R. $(c + a - 1)(c - a + 1)$

17. $9 - n^2 - 25 - 10n$
R. $-(n + 8)(n + 2)$

18. $4a^2 - x^2 + 4x - 4$
R. $(2a + x - 2)(2a - x + 2)$

19. $1 - a^2 - 9n - 6an$
R. $(1 + a + 3n)(1 - a - 3n)$

20. $25 - x^2 - 16y^2 + 8xy$
R. $(5 + x - 4y)(5 - x + 4y)$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO POR ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

1. Factorar $x^4 + x^2y^2 + y^4$

La raíz cuadrada de x^4 es x^2; la raíz cuadrada de y^4 es y^2 y el doble producto de estas raíces es $2x^2y^2$; por tanto, este trinomio no es cuadrado perfecto, pues para que lo sea hay que lograr que el segundo término x^2y^2 se convierta en $2x^2y^2$ lo cual se consigue sumándole x^2y^2, pero para que el trinomio no varíe hay que restarle la misma cantidad que se suma, x^2y^2 con lo que tendremos:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4$$
$$+ x^2y^2 \qquad - x^2y^2$$
$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4\ x^2y^2 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2$$

(factorando el trinomio cuadrado perfecto) $= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$

(factorando la diferencia de cuadrados) $= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$

(ordenando) $= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

2. Descomponer $4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4$

La raíz cuadrada de es $4a^4$ es $2a^2$; la raíz cuadrada de $9b^4$ es $3b^2$ y el doble producto de estas raíces es $2 \times 2a^2 \times 3b^2 = 12a^2b^2$; por tanto, este trinomio no es cuadrado perfecto, pues su segundo término es $8a^2b^2$, y para resultar un cuadrado perfecto debe ser $12a^2b^2$

Si queremos convertir $8a^2b^2$ en $12a^2b^2$, le sumamos $4a^2b^2$, y para que el trinomio no varíe le restamos $4a^2b^2$, con lo que tendremos:

$$4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4$$
$$+ 4a^2b^2 \qquad - 4a^2b^2$$
$$4a^4 + 12a^2b^2 + 9b^4 - 4a^2b^2 = (4a^2 + 12a^2b^2 + 9b^4) - 4a^2b^2$$

factorando el trinomio cuadrado perfecto) $= (2a^2 + 3b^2)^2 - 4a^2b^2$

(factorando la diferencia de cuadrados) $= (2a^2 + 3b^2 + 2ab)(2a^2 + 3b^2 - 2ab)$

(ordenando) $= (2a^2 + 2ab + 3b^2)(2a^2 - 2ab + 3b^2)$

3. Descomponer $a^4 - 16a^2b^2 + 36b^4$

La raíz cuadrada de a^4 es a^2 y la de $36b^4$ es $6b^2$. Para que este trinomio sea cuadrado perfecto, su segundo término debe ser $- 2 \times a^2 \times 6b^2 = - 12a^2b^2$. Para convertir $- 16a^2b^2$ en $- 12a^2b^2$ le sumamos $4a^2b^2$, y tendremos: $-16a^2b^2 + 4a^2b^2 = - 12a^2b^2$; para que el trinomio no varíe le restamos $4a^2b^2$, igual que en los casos anteriores, con lo que tendremos:

$$a^4 - 16a^2b^2 + 36b^4$$
$$+ 4a^2b^2 \qquad - 4a^2b^2$$
$$a^4 - 12a^2b^2 + 36b^4 - 4a^2b^2 = (a^4 - 12a^2b^2 + 36b^4) - 4a^2b^2$$
$$= (a^2 - 6b^2)^2 - 4a^2b^2$$
$$= (a^2 - 6b^2 + 2ab)(a^2 - 6b^2 - 2ab)$$
$$= (a^2 + 2ab - 6b^2)(a^2 - 2ab - 6b^2)$$

4. Factorar $49m^4 - 151m^2n^4 + 81n^8$

La raíz cuadrada de $49m^4$ es $7m^2$ y la de $81n^8$ es $9n^4$. El segundo término debe ser $- 2 \times 7m^2 \times 9n^4 = - 126m^2n^4$. Para convertir $- 151m^2n^4$ en $- 126m^2n^4$ se le suma $25m^2n^4$ y tendremos: $- 151m^2n^4 + 25m^2n^4 = 126m^2n^4$; para que el trinomio no varíe se le resta $25m^2n^4$, con lo que tendremos:

$$49m^4 - 151m^2n^4 + 81n^8$$
$$+ 25m^2n^4 \qquad - 25m^2n^4$$
$$49m^4 - 126m^2n^4 + 81n^8 - 5m^2n^4 = (49m^4 - 126m^2n^4 + 81n^8) - 25m^2n^4$$
$$= (7m^2 - 9n^4)^2 - 25m^2n^4$$
$$= (7m^2 - 9n^4 + 5mn^2)(7m^2 - 9n^4 - 5mn^2)$$
$$= (7m^2 + 5mn^2 - 9n^4)(7m^2 - 5mn^2 - 9n^4)$$

EJERCICIOS

Factorar o descomponer en dos factores:

1. $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$
R. $(4m^2+mn-3n^2)(4m^2-mn-3n^2)$

2. $25a^4 + 54a^2b^2 + 49b^4$
R. $(5a^2+4ab+7b^2)(5a^2-4ab+7b^2)$

3. $36x^4 - 109x^2y^2 + 49y^4$
R. $(6x^2+5xy-7y^2)(6x^2-5xy-7y^2)$

4. $81m^8 + 2m^4 + 1$
R. $(9m^4+4m^2+1)(9m^4-4m^2 + 1)$

5. $c^4 - 45c^2 + 100$
R. $(c^2 + 5c - 10)(c^2 - 5c - 10)$

6. $a^4 + a^2 + 1$
R. $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

7. $m^4 + m^2n^2 + n^4$
R. $(m^2 + mn + n^2)(m^2 - mn + n^2)$

8. $x^8 + 3x^4 + 4$
R. $(x^4 + x^2 + 2)(x^4 - x^2 + 2)$

9. $a^4 + 2a^2 + 9$
R. $(a^2 + 2a + 3)(a^2 - 2a + 3)$

10. $4a^8 - 53a^4b^4 + 49b^8$
R. $(2a^4+5a^2b^2-7b^4)(2a^4- a^2b^2-7b^4)$

11. $a^4 - 3a^2b^2 + b^4$
R. $(a^2 + ab - b^2)(a^2 + ab - b^2)$

12. $x^4 - 6x^2 + 1$
R. $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

13. $4a^4 + 3a^2b^2 + 9b^4$
R. $(2a^2+3ab+3b^2)(2a^2+3ab+3b^2)$

14. $4x^4 - 29x^2 + 25$
R. $(2x^2 + 3x - 5)(2x^2 - 3x - 5)$

15. $x^8 + 4x^4y^4 + 16y^8$
R. $(x^4 + 2x^2y^2 + 4y^4)(x^4 - 2x^2y^2 + 4y^4)$

CASO ESPECIAL PARA FACTORAR UNA SUMA DE CUADRADOS

Una suma de dos cuadrados, por lo general, no tiene descomposición en factores racionales, es decir, factores donde no haya raíz, pero algunas sumas de cuadrados, sumándoles y restándoles una misma cantidad, sí pueden llevarse al caso anterior y descomponerse.

Ejemplo

1) Factorar $a^4 + 4b^4$

La raíz cuadrada de a^4 es a^2 y la de $4b^4$ es $2b^2$. Para que esta expresión sea un trinomio cuadrado perfecto su segundo término debe ser $2 \times a^2 \times 2b^2 = 4a^2b^2$. Al igual que en los casos anteriores, a $a^4 + 4b^4$ le sumamos y restamos $4a^2b^2$, con lo que tendremos:

$$\begin{array}{llll} a^4 & & + 4b^4 & \\ & + 4a^2b^2 & & - 4a^2b^2 \\ \hline a^4 & + 4a^2b^2 & + 4b^4 & - 4a^2b^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 &= (a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4) - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2+ 2b^2+ 2ab)(a^2+ 2b^2-2ab) \\ &= (a^2+2ab+ 2b^2)(a^2- 2ab + 2b^2) \end{aligned}$$

TRINOMIO DE LA FORMA

$x^2 + bx + c$

Algunos trinomios de la forma:

$x^2 + bx + c$ pueden ser:

$x^2 + 5x + 6$ $m^2 + 5m - 14$

$a^2 - 2a - 15$ $y^2 - 8y + 15$

que cumplen las condiciones siguientes:

1. El coeficiente del primer término es 1.

2. El primer término es una letra cualquiera elevada al cuadrado.

3. El segundo término tiene la misma letra que el primero con exponente 1 y su coeficiente es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

4. El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primero y segundo términos y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

EJERCICIOS

Factorar o descomponer en dos factores:

1. $x^4 + 64y^4$
R. $(x^2 + 4xy + 8y^2)(x^2 - 4xy + 8y^2)$

2. $4x^8 + y^8$
R. $(2x^4+2x^2y^2+y^4)(2x^4-2x^2y^2+y^4)$

3. $a^4 + 324b^4$
R. $(a^2+6ab+18b^2)(a^2-6ab + 18b^2)$

4. $4m^4 + 81n^4$
R. $(2m^2+6mn+9n^2)(2m^2-6mn+9n^2)$

5. $4 + 625x^8$
R. $(2+10x^2+25x^4)(2 -10x^2+ 25x^4)$

6. $64 + a^{12}$
R. $(8 + 4a^3 + a^6)(8 - 4a^3 + a^6)$

7. $1 + 4n^4$
R. $(1 + 2n + 2n^2)(1 - 2n + 2n^2)$

8. $64x^8 + y^8$
R. $(8x^4+4x^2y^2+y^4)(8x^4-4x^2y^2+y^4)$

REGLA PRÁCTICA PARA FACTORAR UN TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$

1) Se descompone en dos factores binomios cuyo primer término es x, o sea la raíz cuadrada del primer término del trinomio.

2) En el primer factor, después de x se escribe el signo del segundo término del trinomio, y en el segundo factor, después de x se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del segundo término por el signo del tercer término.

3) Si los dos factores binomios tienen en medio signos iguales, se buscan dos números cuya suma sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio, mismos que serán los segundos términos de los binomios.

4) Si los dos factores binomios tienen en medio signos distintos, se buscan dos números cuya diferencia sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. El mayor de estos números es el segundo término del primer binomio, y el menor es el segundo término del segundo binomio.

Ejemplo

1) Factorar $x^2 + 5x + 6$

Este trinomio se descompone en dos binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada de x^2, o sea x:

$x^2 + 5x + 6 \; (x \;)(x \;)$

En el primer binomio, después de x, se pone el signo + porque el segundo término del trinomio $+ 5x$ tiene signo +. En el segundo binomio, después de x, se escribe el signo que resulta de multiplicar $+ 5x$ por $+ 6$, y como + por + da +, entonces:

$x^2 + 5x + 6 \; (x + \;)(x + \;)$

Dado que en estos binomios hay signos iguales, buscamos dos números cuya suma sea 5 y cuyo producto sea 6. Dichos números son 2 y 3, luego:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

2) Factorar $x^2 - 7x + 12$

Tendremos:

$x^2 - 7x + 12 \; (x - \;)(x - \;)$

En el primer binomio se pone - por el signo de $- 7x$.

En el segundo se pone - porque multiplicando $- 7x$ por $+ 12$ se tiene que - por + da -

Como en los binomios hay signos iguales, buscamos dos números cuya suma sea 7 y cuyo producto sea 12. Dichos números son 3 y 4, luego:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

3) Factorar $x^2 + 2x - 15$

Tenemos:

$x^2 + 2x - 15 \; (x + \;)(x - \;)$

En el primer binomio se pone + por el signo de $+ 2x$

En el segundo se pone - porque multiplicando $+ 2x$ por $- 15$ se tiene que + por - da -

Como en los binomios tenemos signos distintos, buscamos dos números cuya diferencia sea 2 y cuyo producto sea 15. Dichos números son 5 y 3. El 5, que es el mayor, se escribe en el primer binomio:

$$x^2 + 2x - 15 \; (x + 5)(x - 3)$$

4) Factorar $x^2 - 5x - 14$

Tenemos:

$x^2 - 5x - 14 \; (x - \;)(x + \;)$

En el primer binomio se pone - por el signo de $- 5x$

En el segundo se pone + porque multiplicando $- 5x$ por $- 14$ se tiene que - por - da +

Como en los binomios tenemos signos distintos, se buscan dos números cuya diferencia sea 5 y cuyo producto sea 14. Dichos números son 7 y 2. El 7, que es el mayor, se escribe en el primer binomio:

$$x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$$

5) Factorar $a^2 - 13a + 40$

$a^2 - 13a + 40 = (a - 5)(a - 8)$

6) Factorar $x^2 - 6x - 216$

$x^2 + 6x - 216 \; (x + \;)(x - \;)$

Necesitamos dos números cuya diferencia sea 6 y el producto 216, los cuales no se ven fácilmente. Para hallarlos, descomponemos en sus factores primos el tercer término:

216	2	Con estos factores primos
108	2	formamos dos productos.
54	2	Por tanteo, variando los
27	3	factores de cada producto
9	3	obtendremos los dos números
3	3	que buscamos, así:
1		

$2 \times 2 \times 2 = 8$	$3 \times 3 \times 3 = 27$
$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$	$3 \times 3 = 9$
$2 \times 2 \times 3 = 8$	$2 \times 3 \times 3 = 18$

$27 - 8 = 19$, no sirven
$24 - 9 = 15$, no sirven
$18 - 12 = 6$, sí sirven

Los números que buscamos son 18 y 12, porque su diferencia es 6 y su producto necesariamente 216, ya que para obtener estos números empleamos todos los factores que obtuvimos en la descomposición de 216, por tanto:

$$x^2 + 6x - 216 = (x + 18)(x - 12)$$

7) Factorar $a^2 - 66a + 1080$

$a^2 - 66a + 1080 \; (a - \;)(a - \;)$

Necesitamos dos números cuya suma sea 66 y el producto 1080. Al descomponer 1080 tendremos:

1080	2	$2 \times 2 \times 2 = 8$
540	2	$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$
270	2	$2 \times 3 \times 5 = 30$
135	3	
45	3	$3 \times 3 \times 3 \times 5 = 105$
15	3	$3 \times 3 \times 5 = 45$
5	5	$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$
1		

$105 + 8 = 113$, no sirven
$45 + 24 = 69$, no sirven
$30 + 36 = 66$, sí sirven

Los números que buscamos son 30 y 36, porque su suma es 66 y su producto necesariamente 1080, ya que para obtener estos números empleamos todos los factores que obtuvimos en la descomposición de 1080, por tanto:

$$a^2 - 66a + 1080 = (a - 36)(a - 30)$$

EJERCICIOS

Factorar o descomponer en dos factores:

1. $a^2 - 2a - 35$
R. $(a - 7)(a + 5)$

2. $x^2 + 3x - 10$
R. $(x + 5)(x - 2)$

3. $x^2 + x - 2$
R. $(x + 2)(x - 1)$

4. $a^2 + 4a + 3$
R. $(a + 3)(a + 1)$

5. $m^2 + 5m - 14$
R. $(m + 7)(m - 2)$

6. $12 - 8n + n^2$
R. $(n - 6)(n - 2)$

7. $x^2 + 10x + 21$
R. $(x + 7)(x + 3)$

8. $y^2 - 9y + 20$
R. $(y - 5)(y - 4)$

9. $x^2 - 6 - x$
R. $(x - 3)(x + 2)$

10. $x^2 - 9x + 8$
R. $(x - 8)(x - 1)$

11. $c^2 + 5c - 24$
R. $(c + 8)(c - 3)$

12. $x^2 - 3x + 2$
R. $(x - 2)(x - 1)$

13. $a^2 + 7a + 6$
R. $(a + 6)(a + 1)$

14. $y^2 - 4y + 3$
R. $(y - 3)(y - 1)$

15. $a^2 + 7a - 18$
R. $(a + 9)(a - 2)$

16. $m^2 - 12m + 11$
R. $(m - 11)(m – 1)$

17. $x^2 - 7x - 30$
R. $(x - 10)(x + 3)$

18. $n^2 + 6n - 16$
R. $(n + 8)(n - 2)$

19. $x^2 + 7x + 10$
R. $(x + 5)(x + 2)$

20. $x^2 - 5x + 6$
R. $(x - 3)(x - 2)$

21. $20 + a^2 - 21a$
R. $(a - 20)(a - 1)$

22. $y^2 + y - 30$
R. $(y + 6)(y - 5)$

23. $28 + a^2 - 11a$
R. $(a - 7)(a - 4)$

24. $n^2 - 6n - 40$
R. $(n - 10)(n + 4)$

25. $x^2 - 5x - 36$
R. $(x - 9)(x + 4)$

CASOS ESPECIALES

Ejemplos

1) Factorar $x^4 - 5x^2 - 50$

El primer término de un factor binomio será la raíz cuadrada de x^4, o sea x^2:

$x^4 - 5x^2 - 50\ (x^2 - \ )(x^2 + \ )$

Buscamos dos números cuya diferencia (signos distintos en los binomios) sea 5 y el producto 50. Tales números son 10 y 5, por lo que tendremos:

$x^4 - 5x^2 - 50\ (x^2 - 10)(x^2 + 5)$

2) Factorar $x^6 + 7x^3 - 44$

El primer término de cada binomio será la raíz cuadrada de x^6, o sea x^3. Si aplicamos las reglas tendremos:

$x^6 + 7x^3 - 44 = (x^3 + 11)(x^3 - 4)$

3) Factorar $a^2b^2 - ab - 42$

El primer término de cada factor será la raíz cuadrada de a^2b^2, o sea ab:

$a^2b^2 - ab - 42 = (ab - \ )(ab + \ )$

Buscamos dos números cuya diferencia sea 1 (el coeficiente de ab) y cuyo pro-ducto sea 42. Los números son 7 y 6, por tanto tendremos:

$a^2b^2 - ab - 42 = (ab - 7)(ab + 6)$

4) Factorar $(5x)^2 - 9(5x) + 8$

Es importante atender este ejemplo, pues usaremos esta descomposición en el caso siguiente.

El primer término de cada binomio será la raíz cuadrada de $(5x)^2$, o sea $5x$:

$(5x)^2 - 9(5x) + 8\ (5x - \ )(5x - \ )$

Los dos números cuya suma (signos iguales en los binomios) es 9 y su producto 8, son 8 y 1, con lo que tendremos:

$(5x)^2 - 9(5x) + 8 = (5x - 8)(5x - 1)$

5) Factorar $x^2 - 5ax - 36a^2$

$x^2 - 5ax - 36a^2\ (x - \ )(x + \ )$

El coeficiente de x en el segundo término es $5a$. Buscamos dos cantidades cuya diferencia sea $5a$ (el coeficiente de x en el segundo término) y cuyo producto sea $36a^2$. Esas cantidades son $9a$ y $4a$, con lo que tendremos:

$x^2 - 5ax - 36a^2 = (x - 9a)(x + 4a)$

6) Factorar $(a + b)^2 - 12(a + b) + 20$

El primer término de cada binomio será la raíz cuadrada de $(a + b)^2$, o sea $(a + b)$

$(a + b)^2 - 12(a + b) + 20$ y

$[(a + b) - \ ]\,[(a + b) - \ ]$

Buscamos dos números cuya suma sea 12 y el producto 20. Dichos números son 10 y 2, con lo que tendremos:

$(a + b)^2 - 12(a + b) + 20 =$

$[(a + b) - 10]\,[(a + b) - 2]$

$= (a + b - 10)(a + b - 2)$

7) Factorar $28 + 3x - x^2$

En orden descendente respecto de x, tenemos:

$- x^2 + 3x + 28$

Para eliminar el signo - de $- x^2$ introducimos el trinomio en un paréntesis precedido del signo -:

$- (x^2 - 3x - 28)$

Factorando $x^2 - 3x - 28 = (x - 7)(x + 4)$, pero como el trinomio está precedido de - su descomposición también debe llevar el signo de - y tendremos:

$- (x - 7)(x + 4)$

Para convertir el signo - del producto $- (x - 7)(x + 4)$ en + basta cambiar-le el signo a un factor, por ejemplo a $(x - 7)$, y quedará:

$28 + 3x - x^2 = (7 - x)(x + 4)$

8) Factorar $30 + y^2 - y^4$

$30 + y^2 - y^4 = - (y^4 - y^2 - 30) =$

$- (y^2 - 6)(y^2 + 5) =$

$(6 - y^2)(y^2 + 5)$

EJERCICIOS

1. $(5x)^2 + 13(5x) + 42$

R. $(5x + 7)(5x + 6)$

2. $x^2 + 2ax - 15a^2$

R. $(x + 5a)(x - 3a)$

3. $a^2 - 4ab - 21b^2$

R. $(a - 7b)(a + 3b)$

4. $(x - y)^2 + 2(x - y) - 24$

R. $(x - y + 6)(x - y - 4)$

5. $5 + 4x - x^2$

R. $(x + 1)(5 - x)$

6. $x^{10} + x^5 - 20$

R. $(x^5 + 5)(x^5 - 4)$

7. $m^2 + mn - 56n^2$

R. $(m + 8n)(m - 7n)$

8. $x^4 + 7ax^2 - 60a^2$

R. $(x^2 + 12a)(x^2 - 5a)$

9. $(2x)^2 - 4(2x) + 3$

R. $(2x - 3)(2x - 1)$

10. $(m - n)^2 + 5(m - n) - 24$

R. $(m - n + 8)(m - n - 3)$

11. $x^8 + x^4 - 240$

R. $(x^4 + 16)(x^4 - 15)$

12. $15 + 2y - y^2$

R. $(y + 3)(5 - y)$

13. $a^4b^4 - 2a^2b^2 - 99$

R. $(a^2b^2 - 11)(a^2b^2 + 9)$

14. $x^4 + 5x^2 + 4$

R. $(x^2 + 4)(x^2 + 1)$

15. $x^6 - 6x^3 - 7$

R. $(x^3 - 7)(x^3 + 1)$

16. $x^8 - 2x^4 - 80$

R. $(x^4 - 10)(x^4 + 8)$

17. $x^2y^2 + xy - 12$

R. $(xy + 4)(xy - 3)$

18. $(4x)^2 - 2(4x) - 15$

R. $(4x - 5)(4x + 3)$

TRINOMIOS DE LA FORMA

$ax^2 + bx + c$

Algunos trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ son:

$2x^2 + 11x + 5$

$3a^2 + 7a - 6$

$10n^2 - n - 2$

$7m^2 - 23m + 6$

que se diferencian de los trinomios del caso anterior porque aquí el primer término tiene un coeficiente distinto de 1.

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES DE UN TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

Ejemplos

1) Factorar $6x^2 - 7x - 3$

Multiplicamos el trinomio por el coeficiente de x que es 6, y dejando indicado el producto de 6 por $7x$ se tiene:

$$36x^2 - 6(7x) - 18$$

Pero $36x^2 = (6x)^2$ y $6(7x) = 7(6x)$, por tanto podemos escribir:

$$(6x)^2 - 7(6x) - 18$$

Si descomponemos este trinomio como en el caso anterior, el primer término de cada factor será la raíz cuadrada de $(6x)^2$, o sea

$6x$: $(6x -)(6x +)$

Buscamos dos números cuya diferencia sea 7 y el producto 18, que son 9 y 2, con lo que tendremos:

$(6x - 9)(6x + 2)$

Como al principio multiplicamos el trinomio dado por 6, ahora tenemos que dividir entre 6, para no alterar el trinomio, con lo que tendremos:

$$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}$$

pero como ninguno de los binomios es divisible entre 6, descomponemos 6 en 2 × 3 y dividiendo $(6x - 9)$ entre 3 y $(6x + 2)$ entre 2 nos queda:

$$\frac{(6x - 9)(6x + 2)}{2 \times 3} =$$

$$(2x - 3)(3x + 1)$$

Luego:

$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$

2) Factorar $20x^2 + 7x - 6$

Al multiplicar el trinomio por 20 tendremos: $(20x)^2 + 7(20x) - 120$

Al descomponer este trinomio tenemos: $(20x + 15)(20x - 8)$

Para cancelar la multiplicación por 20, tenemos que dividir entre 20, pero como ninguno de los dos binomios es divisible entre 20, descomponemos el 20 en 5 × 4 y dividiendo el factor $(20x + 15)$ entre 5 y $(20x - 8)$ entre 4 tendremos:

$$\frac{(20x + 15)(20x - 8)}{5 \times 4} =$$

$(4x + 3)(5x - 2)$

Luego:

$20x^2 + 7x - 6 = (4x + 3)(5x - 2)$

3) Factorar $18a^2 - 13a - 5$

Multiplicamos por 18:

$(18a)^2 - 13(18a) - 90$

Factoramos este trinomio:

$(18a - 18)(18a + 5)$

Dividimos entre 18, para lo cual, como el primer binomio $18a - 18$ es divisible entre 18, basta dividir este factor entre 18 y tendremos:

$$\frac{(18a - 18)(18a + 5)}{18} =$$

$(a - 1)(18a + 5)$

Luego:

$18a^2 - 13a - 5 = (a - 1)(18a + 5)$

EJERCICIOS

Factorar:

1. $6x^2 - 6 - 5x$
R. $(3x + 2)(2x - 3)$
2. $12m^2 - 13m - 35$
R. $(3m - 7)(4m + 5)$
3. $20y^2 + y - 1$
R. $(4y + 1)(5y - 1)$
4. $8a^2 - 14a - 15$
R. $(2a - 5)(4a + 3)$
5. $7x^2 - 44x - 35$
R. $(7x + 5)(x - 7)$
6. $16m + 15m^2 - 15$
R. $(3m + 5)(5m - 3)$
7. $2a^2 + 5a + 2$
R. $(2a + 1)(a + 2)$
8. $12x^2 - 7x - 12$
R. $(3x - 4)(4x + 3)$
9. $12x^2 - x - 6$
R. $(3x + 2)(4x - 3)$
10. $4a^2 + 15a + 9$
R. $(4a + 3)(a + 3)$
11. $3 + 11a + 10a^2$
R. $(2a + 1)(5a + 3)$
12. $2x^2 + 3x - 2$
R. $(2x - 1)(x + 2)$
13. $3x^2 - 5x - 2$
R. $(3x + 1)(x - 2)$
14. $6x^2 + 7x + 2$
R. $(2x + 1)(3x + 2)$
15. $5x^2 + 13x - 6$
R. $(5x - 2)(x + 3)$

CASOS ESPECIALES DEL TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

1. Factorar $15x^4 - 11x^2 - 12$

Multiplicamos por 15:

$$(15x^2)^2 - 11(15x^2) - 180$$

Descomponemos este trinomio, con lo que el primer término de cada factor será la raíz cuadrada de $(15x^2)^2$, o sea $15x^2$:

$(15x^2 - 20)(15x^2 + 9)$

Al dividir entre 15:

$$\frac{(15x^2 - 20)(15x^2 + 9)}{5 \times 3} =$$

$$(3x^2 - 4)(5x^2 + 3)$$

2. Factorar $12x^2y^2 + xy - 20$

Multiplicamos por 12:

$(12xy)^2 + 1(12xy) - 240$

Factoramos este trinomio:

$(12xy + 16)(12xy - 15)$

Dividimos entre 12:

$$\frac{(12xy + 16)(12xy - 15)}{4 \times 3} =$$

$$(3xy + 4)(4xy - 5)$$

3. Factorar $6x^2 - 11ax - 10a^2$

Multiplicamos por 6:

$(6x)^2 - 11a(6x) - 60a^2$

Factoramos este trinomio:

$(6x - 15a)(6x + 4a)$

Dividimos entre 6:

$$\frac{(6x - 15a)(6x + 4a)}{3 \times 2} =$$

$(2x - 5a)(3x + 2a)$

4. Buscar los factores de: $20 - 3x - 9x^2$

Al colocar el trinomio en orden descendente respecto de x: $-9x^2 - 3x + 20$

Se introduce en un paréntesis precedido del signo -: $-(9x^2 + 3x - 20)$

Multiplicamos por 9:

$-[(9x)^2 + 3(9x) - 180]$

Factoramos este trinomio:

$-(9x + 15)(9x - 12)$

Dividimos entre 9:

$$\frac{-(9x + 15)(9x - 12)}{3 \times 3} =$$

$-(3x + 5)(3x - 4)$

Para convertir el signo - de este producto en +, hay que cambiar el signo a un factor, por ejemplo $(3x - 4)$, que se convertirá en $(4 - 3x)$, y tendremos:

$20 - 3x - 9x^2 = (3x + 5)(4 - 3x)$

EJERCICIOS

1. $12 - 7x - 10x^2$
R. $(2x + 3)(4 - 5x)$
2. $5 + 7x^4 - 6x^8$
R. $(2x^4 + 1)(5 - 3x^4)$
3. $6a^2 - ax - 15x^2$
R. $(3a - 5x)(2a + 3x)$
4. $21x^2 - 29xy - 72y^2$
R. $(3x - 8y)(7x + 9y)$
5. $6m^2 - 13am - 15a^2$
R. $(m - 3a)(6m + 5a)$
6. $14x^4 - 45x^2 - 14$
R. $(2x^2 - 7)(7x^2 + 2)$
7. $30a^2 - 13ab - 3b^2$
R. $(6a + b)(5a - 3b)$
8. $7x^6 - 33x^3 - 10$
R. $(7x^3 + 2)(x^3 - 5)$
9. $30 + 13a - 3a^2$
R. $(3a + 5)(6 - a)$
10. $6x^4 + 5x^2 - 6$
R. $(3x^2 - 2)(2x^2 + 3)$
11. $5x^6 + 4x^3 - 12$
R. $(x^3 + 2)(5x^3 - 6)$
12. $10x^8 + 29x^4 + 10$
R. $(2x^4 + 5)(5x^4 + 2)$
13. $6a^2x^2 + 5ax - 21$
R. $(3ax + 7)(2ax - 3)$
14. $20x^2y^2 + 9xy - 20$
R. $(4xy + 5)(5xy - 4)$
15. $15x^2 - ax - 2a^2$
R. $(5x - 2a)(3x + a)$

CUBO PERFECTO DE BINOMIOS

Ya vimos, al estudiar los productos notables, que

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Esto nos dice que para que una expresión algebraica ordenada con respecto a una letra sea el cubo de un binomio, tiene que cumplir las siguientes condiciones:

1. Tener cuatro términos.

2. Que el primero y el último términos sean cubos perfectos.

3. Que el segundo término sea más o menos el triple del cuadrado de la raíz cúbica del primer término multiplicado por la raíz cúbica del último término.

4. Que el tercer término sea mayor al triple de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último.

Si todos los términos son **positivos**, la expresión dada es el cubo de la suma de las raíces cúbicas de su primero y último términos, y si son alternativamente positivos y negativos, la expresión dada es el **cubo de la diferencia** de dichas raíces.

La **raíz cúbica de un monomio** se obtiene extrayendo la raíz cúbica de su coeficiente y dividiendo el exponente de cada letra entre 3. De este modo, la raíz cúbica de $8a^3b^6$ es $2ab^2$. En efecto:

$(2ab^2)^3 = 2ab^2 \times 2ab^2 \times 2ab^2 = 8a^3b^6$

Ejemplos

1) Para saber si $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ es el cubo de un binomio, verificamos si cumple las condiciones antes indicadas. La expresión tiene cuatro términos.

La raíz cúbica de $8x^3$ es $2x$

La raíz cúbica de 1 es 1

$3(2x)^2(1) = 12x^2$, segundo término

$3(2x)(1)^2 = 6x$, tercer término

Vemos que sí cumple las condiciones, y como todos sus términos son positivos, la expresión dada es el cubo de $(2x + 1)$, o de otro modo, $(2x + 1)$ es la raíz cúbica de la expresión.

2) Encontrar si $8x^6 + 54x^2y^6 - 27y^9 - 36x^4y^3$ es el cubo de un binomio.

Al ordenar la expresión tenemos:

$8x^6 - 36x^4y^3 + 54x^2y^6 - 27y^9$

Esta expresión tiene cuatro términos:

La raíz cúbica de $8x^6$ es $2x^2$

La raíz cúbica de $27y^9$ es $3y^3$

$3(2x^2)^2(3y^3) = 36x^4y^3$, 2o. término

$3(2x^2)(3y^3)^2 = 54x^2y^6$, 3er. término

En este caso los términos son alternativamente positivos y negativos, por lo que la expresión dada es el cubo de

$(2x^2 - 3y^3)$

FACTORAR UNA EXPRESIÓN QUE ES EL CUBO DE UN BINOMIO

Ejemplos

1) Buscar los factores de:

$1 + 12a + 48a^2 + 64a^3$

Si aplicamos el procedimiento anterior vemos que esta expresión es el cubo de $(1 + 4a)$; luego:

$1 + 12a + 48a^2 + 64a^3 = (1 + 4a)^3$

2) Buscar los factores de:

$a^9 - 18a^6b^5 + 108a^3b^{10} - 216b^{15}$

Aplicando el procedimiento anterior, vemos que esta expresión es el cubo de $(a^3 - 6b^5)$; luego:

$a^9 - 18a^6b^5 + 108a^3b^{10} - 216b^{15} =$

$(a^3 - 6b^5)^3$

EJERCICIOS

Buscar por el método anterior, el factor, si es posible, las expresiones siguientes (ordenándolas previamente):

1. $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ **R.** No es perfecto

2. $8 + 12a^2 + 6a^4 + a^6$ **R.** $(a^2 + 2)^3$

3. $8x^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

R. $(2a - 3b)^3$

4. $27m^3 + 108m^2n + 144mn^2 + 64n^3$

R. $(3m + 4n)^3$

5. $1 + 12a^2b - 6ab - 8a^3b^3$

R. No es perfecto

6. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ **R.** $(a + 1)^3$

7. $3a^{12} + 1 + 3a^6 + a^{18}$ **R.** $(a^6 - 1)^3$

8. $27 - 27x + 9x^2 - x^3$ **R.** $(3 - x)^3$

9. $1 + 3a^2 - 3a - a^3$ **R.** $(1 - a)^3$

SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS

Como ya lo estudiamos, sabemos que:

$\dfrac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$ y

$\dfrac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$

y como en toda división exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, tendremos:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (1)

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (1)

En la fórmula (1) la Regla 1 nos dice que la suma de dos cubos perfectos se des-compone en dos factores:

1° La suma de sus raíces cúbicas.

2° El cuadrado de la primera raíz, menos el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

En la fórmula (2) la Regla 2 nos dice que la diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores:

1° La diferencia de sus raíces cúbicas.

2° El cuadrado de la primera raíz, más el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

FACTORAR UNA SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS

Ejemplos

1) Buscar los factores de $x^3 + 1$

La raíz cúbica de x^3 es x, y la raíz cúbica de 1 es 1.
Según la Regla 1:

$$x^3 + 1 = (x + 1)[x^2 - x(1) + 1^2] = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

2) Buscar los factores de $a^3 - 8$
La raíz cúbica de a^3 es a y la de 8 es 2. Según la Regla 2:

$$a^3 - 8 = (a - 2)[a^2 + 2(a) + 2^2] = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$$

3) Buscar los factores de $27a^3 + b^6$
La raíz cúbica de $27a^3$ es $3a$ y la de b^6 es b^2. Según la Regla 1 tendremos:

$$27a^3 + b^6 = (3a + b^2)[(3a)^2 - 3a(b^2) + (b^2)^2] = (3a + b^2)(9a^2 - 3ab^2 + b^4)$$

4) Buscar los factores de $8x^3 - 125$
La raíz cúbica de $8x^3$ es $2x$ y la de 125 es 5. Según la Regla 2 tendremos:

$$8x^3 - 125 = (2x - 5)[(2x)^2 + 5(2x) + 5^2] = (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$$

5) Buscar los factores de $27m^6 + 64n^9$

$$27m^6 + 64n^9 = (3m^2 + 4n^3)(9m^4 - 12m^2n^3 + 16n^6)$$

CASOS ESPECIALES

1. Buscar los factores de $(a + b)^3 + 1$
La raíz cúbica de $(a + b)^3$ es $(a + b)$; la de 1 es 1. Tendremos:

$$(a + b)^3 + 1 = [(a + b) + 1][(a + b)^2 - (a + b)(1) + 1^2]$$
$$= (a + b + 1)(a^2 + 2ab + b^2 - a - b + 1)$$

2. Buscar los factores de $8 - (x - y)^3$
La raíz cúbica de 8 es 2; la de $(x - y)^3$ es $(x - y)$. Tendremos:

$$8 - (x - y)^3 = [2 - (x - y)][2^2 + 2(x - y) + (x - y)^2]$$
$$= (2 - x + y)(4 + 2x - 2y + x^2 - 2xy + y^2)$$

3. Buscar los factores de $(x + 1)^3 + (x - 2)^3$

$$(x + 1)^3 + (x - 2)^3 = [(x + 1) + (x - 2)][(x + 1)^2 - (x + 1)(x - 2) + (x - 2)^2]$$
$$= (x + 1 + x - 2)(x^2 + 2x + 1 - x^2 + x + 2 + x^2 - 4x + 4)$$
$$\text{(reduciendo)} = (2x - 1)(x^2 - x + 7)$$

4. Buscar los factores de $(a - b)^3 - (a + b)^3$

$$(a - b)^3 - (a + b)^3 = [(a - b) - (a + b)][(a - b)^2 + (a - b)(a + b) + (a + b)^2]$$
$$= (a - b - a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - b^2 + a^2 + 2ab + b^2)$$
$$\text{(reduciendo)} = (-2b)(3a^2 + b^2)$$

EJERCICIOS

Descomponer en dos factores las expresiones siguientes:

1. $64 + a^6$
R. $(4 + a^2)(16 - 4a^2 + a^4)$
2. $a^3 - 125$
R. $(a - 5)(a^2 + 5a + 25)$
3. $1 - 216m^3$
R. $(1 - 6m)(1 + 6m + 36m^2)$
4. $8a^3 + 27b^6$
R. $(2a + 3b^2)(4a^2 - 6ab^2 + 9b^4)$
5. $x^6 - b^9$
R. $(x^2 - b^3)(x^4 + b^3x^2 + b^6)$
6. $8x^3 - 27y^3$
R. $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$
7. $1 + 343n^3$
R. $(1 + 7n)(1 - 7n + 49n^2)$
8. $1 + a^3$
R. $(1 + a)(1 - a + a^2)$
9. $1 - a^3$
R. $(1 - a)(1 + a + a^2)$
10. $x^3 + y^3$
R. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
11. $m^3 - n^3$
R. $(m - n)(m^2 + mn + n^2)$
12. $a^3 - 1$
R. $(a - 1)(a^2 + a + 1)$
13. $y^3 + 1$
R. $(y + 1)(y^2 - y + 1)$
14. $y^3 - 1$
R. $(y - 1)(y^2 + y + 1)$
15. $8x^3 - 1$
R. $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
16. $1 - 8x^3$
R. $(1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2)$
17. $x^3 - 27$
R. $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$
18. $a^3 + 27$
R. $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$
19. $8x^3 + y^3$
R. $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$
20. $27a^3 - b^3$
R. $(3a - b)(9a^2 - 3ab + b^2)$
21. $27x^3 - (x - y)^3$
R. $(2x + y)(13x^2 - 5xy + y^2)$
22. $1 - (a + b)^3$
R. $(1-a-b)(1+a+b+a^2+2ab+b^2)$
23. $a^3 + (a + 1)^3$
R. $(2a + 1)(a^2 + a + 1)$
24. $8a^3 - (a - 1)^3$
R. $(a + 1)(7a^2 - 4a + 1)$

FACTORAR UNA SUMA O DIFERENCIA DE POTENCIAS IMPARES IGUALES

Ejemplos

1) Buscar los factores de $m^5 + n^5$

Dividimos entre $m + n$ los signos del cociente y resultan alternativamente + y -:

$$\frac{m^5 + n^5}{m + n} = m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4$$

luego $m^5 + n^5 = (m + n)(m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4)$

2) Buscar los factores de $x^5 + 32$

Esta expresión también puede escribirse $x^5 + 2^5$. Dividiendo por $x + 2$ tenemos:

$$\frac{x^5 + 32}{x + 2} = x^4 - x^3(2) + x^2(2^2) - x(2^3) + 2^4$$

o sea $\frac{x^5 + 32}{x + 2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$

luego $x^5 + 32 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$

3) Buscar los factores de $a^5 - b^5$

Dividiendo por $a - b$ todos los signos del cociente son + :

$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

luego $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

4) Factorar $x^7 - 1$

Esta expresión equivale a $x^7 - 1^7$, dividiendo entre $x - 1$ tenemos:

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = x^6 + x^5(1) + x^4(1^2) + x^3(1^3) + x^2(1^4) + x(1^5) + 1^6$$

o sea $\frac{X^7 - 1}{X - 1} = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

luego $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Las expresiones que corresponden al caso anterior son $x^n + y^n$ ó $x^n - y^n$ en donde n es impar y múltiplo de 3, como $x^3 + y^3$, $x^3 - y^3$, $x^9 + y^9$, $x^9 - y^9$, $x^{15} + y^{15}$, $x^{15} - y^{15}$, pueden descomponerse por el método anteriormente expuesto o como suma o diferencia de cubos. Generalmente es más expedito esto último.

Las expresiones de la forma $x^n + y^n$ en donde n es par, como $x^4 - y^4$, $x^6 - y^6$, $x^8 - y^8$ son divisibles por $x + y$ ó $x - y$, y pueden descomponerse por el método anterior, pero resulta mucho más fácil factorarlas como diferencia de cuadrados.

SUMA O DIFERENCIA DE DOS POTENCIAS IGUALES

Si aplicamos el **Teorema del residuo** visto en un capítulo anterior podemos probar que:

I. $a^n - b^n$ es divisible por $a - b$ siendo n par o impar.
II. $a^n + b^n$ es divisible por $a + b$ siendo n impar.
III. $a^n - b^n$ es divisible por $a + b$ cuando n es par.
IV. $a^n + b^n$ nunca es divisible por $a - b$

Recordemos aquí la forma de hallar el cociente cuando la división es exacta.

EJERCICIOS

Factorar:

1. $a^5 + 243$ **R.** $(a+3)(a^4 - 3a^3 + 9a^2 - 27a + 81)$
2. $31 - m^5$ **R.** $(2-m)(16+8m+4m^2+2m^3+m^4)$
3. $243 - 32b^5$ **R.** $(3-2b)(81+54b+36b^2+24b^3+16b^4)$
4. $a^5 + 1$ **R.** $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$
5. $a^5 - 1$ **R.** $(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$
6. $1 - x^5$ **R.** $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$
7. $9x^2 - 6xy + y^2$ **R.** $(3x - y)^2$
8. $6x^2 - x - 2$ **R.** $(2x + 1)(3x - 2)$
9. $27a^3 - 1$ **R.** $(3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$
10. $a^3 - 3a^2b + 5ab^2$ **R.** $a(a^2 - 3ab + 5b^2)$
11. $1 - 4b + 4b^2$ **R.** $(1 - 2b)^2$
12. $x^8 - 6x^4y^4 + y^8$ **R.** $(x^4+2x^2y^2-y^4)(x^4-2x^2y^2-y^4)$
13. $15m^2 + 11m - 14$ **R.** $(3m - 2)(5m + 7)$
14. $8m^3 - 27y^6$ **R.** $(2m - 3y^2)(4m^2 + 6my^2 + 9y^4)$
15. $1 + a^7$ **R.** $(1 + a)(1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6)$
16. $1 - m^2$ **R.** $(1 + m)(1 - m)$
17. $125a^6 + 1$ **R.** $(5a^2 + 1)(25a^4 - 5a^2 + 1)$
18. $6x^2 + 19x - 20$ **R.** $(6x - 5)(x + 4)$
19. $1 - m^3$ **R.** $(1 - m)(1 + m + m^2)$
20. $15x^4 - 17x^2 - 4$ **R.** $(5x^2 + 1)(3x^2 - 4)$
21. $x^4 + x^2 + 25$ **R.** $(x^2 + 3x + 5)(x^2 - 3x + 5)$
22. $343 + 8a^3$ **R.** $(7 + 2a)(49 - 14a + 4a^2)$
23. $x^2 + 2xy - 15y^2$ **R.** $(x - 3y)(x + 5y)$
24. $81a^6 - 4b^2c^8$ **R.** $(9a^3 + 2bc^4)(9a^3 - 2bc^4)$
25. $20 - x - x^2$ **R.** $(5 + x)(4 - x)$
26. $x^3 - 64$ **R.** $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$
27. $(x + 1)^2 - 81$ **R.** $(x + 10)(x - 8)$
28. $9a^3 + 63a - 45a^2$ **R.** $9a(a^2 - 5a + 7)$
29. $81x^4 + 25y^2 - 90x^2y$ **R.** $(9x^2 - 5y)^2$
30. $15x^4 - 15x^3 + 20x^2$ **R.** $5x^2(3x^2 - 3x + 4)$
31. $x^4 - 8x^2 - 240$ **R.** $(x^2 + 12)(x^2 - 20)$
32. $7a(x + y - 1) - 3b(x + y - 1)$ **R.** $(x + y - 1)(7a - 3b)$
33. $8a^2 - 22a - 21$ **R.** $(4a + 3)(2a - 7)$
34. $4a^6 - 1$ **R.** $(2a^3 + 1)(2a^3 - 1)$
35. $ax - bx + b - a - by + ay$ **R.** $(a - b)(x + y - 1)$
36. $15 + 14x - 8x^2$ **R.** $(3 + 4x)(5 - 2x)$

DESCOMPOSICIÓN DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA EN TRES FACTORES

Ejemplos

1) Descomponer en tres factores $5a^2 - 5$

Lo primero se verifica si hay algún factor común, y si lo hay, se saca dicho factor común.

En este caso tenemos el factor común 5, por tanto:

$$5a^2 - 5 = 5(a^2 - 1)$$

pero el factor $(a^2 - 1) = (a + 1)(a - 1)$ luego:

$$5a^2 - 5 = 5(a + 1)(a - 1)$$

donde $5a^2 - 5$ está descompuesto en tres factores.

2) Descomponer en tres factores $3x^3 - 18x^2y + 27xy^2$

Sacamos el factor común $3x$:

$$3x^3 - 18x^2y + 27xy^2 = 3x(x^2 - 6xy + 9y^2)$$

pero el factor $(x^2 - 6xy + 9y^2)$ es un trinomio cuadrado perfecto que descompuesto da $(x^2 - 6xy + 9y^2) = (x - 3y)^2$, luego:

$$3x^3 - 18x^2y + 27xy^2 = 3x(x - 3y)^2$$

3) Descomponer en tres factores $x^4 - y^4$

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

pero $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$, luego:

$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

4) Descomponer en tres factores $6ax^2 + 12ax - 90a$

Sacamos el factor común $6a$:

$6ax^2 + 12ax - 90a = 6a(x^2 + 2x - 15)$

pero $(x^2 + 2x - 15) = (x + 5)(x - 3)$ luego,

$6ax^2 + 12ax - 90a = 6a(x + 5)(x - 3)$

5) Descomponer en tres factores $3x^4 - 26x^2 - 9$

Factoramos esta expresión:

$3x^4 - 26x^2 - 9 = (3x^2 + 1)(x^2 - 9)$

$= (3x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$

6) Descomponer en tres factores $8x^3 + 8$

$8x^3 + 8 = 8(x^3 + 1)$

$= 8(x + 1)(x^2 - x + 1)$

7) Descomponer en tres factores: $a^4 - 8a + a^3 - 8$

$a^4 - 8a + a^3 - 8 = (a^4 - 8a) + (a^3 - 8)$

$= a(a^3 - 8) + (a^3 - 8)$

$= (a + 1)(a^3 - 8)$

$= (a + 1)(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$

8) Descomponer en tres factores $x^3 - 4x - x^2 + 4$

$x^3 - 4x - x^2 + 4 = (x^3 - 4x) - (x^2 - 4)$

$= x(x^2 - 4) - (x^2 - 4)$

$= (x - 1)(x^2 - 4)$

$= (x - 1)(x + 2)(x - 2)$

EJERCICIOS

Descomponer en tres factores:

1. $2a^3 - 2$

R. $2(a - 1)(a^2 + a + 1)$

2. $x^3 - 4x + x^2 - 4$

R. $(x + 1)(x + 2)(x - 2)$

3. $4ab^2 - 4abn + an^2$

R. $a(2b - n)^2$

4. $a^3 - a^3 - a + 1$

R. $(a + 1)(a - 1)^2$

5. $x^3 - x + x^2y - y$

R. $(x + y)(x + 1)(x - 1)$

6. $16x^3 - 48x^2y + 36xy^2$

R. $4x(2x - 3y)^2$

7. $5a^4 + 5a$

R. $5a(a + 1)(a^2 - a + 1)$

8. $n^4 - 81$

R. $(n^2 + 9)(n + 3)(n - 3)$

9. $ax^3 + 10ax^2 + 25ax$

R. $ax(x + 5)^2$

10. $m^3 + 3m^2 - 16m – 48$

R. $(m + 3)(m + 4)(m - 4)$

11. $(a + b)(a^2 - b^2) - (a^2 - b^2)$

R. $(a + b)(a - b)(a + b - 1)$

12. $x^4 - x^3 + x^2 - x$

R. $x(x^2 + 1)(x - 1)$

13. $a^4 - (a + 2)^2$

R. $(a^2 + a + 2)(a - 2)(a + 1)$

14. $a^6 + a$

R. $a(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$

15. $3abm^2 - 3ab$

R. $3ab(m + 1)(m - 1)$

16. $a^4 - a^3 + a - 1$

R. $(a + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)$

17. $6ax - 2bx + 6ab - 2b^2$

R. $2(3a - b)(x + b)$

18. $4a^2x^3 - 4a^2$

R. $4a^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$

19. $3abx^2 - 3abx - 18ab$

R. $3ab(x - 3)(x + 2)$

20. $18x^2y + 60xy^2 + 50y^3$

R. $2y(3x + 5y)^2$

21. $x^3 + 2x^2y - 3xy^2$

R. $x(x + 3y)(x - y)$

22. $45a^2x^4 - 20a^2$

R. $5a^2(3x^2 + 2)(3x^2 - 2)$

DESCOMPOSICIÓN DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA EN CUATRO FACTORES

Ejemplos

1) Descomponer en cuatro factores $2x^4 - 32$

$2x^4 - 32 = 2(x^4 - 16)$

$= 2(x^2 + 4)(x^2 - 4)$

$= 2(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

2) Descomponer en cuatro factores $a^6 - b^6$

Esta expresión puede factorarse como diferencia de cuadrados o como diferencia de cubos, ya que por los dos métodos obtenemos resultados idénticos.

Factorando como diferencia de cuadrados:

$a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$

(factorando $a^3 + b^3$ y $a^3 - b^3$) $= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a - b)$

$(a^2 + ab + b^2)$

Factorando como diferencia de cubos:

$a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$

$= (a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

($a^4 + a^2b^2 + b^4$ se descompone como trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción).

El resultado obtenido por este método es idéntico al anterior, ya que el orden de los factores no altera el producto.

3) Descomponer en cuatro factores $x^4 - 13x^2 + 36$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 9)(x^2 - 4)$

(factorando $x^2 - 9$ y $x^2 - 4$) $= (x + 3)(x - 3)(x + 2)(x - 2)$

4) Descomponer en cuatro factores $1 - 18x^2 + 81x^4$

$1 - 18x^2 + 81x^4 = (1 - 9x^2)^2$

(factorando $1 - 9x^2$) $= [(1 + 3x)(1 - 3x)]^2$

$= (1 + 3x)^2(1 - 3x)^2$

5) Descomponer en cuatro factores $4x^5 - x^3 + 32x^2 - 8$

$4x^5 - x^3 + 32x^2 - 8 = (4x^5 - x^3) + (32x^2 - 8)$

$= x^3(4x^2 - 1) + 8(4x^2 - 1)$

$= (4x^2 - 1)(x^3 + 8)$

(factorando $4x^2 - 1$ y $x^3 + 8$) $= (2x + 1)(2x - 1)(x + 2)$

$(x^2 - 2x + 4)$

6) Descomponer en cuatro factores $x^8 - 25x^5 - 54x^2$

$x^8 - 25x^5 - 54x^2 = x^2(x^6 - 25x^3 - 54)$

$x^2(x^3 - 27)(x^3 + 2)$

(factorando $x^3 - 27$) $= x^2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)(x^3 + 2)$

EJERCICIOS

Descomponer en cuatro factores:

1. $2x^4 + 6x^3 - 2x – 6$ **R.** $2(x - 1)(x + 3)(x^2 + x + 1)$

2. $3x^4 - 243$ **R.** $3(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$

3. $16x^4 - 8x^2y^2 + y^4$ **R.** $(2x + y)^2(2x - y)^2$

4. $9x^4 + 9x^3y - x^2 - xy$ **R.** $x(3x + 1)(3x - 1)(x + y)$

5. $12ax^4 + 33ax^2 - 9a$ **R.** $3a(2x+1)(2x-1)(x^2+ 3)$

6. $x^8 - y^8$ **R.** $(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

7. $x^6 - 7x^3 - 8$ **R.** $(x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1)$

8. $64 - x^6$ **R.** $(2+x)(4-2x+x^2)(2-x)(4+2x+x^2)$

9. $a^4 - 25a^2 + 144$ **R.** $(a + 3)(a - 3)(a + 4)(a - 4)$

10. $a^4 + 2a^3 - a^2 - 2^a$ **R.** $a(a + 1)(a - 1)(a + 2)$

11. $1 - 2a^3 + a^6$ **R.** $(1 - a)^2(1 + a + a^2)^2$

12. $m^6 – 729$

R. $(m + 3)(m^2 - 3m + 9)(m - 3)(m^2 + 3m + 9)$

13. $x^5 - x$ **R.** $x(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

14. $1 - a^6b^6$

R. $(1 + ab)(1 - ab + a^2b^2)(1 - ab)(1 + ab + a^2b^2)$

15. $x^8 + x^4 - 2$ **R.** $(x^4 + 2)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

16. $1 - a^8$ **R.** $(1 + a^4)(1 + a^2)(1 + a)(1 - a)$

17. $a^6 - 1$ **R.** $(a + 1)(a - 1)(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$

18. $x^4 - 41x^2 + 400$ **R.** $(x + 4)(x - 4)(x + 5)(x - 5)$

19. $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ **R.** $(a + b)^2(a - b)^2$

20. $x^5 + x^3 - 2x$ **R.** $x(x + 1)(x - 1)(x^2 + 2)$

Descomponer en cinco factores:

1. $x^9 - xy^8$ **R.** $x(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

2. $x^5 - 40x^3 + 144x$ **R.** $x(x + 2)(x - 2)(x + 6)(x - 6)$

3. $a^6 + a^3b^3 - a^4 - ab^3$

R. $a(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a + 1)(a - 1)$

4. $4x^4 - 8x^2 + 4$ **R.** $(x + 1)^2(x - 1)^2$

5. $a^7 - ab^6$

R. $a(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Descomponer en seis factores:

1. $x^{17} - x$

R. $x(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

2. $3x^6 - 75x^4 - 48x^2 + 1200$

R. $3(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)(x + 5)(x - 5)$

3. $a^6x^2 - x^2 + a^6x - x$

R. $x(a + 1)(a^2 - a + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)(x + 1)$

DESCOMPOSICIÓN DE UN POLINOMIO EN FACTORES POR EL MÉTODO DE EVALUACIÓN

Al estudiar la **divisibilidad** por $x - a$ demostramos que si un polinomio entero y racional en x se anula para $x = a$, el polinomio es divisible por $x - a$. Este mismo principio aplica a la descomposición de un polinomio en factores por el **Método de Evaluación**.

Ejemplos

1) Descomponer por evaluación $x^3 + 2x^2 - x - 2$

Los valores que daremos a x son los factores del término independiente 2: + 1, - 1, + 2 y - 2. Veamos si el polinomio se anula para $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$, y si se anula para alguno de estos valores, el polinomio será divisible por x menos ese valor.

Aplicando la división sintética previamente explicada veremos si el polinomio se anula para estos valores de x y simultáneamente encontraremos los coeficientes del cociente de la división. En este caso tenemos:

Coeficientes del polinomio	1	+ 2	- 1	- 2	+ 1	$x = 1$
		1 × 1 = + 1	3 × 1 = + 3	2 × 1 = + 2		
Coeficientes del cociente	1	+ 3	+ 2	0		

El residuo es 0, o sea que el polinomio dado se anula para $x = 1$, luego es divisible por $(x - 1)$.

Dividiendo $x^3 + 2x^2 - x - 2$ entre $x - 1$ el cociente será de segundo grado y sus coeficientes son 1, 3 y 2, luego el cociente es $x^2 + 3x + 2$ y como el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, tenemos:

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$ (factorando el trinomio) $= (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

2) Descomponer por evaluación $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

Los factores de 12 son ± (1, 2, 3, 4, 6, 12)

Pruebas

Coeficientes	1	- 3	- 4	+ 12	+ 1	$x = 1$
del polinomio		1 × 1 = + 1	(- 2) × 1 = - 2	(- 6) × 1 = - 6		
	1	- 2	- 6	+ 6		

El residuo es 6, luego el polinomio no se anula para $x = 1$, y no es divisible por $(x - 1)$

Coeficientes	1	- 3	- 4	+ 12	- 1	$x = -1$
del polinomio		1 × (- 1) = - 1	(- 4) × (- 1) = + 4	0 × (- 1) = 0		
	1	- 4	0	+ 12		

El residuo es 12, luego el polinomio no se anula para $x = -1$ y no es divisible por $x - (-1) = x + 1$

Coeficientes	1	- 3	- 4	+ 12	+ 2	$x = 2$
del cociente		1 × 2 = + 2	(- 1) × 2 = - 2	(- 6) × 2 = - 12		
	1	- 1	- 6	0		

El residuo es 0, luego el polinomio se anula para $x = 2$ y es divisible por $(x - 2)$

El cociente de dividir el polinomio dado $x^3 - 3x^2 + 4x + 12$ entre $x - 2$ será de segundo grado y sus coeficientes son 1, - 1 y - 6, luego el cociente será $x^2 - x - 6$.

Por tanto: $x^3 - 3x^2 + 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6)$ (factorando el trinomio) $= (x - 2)(x - 3)(x + 2)$

3) Descomponer por evaluación $x^4 - 11x^2 - 18x - 8$

Los factores de 8 son ± (1, 2, 4, 8)

Al escribir los coeficientes del polinomio dado hay que poner cero en el lugar correspondiente a los términos que falten, en este caso, en x^3.

Pruebas

Coeficientes	1	0	- 11	- 18	- 8	+ 1	$x = 1$
del polinomio		+ 1	+ 1	- 10	- 28		
	1	+ 1	- 10	- 28	- 36	no se anula	
	1	0	- 11	- 18	- 8	- 1	$x = -1$
		- 1	+ 1	+ 10	+ 8		
Coeficientes del cociente	1	- 1	- 10	- 8	0		

Se anula para $x = -1$, luego el polinomio dado es divisible por: $x - (-1) = x + 1$

El cociente de dividir $x^4 - 11x^2 - 18x - 8$ entre $x + 1$ será de tercer grado y sus coeficientes son 1, - 1, - 10 y - 8, luego el cociente será $x^3 - x^2 - 10x - 8$

Por tanto: $x^4 - 11x^2 - 18x - 8 = (x + 1)(x^3 - x^2 - 10x - 8)$ (1)

Ahora descomponemos $x^3 - x^2 - 10x - 8$ por el mismo método.

El valor $x = 1$, que no se anuló al polinomio dado, no se prueba porque no puede anular a este polinomio. El valor $x = -1$, que anuló al polinomio dado, se prueba nuevamente, y tenemos:

	1	- 1	- 10	- 8	- 1	$x = -1$
		- 1	+ 2	+ 8		
Coeficientes del cociente	1	- 2	- 8	0		

Se anula para $x = -1$, luego $x^3 - x^2 - 10x - 8$ es divisible por $x + 1$. El cociente será $x^2 - 2x - 8$, luego

$$x^3 - x^2 - 10x - 8 = (x + 1)(x^2 - 2x - 8)$$

Sustituyendo en (1) este valor, tenemos: $x^4 - 11x^2 - 18x - 8 = (x + 1)(x + 1)(x^2 - 2x - 8)$

(factorando el trinomio) $= (x + 1)(x + 1)(x - 4)(x + 2) = (x + 1)^2(x + 2)(x - 4)$

4) Descomponer por evaluación $x^5 - x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 22x + 24$

Los factores de 24 son + (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24).

Pruebas

Coeficientes	1	- 1	- 7	- 7	+ 22	+ 24	+ 1	$x = 1$
del polinomio		+1	0	- 7	- 14	+ 8		
	1	0	- 7	-14	+ 8	+ 32	no se anula	
	1	- 1	- 7	- 7	+ 22	+ 24	- 1	$x - 1$
		- 1	+2	+ 5	+ 2	- 24		
Coeficientes del cociente	1	- 2	- 5	- 2	+ 24	0		

Se anula para $x = -1$, luego es divisible por $x + 1$. El cociente será $x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x + 24$, luego:

$$x^5 - x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = (x + 1)(x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x + 24) \quad (1)$$

Ahora descomponemos $x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x + 24$. Se prueba nuevamente $x = -1$

Coeficientes	1	- 2	- 5	- 2	+ 24	- 1	$x = -1$
del polinomio		- 1	+ 3	+ 2	0		
	1	- 3	- 2	0	24	no se anula	

	1	- 2	- 5	- 2	+ 24	+ 2	$x = 2$
		+ 2	0	- 10	- 24		
Coeficientes del cociente	1	0	- 5	- 12	0		

Se anula para $x = 2$, luego $x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ es divisible por $x - 2$.

El cociente es $x^3 - 5x - 12$, luego:

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x - 2)(x^3 - 5x - 12)$$

Sustituyendo esta descomposición en (1), tenemos:

$$x^5 - x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = (x + 1)(x - 2)(x^3 - 5x - 12) \quad (2)$$

Ahora descomponemos $x^3 - 5x - 12$. Se prueba nuevamente $x = 2$, poniendo cero en el lugar correspondiente a x^2 y tenemos:

Coeficientes	1	0	- 5	- 12	+ 2	$x = 2$
del polinomio		+ 2	+ 4	- 2		
	1	+ 2	- 1	- 14	no se anula	
	1	0	- 5	- 12	- 2	$x = - 2$
		- 2	+ 4	+ 2		
	1	- 2	- 1	- 10	no se anula	
	1	0	- 5	- 12	+ 3	$x = 3$
		+ 3	+ 9	+ 12		
Coeficientes del cociente	1	+ 3	+ 4	0		

Se anula para $x = 3$, luego $x^3 - 5x - 12$ es divisible por $x - 3$. El cociente es $x^2 + 3x + 4$, luego:

$$x^3 - 5x - 12 = (x - 3)(x^2 + 3x + 4)$$

Sustituyendo esta descomposición en (2), tenemos:

$$x^5 - x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 3x + 4) \quad (2)$$

(El trinomio $x^2 + 3x + 4$ no tiene descomposición).

5) Descomponer por evaluación $6x^5 + 19x^4 - 59x^3 - 160x^2 - 4x - 48$

Los factores de 48 son ± (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 16, 24, 48). Al probar para $x = 1$, $x = - 1$, $x = 2$ vemos que el polinomio no se anula.

Probando para $x = - 2$:

Coeficientes	6	+ 19	- 59	- 160	- 4	+ 48	- 2	$x = - 2$
del polinomio		- 12	- 14	+146	+ 28	- 48		
Coeficientes del cociente	6	+ 7	- 73	- 14	+ 24	0		

Se anula luego:

$$6x^5 + 19x^4 - 59x^3 - 160x^2 - 4x - 48 = (x + 2)(6x^4 + 7x^3 - 73x^2 - 14x + 24) \quad (1)$$

Ahora descomponemos $6x^4 + 7x^3 - 73x^2 - 14x + 24$. Al probar $x = - 2$ vemos que no se anula. Probando $x = 3$

6	+ 7	- 73	- 14	+ 24	+ 3	$x = 3$
	+ 18	+ 75	+ 6	- 24		
6	+ 25	+ 2	- 8	0		

Se anula, luego:

$$6x^4 + 7x^3 - 73x^2 - 14x + 24 = (x - 3)(6x^3 + 25x^2 + 2x - 8)$$

Sustituyendo esta descomposición en (1):

$$6x^5 + 19x^4 - 59x^3 - 160x^2 - 4x - 48 = (x + 2)(x - 3)(6x^3 + 25x^2 + 2x - 8) \quad (2)$$

Ahora descomponemos $6x^3 + 25x^2 + 2x - 8$

$x = 3$ no se prueba, aunque anuló al polinomio anterior, porque 3 no es factor del término independiente 8.

Si probamos $x = 4$, vemos que no anula este polinomio. Probando $x = -4$:

6	+ 25	+ 2	- 8	- 4	$x = -4$
	- 24	+ 4	+ 8		
6	+ 1	- 2	0		

Se anula, luego: $6x^3 + 25x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(6x^2 + x - 2)$

Sustituyendo esta descomposición en (2), tenemos:

$$6x^5 + 19x^4 - 59x^3 - 160x^2 - 4x - 48 = (x + 2)(x - 3)(x + 4)(6x^2 + x - 2)$$

(factorando el trinomio) $= (x + 2)(x - 3)(x + 4)(3x + 2)(2x - 1)$

6) Descomponer por evaluación $3a^6 - 47a^4 - 21a^2 + 80$

Al escribir los coeficientes ponemos cero como coeficiente de los términos faltantes en a^5, en a^3 y en a.

Al hacer $a = 1$, $a = -1$, $a = 2$, $a = -2$ el polinomio no se anula. Probando $a = 4$:

3	0	- 47	0	- 21	0	+ 80	+ 4	$a = 4$
	+ 12	+ 48	+ 4	+ 16	- 20	- 80		
3	+ 12	+ 1	+ 4	- 5	- 20	0		

Se anula, luego: $3a^6 - 47a^4 - 21a^2 + 80 = (a - 4)(3a^5 + 12a^4 + a^3 + 4a^2 - 5a - 20)$ (1)

Para descomponer el cociente, si probamos $a = 4$ vemos que no se anula.

Probando $a = -4$:

3	+ 12	+ 1	+ 4	- 5	- 20	- 4	$a = -4$
	- 12	0	- 4	0	+ 20		
3	0	+ 1	0	- 5	0		

Se anula, luego: $3a^5 + 12a^4 + a^3 + 4a^2 - 5a - 20 = (a + 4)(3a^4 + a^2 - 5)$

Sustituyendo en (1): $3a^6 - 47a^4 - 21a^2 + 80 = (a - 4)(a + 4)(3a^4 + a^2 - 5)$

(El trinomio $3a^4 + a^2 - 5$ no tiene descomposición).

EJERCICIOS

Descomponer por evaluación:

1. $6x^3 + 23x^2 + 9x - 18$
R. $(x + 3)(3x - 2)(2x + 3)$

2. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$
R. $(x - 1)(x + 1)(x - 2)^2$

3. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$
R. $(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)$

4. $a^4 - 15a^2 - 10a + 24$
R. $(a - 1)(a + 2)(a + 3)(a - 4)$

5. $x^3 + x^2 - x - 1$
R. $(x - 1)(x + 1)^2$

6. $x^3 - 4x^2 + x + 6$
R. $(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

7. $a^3 - 3a^2 - 4a + 12$
R. $(a - 2)(a + 2)(a - 3)$

8. $m^3 - 12m + 16$
R. $(m - 2)^2(m + 4)$

9. $2x^3 - x^2 - 18x + 9$
R. $(x - 3)(x + 3)(2x - 1)$

10. $x^4 + 6x^3 + 3x + 140$
R. $(x + 4)(x + 5)(x^2 - 3x + 7)$

11. $8a^4 - 18a^3 - 75a^2 + 46a + 120$
R. $(a + 2)(a - 4)(2a - 3)(4a + 5)$

12. $a^3 + a^2 - 13a - 28$
R. $(a - 4)(a^2 + 5a + 7)$

13. $x^3 + 2x^2 + x + 2$
R. $(x + 2)(x^2 + 1)$

14. $n^3 - 7n + 6$
R. $(n - 1)(n - 2)(n + 3)$

15. $x^3 - 6x^2 + 32$
R. $(x + 2)(x - 4)^2$

16. $n^4 - 27n^2 - 14n + 120$
R. $(n - 2)(n + 3)(n + 4)(n - 5)$



Aryabhata, del siglo V, conoció la resolución completa de la ecuación de segundo grado. Brahmagupta, del siglo VI, fue alumno de Aryabhata, dio la resolución de las ecuaciones indeterminadas. Y Bháskara, del siglo XII, recoge los conocimientos de su época en su obra "Sidhanta Ciromani".

CAPÍTULO XII

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

El **máximo común divisor** (m. c. d.) de dos o más expresiones algebraicas es aquel que tiene mayor coeficiente numérico, mayor grado y está contenido exactamente en cada una de esas expresiones.

De este modo, el máximo común divisor de $10a^2b$ y $20a^3$ es $10a^2$; el máximo común divisor (m.c.d.) de $8a^2n^2$, $24an^3$ y $40a^3n^4p$ es $8an^2$.

Para obtener, entonces, el máximo común divisor de dos expresiones algebraicas, bastará factorizarlas al máximo y formar un producto con todos los factores irreducibles comunes elevados a sus menores exponentes.

FACTOR COMÚN

El **factor común** o **divisor común** es toda expresión algebraica contenida exactamente en cada una de las primeras expresiones. Así, x es divisor común de $2x$ y x^2; $5a^2b$ es divisor común de $10a^3b^2$.

Por otra parte, una expresión algebraica **prima** sólo es divisible por sí misma y por la unidad, como a, b, $a + b$ y $2x - 1$.

Y dos o más expresiones algebraicas son **primas entre sí** cuando su único divisor común es la unidad, como $2x$ y $3b$; $a + b$ y $a - x$.

M. C. D. DE MONOMIOS

La regla indica que hay que encontrar el m. c. d. de los coeficientes y a continuación de éste escribir las letras comunes, dando a cada letra el menor exponente que tenga en las expresiones dadas.

Ejemplos

1) Hallar el m.c.d. de a^2x^2 y $3a^3bx$

El m.c.d. de los coeficientes es 1. Las letras comunes son a y x. Tomamos a con su menor exponente: a^2, y x con su menor exponente: x; la b no se toma porque no es común. El m.c.d. será a^2x.

2) Hallar el m.c.d. de $36a^2b^4$, $48a^3b^3c$ y $60a^4b^3m$

Al descomponer en factores primos los coeficientes tenemos:

$36a^2b^4 = 2^2 \bullet 3^2 \bullet a^2b^4$

$48a^3b^3c = 2^4 \bullet 3 \bullet a^3b^3c$

$60a^4b^3m = 2^2 \bullet 3 \bullet 5 \bullet a^4b^3m$

El m.c.d. de los coeficientes es $2^2 \bullet 3$. Las letras comunes son a y b. Tomamos a con su menor exponente: a^2, y b con su menor exponente: b^3; c y m no se toman porque no son comunes. El m.c.d. será

$2^2 \bullet 3 \bullet a^2b^3 = 12a^2b^3$

M. C. D. DE POLINOMIOS POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

Siguiendo la regla, se descomponen los polinomios dados en sus factores primos y el m. c. d. es el producto de los factores comunes con su menor exponente.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. d. de $4a^2 + 4ab$ y $2a^4 - 2a^2b^2$

Factorando estas expresiones: $4a^2 + 4ab = 4a(a + b) = 2^2a(a + b)$

$2a^4 - 2a^2b^2 = 2a^2(a^2 - b^2) = 2a^2(a + b)(a - b)$

Los factores comunes son 2, a y $(a + b)$, luego: m. c. d. $= 2a(a + b)$

2) Hallar el m. c. d. de $x^2 - 4$, $x^2 - x - 6$ y $x^2 + 4x + 4$

Factorando: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

El factor común es $(x + 2)$ y se toma con su menor exponente, luego: m. c. d. $= x + 2$

3) Hallar el m. c. d. de:

$9a^3x^2 + 9x^2$, $6a^3x^2 - 12a^2x^2 - 18ax^2$, $6a^4x + 21a^3x + 15a^2x$

$9a^3x^2 + 9x^2 = 9x^2(a^3 + 1) = 3^2x^2(a + 1)(a^2 - a + 1)$

$6a^3x^2 - 12a^2x^2 - 18ax^2 = 6ax^2(a^2 - 2a - 3) = 2 \bullet 3ax^2(a - 3)(a + 1)$

$6a^4x + 21a^3x + 15a^2x = 3a^2x(2a^2 + 7a + 5) = 3a^2x(2a + 5)(a + 1)$

Los factores comunes son 3, x y $(a + 1)$, luego: m.c.d. $= 3x(a + 1)$

4) Hallar el m. c. d. de $x^6 - x^2$, $x^5 - x^4 + x^3 - x^2$ y $2x^6 + 2x^4 - 2x^3 - 2x$

$x^6 - x^2 = x^2(x^4 - 1) = x^2(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 = x^2(x^3 - x^2 + x - 1) = x^2(x^2 + 1)(x - 1)$

$2x^6 + 2x^4 - 2x^3 - 2x = 2x(x^5 + x^3 - x^2 - 1) = 2x(x^2 + 1)(x^3 - 1)$

$= 2x(x^2 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

m. c. d. $= x(x^2 + 1)(x - 1)$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE POLINOMIOS

Cuando se encuentra el m. c. d. de dos o más polinomios puede ocurrir que éstos puedan factorarse fácilmente o bien que su descomposición se complique. En el primer caso se busca el m. c. d. factorando los polinomios dados y en el segundo se busca el máximo común divisor por divisiones sucesivas.

EJERCICIOS

Encuentra el m. c. d. de las expresiones siguientes:

1. a^2x, ax^2 **R.** ax

2. ab^2c, a^2bc **R.** abc

3. $2x^2y$, x^2y^3 **R.** x^2y

4. $6a^2b^3$, $15a^3b^4$ **R.** $3a^2b^3$

5. $8am^3n$, $20x^2m^2$ **R.** $4m^2$

6. $18mn^2$, $27a^2m^3n^4$ **R.** $9mn^2$

7. $15a^2b^3c$, $24ab^2x$, $36b^4x^2$ **R.** $3b^2$

8. $12x^2yz^3$, $18xy^2z$, $24x^3yz^2$ **R.** $6xyz$

EJERCICIOS

Por descomposición en factores, encuentra el m. c. d. en estas expresiones:

1. $18a^2x^3y^4$, $6a^2x^2y^4 - 18a^2xy^4$
R. $6a^2xy^4$
2. $5a^2 - 15a$, $a^3 - 3a^2$
R. $a(a - 3)$
3. $3x^3 + 15x^2$, $ax^2 + 5ax$
R. $x(x + 5)$
4. $a^2 - b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$
R. $a - b$
5. $m^3 + n^3$, $3am + 3an$
R. $m + n$
6. $x^2 - 4$, $x^3 - 8$
R. $x - 2$
7. $2ax^2 + 4ax$, $x^3 - x^2 - 6x$
R. $x(x + 2)$
8. $8x^3 + y^3$, $4ax^2 - ay^2$
R. $2x + y$
9. $2a^3 - 12a^2b + 18ab^2$, $a^3x - 9ab^2x$
R. $a(a - 3b)$
10. $4x^4 - y^2$, $(2x^2 - y)^2$
R. $2x^2 - y$
11. $3x^5 - 3x$, $9x^3 - 9x$
R. $3x(x + 1)(x - 1)$
12. $a^2 + ab$, $ab + b^2$, $a^3 + a^2b$
R. $a + b$
13. $2x^3 - 2x^2$, $3x^2 - 3x$, $4x^3 - 4x^2$
R. $x(x - 1)$
14. $2a^2 + 2ab$, $4a^2 - 4ab$
R. $2a$
15. $6x^3y - 6x^2y$, $9x^3y^2 + 18x^2y^2$
R. $3x^2y$
16. $12a^2b^3$, $4a^3b^2 - 8a^2b^3$
R. $4a^2b^2$
17. $ab + b$, $a^2 + a$
R. $a + 1$
18. $x^2 - x$, $x^3 - x^2$
R. $x(x - 1)$
19. $30ax^2 - 15x^3$, $10axy^2 - 20x^2y^2$
R. $5x$
20. $9x^2 - 1$, $9x^2 - 6x + 1$
R. $3x - 1$
21. $4a^2 + 4ab + b^2$, $2a^2 - 2ab + ab - b^2$
R. $2a + b$
22. $3x^2 + 3x - 60$, $6x^2 - 18x - 24$
R. $3(x - 4)$

M. C. D. DE DOS POLINOMIOS POR DIVISIONES SUCESIVAS

Para encontrar el m. c. d. de dos polinomios que no pueden descomponerse fácilmente en factores se emplea el método de **divisiones sucesivas**, siguiendo la regla según la cual se ordenan ambos polinomios con relación a una misma letra y se divide el polinomio de mayor grado entre el de menor grado. Si son del mismo grado, puede tomarse cualquiera como dividendo. Si la división es exacta, el divisor será el m. c. d.; si no es exacta, se divide el divisor por el primer residuo, éste por el segundo residuo y así sucesivamente hasta llegar a una división exacta. El último divisor será el m. c. d.

Todas las divisiones deben continuarse hasta que el primer término del residuo sea de **grado inferior** al primer término del divisor.

Ejemplo

Hallar por divisiones sucesivas el m. c. d. $16x^3 + 36x^2 - 12x - 18$ y $8x^2 - 2x - 3$

Ambos polinomios están ordenados con relación a x. Dividimos el primero, que es de tercer grado, entre el segundo, que es de segundo grado:

$$\begin{array}{rl} 16x^3 + 36x^2 - 12x - 18 & \underline{|\,8x^2 - 2x - 3} \\ \underline{-16x^3 + 4x^2 + 6x} & 2x + 5 \\ 40x^2 - 6x - 18 & \\ \underline{-40x^2 + 10x + 15} & \\ 4x - 3 & \end{array}$$

Detenemos la división porque el primer término del residuo, $4x$, es de grado inferior al primer término del divisor $8x^2$

Ahora dividimos el divisor $8x^2 - 2x - 3$ entre el residuo $4x - 3$:

$$\begin{array}{rl} x^2 - 2x - 3 & \underline{|\,4x - 3} \\ \underline{-8x^2 + 6x} & 2x + 1 \\ 4x - 3 & \\ \underline{-4x + 3} & \end{array}$$

Como esta división es exacta, el divisor $4x - 3$ es el m. c. d.

EJERCICIOS

Por divisiones sucesivas, encuentra el m. c. d. de:

1. $12ax^4 - 3ax^3 + 26ax^2 - 5ax + 10a$ y $3x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 15$
R. $3x^2 + 5$
2. $3x^3 - 2x^2y + 9xy^2 - 6y^3$ y $6x^4 - 4x^3y - 3x^2y^2 + 5xy^3 - 2y^4$
R. $3x - 2y$
3. $ax^4 + 3ax^3 - 2ax^2 + 6ax - 8a$ y $x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x$
R. $x^2 + 3x - 4$
4. $12x^2 + 8x + 1$ y $2x^2 - 5x - 3$ **R.** $2x + 1$
5. $6a^2 - 2a - 20$ y $2a^3 - a^2 - 6a$ **R.** $a - 2$
6. $5a^3 - 6a^2x + ax^2$ y $3a^3 - 4a^2x + ax^2$ **R.** $a(a - x)$
7. $2x^3 + 4x^2 - 4x + 6$ y $x^3 + x^2 - x + 2$ **R.** $x^2 - x + 1$
8. $8a^4 - 6a^3x + 7a^2x^2 - 3ax^3$ y $2a^3 + 3a^2x - 2ax^2$
R. $a(2a - x)$
9. $a^5 - 2a^4 + a^3 + a - 1$ y $a^7 - a^6 + a^4 + 1$
R. $a^4 - a^3 + 1$
10. $2m^4 - 4m^3 - m^2 + 6m - 3$ y $3m^5 - 6m^4 + 8m^3 - 10m^2 + 5m$
R. $m^2 - 2m + 1$

REGLAS ESPECIALES

Para llevar a la práctica correctamente este método deben considerarse las siguientes reglas:

1) Cualquiera de los polinomios dados se puede dividir por un factor que no divida al otro polinomio. Dicho factor, por no ser factor común de ambos polinomios, no forma parte del m. c. d.

2) El residuo de cualquier división se puede dividir por un factor que no divida a los dos polinomios dados.

3) Si el primer término de cualquier residuo es negativo, puede cambiarse el signo a todos los términos de dicho residuo.

4) Si el primer término del dividendo o el primer término de algún residuo no es divisible por el primer término del divisor, se multiplican todos los términos del dividendo o del residuo por la cantidad necesaria para hacerlo divisible.

Ejemplos

1) Hallar, por divisiones sucesivas, el m. c. d. de:

$12x^3 - 26x^2 + 20x - 12$ y $2x^3 - x^2 - 3x$

Si dividimos el primer polinomio por 2 y el segundo por x nos queda:

$6x^3 - 13x^2 + 10x - 6$ y $2x^2 - x - 3$

Dividiendo:

$6x^3 - 13x^2 + 10x - 6$ | $2x^2 - x - 3$

$- 6x^3 + 3x^2 + 9x$ | $3x - 5$

$- 10x^2 + 19x - 6$

$10x^2 - 5x - 15$

$14x - 21$

Dividiendo el residuo $14x - 21$ entre 7 nos queda $2x - 3$

Ahora dividimos el divisor $2x^2 - x - 3$ entre el residuo $2x - 3$:

$2x^2 - x - 3$ | $2x - 3$

$- 2x^2 + 3x$ | $x + 1$

$2x - 3$

$- 2x + 3$

Esta división es exacta, por lo que el divisor $2x - 3$ es el m. c. d.

2) Hallar, por divisiones sucesivas, el m. c. d. de:

$3x^3 - 13x^2 + 5x - 4$ y $2x^2 - 7x - 4$.

Como $3x^3$ no es divisible entre $2x^2$, multiplicamos el primer polinomio por 2 para hacerlo divisible y nos queda:

$6x^3 - 26x^2 + 10x - 8$ y $2x^2 - 7x - 4$

Dividiendo:

$6x^3 - 26x^2 + 10x - 8$ | $2x^2 - 7x - 4$

$- 6x^3 + 21x^2 + 12x$ | $3x$

$- 5x^2 + 22x - 8$

$- 5x^2$ no es divisible por $2x^2$. Cambiamos el signo al residuo y tenemos:

$5x^2 - 22x + 8$, y multiplicando este residuo por 2, para que su primer término sea divisible por $2x^2$, nos queda $10x^2 - 44x + 16$.

(Ambas operaciones equivalen a multiplicar el residuo por - 2). Dividimos esta expresión entre $2x^2 - 7x - 4$:

$10x^2 - 44x + 16$ | $2x^2 - 7x - 4$

$- 10x^2 + 35x + 20$ | 5

$- 9x + 36$

Cambiamos el signo al residuo: $9x - 36$ y dividimos por 9: $x - 4$. (Ambas operaciones equivalen a dividir por - 9).

Dividimos $2x^2 - 7x - 4$ entre $x - 4$:

$2x^2 - 7x - 4$ | $x - 4$

$- 2x^2 + 8x$ 2 | $x + 1$

$x - 4$

$- x + 4$

Esta división es exacta, por lo que el m. c. d. es $x - 4$

3) Hallar, por divisiones sucesivas, el m. c. d. de:

$6x^5 - 3x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x$ y $3x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 2x^2 + 3x$

Si los polinomios dados tienen un mismo factor común, éste debe obtenerse y será un factor del m. c. d. buscado. Se halla el m. c. d. de las expresiones que quedan después de sacar el factor común y al multiplicarlo por el factor común, será el m. c. d. de las expresiones dadas.

En este caso, ambos polinomios tienen el factor común x . Sacamos este factor en cada polinomio y nos queda:

$6x^4 - 3x^3 + 8x^2 - x + 2$ y $3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x + 3$

Dividiendo:

$6x^4 - 3x^3 + 8x^2 - x + 2$ | $3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x + 3$

$- 6x^4 + 12x^3 - 20x^2 + 4x - 6$ | 2

$9x^3 - 12x^2 + 3x - 4$

Dividimos el divisor entre el residuo, pero como $3x^4$ no es divisible por $9x^3$ hay que multiplicar el divisor por 3 y tendremos:

$9x^4 - 18x^3 + 30x^2 - 6x + 9$ | $9x^3 - 12x^2 + 3x - 4$

$- 9x^4 + 12x^3 - 3x^2 + 4x$ | x

$- 6x^3 + 27x^2 - 2x + 9$

$6x^{\circ}$ no es divisible por $9x^3$, así que multiplicamos el residuo por - 3 y tendremos:

$18x^3 - 81x^2 + 6x - 27$ | $9x^3 - 12x^2 + 3x - 4$

$- 18x^3 + 24x^2 - 6x + 8$ | 2

$- 57x^2 - 19$

Dividiendo el residuo por - 19 nos queda $3x^2 + 1$. Dividimos el divisor entre el residuo.

$9x^3 - 12x^2 + 3x - 4$ | $3x^2 + 1$

$- 9x^3 - 3x$ | $3x - 4$

$- 12x^2 - 4$

$12x^2 + 4$

$3x^2 + 1$ es el m. c. d. de las expresiones que quedaron después de sacar el factor común x . Entonces, hay que multiplicar $3x^2 + 1$ por x y el m. c. d. de las expresiones dadas será:

$$\text{m.c.d} = x\left(3x^2 + 1\right)$$

M. C. D. DE TRES Ó MÁS POLINOMIOS POR DIVISIONES SUCESIVAS

Al igual que en Aritmética aquí se obtiene el m. c. d. de dos de los polinomios dados; luego el m. c. d. de otro de los polinomios dados y el m. c. d. hallado antes y así sucesivamente. El último m. c. d. corresponde a las expresiones dadas.

Ejemplo

Hallar, por divisiones sucesivas, el m. c. d. de:

$2x^3 - 11x^2 + 10x + 8$, $2x^3 + x^2 - 8x - 4$ y $6ax^2 + 11ax + 4a$

Buscamos el m. c. d. de las dos primeras expresiones:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -11x^2 & +10x & +8 & 2x^3 + x^2 - 8x - 4 \\ -2x^3 & -x^2 & +8x & +4 & 1 \\ \hline & -12x^2 & +18x & +12 & \end{array}$$

Si dividimos el residuo por - 6 nos queda $2x^2 - 3x - 2$, y dividiendo el divisor por esta expresión:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +x^2 & -8x & -4 & 2x^2 - 3x - 2 \\ -2x^3 & +3x^2 & +2x & & x + 2 \\ \hline & 4x^2 & -6x & -4 & \\ & -4x^2 & +6x & +4 & \\ \hline \end{array}$$

El m. c. d. de las dos primeras expresiones es $2x^2 - 3x - 2$. Ahora buscamos el m. c. d. del tercer polinomio dado $6ax^2 + 11ax + 4a$ y de este m. c. d.

Dividimos $6ax^2 + 11ax + 4a$ entre a y nos queda $6x^2 + 11x + 4$, con lo que tendremos:

$$\begin{array}{rrr|l} 6x^2 & +11x & +4 & 2x^2 - 3x - 2 \\ -6x^2 & +9x & +6 & 3 \\ \hline & 20x & +10 & \end{array}$$

Dividiendo el residuo por 10 nos queda $2x + 1$:

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^2 & -3x & -2 & 2x + 1 \\ -2x^2 & -x & & x - 2 \\ \hline & -4x & -2 & \\ & 4x & +2 & \\ \hline \end{array}$$

El m.c.d. de las tres expresiones dadas es $2x + 1$.

EJERCICIOS

Por divisiones sucesivas, encuentra el m. d. c. de:

1. $2x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 2x$, $3x^6 - 4x^4 - 3x^3 + 4x$ y $4x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3x$ **R.** $x(x - 1)$

2. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$ y $2x^2 - 5x - 3$ **R.** $x - 3$

3. $2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3$, $8x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - y^3$ y $6x^2 - xy - y^2$ **R.** $2x - y$

4. $x^4 + x^3 - x^2 - x$, $2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ y $5x^3 - 5x^2 + 2x - 2$ **R.** $x - 1$

5. $3a^4 + 9a^3x + 4a^2x^2 - 3ax^3 + 2x^4$, $a^4 + 3a^3x + a^2x^2 - 3ax^3 - 2x^4$ y $4a^3 + 8a^2x - ax^2 - 2x^3$ **R.** $a + 2x$



Los verdaderos sistematizadores del Álgebra fueron los árabes. A fines del Siglo VIII floreció la Escuela de Bagdad, a la que pertenecían Al Juarismi, Al Batani y Omar Khayyan. Al Juarismi, persa del si-glo IX, escribió el primer libro de Álgebra, y le dio nombre a esta ciencia. El sirio Al Batani aplicó el Álgebra a problemas astro-nómicos; por su parte el persa Omar Khayyan fue conocido por sus poemas, además, escribió un Tratado de Álgebra.

CAPÍTULO XIII

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El **común múltiplo** es toda expresión algebraica divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas. Así, $8a^3b^2$ es común múltiplo de $2a^2$ y $4a^3b$, porque $8a^3b^2$ es divisible exactamente por $2a^2$ y por $4a^3b$; $3x^2 - 9x + 6$ es común múltiplo de $x - 2$ y de $x^2 - 3x + 2$, porque $3x^2 - 9x + 6$ es divisible exactamente por $x - 2$ y por $x^2 - 3x + 2$

El **mínimo común múltiplo** de dos o más expresiones algebraicas es aquel que tiene menor coeficiente numérico y menor grado y es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas.

De este modo, el m. c. m. de $4a$ y $6a^2$ es $12a^2$; el m. c. m. de $2x^2$, $6x^3$ y $9x^4$ es $18x^4$.

La teoría del m. c. m. es de suma importancia para las fracciones y las ecuaciones.

MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO (M.C.M.) DE MONOMIOS (REGLA)

La regla dice que hay que encontrar el m. c. m. de los coeficientes y a continuación de éste escribir todas las letras distintas, sean o no comunes, dando a cada letra el mayor exponente que tenga en las expresiones dadas.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. m. de ax^2 y a^3x

Tomamos a con su mayor exponente a^3 y x con su mayor exponente x^2 y tendremos: m. c. m. = a^3x^2

2) Hallar el m. c. m. de $8ab^2c$ y $12a^3b^2$

$$8ab^2c = 2^3ab^2c$$

$$12a^3b^2 = 2^2 \cdot 3a^3b^2$$

El m. c. m. de los coeficientes es $2^3 \cdot 3$. A continuación escribimos a con su mayor exponente a^3, b con su mayor exponente b^2 y c, luego:

$$\text{m. c. m.} = 2^3 \cdot 3a^3b^2c = 24a^3b^2c$$

3) Hallar el m. c. m. de $10a^3x$, $36a^2mx^2$ y $24b^2m^4$

$$10a^3x = 2 \cdot 5a^3x$$

$$36a^2mx^2 = 2^2 \cdot 3^2a^2mx^2$$

$$24b^2m^4 = 2^3 \cdot 3b^2m^4$$

$$\text{m.c.m.} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5a^3b^2m^4x^2 = 360a^3b^2m^4x^2$$

M. C. M. DE MONOMIOS Y POLINOMIOS

La regla dice que se descomponen las expresiones dadas en sus factores primos, y el m. c. m. es el producto de los factores primos, comunes y no comunes, con su mayor exponente.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. m. de 6, $3x - 3$

Descomponiendo: $6 = 2 \cdot 3$

$3x - 3 = 3(x - 1)$

m.c.m. $2 \cdot 3(x - 1) = 6(x - 1)$

2) Hallar el m. c. m. de $14a^2$, $7x - 21$

Descomponiendo: $14a^2 = 2 \cdot 7a^2$

$7x - 21 = 7(x - 3)$

m.c.m. $= 2 \cdot 7 \cdot a^2(x - 3) = 14a^2(x - 3)$

3) Hallar el m. c. m. de $15x^2$, $10x^2 + 5x$, $45x^3$

Como $15x^2$ está contenido en $45x^3$, prescindimos de $15x^2$

Descomponiendo: $10x^2 + 5x = 5x(2x + 1)$

$45x = 3^2 \cdot 5 \cdot x^3$

m.c.m. $= 3^2 \cdot 5x^3(2x + 1) = 45x^3(2x + 1)$

4) Hallar el m. c. m. de $8a^2b$, $4a^3 - 4a$, $6a^2 - 12a + 6$

Descomponiendo: $8a^2b = 2^3 \cdot a^2b$

$4a^3 - 4a = 4a(a^2 - 1) = 2^2 \cdot a(a + 1)(a - 1)$

$6a^2 - 12a + 6 = 6(a^2 - 2a + 1) = 2 \cdot 3(a - 1)^2$

m.c.m. $= 2^3 \cdot 3 \cdot a^2b(a - 1)^2(a + 1) = 24a^2b(a - 1)^2(a + 1)$

5) Hallar el m. c. m. de $24a^2x$, $18xy^2$, $2x^3 + 2x^2 - 40x$, $8x^4 - 200x^2$

$24a^2x = 2^3 \cdot 3a^2x$

$18xy^2 = 2 \cdot 3^2xy^2$

$2x^3 + 2x^2 - 40x = 2x(x^2 + x - 20) = 2x(x + 5)(x - 4)$

$8x^4 - 200x^2 = 8x^2(x^2 - 25) \quad = 2^3 \cdot x^2(x + 5)(x - 5)$

m.c.m. $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2x^2y^2(x + 5)(x - 5)(x - 4) = 72a^2x^2y^2(x^2 - 25)(x - 4)$

EJERCICIOS

Encuentra el m. c. m. de:

1. $9ax^3y^4$, $15x^2y^5$ — **R.** $45ax^3y^5$

2. a^3, ab^2, a^2b — **R.** a^3b^2

3. x^2y, xy^2, xy^3z — **R.** x^2y^3z

4. $2ab^2$, $4a^2b$, $8a^3$ — **R.** $8a^3b^2$

5. $3x^2y^3z$, $4x^3y^3z^2$, $6x^4$ — **R.** $12x^4y^3z^2$

6. $6mn^2$, $9m^2n^3$, $12m^3n$ — **R.** $36m^3n^3$

7. $3a^2$, $4b^2$, $8x^2$ — **R.** $24a^2b^2x^2$

8. $5x^2$, $10xy$, $15xy^2$ — **R.** $30x^2y^2$

9. ax^3y^2, a^3xy, $a^2x^2y^3$ — **R.** $a^3x^3y^3$

10. $4ab$, $6a^2$, $3b^2$ — **R.** $12a^2b^2$

11. a^2, ab^2 — **R.** a^2b^2

12. x^2y, xy^2 — **R.** x^2y^2

13. ab^2c, a^2bc — **R.** a^2b^2c

14. a^2x^3, a^3bx^2 — **R.** a^3bx^3

15. $6m^2n$, $4m^3$ — **R.** $12m^3n$

EJERCICIOS

Encuentra el m. c. m. de:

1. $2a^2$, $6ab$, $3a^2 - 6ab$
R. $6a^2b(a - 2b)$

2. xy^2, x^2y^3, $5x^5 - 5x^4$
R. $5x^4y^3(x - 1)$

3. $9a^2$, $18b^3$, $27a^4b + 81a^3b^2$
R. $54a^3b^3(a + 3b)$

4. $2a$, $4x - 8$
R. $4a(x - 2)$

5. $3b^2$, $ab - b^2$
R. $3b^2(a - b)$

6. x^2y, $x^2y + xy^2$
R. $x^2y(x + y)$

7. 8, $4 + 8a$
R. $8(1 + 2a)$

8. $36a^2$, $4ax - 12ay$
R. $36a^2(x - 3y)$

9. $12xy^2$, $2ax^2y^3 + 5x^2y^3$
R. $12x^2y^3(2a + 5)$

10. mn, m^2, $mn^3 - mn^2$
R. $m^2n^2(n - 1)$

11. $6a^2b$, $3a^2b^2 + 6ab^3$
R. $6a^2b^2(a + 2b)$

12. $14x^2$, $6x^2 + 4xy$
R. $14x^2(3x + 2y)$

13. $9m$, $6mn^2 - 12mn$
R. $18mn(n - 2)$

14. 15, $3x + 6$
R. $15(x + 2)$

15. 10, $5 - 15b$
R. $10(1 - 3b)$

M. C. M. DE POLINOMIOS

Aquí aplica la misma regla del caso anterior.

Ejemplos

1) Hallar el m. c. m. de $4ax^2 - 8axy + 4ay^2$, $6b^2x - 6b^2y$

Descomponiendo:

$4ax^2 - 8axy + 4ay^2 = 4a(x^2 - 2xy + y^2) = 2^2 \bullet a(x - y)^2$

$6b^2x - 6b^2y = 6b^2(x - y) \qquad = 2 \bullet 3b^2(x - y)$

$\boxed{\text{m.c.m.} = 2^2 \bullet 3 \bullet ab^2(x - y)^2 = 12ab^2(x - y)^2}$

2) Hallar el m. c. m. de

$x^3 + 2bx^2$, $x^3y - 4b^2xy$, $x^2y^2 + 4bxy^2 + 4b^2y^2$

$x^3 + 2bx^2 = x^2(x + 2b)$

$x^3y - 4b^2xy = xy(x^2 - 4b^2) = xy(x + 2b)(x - 2b)$

$x^2y^2 + 4bxy^2 + 4b^2y^2 = y^2(x^2 + 4bx + 4b^2) = y^2(x + 2b)^2$

$\boxed{\text{m.c.m. } x^2y^2(x + 2b)^2(x - 2b)}$

3) Hallar el m. c. m. de $m^2 - mn$, $mn + n^2$, $m^2 - n^2$

$m^2 - mn = m(m - n)$

$mn + n^2 = n(m + n)$

$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$

$\boxed{\text{m.c.m.} = mn(m + n)(m - n) = mn(m^2 - n^2)}$

4) Hallar el m. c. m. de $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$

Es importante destacar que no es lo mismo cuadrado de una diferencia que diferencia de cuadrados, como tampoco es lo mismo cuadrado de una suma que suma de cuadrados. En efecto:

$(a - b)^2 = (a - b)^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(a + b)^2 = (a + b)^2$

$a^2 + b^2 = (a^2 + b^2)$

$\boxed{\text{m.c.m.} = (a + b)^2(a - b)^2(a^2 + b^2)}$

5) Hallar el m. c. m. de $(x + 1)^3$, $x^3 + 1$, $x^2 - 2x - 3$

En este caso no es lo mismo suma de cubos que cubo de una suma. En efecto:

$(x + 1)^3 = (x + 1)^3$

$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

$\boxed{\text{m.c.m.} = (x + 1)^3(x - 3)(x^2 - x + 1)}$

6) Hallar el m. c. m. de $(x - y)^3$, $x^3 - y^3$, $x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$, $3a^2x + 3a^2y$

Aquí no es lo mismo cubo de una diferencia que diferencia de cubos.

$(x - y)^3 = (x - y)^3$

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 = x(x^2 - y^2) + y(x^2 - y^2) =$

$= (x^2 - y^2)(x + y)$

$= (x + y)^2(x - y)$

$3a^2x + 3a^2y = 3a^2(x + y)$

$\boxed{\text{m.c.m.} = 3a^2(x + y)^2(x - y)^3(x^2 + xy + y^2)}$

7) Hallar el m. c. m. de $15x^3 + 20x^2 + 5x$, $3x^3 - 3x + x^2 - 1$, $27x^4 + 18x^3 + 3x^2$

$15x^3 + 20x^2 + 5x = 5x(3x^2 + 4x + 1) = 5x(3x + 1)(x + 1)$

$3x^3 - 3x + x^2 - 1 = 3x(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(3x + 1)$

$= (x + 1)(x - 1)(3x + 1)$

$27x^4 + 18x^3 + 3x^2 = 3x^2(9x^2 + 6x + 1) = 3x^2(3x + 1)^2$

$\boxed{\text{m.c.m.} = 15x^2(3x + 1)^2(x + 1)(x - 1) = 15x^2(3x + 1)^2(x^2 - 1)}$

8) Hallar el m. c. m. de $2x^3 - 8x$, $3x^4 + 3x^3 - 18x^2$, $2x^5 + 10x^4 + 12x^3$, $6x^2 - 24x + 24$

$2x^3 - 8x = 2x(x^2 - 4) = 2x(x + 2)(x - 2)$

$3x^4 + 3x^3 - 18x^2 = 3x^2(x^2 + x - 6) = 3x^2(x + 3)(x - 2)$

$2x^5 + 10x^4 + 12x^3 = 2x^3(x^2 + 5x + 6) = 2x^3(x + 3)(x + 2)$

$6x^2 - 24x + 24 = 6(x^2 - 4x + 4) = 6(x - 2)^2$

$\boxed{\text{m.c.m.} = 6x^3(x + 2)(x - 2)^2(x + 3) \text{ o lo que es igual m.c.m.} = 6x^3(x^2 - 4)(x - 2)(x + 3)}$

EJERCICIOS

Encuentra el m. c. m. de estas expresiones algebraicas:

1. $8(x - y)^2$, $12(x^2 - y^2)$

R. $24(x - y)^2(x + y)$

2. $5(x + y)^2$, $10(x^2 + y^2)$

R. $10(x + y)^2(x^2 + y^2)$

3. $6a(m + n)^3$, $4a^2b(m^3 + n^3)$

R. $12a^2b(m + n)^3(m^2 - mn + n^2)$

4. $ax(m - n)^3$, $x^3(m^3 - n^3)$

R. $ax^3(m - n)^3(m^2 + mn + n^2)$

5. $2a^2 + 2a$, $3a^2 - 3a$, $a^4 - a^2$

R. $6a^2(a + 1)(a - 1) = 6a^2(a^2 - 1)$

6. $x^2 + 2x$, $x^3 - 2x^2$, $x^2 - 4$

R. $x^2(x + 2)(x - 2) = x^2(x^2 - 4)$

7. $x^2 + x - 2$, $x^2 - 4x + 3$, $x^2 - x - 6$

R. $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$

8. $6a^2 + 13a + 6$, $3a^2 + 14a + 8$, $4 + 12a + 9a^2$

R. $(3a + 2)^2(2a + 3)(a + 4)$

9. $10x^2 + 10$, $15x + 15$, $5x^2 - 5$

R. $30(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) = 30(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

10. $3x + 3$, $6x - 6$

R. $6(x + 1)(x - 1) = 6(x^2 - 1)$

11. $5x + 10$, $10x^2 - 40$

R. $10(x + 2)(x - 2) = 10(x^2 - 4)$

12. $x^3 + 2x^2y$, $x^2 - 4y^2$

R. $x^2(x + 2y)(x - 2y) = x^2(x^2 - 4y^2)$

13. $3a^2x - 9a^2$, $x^2 - 6x + 9$

R. $3a^2(x - 3)^2$

14. $4a^2 - 9b^2$, $4a^2 - 12ab + 9b^2$

R. $(2a + 3b)(2a - 3b)^2$

15. $a^3 + a^2b$, $a^3 + 2a^2b + ab^2$

R. $a^2(a + b)^2$

16. $3ax + 12a$, $2bx^2 + 6bx - 8b$

R. $6ab(x - 1)(x + 4)$

17. $x^3 - 25x$, $x^2 + 2x - 15$

R. $x(x^2 - 25)(x - 3)$

18. $(x - 1)^2$, $x^2 - 1$

R. $(x + 1)(x - 1)^2$

19. $(x + 1)^2$, $x^2 + 1$

R. $(x + 1)^2(x^2 + 1)$

20. $x^3 + y^3$, $(x + y)^3$

R. $(x + y)^3(x^2 - xy + y^2)$

21. $x^3 - y^3$, $(x - y)^3$

R. $(x - y)^3(x^2 + xy + y^2)$

22. $x^2 + 3x - 10$, $4x^2 - 7x - 2$

R. $(x - 2)(x + 5)(4x + 1)$

23. $a^2 + a - 30$, $a^2 + 3a - 18$

R. $(a - 5)(a + 6)(a - 3)$

24. $x^3 - 9x + 5x^2 - 45$, $x^4 + 2x^3 - 15x^2$

R. $x^2(x + 3)(x - 3)(x + 5) = x^2(x^2 - 9)(x + 5)$

25. $x^6 - 4x^3 - 32$, $ax^4 + 2ax^3 + 4ax^2$

R. $ax^2(x - 2)(x^3 + 4)(x^2 + 2x + 4)$



La cultura árabe alcanza elevado desarrollo en ciudades como Sevilla, Córdoba y Toledo. La cultura musulmana surge en las universidades hispano-árabes, expandiéndose hacia Europa. Tres nombres pueden señalarse como representación de la cultura árabe en España: Geber Ibn-Aphla (Sevilla), que rectificó las Tablas de Ptolomeo; Arzaquel (Toledo) y Ben Exra (Calahorra).

CAPÍTULO XIV

FRACCIONES ALGEBRAICAS Y SU REDUCCIÓN

Una **fracción algebraica** es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas. Por ejemplo, $\frac{a}{b}$ es una fracción algebraica porque es el cociente indicado de la expresión *a* (dividendo) entre la expresión *b* (divisor). El dividendo *a* se llama **numerador** y el divisor *b* **denominador** de la fracción algebraica. El numerador y el denominador son los **términos** de la fracción.

Una expresión algebraica **entera** no tiene denominador literal, como a, $x + y$, $m - n$, $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b$, y se le puede considerar como una fracción de denominador 1. Así, $a = \frac{a}{1}$; $x + y = \frac{x + y}{1}$

Una expresión algebraica **mixta** consta de parte entera y parte fraccionaria, como: $a + \frac{b}{c}$ y $x - 3 - \frac{x-3}{x-a}$

Expresión mixta

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Estos mismos principios ya han sido demostrados en Aritmética y aplican igualmente a las fracciones algebraicas:

1) Cuando el numerador de una fracción algebraica se multiplica o divide por una cantidad, la fracción queda multiplicada en el primer caso y dividida en el segundo por dicha cantidad.

2) Cuando el denominador de una fracción algebraica se multiplica o divide por una cantidad, la fracción queda dividida en el primer caso y multiplicada en el segundo por dicha cantidad.

3) Cuando el numerador y el denominador de una fracción algebraica se multiplican o dividen por una misma cantidad, la fracción no se altera.

CAMBIO DE SIGNO CUANDO LOS TÉRMINOS DE LA FRACCIÓN SON POLINOMIOS

Si el numerador o el denominador de la fracción son un polinomio, se puede cambiar el signo al numerador o al denominador cambiando el signo a cada término del polinomio.

Si en $\frac{m-n}{x-y}$ cambiamos el signo al numerador y al denominador, esta fracción no varía, pero para cambiar el signo a $m - n$ hay que cambiar el signo de m y $- n$ y quedará $- m + n = n - m$; para cambiar el signo de $x - y$ hay que cambiar el signo de x y $- y$ y quedará $- x + y = y - x$, con lo que tendremos:

$$\frac{m-n}{x-y} = \frac{-m+n}{-x+y} = \frac{n-m}{y-x}$$

Si en la fracción $\frac{x-3}{x+2}$ cambiamos el signo del numerador y de la fracción, ésta no se altera y tendremos:

$$\frac{x-3}{x+2} = \frac{-x+3}{x+2} = -\frac{3-x}{x+2}$$

Del mismo modo, si en la fracción $\frac{3x}{1-x^2}$ cambiamos el signo al denominador y a la fracción, ésta no varía y tendremos:

$$\frac{3x}{1-x^2} = -\frac{3x}{-1+x^2} = \frac{3x}{x^2-1}$$

(En la práctica se suprime el paso intermedio).

De acuerdo con lo anterior, la fracción $\frac{x-2}{x-3}$ puede escribirse de cuatro modos:

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{2-x}{3-x} = -\frac{2-x}{x-3} = \frac{x-2}{3-x}$$

SIGNO DE LA FRACCIÓN Y DE SUS TÉRMINOS

Una fracción algebraica tiene tres signos: el de la fracción, el del numerador y el del denominador.

El **signo de la fracción** puede ser + ó - y se escribe delante de la raya de la fracción. Si delante de la raya no hay ningún signo, se sobreentiende que es +.

En la fracción $\frac{a}{b}$ el signo de la fracción es +; el del numerador + y el del denominador +.

En la fracción $-\frac{-a}{b}$ el signo de la fracción es -, el del numerador - y el del denominador +.

Estos signos pueden cambiarse en algunos casos, sin alterar la fracción.

Si designamos como m el cociente de dividir a entre b, se-gún la Ley de los Signos de la división tendremos:

$$\frac{a}{b} = m \ (1) \qquad \frac{-a}{-b} = m \ (2)$$

y por tanto

$$\frac{-a}{b} = -m \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{-b} = -m$$

Al cambiar el signo a los dos miembros de estas dos últimas igualdades tenemos:

$$-\frac{-a}{b} = m \ (3) \qquad \text{y} \qquad -\frac{a}{-b} = m \ (4)$$

(1), (2), (3) y (4) tienen el segundo miembro igual, por lo que los primeros miembros son iguales, y tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}$$

Con lo anterior podemos ver que:

1) Al cambiar los signos del numerador y el denominador de una fracción, ésta no se altera.

2) Al cambiar los signos del numerador y de la fracción, ésta no se altera.

3) Al cambiar los signos del denominador y de la fracción, ésta no se altera.

En resumen, podemos cambiar **dos** de los **tres** signos en una fracción sin que ésta se altere.

CAMBIO DE SIGNOS CUANDO EL NUMERADOR O DENOMINADOR SON PRODUCTOS INDICADOS

Si uno o ambos términos de una fracción son productos indicados, se pueden hacer los siguientes cambios de signos, de acuerdo con las reglas anteriores, sin alterar la fracción:

1) Cambiar el signo a un número par de factores sin cambiar el signo de la fracción.

Dada la fracción $\frac{ab}{xy}$ podemos escribir:

$$\frac{ab}{xy}=\frac{(-a)b}{(-x)y} \qquad \frac{ab}{xy}=\frac{(-a)b}{x(-y)}$$

$$\frac{ab}{xy}=\frac{(-a)(-b)}{xy} \qquad \frac{ab}{xy}=\frac{ab}{(-x)(-y)}$$

$$\frac{ab}{xy}=\frac{(-a)(-b)}{(-x)(-y)}$$

En los primeros cuatro ejemplos cambiamos el signo a **dos** factores; en el último, a **cuatro** factores, con número **par** en todos los casos, y el signo de la fracción **no se altera**.

2) Cambiar el signo a un número impar de factores cambiando el signo de la fracción.

Dada la fracción $\frac{ab}{xy}$ podemos escribir:

$$\frac{ab}{xy}=-\frac{(-a)b}{xy} \qquad \frac{ab}{xy}=\frac{ab}{x(-y)}$$

$$\frac{ab}{xy}=-\frac{(-a)(-b)}{(-x)y} \qquad \frac{a}{b}=-\frac{(-a)b}{(-x)(-y)}$$

En los primeros dos ejemplos cambiamos el signo a **un** factor; en los dos últimos a **tres** factores, con número **impar** en todos los casos, y en todos los casos **cambiamos el signo** de la fracción.

Si aplicamos estos principios a la fracción $\frac{(a-1)(a-2)}{(x-3)(x-4)}$, dado que los factores son binomios, para cambiar el signo de cualesquiera de ellos hay que cambiar el signo a sus **dos términos**, con lo que tendremos:

$$\frac{(a-1)(a-2)}{(x-3)(x-4)}=\frac{(1-a)(a-2)}{(3-x)(x-4)}$$

$$\frac{(a-1)(a-2)}{(x-3)(x-4)}=\frac{(1-a)(a-2)}{(x-3)(x-4)}$$

$$\frac{(a-1)(a-2)}{(x-3)(x-4)}=\frac{(1-a)(2-a)}{(x-3)(x-4)}$$

$$\frac{(a-1)(a-2)}{(x-3)(x-4)}=\frac{(a-1)(2-a)}{(3-x)(4-x)}$$

Estos principios son de suma importancia para simplificar fracciones y efectuar operaciones.

REDUCCIÓN DE FRACCIONES

La **reducción de fracciones algebraicas** consiste en cambiar su forma sin cambiar su valor.

Por otra parte, para simplificar una fracción algebraica debe convertirse en una fracción equivalente cuyos términos sean primos entre sí, en cuyo caso la fracción es **irreductible** y entonces la fracción queda reducida a **su más simple expresión** o a su **mínima expresión**.

Para **simplificar fracciones** cuyos términos sean **monomios** la regla indica que deben dividirse el numerador y el denominador por sus factores comunes hasta que sean primos entre sí.

Ejemplos

1) Simplificar $\frac{4a^2b^5}{6a^3b^3m}$

Tendremos: $\frac{4a^2b^5}{6a^3b^3m}=\frac{2\bullet 1\bullet b^2}{3\bullet a\bullet 1\bullet m}=\frac{2b^2}{3am}$

Dividimos 4 y 6 entre 2 y obtuvimos 2 y 3; a^2 y a^3 entre a^2 y obtuvimos los cocientes 1 y a; b^5 y b^3 y obtuvimos los cocientes b^2 y 1.

Como $2b^2$ y $3am$ no tienen ningún factor común, la fracción resultante es irreductible.

2) Simplificar $\frac{9x^3y^3}{36x^5y^6}$

$$\frac{9x^3y^3}{36x^5y^6}=\frac{1\bullet 1\bullet 1}{4\bullet x^2\bullet y^3}=\frac{1}{4x^2y^3}$$

Dividimos 9 y 36 entre 9; x^3 y x^5 entre x^3; por último y^3 e y^6 entre y^3

Aquí vemos que al simplificar desaparecen todos los factores del numerador y queda en el numerador 1, que no puede suprimirse. Si desaparecen todos los factores del denominador, nos queda 1, sí puede suprimirse. El resultado es una expresión entera.

EJERCICIOS

Simplifica o reduce a su más simple expresión:

1. $\frac{12x^3y^4z^5}{32xy^2z}$ **R.** $\frac{3x^2y^2z^4}{8}$

2. $\frac{12a^3b^3}{60a^3b^5x^6}$ **R.** $\frac{1}{5ab^2x^6}$

3. $\frac{21mn^3x^6}{28m^4n^2x^2}$ **R.** $\frac{3nx^4}{4m^3}$

4. $\frac{a^2}{ab}$ **R.** $\frac{a}{b}$

5. $\frac{2a}{8a^2b}$ **R.** $\frac{1}{4ab}$

6. $\frac{x^2y^2}{x^3y^3}$ **R.** $\frac{1}{xy}$

7. $\frac{ax^3}{4x^5y}$ **R.** $\frac{a}{4x^2y}$

8. $\frac{6m^2n^3}{3m}$ **R.** $2mn^3$

9. $\frac{9x^2y^3}{24a^2x^3y^4}$ **R.** $\frac{3}{8a^2xy}$

10. $\frac{8m^4n^3x^2}{24mn^2x^2}$ **R.** $\frac{m^3n}{3}$

11. $\frac{3x^2-4x-15}{x^2-5x+6}$ **R.** $\frac{3x+5}{x-2}$

12. $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$ **R.** $\frac{x-y}{x+y}$

13. $\frac{3ab}{2a^2x+2a^3}$ **R.** $\frac{3b}{2a(x+a)}$

14. $\frac{xy}{3x^2y-3xy^2}$ **R.** $\frac{1}{3(x-y)}$

15. $\frac{2ax+4bx}{3ay+6by}$ **R.** $\frac{2x}{3y}$

16. $\frac{x^2-2x-3}{x-3}$ **R.** $x+1$

17. $\frac{x^2-4}{5ax+10a}$ **R.** $\frac{x-2}{5a}$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES CUYOS TÉRMINOS SEAN POLINOMIOS

Para **simplificar fracciones** cuyos términos sean **polinomios** se descomponen en factores, los polinomios hasta donde sea posible y se suprimen los factores comunes del numerador y el denominador.

Ejemplos

1) Simplificar $\frac{2a^2}{4a^2-4ab}$

Factorando el denominador tenemos:

$$\frac{2a^2}{4a^2-4ab}=\frac{2a^2}{4a(a-b)}=\frac{a}{2(a-b)}$$

Aquí dividimos 2 y 4 entre 2 y a^2, y a entre a.

2) Simplificar $\frac{4x^2y^3}{24x^3y^3-36x^3y^4}$

Factorando

$$\frac{4x^2y^3}{24x^3y^3-36x^3y^4}=\frac{4x^2y^3}{12x^3y^3(2-3y)}=\frac{1}{3x(2-3y)}$$

3) Simplificar $\frac{x^2-5x+6}{2ax-6}$

$$\frac{x^2-5x+6}{2ax-6}=\frac{(x-2)(x-3)}{2a(x-3)}=\frac{x-2}{2a}$$

4) Simplificar $\frac{8a^3+27}{4a^2+12a+9}$

$$\frac{8a^3+27}{4a^2+12a+9}=\frac{(2a+3)(4a^2-6a+9)}{(2a+3)^2}=\frac{4a^2-6a+9}{2a+3}$$

5) Simplificar $\frac{a^3-25a}{2a^3+8a^2-10a}$

$$\frac{a^3-25a}{2a^3+8a^2-10a}=\frac{a(a^2-25)}{2a(a^2+4a-5)}=\frac{a(a+5)(a-5)}{2a(a+5)(a-1)}=\frac{a-5}{2(a-1)}$$

6) Simplificar $\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^4+x^3-2x^2+9x-9}$

Descomponiendo por evaluación tenemos:

$$\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^4+x^3-2x^2+9x-9}=\frac{(x-1)(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x^2-x+3)}=\frac{x-1}{x^2-x+3}$$

EJERCICIOS

Simplifica o reduce a su más simple expresión:

1. $\dfrac{10a^2b^3c}{80\left(a^3-a^2b\right)}$ **R.** $\dfrac{b^3c}{8(a-b)}$

2. $\dfrac{m^2+n^2}{m^4-n^4}$ **R.** $\dfrac{1}{m^2-n^2}$

3. $\dfrac{x^3+y^3}{(x+y)^3}$ **R.** $\dfrac{x^2-xy-y^2}{(x+y)^2}$

4. $\dfrac{(m-n)^2}{m^2-n^2}$ **R.** $\dfrac{m-n}{m+n}$

5. $\dfrac{(a-x)^3}{a^3-x^3}$ **R.** $\dfrac{(a-x)^2}{a^2+ax+x^2}$

6. $\dfrac{a^2-a-20}{a^2-7a+10}$ **R.** $\dfrac{a+4}{a-2}$

7. $\dfrac{\left(1-a^2\right)^2}{a^2-7a+10}$ **R.** $(1-a)^2$

8. $\dfrac{a^4b^2-a^2b^4}{a^4-b^4}$ **R.** $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

9. $\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$ **R.** $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$

10. $\dfrac{n^3-n}{n^2-5n-6}$ **R.** $\dfrac{n(n-1)}{n-6}$

11. $\dfrac{8n^3+1}{8n^3-4n^2+2n}$ **R.** $\dfrac{2n+1}{2n}$

12. $\dfrac{a-(b-c)^2}{(a+b)^2-c^2}$ **R.** $\dfrac{a-b+c}{a+b+c}$

13. $\dfrac{3x^3+9x^2}{x^2+6x+9}$ **R.** $\dfrac{3x^2}{x+3}$

14. $\dfrac{a\left(4a^2-8ab\right)}{x\left(3a^2-6ab\right)}$ **R.** $\dfrac{4a}{3x}$

15. $\dfrac{x^3-6x^2}{x^2-12x+36}$ **R.** $\dfrac{x^2}{x-6}$

16. $\dfrac{x^4-8x^2+15}{x^4-9}$ **R.** $\dfrac{x^2-5}{x^3+3}$

17. $\dfrac{a^4+6a^2-7}{a^4+8a^2-9}$ **R.** $\dfrac{a^2+7}{a^2+9}$

18. $\dfrac{4a^4-15a^2-4}{a^2-8a-20}$ **R.** $\dfrac{(a-2)\left(4a^2+1\right)}{a-10}$

19. $\dfrac{125a+a^4}{2a^3+20a^2+50a}$ **R.** $\dfrac{a^2-5a+25}{2(a+5)}$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES DONDE HAY QUE CAMBIAR EL SIGNO A UNO O MÁS FACTORES

Ejemplos

1) Simplificar $\dfrac{2a-2b}{3b-3a}$

Descomponiendo: $\dfrac{2a-2b}{3b-3a}=\dfrac{2(a-b)}{3(b-a)}=-\dfrac{2(a-b)}{3(a-b)}=-\dfrac{2}{3}$

Al descomponer vemos que no hay simplificación porque el factor (a - b) del numerador es distinto del factor (b - a) del denominador, pero cambiando el signo a (b - a) se convierte en (a - b) y este factor se cancela con el (a - b) del numerador, pero como le cambiamos el signo a un factor (número impar), hay que cambiar el signo de la **fracción**, para que no varíe y ponemos - delante de la fracción.

2) Simplificar $\dfrac{ax^2-9a}{3x-3y-x^2+xy}$

$$\frac{ax^2-9a}{3x-3y-x^2+xy}=\frac{a(x+3)(x-3)}{(x-y)(3-x)}=\frac{a(x+3)(x-3)}{(y-x)(x-3)}=\frac{a(x+3)}{y-x}$$

Cambiamos el signo al factor (3 - x) convirtiéndolo en (x - 3) que se cancela con el (x - 3) del numerador, y también cambiamos el signo al factor (x - y) que se convierte en (y - x). Como le cambiamos el signo a dos factores (número par) el signo de la fracción **no** se cambia.

Si cambiamos el signo solamente a (3 - x) hay que cambiarle el signo a la fracción, y tendremos:

ax^2 - 9a = a (x + 3)(x - 3) = - a (x + 3)(x - 3) = a (x + 3)

3x - 3y - x^2 + xy (x - y)(3 - x) (x - y)(x - 3) x - y

Ambas soluciones son válidas.

3) Simplificar $\dfrac{2a+a-3}{1-a^3}$

$$\frac{2a^2+a-3}{1-a^3}=\frac{(2a+3)(a-1)}{(1-a)\left(1+a+a^2\right)}=\frac{(2a+3)(a-1)}{(a-1)\left(1+a+a^2\right)}=\frac{2a+3}{x-y}$$

4) Simplificar $\dfrac{x^2-4x+4}{4x^2-x^4}$

$$\frac{x^2-4x+4}{4x^2-x^4}=\frac{(x-2)^2}{x^2\left(4-x^2\right)}=\frac{(x-2)^2}{x^2(2+x)(x-2)}=\frac{x-2}{x^2(x+2)}$$

Aquí cambiamos el signo al factor (2 - x) y a la fracción.

Además, como la descomposición del trinomio cuadrado perfecto x^2 - 4x + 4 puede escribirse (x - 2)^2 ó (2 - x)^2, usando esta última forma tendremos:

$$\frac{x^2-4x+4}{4x^2-x^4}=\frac{(2-x)^2}{x^2(2+x)(2-x)}=\frac{2-x}{x^2(2+x)}$$

EJERCICIOS

Simplifica o reduce a su más simple expresión:

1. $\frac{4-4x}{6x-6}$ **R.** $-\frac{2}{3}$

2. $\frac{a^2-b^2}{b^2-a^2}$ **R.** –1

3. $\frac{m^2-n^2}{(n-m)^2}$ **R.** $\frac{m+n}{m-n}$

4. $\frac{x^2-x+12}{16-x^2}$ **R.** $\frac{x+3}{x+4}$

5. $\frac{2x^2 9x-5}{10+3x-x^2}$ **R.** $\frac{2x+1}{x+2}$

6. $\frac{8-a^3}{a^2+2a-8}$ **R.** $\frac{a^2+2a+4}{a+4}$

7. $\frac{a^2+a-2}{n-an-m+am}$ **R.** $\frac{a+2}{n-m}$

8. $\frac{4x^2-4xy+y^2}{5y-10x}$ **R.** $\frac{y-2x}{5}$

9. $\frac{9-6x+x^2}{x^2-7x+12}$ **R.** $\frac{x-3}{x-4}$

10. $\frac{a^2-b^2}{b^3-a^3}$ **R.** $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$

11. $\frac{3bx-6x}{8-b^3}$ **R.** $\frac{3x}{b^2+2b+4}$

12. $\frac{(1-a)^3}{a-1}$ **R.** *(a-1)(1-a)*

13. $\frac{(a-b)^3}{(b-a)^2}$ **R.** *a-b*

14. $\frac{(x-5)^3}{125-x^3}$ **R.** $\frac{(x-5)^2}{25+5x+x^2}$

15. $\frac{2x^2-22x+60}{75-3x^2}$ **R.** $\frac{2(6-x)}{3(x-5)}$

16. $\frac{5x^3-15x^2y}{90x^3y^2-10x^5}$ **R.** $\frac{1}{2x(x+3y)}$

SIMPLIFICACIÓN DE FACTORES CUYOS TÉRMINOS NO PUEDEN FACTORARSE FACILMENTE

Para **simplificar fracciones** cuyos términos no pueden factorarse fácilmente, se busca el m. c. d. del numerador y el denominador por divisiones sucesivas y se dividen el numerador y el denominador por su m. c. d.

Ejemplo

Simplificar $\frac{x^6-2x^5+5x^4-x^3+2x^2-5x}{x^5-2x^4+6x^3-2x^2+5x}$

Al buscar el m. c. d. del numerador y el denominador por divisiones sucesivas encontramos que el m. c. d. es $x(x^2-2x+5)=x^3-2x^2+5x$

Ahora dividimos los dos términos de la fracción por su m. c. d. x^3-2x^2+5x y tendremos:

$$\frac{x^6-2x^5+5x^4-x^3+2x^2-5x}{x^5-2x^4+6x^3-2x^2+5x}$$

$$\frac{(x^6-2x^5+5x^4-x^3+2x^2-5x)\div(x^3-2x^2+5x)}{(x^5-2x^4+6x^3-2x^2+5x)\div(x^3-2x^2+5x)}=\frac{x^3-1}{x^2+1}$$

EJERCICIOS

Simplifica las fracciones siguientes encontrando el m. c. d. de los dos términos:

1. $\frac{6x^3-13x^2+18x-8}{10x^3-9x^2+11x+12}$ **R.** $\frac{3x-2}{5x+3}$

2. $\frac{x^4-2x^3y+2x^2y^2-xy^3}{2x^4-5x^3y+4x^2y^2-xy^3}$ **R.** $\frac{x^2+xy+y^2}{2x^2-3xy+y^2}$

3. $\frac{2a^5-a^4+2a^3+2a^2+3}{3a^5-a^4+3a^3+4a^2+5}$ **R.** $\frac{2a^3-a^2+3}{3a^3-a^2+5}$

4. $\frac{1-x-x^3+x^4}{1-2x-x^2-2x^3+x^4}$ **R.** $\frac{1-2x+x^2}{1-3x+x^2}$

5. $\frac{2m^3+2m^2n-mn^2-n^3}{3m^3+3m^2n+mn+n^2}$ **R.** $\frac{2m^2-n^2}{3m^2+n}$

6. $\frac{a^4-a^3x+a^2x^2-ax^3}{a^4-a^3x-2a^2x^2+2ax^3}$ **R.** $\frac{a^2+x^2}{a^2-2x^2}$

7. $\frac{x^4+3x^3+4x^2-3x-5}{x^4+3x^3+6x^2+3x+5}$ **R.** $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

8. $\frac{2ax^4-ax^3-ax^2-2ax+2a}{3ax^4-4ax^3+ax^2-2ax-3a}$ **R.** $\frac{2x^3+x^2-2}{3x^3-x^2+3}$

REDUCIR UNA FRACCIÓN A TERMINOS MAYORES

Para reducir una fracción a términos **mayores** se debe convertir una fracción en otra equivalente de numerador o denominador dado, siendo el nuevo numerador o denominador un múltiplo del numerador o denominador de la fracción dada.

Ejemplos

1) Reducir $\frac{2a}{3b}$ a una fracción equivalente de numerador $6a^2$

$$\frac{2a}{3b} = \frac{6a^2}{\quad}$$

Para que $2a$ se convierta en $6a^2$ hay que multiplicarlo por $6a^2 \div 2a = 3a$; luego, para que la fracción no varíe, hay que multiplicar el denominador por $3a$: $3b \times 3a = 9ab$, por tanto:

$$\frac{2a}{3b} = \frac{6a^2}{9ab}$$

La fracción obtenida es equivalente a la fracción dada, porque una fracción no varía si sus dos términos se multiplican por una misma cantidad.

2) Convertir $\frac{5}{4y^3}$ en fracción equivalente de denominador $20a^2y^4$

$$\frac{5}{4y^3} = \frac{\quad}{20a^2y^4}$$

Para que $4y^3$ se convierta en $20a^2y^4$ hay que multiplicarlo por $20a^2y^4 \div 4y^3 = 5a^2y$; luego, para que la fracción no varíe, hay que multiplicar el numerador por $5a^2y$ $5 \times 5a^2y = 25a^2y$, y tenemos:

$$\frac{5}{4y^3} = \frac{25a^2y}{20a^2y^2}$$

3) Reducir $\frac{x-2}{x-3}$ a una fracción equivalente de denominador $x^2 - x - 6$

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{\quad}{x^2 - x - 6}$$

Para convertir $x - 3$ en $x^2 - x - 6$ hay que multiplicarlo por $(x^2 - x - 6) \div (x - 3) = x + 2$, luego se multiplica el numerador por $x + 2$, y tendremos:

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2 - x - 6} = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6}$$

EJERCICIOS

Completa estas expresiones:

1. $\frac{3}{2a} = \frac{\quad}{4a^2}$ **R.** $\frac{6a}{4a^2}$

2. $\frac{5}{9x^2} = \frac{20a}{\quad}$ **R.** $\frac{20a}{36ax^2}$

3. $\frac{m}{ab^2} = \frac{\quad}{2a^2b^2}$ **R.** $\frac{2am}{2a^2b^2}$

4. $\frac{3x}{8y} = \frac{9x^2y^2}{\quad}$ **R.** $\frac{9x^2y^2}{24xy^3}$

5. $\frac{4m}{5n^2} = \frac{\quad}{5n^3}$ **R.** $\frac{4mn}{5n^3}$

6. $\frac{2x+7}{5} = \frac{\quad}{15}$ **R.** $\frac{6x+21}{15}$

7. $\frac{2x}{x-1} = \frac{\quad}{x^2 - x}$ **R.** $\frac{2x^2}{x^2 - x}$

8. $\frac{a^2}{a+2} = \frac{2a^3}{\quad}$ **R.** $\frac{2a^3}{2a^2 + 4a}$

9. $\frac{x-4}{x+3} = \frac{\quad}{x^2 + 5x + 6}$ **R.** $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 5x + 6}$

10. $\frac{2a}{x+a} = \frac{2a^3}{\quad}$ **R.** $\frac{2a^3}{a^2x + a^3}$

DE FRACCIÓN A EXPRESIÓN ENTERA O MIXTA

Dado que una fracción representa la división indicada del numerador entre el denominador, para **reducir** una fracción a **expresión entera** o **mixta** aplicamos esta regla:

Se divide el numerador entre el denominador y si la división es exacta, la fracción equivale a una expresión entera. Pero si la división no es exacta, se continúa hasta que el primer término del residuo no sea divisible por el primer término del divisor y se añade al cociente una fracción cuyo numerador es el residuo y cuyo denominador es el divisor.

Ejemplos

1) Reducir a expresión entera

$$\frac{4x^3 - 2x^2}{2x}$$

Al dividir cada término del numerador por el denominador tenemos:

$$\frac{4x^3 - 2x^2}{2x} = \frac{4x^3}{2x} = \frac{2x^2}{2x} = 2x^2 - x$$

2) Reducir a expresión mixta:

$$\frac{3a^3 - 12a^2 - 4}{3a}$$

Dividimos el numerador por el denominador:

```
 3a³ - 12a² - 4      | 3a
-3a³                 | a² - 4a
 ------------
     - 12a² - 4
       12a²
     ----------
            - 4
```

$$3a^3 - 12a^2 - 4 = a^2 - 4a + -\frac{4}{3a}$$

Si cambiamos el signo al numerador - 4 y a la fracción, tendremos:

$$3a^3 - 12a^2 - 4 = a^2 - 4a - \frac{4}{3a}$$

3) Reducir a expresión mixta:

$$\frac{6x^3 - 3x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 2}$$

```
 6x³ - 3x² - 5x + 3   | 3x² - 2
-6x³       + 4x       | 2x - 1
 ------------------
     - 3x²  - x + 3
       3x²      - 2
     --------------
            - x + 1
```

Tendremos:

$$\frac{6x^3 - 3x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 2} = 2x - 1 - \frac{-x + 1}{3x^2 - 2}$$

Si cambiamos el signo al numerador (a cada uno de sus términos) y a la fracción, tendremos:

$$\frac{6x^3 - 3x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 2} = 2x - 1 - \frac{x - 1}{3x^2 - 2}$$

REDUCIR UNA EXPRESIÓN MIXTA A FRACCIONARIA

Para reducir una expresión mixta a una fraccionaria se multiplica la parte entera por el denominador; a este producto se le suma o resta el numerador, según si el signo delante de la fracción es + ó -, y se parte todo por el denominador.

La fracción resultante se simplifica, de ser posible.

Ejemplos

1) Reducir $x - 2 + \frac{3}{x-1}$ a fracción.

$$x-2+\frac{3}{x-1}=\frac{(x-2)(x-1)+3}{x-1}=\frac{x^2-3x+2+3}{x-1}=\frac{x^2-3x+5}{x-1}$$

2) Reducir $a + b - \frac{a^2+b^2}{a-b}$ a fracción.

$$a+b-\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)-(a^2+b^2)}{a-b}=\frac{a^2-b^2-a^2-b^2}{a-b}=-\frac{2b^2}{a-b}$$

Aquí es importante observar que como la fracción tiene signo - delante, para restar el numerador $a^2 + b^2$ hay que cambiarle el signo a cada uno de sus términos, lo que se indica incluyendo $a^2 + b^2$ en un paréntesis precedido del signo -.

3) Reducir $x + 1 - \frac{x^3-5x^2-18}{x^2+5x+6}$ a fracción

$$x+1-\frac{x^3-5x^2-18}{x^2+5x+6}=\frac{(x+1)(x^2+5x+6)-(x^3+5x^2-18)}{x^2+5x+6}$$

$$=\frac{x^3+6x^2+11x+6-x^3-5x^2+18}{x^2+5x+6}=\frac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}=\frac{(x+8)(x+3)}{(x+3)(x+2)}=\frac{x+8}{x+2}$$

EJERCICIOS

Reduce a expresión entera o mixta:

1. $\frac{x^2-5x-16}{x+2}$

R. $x-7\frac{2}{x+2}$

2. $\frac{12x^2-6x-2}{4x-1}$

R. $3x-\frac{3x+2}{4x-1}$

3. $\frac{a^3+3b^3}{a+2b}$

R. $a^2+2ab+4b^2-\frac{5b^3}{a+2b}$

4. $\frac{3x^3+4x^2y+2xy^2-6y^3}{3x-2y}$

R. $x^2+2xy+2y^2-\frac{2y^3}{3x-2y}$

5. $\frac{6a^3-10a^2}{2a}$

R. $3a^2-5a$

6. $\frac{9x^3-6x^2+3x-5}{3x}$

R. $3x^2-2xy+y^2$

7. $\frac{x^2+3}{x}$

R. $x+\frac{3}{x}$

8. $\frac{10a^2+15a-2}{5a}$

R. $2a+3-\frac{2}{5a}$

9. $\frac{9x^3-6x^2+3x-5}{3x}$

R. $3x^2-2x+1-\frac{5}{3x}$

10. $\frac{x^3-x^2-6x+1}{x^2-3}$

R. $x-1-\frac{3x+2}{x^2-3}$

EJERCICIOS

Reduce a fracción estas expresiones:

1. $\frac{1-a^2}{a}+a-3$ **R.** $\frac{1-3a}{a}$

2. $1-\frac{a+x}{a-x}$ **R.** $-\frac{2x}{a-x}$

3. $\frac{2a+x}{a+x}-1$ **R.** $\frac{a}{a+x}$

4. $x+2-\frac{3}{x-1}$ **R.** $\frac{x^2+x-5}{x-1}$

5. $x^3-3x-\frac{x^2-6x}{x+2}$ **R.** $\frac{x^3-2x^2}{x+2}$

6. $x+y+\frac{x^2-y^2}{x-y}$ **R.** $2x+2y$

7. $a+\frac{4a}{a+2}$ **R.** $\frac{a^2+6a}{a+2}$

8. $m-n-\frac{n^2}{m}$ **R.** $\frac{m^2-mn-n^2}{m}$

9. $x+5-\frac{3}{x-2}$ **R.** $\frac{x^2+3x-13}{x-2}$

10. $a+\frac{ab}{a+b}$. **R.** $\frac{a^2+2ab}{a+b}$

11. $\frac{3mn}{m-n}m-2n$ **R.** $\frac{m^2+2n^2}{m-n}$

12. $2a-3x-\frac{5ax-6x^2}{a+2x}$ **R.** $\frac{2a^2-4ax}{a+2x}$

REDUCCIÓN DE FRACCIONES AL MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR

Para **reducir** fracciones al mínimo común denominador se convierten en fracciones equivalentes con el mismo denominador y que éste sea el menor posible.

Si queremos reducir fracciones al mínimo común denominador hay que seguir una regla que es idéntica a la utilizada en Aritmética:

1) Simplificar las fracciones dadas, si es posible**.**

2) Encontrar el mínimo común múltiplo de los denominadores, el cual será el denominador común.

3) Buscar los numeradores, para lo cual se divide el m. c. m. de los denominadores entre cada denominador, y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

Ejemplos

1) Reducir $\frac{2}{a}, \frac{3}{2a^2}, \frac{5}{4x^2}$ al mínimo común denominador.

Hallamos el m. c. m. de a, $2a^2$ y $4x^2$ que es $4a^2x^2$. Este es el denominador común. Ahora dividimos $4a^2x^2$ entre los denomi-nadores a, $2a^2$ y $4x^2$ y multiplicamos cada cociente por su numerador respectivo, con lo que tendremos:

$4a^2x^2 \div a = 4ax^2$ $\qquad \frac{2}{a} = \frac{2 \times 4ax^2}{4a^2x^2} = \frac{8ax^2}{4a^2x^2}$

$4a^2x^2 \div 2a^2 = 2x^2$ $\qquad \frac{3}{2a^2} = \frac{3 \times 2x^2}{4a^2x^2} = \frac{6x^2}{4a^2x^2}$

$4a^2x^2 \div 4x^2 = a^2$ $\qquad \frac{5}{4x^2} = \frac{5 \times a^2}{4a^2x^2} = \frac{5a^2}{4a^2x^2}$

Al reducir al mínimo común denominador quedan estas fracciones:

$$\frac{8ax^2}{4a^2x^2}, \frac{6x^2}{4a^2x^2}, \frac{5a^2}{4a^2x^2}$$

que son equivalentes a las fracciones dadas, porque no hemos hecho más que multiplicar los dos términos de cada fracción por el cociente de dividir el m. c. m. entre su denominador respectivo, con lo cual las fracciones no se alteran.

2) Reducir $\frac{1}{3x^2}, \frac{x-1}{6x}, \frac{2x-3}{9x^3}$ al m. c. d.

El m. c. m. de $3x^2$, $6x$ y $9x^3$ es $18x^3$, que es el denominador común.

Tendremos:

$18x^3 \div 3x^2 = 6x$ $\qquad \frac{1}{3x^2} = \frac{1 \times 6x}{18x^3} = \frac{6x}{18x^3}$

$18x^3 \div 6x = 3x^2$ $\qquad \frac{x-1}{6x} = \frac{3x^2(x-)}{18x^3} = \frac{3x^3-3x^3}{18x^3}$

$18x^3 \div 9x^3 = 2$ $\qquad \frac{2x-3}{9x^3} = \frac{2(2x-3)}{18x^3} = \frac{4x-6}{18x^3}$

$$\frac{6x}{18x^3}, \frac{3x^3-3x^2}{18x^3}, \frac{4x-6}{18x^3}$$

3) Reducir $\frac{a-b}{ab}, \frac{2a}{ab+b^2}, \frac{3b}{a^2+ab}$ al m. c. d.

Buscamos el m. c. m. de los denominadores, factorando los binomios:

$ab = ab$

$ab + b^2 = b(a+b)$ $\qquad$ m.c.m. = $ab(a+b)$

$a^2 + ab = a(a+b)$

Ahora dividimos el m. c. m. $ab(a+b)$ entre cada denominador, o lo que es lo mismo, entre la descomposición de cada denominador:

$\frac{ab(a+b)}{ab} = a+b$ $\qquad \frac{a-b}{ab} = \frac{(a-b)(a+b)}{ab(a+b)} = \frac{a^2-b^2}{ab(a+b)}$

$\frac{ab(a+b)}{b(a+b)} = a$ $\qquad \frac{2a}{ab+b^2} = \frac{2a \times a}{ab(a+b)} = \frac{2a^2}{ab(a+b)}$

$\frac{ab(a+b)}{a(a+b)} = b$ $\qquad \frac{3b}{a^2+ab} = \frac{3b \times b}{ab(a+b)} = \frac{3b^2}{ab(a+b)}$

$a(a+b)\ a^2+ab\ ab\ (a+b)\ ab\ (a+b)$

---

4) Reducir $\frac{x+3}{x^2-1}, \frac{2x}{x^2+3x+2}, \frac{x+4}{x^2+x-2}$ al m. c. d.

Buscamos el m. c. m. factorando los denominadores:

$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$ $\qquad$ m.c.m. = $(x+1)(x-1)(x+2)$

$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

Dividiendo el m. c. m. $(x+1)(x-1)(x+2)$ entre la descomposición de cada denominador, tendremos:

$\frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = x+2$ $\qquad \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+5x+6}{(x+1)(x-1)(x+2)}$

$\frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = x-1$ $\qquad \frac{2x}{x^2+3x+2} = \frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)(x+2)}$

$\frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = x+1$ $\qquad \frac{x+4}{x^2+x-2} = \frac{(x+4)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+5x+4}{(x+1)(x-1)(x+2)}$

EJERCICIOS

Reduce al mínimo común denominador:

1. $\frac{7y}{6x^2}, \frac{1}{9xy}, \frac{5x}{12y^3}$ **R.** $\frac{42y^4}{36x^2y^3}, \frac{4xy^2}{36x^2y^3}, \frac{15x^3}{36x^2y^3}$

2. $\frac{a-1}{3a}, \frac{5}{6a}, \frac{a+2}{a^2}$ **R.** $\frac{2a^2-2a}{6a^2}, \frac{5a}{6a^2}, \frac{6a+12}{6a^2}$

3. $\frac{x-y}{x^2y}, \frac{x+y}{3xy^2}, 5$ **R.** $\frac{3xy-3y^2}{3x^2y^2}, \frac{x^2+xy}{3x^2y^2}, \frac{15x^2y^2}{3x^2y^2}$

4. $\frac{a}{b}, \frac{1}{ab}$ **R.** $\frac{a^2}{ab}, \frac{1}{ab}$

5. $\frac{x}{2a}, \frac{4}{3a^2x}$ **R.** $\frac{3ax^2}{6a^2x}, \frac{8}{6a^2x}$

6. $\frac{1}{2x^2}, \frac{3}{4x}, \frac{5}{8x^3}$ **R.** $\frac{4x}{8x^3}, \frac{6ax^2}{8x^3}, \frac{5}{8x^3}$

7. $\frac{3x}{ab^2}, \frac{x}{a^2b}, \frac{3}{a^3}$ **R.** $\frac{3a^2x}{a^3b^2}, \frac{abx}{a^3b^2}, \frac{3b^2}{a^3b^2}$

8. $\frac{x^2}{3(a-x)}, \frac{x}{6}$ **R.** $\frac{2x^2}{6(a-x)}, \frac{ax-x^2}{6(a-x)}$

9. $\frac{2}{5}, \frac{3}{x+1}$ **R.** $\frac{2x+2}{5(x+1)}, \frac{15}{5(x+1)}$

10. $\frac{a-3}{4(x+5)}, \frac{3a}{8}$ **R.** $\frac{2a-6}{8(a+5)}, \frac{3a^2+15a}{8(a+5)}$

11. $\frac{3}{x^2}, \frac{2}{x}, \frac{x+3}{x^2-x}$ **R.** $\frac{3x-3}{x^2(x-1)}, \frac{3x^2-2x}{x^2(x-1)}, \frac{x^2-3x}{x^2(x-1)}$

12. $\frac{m+n}{2m}, \frac{m-n}{5m^3n}, \frac{1}{10n^2}$ **R.** $\frac{5m^3n^2+5m^2n^3}{10m^3n^2}, \frac{2mn-2n^2}{10m^3n^2}, \frac{m^3}{10m^3n^2}$

13. $\frac{a+b}{6}, \frac{a-b}{2a}, \frac{a^2+b^2}{3b^2}$ **R.** $\frac{a^2b^2+ab^3}{6ab^2}, \frac{3ab^2-3b^3}{6ab^2}, \frac{2a^3+2ab^2}{6ab^2}$

14. $\frac{1}{2a+2b}, \frac{a}{4a-4b}, \frac{b}{8}$ **R.** $\frac{4a-4ab}{8(a^2-b^2)}, \frac{2a^2+2ab}{8(a^2-b^2)}, \frac{a^2b-b^3}{8(a^2-b^2)}$

15. $\frac{x}{xy}, \frac{y}{x^2+xy}, \frac{3}{xy+y^2}$ **R.** $\frac{x^2+xy}{xy(x+y)}, \frac{y^2}{xy(x+y)}, \frac{3x}{xy(x+y)}$

16. $\frac{2a-b}{3a^2}, \frac{3b-a}{4b^2}, \frac{a-3b}{2}$ **R.** $\frac{8ab^2-4b^3}{12a^2b^2}, \frac{9a^2b-3a^3}{12a^2b^2}, \frac{6a^3b^2-18a^2b^3}{12a^2b^2}$

17. $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a^2-b^2}$ **R.** $\frac{a^2-ab}{(a+b)(a-b)}, \frac{b}{(a+b)(a-b)}$

18. $\frac{x}{x^2-1}, \frac{1}{x^2-x-2}$ **R.** $\frac{x^2-2x}{(x+1)(x-1)(x-2)}, \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x-2)}$



En el siglo XIII en Europa se introdujo la matemática hispano-árabe gracias a las traducciones de numerosos eruditos de las universidades árabes de Córdoba, Sevilla, Toledo, etc. Los más destacados fueron: Juan de España, Juan de Sacrobosco y Adelardo de Bath.

CAPÍTULO XV

OPERACIONES CON FRACCIONES (REGLAS GENERALES)

1) Simplificar las fracciones dadas, si es posible.

2) Reducir las fracciones dadas al mínimo común denominador, si son de distinto denominador.

3) Efectuar las multiplicaciones indicadas.

4) Sumar los numeradores de las fracciones que resulten y partir esta suma por el denominador común.

5) Reducir términos semejantes en el numerador.

6) Simplificar la fracción que resulte, si es posible.

SUMA DE FRACCIONES CON DENOMINADORES MONOMIOS

Ejemplos

1) Sumar $\frac{3}{2a}$ y $\frac{a-2}{6a^2}$

Se reducen las fracciones al mínimo común denominador.

El m. c. m. de los denominadores es $6a^2$, que dividimos entre los denominadores y tenemos: $6a^2 \div 2a = 3a$ y $6a^2 \div 6a^2 = 1$. Multiplicamos estos cocientes por los numeradores respectivos y tendremos:

$$\frac{3}{2a}+\frac{a-2}{6a^2}=\frac{3(3a)}{6a^2}+\frac{a-2}{6a^2}=\frac{9a}{6a^2}+\frac{a-2}{6a^2}$$

(sumando los numeradores) = $\frac{9a+a-2}{6a^2}=\frac{10a-2}{6a^2}$

(simplificando) = $\frac{2(5a-1)}{6a^2}=\frac{5a-1}{3a^2}$

2) Simplificar $\frac{x-4a}{2ax}+\frac{x-2}{5x^2}+\frac{1}{10x}$

El m. c. m. de los denominadores es $10ax^2$, que dividimos entre cada denominador, y multiplicando los cocientes por el numerador respectivo tenemos:

$$\frac{x-4a}{2ax}+\frac{x-2}{5x^2}+\frac{1}{10x}=\frac{5x(x-4a)+2a(x-2)+ax}{10ax^2}$$

(multiplicando) = $\frac{5x^2-20ax+2ax-4a+ax}{10ax^2}$

(reduciendo términos semejantes) = $\frac{5x^2-17ax-4a}{10ax^2}$

EJERCICIOS

Simplifica:

1. $\frac{n}{m^2}+\frac{3}{mn}+\frac{2}{m}$ **R.** $\frac{n^2+3m+2mn}{m^2n}$
2. $\frac{1-x}{2x}+\frac{x+2}{x^2}+\frac{1}{3ax^2}$ **R.** $\frac{9ax-3ax^2+12a+2}{6ax^2}$
3. $\frac{2a-3}{3a}+\frac{3x+2}{6}$ **R.** $\frac{29a-24}{30a}$
4. $\frac{x-2}{4}+\frac{3x+2}{6}$ **R.** $\frac{9x-2}{12}$
5. $\frac{2}{5a^2}+\frac{1}{3ab}$ **R.** $\frac{5a+6b}{15a^2b}$
6. $\frac{a-2b}{15a}+\frac{b-a}{20b}$ **R.** $\frac{-3a^2+7ab-8b^2}{60ab}$

SUMA DE FRACCIONES CON DENOMINADORES COMPUESTOS

Ejemplos

1) Simplificar $\frac{1}{3x+3}+\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{x^2-1}$

Se busca el m. c. m. de los denominadores, factorando los binomios:

$3x + 3 = 3(x + 1)$

$2x - 2 = 2(x - 1)$

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ m.c.m.: $6(x + 1)(x - 1)$

Dividiendo el denominador común $6(x+1)(x-1)$ entre cada denominador, o lo que es lo mismo, entre la descomposición de cada denominador, y multiplicando cada cociente por el numerador respectivo, tendremos:

$$\frac{1}{3x+3}+\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2(x-1)+3(x+1)+6}{6(x+1)(x-1)}$$

(multiplicando) = $\frac{2x-2+3x+3+6}{6(x+1)(x-1)}$

(reduciendo términos semejantes) = $\frac{5x+7}{6(x+1)(x-1)}$

2) Simplificar $\frac{a-1}{a^2-4}+\frac{a-2}{a^2-a-6}+\frac{a+6}{a^2-5a+6}$

Se busca el m. c. m. de los denominadores:

$a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$

$a^2 - a - 6 = (a - 3)(a + 2)$

$a^2 - 5a + 6 = (a - 3)(a - 2)$ m.c.m. = $(a + 2)(a - 2)(a - 3)$

Dividiendo el denominador común $(a + 2)(a - 2)(a - 3)$ entre la descomposición de cada denominador, y multiplicando los cocientes por los numeradores respectivos, tendremos:

$$\frac{a-1}{a^2-4}+\frac{a-2}{a^2-a-6}+\frac{a+6}{a^2-5a+6}=$$

$$=\frac{(a-1)(a-3)+(a-2)^2+(a-2)(a+6)}{(a+2)(a-2)(a-3)}$$

multiplicando:

$$=\frac{a^2-4a+3+a^2-4a+4+a^2+8a+12}{(a+2)(a-2)(a-3)}$$

(reduciendo términos semejantes) = $\frac{3a^2+19}{(a^2-4)(a-3)}$

EJERCICIOS

Simplifica:

1. $\frac{m+3}{,m-3}+\frac{m+2}{m-2}$ **R.** $\frac{2m^2-12}{(m-2)(m-3)}$

2. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}$ **R.** $\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}$

3. $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x+1}{(x-1)^2}$ **R.** $\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-1)^2}$

4. $\frac{2}{x-5}+\frac{3x}{x^2-25}$ **R.** $\frac{5x+10}{x^2-25}$

5. $\frac{1}{3x-2y}+\frac{x-y}{9x^2-4y^2}$ **R.** $\frac{4x+y}{9x^2-4y}$

6. $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}$ **R.** $\frac{2a}{a^2-1}$

7. $\frac{2}{x+4}+\frac{1}{x-3}$ **R.** $\frac{3x-2}{(x+4)(x-3)}$

8. $\frac{3}{1-x}+\frac{6}{2x+5}$ **R.** $\frac{21}{(1-x)(2x+5)}$

9. $\frac{x}{x-y}+\frac{x}{x+y}$ **R.** $\frac{2x^2}{x^2-y^2}$

10. $\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a-b)^2}$ **R.** $\frac{2a}{(a+b)(a-b)^2}$

11. $\frac{3}{x^2+y^2}+\frac{2}{(x+y)}$ **R.** $\frac{5x^2+6xy+5y^2}{(x^2+y^2)(x+y)^2}$

12. $\frac{x+a}{x+3a}+\frac{3a^2-x^2}{x^2-9a^2}$ **R.** $\frac{2ax}{9a^2-x^2}$

RESTA DE FRACCIONES

La **regla general** consiste en:

1) Simplificar las fracciones dadas, si es posible.

2) Reducir las fracciones dadas al mínimo común denominador, si tienen distinto denominador.

3) Efectuar las multiplicaciones indicadas.

4) Restar los numeradores y partir la diferencia por el denominador común.

5) Reducir términos semejantes en el numerador.

6) Simplificar el resultado, si es posible.

RESTA DE FRACCIONES CON DENOMINADORES MONOMIOS

Ejemplo

1) De $\frac{a+2b}{3a}$ restar $\frac{4ab^2-3}{6a^2b}$

El m.c.m. de los denominadores es $6a^2b$, que dividimos entre cada denominador, y multiplicando cada cociente por el numerador respectivo tenemos:

$$\frac{a+2b}{3a}-\frac{4ab^2}{6a^2b}=\frac{2ab(a+2b)}{6a^2b}-\frac{4ab^2}{6a^2b}$$

(multiplicando) = $\frac{2a^2b+4ab^2}{6a^2b}-\frac{4ab^2-3}{6a^2b}$

(restando los numeradores) = $\frac{2a^2b+4ab^2-(4ab^2-3)}{6a^2b}$

(quitando el paréntesis) = $\frac{2a^2b+4ab^2-4ab^2+3}{6a^2b}$

(reduciendo) = $\frac{2a^2b+3}{6a^2b}$

Para restar $4ab^2$ - 3 del primer numerador hay que cambiar el signo a cada uno de sus términos y esta operación la indicamos incluyendo $4ab^2$ - 3 en un paréntesis precedido del signo -.

2) Restar $\frac{x+2}{x^2}$ de $\frac{x-1}{3x}$

El m. c. m. de los denominadores es $3x^2$, y será el denominador común.

Tendremos: $\frac{x-1}{3x}-\frac{x+2}{x^2}=\frac{x(x-1)}{3x^2}-\frac{3(x+2)}{3x^2}$

(multiplicando) = $\frac{x^2-x}{3x^2}-\frac{3x+6}{3x^2}$

(restando los numeradores) = $\frac{x^2-x-(3x+6)}{3x^2}$

(quitando el paréntesis) = $\frac{x^2-x-3x-6}{3x^2}$

(reduciendo) = $\frac{x^2-4x-6}{3x^2}$

3) Simplificar $\frac{x^2+3x-2}{2x^2}-\frac{2x+5}{4x}$

En la práctica se abrevian los pasos anteriores, como vemos a continuación. El m. c. m. es $4x^2$

$$\frac{x^2+3x-2}{2x^2}-\frac{2x+5}{4x}=\frac{2(x^2+3x-2)-x(2x+5)}{4x^2}$$

(multiplicando) = $\frac{2x^2+6x-4-2x^2-5x}{4x^2}$

(reduciendo) = $\frac{x-4}{4x^2}$

Al efectuar el producto - x $(2x + 5)$ hay que fijarse en el signo - de la x y decimos: $(-x)2x = -2x^2$; $(-x)5 = -5x$

RESTA DE FRACCIONES CON DENOMINADORES COMPUESTOS

Ejemplos

1) Simplificar $\frac{a}{ab-b^2}-\frac{1}{b}$

Se busca el m. c. m. de los denominadores:

$ab - b^2 = b\,(a - b)$

$b = b$ m.c.m.: $b\,(a - b)$

Dividiendo $b\,(a - b)$ entre la descomposición de cada denominador y multiplicando cada cociente por el numerador respectivo tenemos:

$$\frac{a}{ab-b^2}-\frac{1}{b}=\frac{a-(a-b)}{b(a-b)}=\frac{a-a-b}{b(a-b)}=\frac{b}{b(a-b)}=\frac{1}{a-b}$$

2) Simplificar $\frac{2}{x+x^2}-\frac{1}{x-x^2}-\frac{1-3x}{x-x^3}$

Se busca el denominador común:

$x + x^2 = x\,(1 + x)$

$x - x^2 = x\,(1 - x)$

$x - x^3 = x\,(1 - x^2) = x\,(1 + x)(1 - x)$

m.c.m. $x\,(1 + x)(1 - x)$

Dividiendo $x\,(1 + x)(1 - x)$ entre la descomposición de cada denominador tenemos:

$$\frac{2}{x+x^2}-\frac{1}{x-x^2}-\frac{1-3x}{x-x^3}=\frac{2(1-x)-(1+x)-(1-3x)}{x(1+x)(1-x)}$$

$$=\frac{2-2x-1-x-1+3x}{x(1+x)(1-x)}=\frac{0}{x(1+x)(1-x)}=0$$

Al reducir los términos semejantes en el numerador se anulan todos los términos, luego queda cero en el numerador, y cero partido por cualquier cantidad equivale a cero.

3) Simplificar $\frac{4x^2-1}{2x^2-8}-\frac{(x+1)^2}{x^2+4x+4}-\frac{x+3}{x-2}$

Se busca el denominador común: $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x + 2)(x - 2)$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

$x - 2 = (x - 2)$ m.c.m.: $2(x + 2)^2\,(x - 2)$

Dividiendo $2(x + 2)^2(x - 2)$ entre la descomposición de cada denominador tenemos:

$$\frac{4x^2-1}{2x^2-8}-\frac{(x+1)^2}{x^2+4x+4}-\frac{x+3}{x-2}=\frac{(x+2)(4x^2-1)-2(x-2)(x+1)^2-2(x+2)^2(x+3)}{2(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{(x+2)(4x^2-1)-2(x-2)(x^2+2x+1)-2(x^2+4x+4)(x+3)}{2(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{4x^3+8x^2-x-2-2(x^3-3x-2)-2(x^3+7x^2+16x+12)}{2(x+2)^2(x-2)}$$

$$==\frac{4x^3+8x^2-x-2-2x^3+6x+4-2x^3-14x^2-32x-24}{2(x+2)^2(x-2)}$$

$$\text{(reduciendo)}\quad=\frac{-6x^2-27x-22}{2(x+2)^2(x-2)}=\frac{6x^2+27x^2+22}{2(x+2)^2(2-x)}$$

EJERCICIOS

Simplificar:

1. $\frac{a-3}{5ab}-\frac{4-3ab^2}{3a^2b^3}$ **R.** $\frac{3a^2b^2+6ab^2-20}{15a^2b^3}$

2. $\frac{2a+3}{4a}-\frac{a-2}{8a}$ **R.** $\frac{3a+8}{8a}$

3. $\frac{x-3}{4}-\frac{x+2}{8}$ **R.** $\frac{x-8}{8}$

4. $\frac{4+5b}{a^2}-\frac{b-3}{ab}$ **R.** $\frac{5b^2+3a}{a^2b}$

5. $\frac{2}{3mn^2}-\frac{1}{2m^2n}$ **R.** $\frac{4m-3n}{6m^2n^2}$

6. $\frac{x}{x^2-1}-\frac{x+1}{(x-2)^2}$ **R.** $\frac{3x+1}{(x-1)^2(x+1)}$

7. $\frac{x-1}{4x+4}-\frac{x+2}{8x-8}$ **R.** $\frac{x^2-7x}{8(x^2-1)}$

EJERCICIOS

1. Restar $\frac{1}{x-x^2}$ de $\frac{1}{x+x^2}$ **R.** $\frac{2}{x^2-1}$

2. Restar $\frac{x}{a^2-x^2}$ de $\frac{a+x}{(a-x)^2}$ **R.** $\frac{a^2+ax+2x^2}{(a-x)^2(a-x)}$

3. De $\frac{1}{x-4}$ restar $\frac{1}{x-3}$ **R.** $\frac{1}{(x-4)(x-3)}$

4. De $\frac{m-n}{m+n}$ restar $\frac{m+n}{m-n}$ **R.** $\frac{4mn}{n^2-m^2}$

Simplificar

5. $\frac{x}{xy-y^2}-\frac{1}{y}$ **R.** $\frac{1}{x-y}$

6. $\frac{b}{a^2-b^2}-\frac{b}{a^2+ab}$ **R.** $\frac{b^2}{a(a^2-b^2)}$

7. $\frac{2a-3}{6a+9}-\frac{a-1}{4a^2+12a+9}$ **R.** $\frac{4a^2-3a-6}{3(2a+3)^2}$

8. $\frac{x+3}{6x^2+x-2}-\frac{1}{4x^2-4x+1}$ **R.** $\frac{2x^2+2x-5}{(2x-1)^2(3x+2)}$

9. $\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{ab}-\frac{a}{ab+b^2}$ **R.** $\frac{3}{a+b}$

10. $\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}+\frac{4x^2}{x^2-y^2}$ **R.** $\frac{4x}{x+y}$

11. $\frac{x}{a^2-ax}+\frac{1}{a}+\frac{1}{x}$ **R.** $\frac{a}{x(a-x)}$

12. $\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}$ **R.** $\frac{1}{x-3}$

13. $\frac{a}{3z+6}-\frac{1}{6a+12}+\frac{a+12}{12a+24}$ **R.** $\frac{5}{12}$

14. $\frac{a+3}{a^2-1}+\frac{a-1}{2a+2}+\frac{a-4}{4a-4}$ **R.** $\frac{3a^2-3a+10}{4(a^2-1)}$

15. $\frac{a^3}{a^3+1}+\frac{a+3}{a^2-a+1}-\frac{a-1}{a+1}$ **R.** $\frac{3a^2+2a+4}{a^3+1}$

16. $\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{3x^2}{x^3-1}$ **R.** $\frac{x^2+4x+1}{(x+1)(x^3-1)}$

17. $\frac{1}{ax}-\frac{1}{a^2+ax}+\frac{1}{a+x}$ **R.** $\frac{1+x}{x(a+x)}$

18. $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}+\frac{2y}{x^2+y^2}$ **R.** $\frac{4y^3}{y^4-x^4}$

COMBINACIÓN DE SUMA Y RESTA

Ejemplos

1) Simplificar $\frac{1}{a^2-ab}+\frac{1}{ab}-\frac{a^2+b^2}{a^3b-ab^3}$

Buscamos el común denominador:

$a^2 - ab = a(a-b)$

$ab = ab$

$a^3b - ab^3 = ab(a^2-b^2) = ab(a+b)(a-b)$

m.c.m.: $ab(a+b)(a-b)$

Tendremos:

$\frac{1}{a^2-ab}+\frac{1}{ab}-\frac{a^2+b^2}{a^3b-ab^3}$

$= \frac{b(a+b)+(a+b)(a-b)-(a^2+b^2)}{ab(a+b)(a-b)}$

(multiplicando) $= \frac{ab+b^2+a^2-b^2-a^2-b^2}{ab(a+b)(a-b)}$

(reduciendo) $= \frac{ab-b^2}{ab(a+b)(a-b)}$

(simplificando) $= \frac{b(a-b)}{ab(a+b)(a-b)}=\frac{1}{a(a+b)}$

2) Simplificar $\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{x+3}{x^2+3x-4}+\frac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}$

Buscamos el denominador común:

$x^2 - x = x(x-1)$

$x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$

$x^4 + 3x^3 - 4x^2 = x^2(x^2+3x-4) = x^2(x+4)(x-1)$

m.c.m.: $x^2(x-1)(x+4)$

Tendremos:

$\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{x+3}{x^2+3x-4}+\frac{x^2+12x+16}{x^4+3x^3-4x^2}=$

$=\frac{x(x+4)(x-2)-x^2(x+3)+x^2+12x+16}{x^2(x-1)(x+4)}$

(multiplicando) $= \frac{x^3+2x^2-8x-x^3-3x^2+x^2+12x+16}{x^2(x-1)(x+4)}$

(reduciendo) $= \frac{4x+16}{x^2(x-1)(x+4)}$

(simplificando) $= \frac{4(x+4)}{x^2(x-1)(x+4)}=\frac{4}{x^2(x-1)}$

CAMBIOS DE SIGNOS EN LA SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Los signos en la suma y la resta de fracciones se pueden cambiar cuando los denominadores no están ordenados.

Ejemplos

1) Simplificar $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}-\frac{x+5}{1-x^2}$

Si cambiamos el signo al denominador de la última fracción $1 - x^2$ nos queda $x^2 - 1$, pero para no alterar el valor de la fracción, hay que cambiar también el signo de ésta y tendremos:

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}+\frac{x+5}{x^2-1}$$

El m. c. m. es $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, por lo que tendremos:

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}+\frac{x+5}{x^2-1}=\frac{2(x-1)+3(x+1)+x+5}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{2x-2+3x++x+5}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{6x+6}{(x+1)(x-1)}=\frac{6(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{6}{x-1}$$

2) Simplificar $\frac{x}{x^2-5x+6}-\frac{1}{2-x}-\frac{2x}{(3-x)\ (1-x)}$

Descomponiendo $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, le cambiamos el signo a $2 - x$ y queda $x - 2$; cambiamos el signo de la fracción y de los dos factores del tercer denominador $(3 - x)(1 - x)$ y queda $(x - 3)(x - 1)$, como son dos factores (número par de factores) no hay que cambiar el signo de la última fracción, con lo que tendremos:

$$\frac{x}{(x-3)(x-2)}+\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{(x-3)(x-1)}=$$

$$=\frac{x(x-1)+(x-1)(x-3)-2x(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{-x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{x-3}{(1-x)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{(1-x)(x-2)}$$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

La regla general consiste en:

1) Descomponer en factores, hasta donde sea posible, los términos de las fracciones que se van a multiplicar.

2) Simplificar, suprimiendo los factores comunes en numeradores y denominadores.

3) Multiplicar entre sí las expresiones que queden en los numeradores después de simplificar, y partir este producto por el producto de las expresiones que queden en los denominadores.

Ejemplos

1) Multiplicar $\frac{2a}{3b^3}, \frac{3b^2}{4x}, \frac{x^2}{2a^2}$

$$\frac{2a}{3b^3}\times\frac{3b^2}{4x}\times\frac{x^2}{2a^2}=\frac{2\times3\times a\times b^2\times x^2}{3\times4\times2\times a^2\times b^3\times x}$$

(simplificando) $=\frac{x}{4ab}$

2) Multiplicar $\frac{3x-3}{2x+4}$ por $\frac{x^2+4x+4}{x^2-x}$

Factorando tendremos:

$$\frac{3x-3}{2x+4}\times\frac{x^2+4x+4}{x^2-x}=\frac{3(x-1)}{2(x+2)}\times\frac{(x+2)^2}{x(x-1)}$$

$$=\frac{3(x+2)}{2x}=\frac{3x+6}{2x}$$

Aquí simplificamos $(x - 1)$ del primer numerador con $(x - 1)$ del segundo denominador y $(x + 2)^2$ del segundo numerador con $(x + 2)$ del primer denominador.

3) Multiplicar $\frac{a^2-1}{a^2+2a}, \frac{a^2-a-6}{3a^2+7a+4}, \frac{3a+4}{a^2-4a+3}$

Factorando tendremos:

$$\frac{a^2-1}{a^2+2a}\times\frac{a^2-a-6}{3a^2+7a+4}\times\frac{3a+4}{a^2-4a+3}$$

$$=\frac{(a+1)(a-1)}{a(a+2)}\times\frac{(a-3)(a+2)}{(a+1)(3a+4)}\times\frac{3a+4}{(a-1)(a-3)}=\frac{1}{a}$$

EJERCICIOS

Simplifica las fracciones siguientes:

1. $\frac{1}{2x-x^2}+\frac{x}{x^2-4}$ **R.** $\frac{x+1}{x(x+2)}$

2. $\frac{a+b}{a^2-ab}+\frac{a}{b^2-a^2}$ **R.** $\frac{2ab+b^2}{a(a^2-b^2)}$

3. $\frac{x-4}{x^2-2x-3}$ **R.** $\frac{x^2+3x-8}{2(x+1)(x-3)}$

4. $\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{(2-x)(x+3)}$ **R.** $\frac{1}{(2-x)(x+3)(x+4)}$

5. $\frac{1}{2x+2}+\frac{2}{1-x}+\frac{7}{4x-4}$ **R.** $\frac{x-3}{4(x+1)(x-1)}$

6. $\frac{2a}{a+3}+\frac{3a}{a-3}+\frac{2a}{9-a^2}$ **R.** $\frac{5a^2+a}{a^2-9}$

7. $\frac{1}{m-n}+\frac{m}{n^2-m^2}$ **R.** $\frac{n}{m^2-n^2}$

8. $\frac{x^2}{x^2-xy}-\frac{2x}{y-x}$ **R.** $\frac{3x}{x-y}$

9. $\frac{2a^2}{3b}\times\frac{6b^2}{4a}$ **R.** ab

10. $\frac{x^2y}{5}\times\frac{10a^3}{3m^2}\times\frac{9m}{x^3}$ **R.** $\frac{6a^3y}{mx}$

11. $\frac{5x^2}{7y^3}\times\frac{4y^2}{7m^3}\times\frac{14m}{5x^4}$ **R.** $\frac{8}{7m^2x^2y}$

12. $\frac{5}{a}\times\frac{2a}{b^2}\times\frac{3b}{10}$ **R.** $\frac{3}{b}$

13. $\frac{2x^3}{15a^3}\times\frac{3a^2}{y}\times\frac{5x^2}{7xy^2}$ **R.** $\frac{2x^4}{7ay^3}$

14. $\frac{7a}{6m^2}\times\frac{3m}{10n^2}\times\frac{5n^4}{14ax}$ **R.** $\frac{n^2}{8mx}$

15. $\frac{2x^2+x}{6}\times\frac{8}{4x+2}$ **R.** $\frac{2x}{3}$

16. $\frac{5x+25}{14}\times\frac{7x+7}{10x+50}$ **R.** $\frac{x+1}{4}$

17. $\frac{m+n}{mn-n^2}\times\frac{n^2}{m^2-n^2}$ **R.** $\frac{n}{m^2-2mn+n}$

18. $\frac{xy-2y^2}{x^2+xy}\times\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy}$ **R.** $\frac{xy+y^2}{x^2}$

19. $\frac{x^2-4xy+4y^2}{x^2+2xy}\times\frac{x^2}{x^2-4y^2}$ **R.** $\frac{x^2-2xy}{x^2+4xy+4y}$

20. $\frac{2x^2+2x}{2x^2}\times\frac{x^2-3x}{x^2-2x-3}$ **R.** 1

21. $\frac{a^2ab+a-b}{a^2+2a+1}\times\frac{3}{6a^2ab}$ **R.** $\frac{1}{2a^2+2a}$

22. $\frac{(x-y)^3}{x^3-1}\times\frac{x^2+x+1}{(x-y)^2}$ **R.** $\frac{x-y}{x-1}$

23. $\frac{2a-2}{2a^2-50}\times\frac{a^2-4a-5}{3a+3}$ **R.** $\frac{a-1}{3a+15}$

MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES MIXTAS

La regla para multiplicar expresiones mixtas señala que deben reducirse las expresiones mixtas a fracciones y luego multiplicar estas fracciones.

Ejemplo

Multiplicar $a+3-\frac{5}{a-1}$ por $a-2+\frac{5}{a+4}$

Reduciendo las expresiones mixtas a fracciones tendremos:

$$a+3-\frac{5}{a-1}=\frac{(a+3)(a-1)-5}{a-1}=\frac{a^2+2a-3-5}{a-1}=\frac{a^2+2a-8}{a-1}$$

$$a-2+\frac{5}{a+4}=\frac{(a-2)(a+4)+5}{a+4}=\frac{a^2+2a-8+5}{a+4}=\frac{a^2+2a-3}{a+4}$$

En seguida multiplicamos las fracciones obtenidas:

$$\left(a+3-\frac{5}{a-1}\right)\left(a-2+\frac{5}{a+4}\right)=\frac{a^2+2a-8}{a-1}\times\frac{a^2+2a-3}{a+4}=\frac{(a+4)(a-2)}{a-1}\times\frac{(a+3)(a-1)}{a+4}$$

$$= (a - 2)(a + 3) = a^2 + a - 6$$

EJERCICIOS

Simplifica:

1. $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(x-\frac{x^2}{x+y}\right)$ **R.** x

2. $\left(a+x-\frac{ax+x^2}{a+2x}\right)\left(1+\frac{x}{a+x}\right)$ **R.** $a+x$

3. $\left(x-\frac{x^3-6x}{x^2-25}\right)\left(x+1-\frac{8}{x+3}\right)$ **R.** $\frac{19x-19x^2}{x^2-2x-15}$

4. $\left(x-\frac{2}{x+1}\right)\left(x+\frac{1}{x+2}\right)$ **R.** x^2-1

5. $\left(1-\frac{x}{a+x}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)$ **R.** 1

6. $\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$ **R.** $a+b$

7. $\left(x+2-\frac{12}{x+1}\right)\left(x-2+\frac{10-3x}{x+5}\right)$ **R.** $\frac{x^3-2x^2}{x+1}$

DIVISIÓN DE EXPRESIONES MIXTAS

La regla para dividir expresiones mixtas dice que se deben reducir a fracciones y dividirse como tales.

Ejemplo

Dividir $1+\frac{2xy}{x^2+y^2}$ entre $1+\frac{x}{y}$

Reduciendo a fracciones tenemos:

$$1+\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}=\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$$

$$1+\frac{x}{y}=\frac{y+x}{y}=\frac{x+y}{y}$$

Tendremos:

$$\left(1+\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\div\left(1+\frac{x}{y}\right)=$$

$$=\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}\div\frac{x+y}{y}$$

$$=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\times\frac{y}{x+y}=\frac{xy+y^2}{x^2+y^2}$$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

La regla dice que se multiplica el dividendo por el divisor invertido.

Ejemplos

1) Dividir $\frac{4a^2}{3b^2}$ entre $\frac{2ax}{9b^3}$

$$\frac{4a^2}{3b^2}\div\frac{2ax}{9b^3}=\frac{4a^2}{3b^2}\times\frac{9b^3}{2ax}=\frac{6ab}{x}$$

2) Dividir $\frac{x^2+4x}{8}$ entre $\frac{x^2-16}{4}$

$$\frac{x^2+4x}{8}\div\frac{x^2-16}{4}=\frac{x^2+4x}{8}\times\frac{4}{x^2-16}=$$

$$=\frac{x(x+4)}{8}\times\frac{4}{(x+4)(x-4)}=\frac{x}{2x-8}$$

EJERCICIOS

Simplificar

1. $6a^2x^3\div\frac{a^2x}{5}$ **R.** $30x^2$

2. $\frac{15m^2}{19ax^3}\div\frac{20y^2}{38a^3x^4}$ **R.** $\frac{3a^2m^2x}{2y^2}$

3. $\frac{11x^2y^3}{7m^2}\div 22y^4$ **R.** $\frac{x^2}{14m^2y}$

4. $\frac{x-1}{3}\div\frac{2x-2}{6}$ **R.** 1

5. $\frac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2}\div\frac{5a^3}{a^2b+3ab^2}$ **R.** $\frac{3b}{5a+15b}$

6. $\frac{x^3-x}{2x^2+6x}\div\frac{5x^2-5x}{2x+6}$ **R.** $\frac{x+1}{5x}$

7. $\frac{x^2}{3y^2}\div\frac{2x}{y^3}$ **R.** $\frac{xy}{6}$

8. $\frac{3a^2b}{5x^2}\div a^2b^3$ **R.** $\frac{3}{5b^2x^2}$

9. $\frac{5m^2}{7n^3}\div\frac{10m^4}{14an^4}$ **R.** $\frac{an}{m^2}$

10. $\frac{20x^2-30x}{15x^3+15x^2}\div\frac{4x-6}{x+1}$ **R.** $\frac{1}{3x}$

EJERCICIOS

Simplifica:

1. $\dfrac{a^2-6a+5}{a^2-15a+56}\times\dfrac{a^2+2a-35}{a^2-5a-24}$ **R.** $\dfrac{a^2+2a-3}{a^2-49}$

2. $\dfrac{1}{a^2-a-30}\div\dfrac{2}{a^2+a-42}$ **R.** $\dfrac{a+7}{2a+10}$

3. $\left(1+\dfrac{a}{a+b}\right)\div\left(1+\dfrac{2a}{b}\right)$ **R.** $\dfrac{b}{a+b}$

4. $\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)\div\left(x-\dfrac{x}{x+1}\right)$ **R.** $\dfrac{x^2+x-2}{x^2}$

5. $\left(1-a+\dfrac{a^2}{1+a}\right)\div\left(1+\dfrac{2}{a^2-1}\right)$ **R.** $\dfrac{a-1}{a^2+1}$

6. $\left(x+\dfrac{2}{x+3}\right)\div\left(x+\dfrac{3}{x+4}\right)$ **R.** $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+6x+9}$

7. $\left(a+b+\dfrac{b^2}{a-b}\right)\div\left(1-\dfrac{b}{a+b}\right)$ **R.** $\dfrac{a^2+ab}{a-b}$

COMBINACIÓN DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

En operaciones donde se combinen multiplicaciones y divisiones se deben convertir los divisores en factores, invirtiéndolos y procediendo según la regla de la multiplicación.

Ejemplo

Simplificar $\dfrac{a-3}{4a-4}\times\dfrac{a^2+9a+20}{a^2-6a+9}\div\dfrac{a^2-16}{2a^2-2a}$

Convertimos la división en multiplicación invirtiendo el divisor y tendremos:

$$\frac{a-3}{4a-4}\times\frac{a^2+9a+20}{a^2-6a+9}\div\frac{a^2-16}{2a^2-2a}=$$

$$\frac{a-3}{4a-4}\times\frac{a^2-9a+20}{a^2-6a+9}\div\frac{2a^2-2a}{a^2-16}$$

$$=\frac{a-3}{4\ (a-1)}\times\frac{(a+5)\ \ (a+4)}{(a-3)^2}\times\frac{2a\ \ (a-1)}{(a+4)\ \ (a-4)}$$

$$=\frac{a(a+5)}{2(a-3)(a-4)}=\frac{a^2+5a}{2a^2-14a+24}$$

EJERCICIOS

Simplifica:

1 $\dfrac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30}\times\dfrac{a^2-36}{a^2-1}\div\dfrac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}$ **R.** 1

2. $\dfrac{x^4-27x}{x^2+7x-30}\times\dfrac{x^2+20x+100}{x^3+3x^2+9x}\div\dfrac{x^2-100}{x-3}$ **R.** $\dfrac{x-3}{x-10}$

3. $\dfrac{a^2+1}{3a-6}\div\left(\dfrac{a^3+a}{6a-12}\times\dfrac{4x+8}{x-3}\right)$ **R.** $\dfrac{x-3}{2ax+4a}$

4. $\dfrac{3x}{4y}\times\dfrac{8y}{9x}\div\dfrac{z^2}{3x^2}$ **R.** $\dfrac{2x^2}{z^2}$

5. $\dfrac{5a}{b}\div\left(\dfrac{2a}{b^2}\times\dfrac{5x}{4a^2}\right)$ **R.** $\dfrac{2a^2b}{x}$

6 $\dfrac{a+1}{a-1}\times\dfrac{3a-3}{2a+2}\div\dfrac{a^2+a}{a^2+a-2}$ **R.** $\dfrac{3a^2+3a-6}{2a^2+2a}$

7. $\dfrac{64a^2-81b^2}{x^2-81}\times\dfrac{(x-9)^2}{8a-9b}\div\dfrac{8a^2-9ab}{(x+9)^2}$ **R.** $\dfrac{x^2-81}{a}$

8. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-49}\times\dfrac{x^2-x-56}{x^2+x-20}\div\dfrac{x^2-5x-24}{x+5}$ **R.** $\dfrac{1}{x-7}$

FRACCIONES COMPLEJAS

Son aquellas en las cuales el numerador o el denominador, o ambos, son fracciones algebraicas o expresiones mixtas, como

$$\frac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}}{1+\dfrac{a}{x}}$$

Una fracción compleja no es más que una división indicada; la raya de la fracción equivale al signo de dividir, en este caso lo que está encima de la raya por lo que está debajo.

De este modo la fracción anterior

$$\frac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}}{1+\dfrac{a}{x}}$$

equivale a

$$\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)\div\left(1+\frac{a}{x}\right)$$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES COMPLEJAS

La regla para simplificar fracciones complejas consiste en:

1) Efectuar las operaciones indicadas en el numerador y el denominador de la fracción compleja.

2) Dividir el resultado obtenido en el numerador entre el del de-nominador.

Ejemplos

1) Simplificar $\dfrac{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}{1+\frac{a}{x}}$

Efectuando el numerador: $\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}=\dfrac{a^2-x^2}{ax}$

Efectuando el denominador: $1+\dfrac{a}{x}=\dfrac{a+x}{x}$

Tendremos: $\dfrac{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}{1+\frac{a}{x}}=\dfrac{\frac{a^2-x^2}{ax}}{\frac{a+x}{x}}$

(dividiendo el numerador entre el denominador)

$$=\frac{a^2-x^2}{ax}\times\frac{x}{a+x}=\frac{(a+x)(a-x)}{ax}\times\frac{x}{a+x}=\frac{a-x}{a}$$

2) Simplificar $\dfrac{a-1-\frac{12}{x-2}}{x+6+\frac{16}{x-2}}$

Numerador:

$$x-1-\frac{12}{x-2}=\frac{(x-1)(x-2)-12}{x-1}=$$

$$\frac{x^2-3x+2-12}{x-2}=\frac{x^2-3x-10}{x-2}$$

Denominador:

$$x+6+\frac{16}{x-2}=\frac{(x+6)(x-2)+16}{x-2}$$

$$\frac{x^2+4x-12+16}{x-2}=\frac{x^2+4x+4}{x-2}$$

Tendremos:

$$\frac{x-1-\frac{12}{x-2}}{x+6+\frac{16}{x-2}}=\frac{\frac{x^2-3x-10}{x-2}}{\frac{x^2+4x+4}{x-2}}=\frac{x^2-3x-10}{x^2+4x+4}$$

$$=\frac{(x-5)(x+2)}{(x+2)^2}=\frac{x-5}{x+2}$$

Aquí vemos que la fracción del numerador y la fracción del denominador tenían el mismo denominador *x* - 2 y lo hemos suprimido porque al dividir, o sea al multiplicar el numerador por el denominador invertido, tendríamos:

$$\frac{x^2-3x-10}{x-2}\times\frac{x-2}{x^2+4x+4}=\frac{x^2-3x-10}{x^2+4x+4}$$

donde notamos que se cancela el factor *x* - 2

EJERCICIOS

Simplifica:

1. $\dfrac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}$ **R.** $\dfrac{m+n}{n-m}$

2. $\dfrac{x+\frac{x}{2}}{x-\frac{x}{4}}$ **R.** 2

3. $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$ **R.** $\dfrac{x-y}{y}$

4. $\dfrac{x+4+\frac{3}{x}}{x-4-\frac{5}{x}}$ **R.** $\dfrac{x+3}{x-5}$

5. $\dfrac{a-\frac{a}{b}}{b-\frac{1}{b}}$ **R.** $\dfrac{a}{b+1}$

6. $\dfrac{x^2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ **R.** X^2+x+1

7. $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}$ **R.** $\dfrac{a-b}{b}$

8. $\dfrac{a-4+\frac{4}{a}}{1-\frac{2}{a}}$ **R.** *a-2*

9. $\dfrac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}$ **R.** $\dfrac{3}{5b}$

10. $\dfrac{a-x+\frac{x^2}{a+x}}{a^2-\frac{a^2}{a+x}}$ **R.** $\dfrac{1}{a+x-1}$

FRACCIONES COMPLICADAS

Las siguientes son fracciones complejas más complicadas.

1) Simplificar $$\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}$$

Numerador:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

Denominador:

$$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{x^2+x-x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$$

Tendremos:

$$\frac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}=\frac{\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}}=\frac{2}{x^2+1}$$

2) Simplificar $$\dfrac{\dfrac{a+2b}{a-b}-\dfrac{a+b}{a}}{\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{2a-b}{4a-b}}$$

Numerador:

$$\frac{a+2b}{a-b}-\frac{a+b}{a}=\frac{a(a+2b)-(a+b)(a-b)}{a(a-b)}=$$

$$=\frac{a^2+2ab-(a^2-b^2)}{a(a-b)}=\frac{a^2+2ab-a^2+b^2}{a(a-b)}=\frac{2ab+b^2}{a(a-b)}$$

Denominador:

$$\frac{b}{a-b}+\frac{2a-b}{4a-b}=\frac{b(4a-b)+(a-b)(2a-b)}{(a-b)(4a-b)}=$$

$$=\frac{4ab-b^2+2a^2-3ab+b^2}{(a-b)(4a-b)}=\frac{2a^2+ab}{(a-b)(4a-b)}$$

Tendremos:

$$\frac{\dfrac{a+2b}{a-b}-\dfrac{a+b}{a}}{\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{2a-b}{4a-b}}=\frac{\dfrac{2ab+b^2}{a(a-b)}}{\dfrac{2a^2+ab}{(a-b)(4a-b)}}=$$

$$=\frac{2ab+b^2}{a(a-b)}\times\frac{(a-b)(4a-b)}{2a^2+ab}=$$

$$=\frac{b(2a+b)}{a(a-b)}\times\frac{(a-b)(4a-b)}{a(2a+b)}=\frac{b(4a-b)}{a^2}=\frac{4ab-b^2}{a^2}$$

3) Simplificar $$\dfrac{x-2}{x-\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{x+2}}}$$

A estas fracciones se les conoce como **continuas** y se simplifican efectuando las operaciones indicadas, empezando de abajo hacia arriba. En este caso tendremos:

$$\frac{x-2}{x-\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{x+2}}}=\frac{x-2}{x-\dfrac{1}{\dfrac{x}{x+2}}}=\frac{x-2}{x-\dfrac{x+2}{x}}=\frac{x-2}{\dfrac{x^2-x-2}{x}}$$

$$=\frac{x-2}{1}\times\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{x-2}{1}\times\frac{x}{(x-2)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$$

EJERCICIOS

Simplifica:

1. $\dfrac{\dfrac{x+3}{x+4}-\dfrac{x+1}{x+2}}{\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x-3}{x+4}}$ **R.** $\dfrac{1}{2x+1}$

2. $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^3}+\dfrac{1}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b-a}{a-b}}$ **R.** $\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab^2}$

3. $\dfrac{1+\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}$ **R.** x^2+2

4. $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{2x+6}{x+1}}$ **R.** $\dfrac{x}{x^2+x+2}$

5. $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a}{b}}$ **R.** $\dfrac{b}{a+b}$

EJERCICIOS

Simplifica:

1. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ **R.** $\dfrac{x}{x+1}$

2. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$ **R.** $\dfrac{x-1}{2x-1}$

3. $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{x}{3}-1}}$ **R.** $\dfrac{x}{2x-3}$

4. $\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{x}}}$ **R.** $\dfrac{2x+4}{3x+2}$

5. $\dfrac{1}{x-\dfrac{x}{x-\dfrac{x^2}{x+1}}}$ **R.** -1

INTERPRETACIÓN DE LA FORMA $\frac{0}{a}$

La forma $\frac{0}{a}$ representa una fracción cuyo numerador es cero y cuyo denominador *a* es una **cantidad finita** cualquiera, y se interpreta así:

$$\frac{0}{a}=0$$

Sabemos que toda fracción representa el cociente de la división de su numerador entre su denominador; luego, $\frac{0}{a}$ representa el cociente de la división de 0 (dividendo) entre a (divisor) y el cociente tiene que ser una cantidad tal que multiplicada por el divisor *a* reproduzca el dividendo 0; por tanto el cociente, o sea el valor de la fracción, será 0 porque 0 × *a* = 0.

Ejemplo

Hallar el valor de $\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-14}$ para *x* = 3

Sustituyendo *x* por 3 tendremos:

$$\frac{x^2-9}{x^2 2x-14}=\frac{3^2-9}{3^2+2(3)-14}=$$

$$=\frac{9-9}{9+6-14}=\frac{0}{1}=0$$

INTERPRETACIÓN DE LA FORMA $\frac{a}{0}$

Siendo la fracción *a* donde *a* es una cantidad **constante** y *x* una variable, cuanto menor sea *x* mayor será el valor de la fracción. En efecto:

Para *x* = 1, $\frac{a}{x}=\frac{a}{1}=a$

Para *x* = $\frac{1}{10}$, $\frac{a}{x}=\frac{a}{\frac{1}{10}}=10\,a$

Para *x* = $\frac{1}{100}$, $\frac{a}{x}=\frac{a}{\frac{1}{100}}=100\,a$

Para *x* = $\frac{1}{1000}$, $\frac{a}{x}=\frac{a}{\frac{1}{1000}}=1000\,a$, etc.

Aquí observamos que al hacer el denominador *x* suficientemente pequeño, el valor de la fracción $\frac{a}{x}$ será tan grande como queramos, es decir que siendo *a* constante, a medida que el denominador *x* se aproxima al **límite** 0 el valor de la fracción aumenta **indefinidamente.**

Dicho **principio** se expresa así:

$$\frac{a}{0}=\infty$$

El símbolo ∞ se llama infinito y no tiene un valor determinado; ∞ no es una cantidad, sino el símbolo que usamos para expresar, abreviadamente, el principio anterior.

Entiéndase que la expresión $\frac{a}{0}=\infty$ no puede tomarse en un sentido aritmético **literal**, porque siendo 0 la ausencia de cantidad, la división de a entre 0 es inconcebible, sino como la expresión del principio de que si el numerador de una fracción es una cantidad constante, a medida que el denominador disminuye indefinidamente, acercándose al límite 0 pero sin llegar a valer 0, el valor de la fracción aumenta sin límite.

Ejemplo

Hallar el valor de $\dfrac{x+4}{x^2-3x+2}$ para *x* = 2

Sustituyendo *x* por 2 tendremos:

$$\frac{x+4}{x^2-3x+2}=\frac{2+4}{2^2-3(2)+2}=\frac{6}{4-6+2}=\frac{6}{0}=\infty$$

INTERPRETACIÓN DE LA FORMA $\frac{a}{\infty}$

En la fracción $\frac{a}{x}$, a es constante y x variable, por lo que cuanto mayor sea x, menor será el valor de la fracción. En efecto:

Para $x = 1$, $\frac{a}{x} = \frac{a}{1} = a$

Para $x = 10$, $\frac{a}{x} = \frac{a}{10} = \frac{1}{10}a$

Para $x = 100$, $\frac{a}{x} = \frac{a}{100} = \frac{1}{100}a$,

Aquí vemos al hacer el denominador x suficientemente grande, el valor de la fracción $\frac{a}{x}$ será tan pequeño como queramos, es decir que a medida que el denominador aumenta indefinidamente, el valor de la fracción disminuye indefinidamente, acercándose al límite 0, pero sin llegar a valer 0.

Dicho principio se expresa así:

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

Este resultado tampoco debe tomarse en un **sentido literal,** sino como la expresión del **principio** anterior.

Ejemplo

Hallar el valor de $\frac{\frac{x-1}{5}}{x-3}$ para $x = 3$

Sustituyendo x por 3 tenemos:

$$\frac{\frac{x-1}{5}}{x-3} = \frac{\frac{3-1}{5}}{3-3} = \frac{\frac{2}{5}}{0} = \frac{2}{\infty} = 0$$

INTERPRETACIÓN FORMA $\frac{0}{0}$

Si consideramos esta forma como el cociente de la división de 0 (dividendo) entre 0 (divisor), el cociente de esta división tiene que ser una cantidad tal que multiplicada por el divisor 0 reproduzca el dividendo 0, pero como **cualquier** cantidad multiplicada por cero da cero, $\frac{0}{0}$ puede ser igual a **cualquier cantidad.**

El símbolo $\frac{0}{0}$ = valor indeterminado.

VALOR VERDADERO DE LAS FORMAS INDETERMINADAS

Ejemplos

1) Hallar el valor verdadero de $\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$ para $x = 2$

Al sustituir x por 2 tenemos:

$$\frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{2^2-4}{2^2+2-6} = \frac{4-4}{4+2-6} = \frac{0}{0}$$ = valor indeterminado

Aquí la indeterminación del valor es aparente y se debe a la presencia de un factor común al numerador y al denominador que los anula. Para suprimir este factor se simplifica la fracción dada, con lo que tendremos:

$$\frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+2}{x-3}$$

Entonces: $\frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{x+2}{x+3}$

Haciendo $x = 2$ en el segundo miembro de esta igualdad tenemos:

$$\frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{2+2}{2+3} = \frac{4}{5}$$

Luego, el valor verdadero de $\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$ para $x = 2$ es 4

2) Hallar el valor verdadero de $\frac{3x^2-2x-1}{x^3+x^2-5x+3}$ para $x = 1$

Al sustituir x por 1 tenemos:

$$\frac{3x^2-2x-1}{x^3+x^2-5x+3} = \frac{3(1^2)-2(1)-1}{1^3+1^2-5(1)+3} = \frac{3-2-1}{1+1-5+3} = \frac{0}{0}$$ = valor indeterminado

También aquí la indeterminación es aparente y se puede desaparecer suprimiendo el factor común al numerador y al denominador que los anula.
Simplificando la fracción (el denominador se factora por evaluación) tenemos:

$$\frac{3x^2-2x-1}{x^3+x^2-5x+3} = \frac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(x-1)(x+3)} = \frac{3x+1}{(x-1)(x+3)}$$

Por tanto, haciendo x = 1 en la última fracción quedará:

$$\frac{3x+1}{(x-1)\ (x+3)} = \frac{3\ (1)+1}{(1-1)\ (1+3)} = \frac{3+1}{0\times 4} = \frac{4}{0} = \infty$$

Luego, el valor verdadero de la fracción dada para $x = 1$ es ∞.

EJERCICIOS

Encuentra el valor verdadero de:

1. $\dfrac{a^2 - a - 6}{a^2 - 2a - 15}$ para $a = 3$ **R.** $\dfrac{5}{8}$

2. $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ para $x = 2$ **R.** -1

3. $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 2x^2 - x + 2}$ para $x = 1$ **R.** 0

4. $\dfrac{x - 2}{x + 3}$ para $x = 2$ **R.** 0

5. $\dfrac{x - 2}{x - 3}$ para $x = 3$ **R.** ∞

6. $\dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$ para $x = a$ **R.** 0

7. $\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y}$ para $x = y$ **R.** ∞

8. $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + x - 12}$ para $x = 3$ **R.** $\dfrac{6}{7}$

9. $\dfrac{x^3 - a^3}{x - a}$ para $x = a$ **R.** $3a^2$

10. $\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - ab}$ para $b = a$ **R.** 0

11. $\dfrac{a^3 - 8}{a^2 + 11a - 26}$ para $a = 2$ **R.** $\dfrac{4}{5}$

12. $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 2x + 1}$ para $x = 1$ **R.** ∞

13. $\dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 7x + 6}$ para $x = 2$ **R.** $\dfrac{9}{5}$

14. $\dfrac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 - x + 4}$ para $x = 4$ **R.** $\dfrac{8}{5}$

15. $\dfrac{x^3 - 9x + 10}{x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18}$ para $x = 2$ **R.** $-\dfrac{1}{5}$

Simplificar:

16. $\dfrac{12x^2 + 31x + 20}{18x^2 + 21x - 4}$ **R.** $\dfrac{4x + 5}{6x - 1}$

17. $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^3}\right) \div \left(a + 2 - \dfrac{2a + 1}{a}\right)$ **R.** $\dfrac{a + 1}{a^3 - a^2}$

18. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 9x}{x^5 - 27x^2}$ **R.** $\dfrac{1}{x(x - 3)}$

19. $\dfrac{(x + y)^2}{y} - \dfrac{x(x - y)^2}{xy}$ **R.** 4x

20. $\dfrac{a^4 - 2b^3 + a^2b(b - 2)}{a^4 - a^2b - 2b^2}$ **R.** $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 + b}$

21. $\dfrac{1}{a - b} + \dfrac{1}{a + b} + \dfrac{2a}{a^2 - ab + b^2}$ **R.** $\dfrac{4a^3 - 2a^2b}{(a - b)(a^3 + b^3)}$

22. $\dfrac{3x^3 - x^2 - 12x + 4}{6x^4 + x^3 + 25x^2 - 4x + 4}$ **R.** $\dfrac{1}{2x + 1}$

23. $\dfrac{16 - 81x^2}{72x^2 - 5x - 12}$ **R.** $\dfrac{9x + 4}{8x + 3}$

24. Multiplicar $a + \dfrac{1 + 5a}{a^2 - 5}$ por $a - \dfrac{a + 5}{a + 1}$

R. $a^2 - a + 1$

25. Dividir $x^2 + 5x - 4 - \dfrac{x^3 - 29}{x - 5}$ entre $x + 34 + \dfrac{170 - x^2}{x - 5}$

R. $\dfrac{49 - 29x}{29x}$

Descomponer las expresiones siguientes en la suma o resta de tres fracciones simples irreductibles:

26. $\dfrac{m - n - x}{mnx}$ **R.** $\dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{mx} - \dfrac{1}{mn}$

27. Probar que $\dfrac{x^3 - xy^2}{x - y} = x^2 + xy$

28. Probar que $\dfrac{a^4 - 5a^2 + 4}{a^3 + a^2 - 4a - 4} = a - 3 + \dfrac{2 + 4a}{2a + 1}$



Leonardo de Pisa dio a conocer en Occidente los métodos matemáticos de los hindúes y los árabes; esto permitió a Raimundo Lulio (llamado el Doctor iluminado) construir una matemática universal de la cual publicó diversas obras.

CAPÍTULO XVI

ECUACIONES NUMÉRICAS FRACCIONARIAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

En una ecuación **fraccionaria** algunos o todos sus términos tienen denominadores, como

$$\frac{x}{2} = 3X - \frac{3}{4}$$

Por otra parte, la supresión de denominadores es una operación importantísima que consiste en convertir una ecuación **fraccionaria** en una ecuación equivalente entera, es decir, sin denominadores. La supresión de denominadores se fundamenta en la propiedad, ya conocida, de las igualdades, la cual dice que una igualdad no varía si sus dos miembros se multiplican por una misma cantidad.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES FRACCIONARIAS CON DENOMINADORES MONOMIOS

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $3x - \frac{2x}{5} = \frac{x}{10} - \frac{7}{4}$

El m. c. m. de 5, 10 y 4 es 20. Dividimos 20 entre 1 (denominador de $3x$), 5, 10 y 4 y multiplicamos cada cociente por el numerador respectivo, con lo que tendremos:

$$60x - 8x = 2x - 35$$

Trasponiendo: $60x - 8x - 2x = -35$

$$50x = -35$$

$$x = -\frac{35}{50} = -\frac{7}{10}$$

Para verificar la operación, se sustituye x por $-\frac{7}{10}$ en la ecuación dada y nos dará la identidad.

2) Resolver la ecuación $\frac{2x-1}{3} - \frac{x+13}{24} = 3x + \frac{5\ (x+1)}{8}$

El m. c. m. de 3, 24 y 8 es 24. Dividiendo 24 entre 3, 24, 1 y 8 y multiplicando los cocientes por el numerador respectivo, tenemos:

$$8(2x - 1) - (x + 13) = 24(3x) + 15(x + 1)$$
$$16x - 8 - x - 13 = 72x + 15x + 15$$
$$16x - x - 72x - 15x = 8 + 13 + 15$$
$$-72x = 36$$

$$x = -\frac{36}{72} = -\frac{1}{2}$$

3) Resolver $\frac{1}{5}(x\ -\ 2) - (2x - 3) = \frac{2}{3}(4x + 1) - \frac{1}{6}\ (2x + 7)$

Efectuando las multiplicaciones indicadas, tenemos:

$$\frac{x-2}{5} - (2x-3) = \frac{8x+2}{3} - \frac{2x+7}{6}$$

El m. c. m. de 5, 3 y 6 es 30. Quitando denominadores tenemos:

$$6(x - 2) - 30(2x - 3) = 10(8x + 2) - 5(2x + 7)$$
$$6x - 12 - 60x + 90 = 80x + 20 - 10x - 35$$
$$6x - 60x - 80x + 10x = 12 - 90 + 20 - 35$$
$$-124x = -93$$
$$124x = 93$$

$$x = \frac{93}{124} = \frac{3}{4}$$

REGLA PARA SUPRIMIR DENOMINADORES

La Regla para suprimir denominadores en una ecuación dice que se multiplican todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo (m. c. m.) de los denominadores.

Ejemplos

1) Suprimir denominadores en la ecuación

$$\frac{x}{2}=\frac{x}{6}-\frac{1}{4}$$

El m. c. m. de los denominadores 2, 6 y 4 es 12. Multiplicamos todos los términos por 12 y tendremos:

$$\frac{12x}{2}=\frac{12x}{6}-\frac{12}{4}$$

y simplificando estas fracciones, queda

$6x = 2x - 3$ (1)

que es una ecuación equivalente a la ecuación dada y entera, que es lo que buscábamos.

La operación de multiplicar todos los términos de la ecuación por el m. c. m. de los denominadores equivale a dividir el m. c. m. de los denominadores entre cada denominador y multiplicar cada cociente por el numerador respectivo.

En la ecuación anterior $\frac{x}{2}=\frac{x}{6}-\frac{1}{4}$

el m. c. m. de los denominadores es 12. Al dividir 12 entre 2, 6 y 4 y multiplicando cada cociente por su numerador respectivo, tenemos:

$6x = 2x - 3$

que es idéntica a la que obtuvimos en el ejemplo (1).

Para suprimir denominadores en una ecuación:

a) Se encuentra el m. c. m. de los denominadores.

b) Se divide este m.c.m. entre cada denominador y cada cociente se multiplica por el numerador respectivo.

2) Suprimir denominadores en:

$$2-\frac{x-1}{40}=\frac{2x-1}{4}-\frac{4x-5}{8}$$

El m. c. m. de 4, 8 y 40 es 40. El primer término 2 equivale a $\frac{2}{1}$.

Entonces, dividimos 40 ÷ 1 = 40 y este cociente se multiplica por 2; 40 ÷ 40 = 1 y este cociente se multiplica por x - 1; 40 ÷ 4 = 10 y este cociente se multiplica por $2x$ - 1; 40 ÷ 8 = 5 y este cociente se multiplica por $4x$ - 5 y tendremos:

$$2(40)-(x-1)=10(2x-1)-5(4x-5)$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas y quitando los paréntesis nos queda:

$$80 - x + 1 =$$
$$20x - 10 - 20x + 25$$

que es una ecuación entera.

Es muy importante considerar que cuando una fracción cuyo numerador es un polinomio está precedida por el signo - como

$$-\frac{x-1}{40} \quad y \quad -\frac{4x-5}{8}$$

en la ecuación anterior, hay que tener cuidado de cambiar el signo a cada uno de los términos de su numerador al quitar el denominador. Por eso hemos puesto x - 1 entre un paréntesis precedido del signo -, o sea - (x - 1) y al quitar este paréntesis queda - x + 1, y en cuanto a la última fracción, al efectuar el producto - 5($4x$ - 5) decimos:

$$(-5)(4x) = -20x \text{ y}$$
$$(-5) \times (-5) = +25,$$

EJERCICIOS

Resolver las ecuaciones siguientes:

1. $x-\frac{x+2}{12}=\frac{5x}{2}$ **R.** $-\frac{2}{19}$

2. $x-\frac{5x-1}{3}=4x-\frac{3}{5}$ **R.** $\frac{1}{5}$

3. $\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x$ **R.** -4

4. $\frac{3x}{5}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{5}=0$ **R.** 3

5. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10x}=\frac{1}{5}$ **R.** -8

6. $\frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}=\frac{x}{6}-\frac{5}{4}$ **R.** -13

7. $\frac{2}{3x}-\frac{1}{5}+2x=\frac{5}{4}-\frac{3x}{20}$ **R.** $\frac{1}{2}$

8. $\frac{2}{3x}-\frac{5}{x}=\frac{7}{10}-\frac{3}{2x}+1$ **R.** $-\frac{5}{3}$

9. $\frac{x-4}{3}-5=0$ **R.** 19

10. $\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}=-\frac{x-5}{5}$

R. $\frac{5}{7}$

11. $x-(5x-1)-\frac{7-5x}{10}=1$

R. $-\frac{1}{5}$

12. $2x-\frac{5x-6}{4}+\frac{1}{3}(x-5)=-5x$

R. $\frac{2}{73}$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DENOMINADORES COMPUESTOS

Ejemplos

1) Resolver $\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}-\frac{x+3}{4x^2-1}=0$

El m. c. m. de los denominadores es $4x^2 - 1$ porque $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$ y contiene a los otros dos denominadores. Dividiendo $(2x + 1)(2x - 1)$ entre cada denominador y multiplicando cada cociente por el numerador respectivo, tendremos:

$$3(2x - 1) - 2(2x + 1) - (x + 3) = 0$$
$$6x - 3 - 4x - 2 - x - 3 = 0$$
$$6x - 4x - x = 3 + 2 + 3$$
$$x = 8$$

2) Resolver $\frac{6x+5}{15}-\frac{5x+2}{3x+4}=\frac{2x+3}{5}-1$

Como 5 está contenido en 15, el m. c. m. de los denominadores es $15(3x + 4)$

Dividiendo:

$\frac{15\ (3x+4)}{15}=3x+4;$ multiplicamos este cociente por $6x + 5$

$\frac{15(3x+4)}{3x+4}=15;$ multiplicamos este cociente por $5x + 2$

$\frac{15(3x+4)}{5}=3(3x+4);$ multiplicamos este cociente por $2x + 3$

$\frac{15(3x+4)}{1}=15(3x+4);$ multiplicamos este cociente por 1

Tenemos: $(3x + 4)(6x + 5) - 15(5x + 2) = 3(3x + 4)(2x + 3) - 15(3x + 4)$

Efectuando: $18x^2 + 39x + 20 - 75x - 30 = 18x^2 + 51x + 36 - 45x - 60$

Suprimiendo $18x^2$ en ambos miembros y trasponiendo:

$39x - 75x - 51x + 45x = - 20 + 30 + 36 - 60$
$- 42x = - 14$

$$x=\frac{14}{42}=\frac{1}{3}$$

3) Resolver $\frac{2x-5}{2x-6}+\frac{2\ (x-1)}{x-3}=\frac{3}{8}+\frac{3\ (2x-15)}{4x-12}$

Se busca el m. c. m. de los denominadores:

$2x - 6 = 2(x - 3)$
$x - 3 = (x - 3)$
$8 = 8$ — m.c.m. $8(x - 3)$
$4x - 12 = 4(x - 3)$

Dividiendo $8\ (x - 3)$ entre la descomposición de cada denominador y multiplicando los cocientes por los numeradores tendremos:

$$4(2x - 5) + 16(x - 1) = 3(x - 3) + 6(2x - 15)$$
$$8x - 20 + 16x - 16 = 3x - 9 + 12x - 90$$
$$8x + 16x - 3x - 12x = 20 + 16 - 9 - 90$$
$$9x = - 63$$
$$x = - 7$$

4) Resolver $\frac{x-2}{x^2+2x-3}-\frac{x+1}{x^2-9}=\frac{4}{x^2-4x+3}$

Buscamos el m. c. m. de los denominadores:

$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$
$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$
$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$
m.c.m. $(x - 1)(x + 3)(x - 3)$

Dividiendo $(x - 1)(x + 3)(x - 3)$ entre la descomposición de cada denominador y multiplicando cada cociente por el numerador respectivo tendremos:

$$(x - 2)(x - 3) - (x - 1)(x + 1) = 4(x + 3)$$
$$x^2 - 5x + 6 - (x^2 - 1) = 4x + 12$$
$$x^2 - 5x + 6 - x^2 + 1 = 4x + 12$$

Suprimiendo las x^2 y trasponiendo:

$$- 5x - 4x = - 6 - 1 + 12$$
$$- 9x = 5$$
$$x=-\frac{5}{9}$$

EJERCICIOS

Resolver las ecuaciones siguientes:

1. $\frac{1+2x}{1+3x}-\frac{1-2x}{1-3x}=-\frac{3x-14}{1-9x^2}$ **R.** 14

2. $\frac{3x-1}{x^2+7x+12}=\frac{1}{2x+6}+\frac{7}{6x+24}$ **R.** $4\frac{7}{8}$

3. $\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{2x-2}=-\frac{-3}{2x+2}$ **R.** 2

4. $\frac{5x+13}{15}-\frac{4x+5}{5x-15}=\frac{x}{3}$ **R.** 54

5. $\frac{2x-1}{2x+1}-\frac{x-4}{3x-2}=\frac{2}{3}$ **R.** - 11

6. $\frac{3}{5}+\frac{3}{2x-1}=0$ **R. -** 2

7. $\frac{2}{4x-1}=\frac{1}{4x+1}$ **R.** $\frac{5}{4}$

8. $\frac{5}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}$ **R.** 4

9. $\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}=0$ **R.** $\frac{4}{3}$

10. $\frac{5x+8}{3x+4}=\frac{5x+2}{3x-4}$ **R.** $-\frac{20}{11}$

11. $\frac{10x^2-5x+8}{5x^2+9x-19}=2$ **R.** 2

12. $\frac{1}{3x-3}+\frac{1}{4x+4}=\frac{1}{12x-12}$ **R.** 0

13. $\frac{x}{4}-\frac{x^2-8x}{4x-5}=\frac{7}{4}$ **R.** 35

14. $\frac{2x-9}{10}+\frac{2x-3}{2x-1}=\frac{x}{5}$ **R.** $10\frac{1}{2}$

15. $\frac{(3x-1)^2}{x-1}=\frac{18x-1}{2}$ **R.** $-\frac{1}{7}$

16. $\frac{2x+7}{5x+2}-\frac{2x-1}{5x-4}=0$ **R.** $\frac{13}{14}$

17. $\frac{(5X-2)(7X+3)}{7X(5X-1)}-1=0$ **R.** $\frac{3}{4}$

18. $\frac{3}{X-4}=\frac{2}{X-3}+\frac{8}{X^2-7X+12}$ **R.** 9

19. $\frac{6X-1}{18}-\frac{3(X+2)}{5X-6}=\frac{1+3X}{9}$ **R.** $-1\frac{7}{23}$

20. $\frac{5}{1+X}-\frac{3}{1-X}-\frac{6}{1-X^2}=0$ **R.** $-\frac{1}{2}$



Existe polémica entre los historiadores sobre quién fue el primero en descubrir la solución de las ecuaciones cúbicas y cuárticas. Los dos matemáticos a quien se les atribuye estas ecuaciones, son Jerónimo Cardano y Nicolás de Tartaglia, sin que hasta la fecha se conozca con certeza cuál de los dos fue el autor.

CAPÍTULO XVII

ECUACIONES LITERALES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

En las **ecuaciones literales** algunos o todos los coeficientes de las incógnitas o las cantidades conocidas que figuran en la ecuación están representados por letras, que suelen ser a, b, c, d, m y n según la costumbre, y x representa la incógnita.

Estas ecuaciones literales de primer grado con una incógnita se resuelven aplicando las mismas reglas de las ecuaciones numéricas que se han visto en capítulos anteriores.

ECUACIONES LITERALES ENTERAS

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $a(x + a) - x = a(a + 1) + 1$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$ax + a^2 - x = a^2 + a + 1$$

Trasponiendo: $ax - x = a^2 + a + 1 - a^2$

Reduciendo términos semejantes: $ax - x = a + 1$

Factorando: $x(a - 1) = a + 1$

Despejando x, para lo cual dividimos ambos miembros por $(a - 1)$, queda:

$$\boxed{x = \frac{a+1}{a-1}}$$

2) Resolver la ecuación $x(3 - 2b) - 1 = x(2 - 3b) - b^2$

Efectuando las operaciones indicadas:

$3x - 2bx - 1 = 2x - 3bx - b^2$

Trasponiendo: $3x - 2bx - 2x + 3bx = 1 - b^2$

Reduciendo términos semejantes: $x + bx = 1 - b^2$

Factorando ambos miembros: $x(1 + b) = (1 + b)(1 - b)$

Dividiendo ambos miembros por $(1 + b)$, queda: $x = 1 - b$

EJERCICIOS

Resolver las ecuaciones siguientes:

1. $a(x - a) - 2bx = b(b - 2a - x)$ **R.** $a - b$

2. $(x + b)^2 - (x - a)^2 - (a + b)^2 = 0$ **R.** a

3. $a(x + 1) = 1$ **R.** $\frac{1-a}{a}$

4. $ax - 4 = bx - 2$ **R.** $\frac{2}{a-b}$

5. $ax + b^2 = a^2 - bx$ **R.** $a - b$

6. $3(2a - x) + ax = a^2 + 9$ **R.** $a - 3$

7. $a(x + b) + x(b - a) = 2b(2a - x)$ **R.** a

8. $(x - a)^2 - (x + a)^2 = a(a - 7x)$ **R.** $\frac{a}{3}$

9. $ax - a(a + b) = -x - (1 + ab)$ **R.** $a - 1$

10. $\frac{4x}{2a+b} - 3 = -\frac{3}{2}$ **R.** $\frac{6a+3b}{8}$

11. $\frac{2a+3x}{x+a} = \frac{2(6x-a)}{4a+a}$ **R.** $-4a$

12. $\frac{2(x-c)}{4x-b} = \frac{2x+c}{4(x-b)}$ **R.** $\frac{3bc}{2(b+2c)}$

13. $\frac{m}{x} - \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$ **R.** $\frac{m^2}{3}$

14. $\frac{a}{x} + \frac{b}{2} = \frac{4a}{x}$ **R.** $\frac{6a}{b}$

15. $\frac{x}{2a} - \frac{1-x}{a^2} = \frac{1}{2a}$ **R.** 1

16. $\frac{m}{x} + \frac{n}{m} = \frac{n}{x} + 1$ **R.** m

17. $\frac{a-1}{a} + \frac{1}{2} = \frac{3a-2}{x}$ **R.** $2a$

18. $\frac{a-x}{a} - \frac{b-x}{b} = \frac{2(a-b)}{ab}$ **R.** 2

19. $\frac{x-3a}{a^2} - \frac{2a-x}{ab} = -\frac{1}{a}$ **R.** $2a$

ECUACIONES LITERALES FRACCIONARIAS

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $\frac{x}{2m} - \frac{3-3mx}{m^2} - \frac{2x}{m} = 0$

Se suprimen los denominadores. El m. c. m. de los denominadores es $2m^2$. Dividiendo $2m^2$ entre cada denominador y multiplicando cada cociente por el numerador respectivo tendremos:

$$mx - 2(3 - 3mx) - 2m(2x) = 0$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$mx - 6 + 6mx - 4mx = 0$$

Trasponiendo: $mx + 6mx - 4mx = 6$

$$3mx = 6$$

Dividiendo por 3: $mx = 2$

$$x = \frac{2}{m}$$

2) Resolver $\frac{a-1}{x-a} - \frac{2a(a-1)}{x^2-a^2} = -\frac{2a}{x+a}$

El m. c. m. de los denominadores es $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$. Dividiendo $x^2 - a^2$ entre cada denominador y multiplicando cada cociente por el numerador respectivo tendremos:

$$(a - 1)(x + a) - 2a(a - 1) = -2a(x - a)$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$ax - x + a^2 - a - 2a^2 + 2a = -2ax + 2a^2$$

Trasponiendo:

$$ax - x + 2ax = -a^2 + a + 2a^2 - 2a + 2a^2$$

Reduciendo: $3ax - x = 3a^2 - a$

Factorando ambos miembros: $x(3a - 1) = a(3a - 1)$

Dividiendo ambos miembros por $(3a - 1)$ queda, finalmente:

$$x = a$$



Francois Viete es considerado como el fundador del Álgebra moderna, logró la total liberación de esta disciplina de las limitaciones aritméticas al introducir la notación algebraica, dio las fórmulas para la solución de las ecuaciones de sexto grado.

CAPÍTULO XVIII

ECUACIONES FRACCIONARIAS DE PRIMER GRADO

(PROBLEMAS)

Muchos problemas de la vida real pueden plantearse en términos de ecuaciones, por lo tanto, una vez planteados, pueden resolverse por los métodos expuestos anteriormente.

El éxito alcanzado para resolver un problema, depende de la habilidad que se adquiera en la traducción del lenguaje usual a un lenguaje simbólico. Por ejemplo: el doble de un número $2x$; dos números pares consecutivos $2x + 2$; un número impar $2x + 1$; la edad, dentro de x años, de una persona que tiene actualmente 50 años, $50 + x$, etc.

Los enunciados formulados en lenguaje común para ser traducidos a proposiciones matemáticas que las hagan más fáciles de presentar y entender, deben ser proposiciones lógicas que al ser traducidas no se presten a interpretaciones equívocas.

PROBLEMA 1

La suma de la tercera y cuarta parte de un número equivale al doble de ese número disminuido en 17. ¿Cuál es el número?

Siendo x = el número

Entonces: $\frac{x}{3}$ = tercera parte del número

$\frac{x}{4}$ = cuarta parte del número

$2x$ = doble del número

Por las condiciones de este problema hacemos la ecuación:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=2x-17$$

Resolviendo:

$$4x + 3x = 24x - 204$$

$$4x + 3x - 24x = - 204$$

$$- 17x = - 204$$

$$x=\frac{204}{17}=12$$

que es el número buscado.

EJERCICIOS

1. Encuentra el número que disminuido en $\frac{3}{8}$ equivale a su doble disminuido en 11. **R.** 8

2. Encuentra el número que aumentado en $\frac{5}{6}$ equivale a su triple disminuido en 14. **R.** 12

3. ¿Qué número hay que restar de 22 para que la diferencia equivalga a la mitad de 22 aumentada en $\frac{6}{5}$ del número que se resta? **R.** 5

4. ¿Cuál es el número que tiene 30 de diferencia entre sus $\frac{5}{4}$ y $\frac{7}{8}$? **R.** 80

5. El exceso de un número sobre 17 equivale a la diferencia entre los $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{6}$ del número ¿cuál es ese número? **R.** 30

6. La suma de la quinta parte de un número con los $\frac{3}{8}$ excede en 49 al doble de la diferencia entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{12}$ del número. ¿Cuál es ese número? **R.** 120

7. La edad de *B* es $\frac{3}{5}$ la de *A*, y si se suman ambas el resultado excedería en 4 años al doble de la edad de *B*. Hallar ambas edades. **R.** *A*, 10 años; *B*, 6 años.

8. *B* tiene $\frac{7}{8}$ de lo que tiene *A*. Si *A* recibe \$90, entonces tiene el doble que *B* ahora. ¿Cuánto tiene cada uno? **R.** *A* = 120, *B* = 105

9. Después de vender $\frac{3}{5}$ de una pieza de tela quedan 40 metros. ¿Cuál era la longitud de la pieza? **R.** 100 m

10. Después de gastar $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{8}$ me quedan 39 dólares. ¿Cuánto dinero tenía? **R.** 72 dólares.

11. El triple de un número excede en 48 al tercio del mismo número. Hallar ese número. **R.** 18

12. El cuádruple de un número excede en 19 a la mitad de ese número aumentada en 30. Hallar el número. **R.** 14

13. El exceso de 80 sobre la mitad de un número equivale al exceso del número sobre 10. Hallar el número. **R.** 60

14. Encuentra el número cuyos $\frac{7}{8}$ excedan a sus $\frac{4}{5}$ en 2. **R.** $26\frac{2}{3}$

15. Un buque tiene 800 pies de largo y excede en 744 pies a los $\frac{8}{9}$ del ancho. ¿cuál es el ancho? **R.** 63 pies.

PROBLEMA 2

Buscar tres números enteros consecutivos tales que la suma de $\frac{2}{13}$ del mayor con $\frac{2}{3}$ del número intermedio equivalga al menor disminuido en 8.

Siendo x = número menor

Entonces $x + 1$ = número intermedio

$x + 2$ = número mayor

$\frac{2}{13}$ del número mayor serán $\frac{2}{13}$ $(x + 2)$

$\frac{2}{3}$ del número intermedio serán $\frac{2}{3}$ $(x + 1)$

y el número menor disminuido en 8 será $x - 8$.

De acuerdo con las condiciones del problema tendremos la ecuación:

$$\frac{2}{13}(x+2)+\frac{2}{3}(x+1)=x-8$$

Resolviendo:

$$\frac{2(x+2)}{13}+\frac{2(x+1)}{3}=x-8$$

$$6(x + 2) + 26(x + 1) = 39(x - 8)$$

$$6x + 12 + 26x + 26 = 39x - 312$$

$$6x + 26x - 39x = -12-26-312$$

$$- 7x = - 350$$

$$x = 50$$

Si $x = 50$, $x + 1 = 51$ y $x + 2 = 52$; por tanto, los números buscados son 50, 51 y 52.

EJERCICIOS

1. Encuentra dos números consecutivos tales que $\frac{4}{5}$ del mayor equivalgan al menor disminuido en 4. **R.** 24 y 25

2. Encuentra dos números consecutivos tales que $\frac{7}{8}$ del menor excedan en 17 a $\frac{3}{5}$ del mayor.
R. 64 y 65

3. Encuentra dos números consecutivos tales que el menor exceda en 81 a la diferencia entre $\frac{3}{4}$ del menor y $\frac{2}{5}$ del mayor.
R. 124 y 125

4. Hay dos números consecutivos tales que la suma de $\frac{1}{5}$ del mayor con $\frac{1}{33}$ del menor excede en 8 a $\frac{3}{20}$ del mayor.
¿Cuáles son esos números?
R. 99 y 100

5. La diferencia de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 324. ¿Cuáles son esos números? **R.** 80 y 82

6. *A* tiene $1 más que *B*. Si *B* gastara $8, tendría $4 menos que $\frac{4}{5}$ de lo que tiene *A*. ¿Cuánto tiene cada uno?
R. *A*, $25; *B*, $24

7. Hoy gané $1 más que ayer, y en los dos días gané $25 más que los $\frac{2}{5}$ de lo que gané ayer. ¿Cuánto gané hoy y cuánto ayer? **R.** Hoy, $16; ayer, 15.

8. Hallar tres números consecutivos tales que si el menor se divide entre 20, el mediano entre 27 y el mayor entre 41, la suma de los cocientes sea 9. **R.** 80, 81 y 82

9. Hallar tres números consecutivos tales que la suma de $\frac{3}{5}$ del menor con $\frac{5}{6}$ del mayor exceda en 31 al intermedio. **R.** 70, 71 y 72

10. Hay tres números consecutivos tales que la diferencia entre $\frac{3}{7}$ del mediano y $\frac{3}{10}$ del menor excede en 1 a $\frac{1}{11}$ del mayor.
¿Cuáles son esos números?
R. 20, 21 y 22

11. *A* tiene 2 años más que *B* y éste 2 años más que *C*. Al sumar las edades de *B* y *C* el resultado excede en 12 años a $\frac{7}{8}$ de la edad de *A*. Encuentra las edades de cada uno.
R. *A*, 16; *B*, 14; *C*, 12 años

12. *A* tiene 1 año menos que *B* y éste un año menos que *C*. Si del cuadrado de la edad de *C* se resta el cuadrado de la edad de *B*, la diferencia es de 4 años menos que $\frac{17}{5}$ de la edad de *A*. Encuentra las edades de cada uno. **R.** *A*, 5 años; *B*, 6 años; *C*, 7 años.

PROBLEMA 3

Dos números suman 77, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 8. Hallar los números.

Siendo x = el número mayor

Entonces: 77 - x = el número menor

Dadas las condiciones del problema, al dividir el mayor x entre el menor 77 - x el cociente es 2 y el residuo 8, pero si al dividendo x le restamos el residuo 8, entonces la división de x - 8 entre 77 - x es exacta y da 2 de cociente; con esto tendremos la ecuación:

$$\frac{x-8}{77-x}=2$$

Resolviendo:

$x - 8 = 2(77 - x)$

$x - 8 = 154 - 2x$

$3x = 162$

$x = \frac{162}{3}$ = 54, número mayor

Si el número mayor es 54, el menor será 77 - x = 77 - 54 = 23. Por tanto, los números buscados son 54 y 23.

EJERCICIOS

1. La suma de dos números es 59, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 5. Hallar los números.
R. 41 y 18

2. Divide 260 en dos partes tales que el doble de la mayor dividido entre el triple de la menor dé 2 de cociente y 40 de residuo. **R.** 200 y 60

3. Reparte 196 dólares entre *A* y *B* de modo que si $\frac{3}{8}$ de la parte de *A* se dividen entre un quinto de la parte de *B* el cociente sea 1 y el residuo 16.
R. *A*, 96 dólares; *B*, 100 dólares.

PROBLEMA 4

Un hombre ganó en tres días 185 dólares. Si cada día ganó $\frac{3}{4}$ de lo que le pagaron el día anterior, ¿cuánto ganó en cada uno de esos 3 días?

Siendo x = ganancia del primer día

Si el segundo día ganó $\frac{3}{4}$ de lo que obtuvo el primer día, o sea $\frac{3}{4}$ de x; entonces:

$\frac{3x}{4}$ = ganancia del segundo día.

Si el tercer día ganó $\frac{3}{4}$ de lo que obtuvo el segundo día, o sea $\frac{3}{4}$ de $\frac{3x}{4}=\frac{9x}{16}$; entonces:

$\frac{9x}{16}$ = ganancia del tercer día

Si entre los 3 días ganó 185 dólares tenemos la ecuación:

$$x+\frac{3x}{4}+\frac{9x}{16}=185$$

Resolviendo

$16x + 12x + 9x = 2960$

$37x = 2960$

$$x=\frac{2960}{37}=80$$

80 dólares como ganancia del primer día.

El segundo día ganó:

$$\frac{3x}{4}=\frac{3\times 80}{4}=\$60$$

El tercer día ganó:

$$\frac{9x}{16}=\frac{9\times 80}{16}=\$45$$

EJERCICIOS

1. B tiene $\frac{2}{3}$ de lo que tiene A y C $\frac{3}{5}$ de lo que tiene B. Si entre los tres tienen 248 dólares, ¿cuánto tiene cada uno? **R.** *A*, 120; *B*, 80; *C* , 48 dólares.

2. Un ciclista recorrió 120 km en 4 días. Si cada día recorrió $\frac{1}{3}$ de lo que avanzó el día anterior, ¿cuántos kilómetros recorrió en cada día? **R.** 1er. día, 81 km; 2o., 27 km; 3o., 9 km; 4o. 3 km.

3. Durante cuatro semanas un avión viajó 4,641 km. Si cada semana avanzó $\frac{11}{10}$ de lo que recorrió la semana anterior, ¿cuántos km recorrió en cada semana? **R.** 1a., 1000 km; 2a., 1100 km; 3a., 1210 km; 4a., 1331 km.

PROBLEMA 5

Arturo tenía cierta suma de la que gastó $30 en libros y $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba del gasto anterior en alimentos. Si ahora le quedan $30, ¿cuánto tenía al principio?

Siendo *x* = lo que tenía al principio.

Después de gastar $ 30 en libros, le quedaron $(*x* - 30)

Gastó en alimentos $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba, o sea $\frac{3}{4}$ (x - 30)

Como aún tiene $30, la diferencia entre lo que le quedaba después del primer gasto, *x* - 30 y lo que gastó en alimentos, $\frac{3}{4}$ (x - 30), será igual a $30; entonces tenemos la ecuación:

$$x - 30 - \frac{3}{4}(x - 30) = 30$$

Resolviendo:

$$x - 30 - \frac{3(x-30)}{4} = 30$$

$4x - 120 - 3(x - 30) = 120$

$4x - 120 - 3x + 90 = 120$

$4x - 3x = 120 + 120 - 90$

$x = 150$

Arturo tenía $150 al principio.

EJERCICIOS

1. Gasté $20 y presté $\frac{2}{3}$ de lo que me quedaba. Si ahora tengo $10, ¿cuánto tenía al principio?
R. 50 dólares.

2. $\frac{4}{5}$ de las aves de una granja son palomas; $\frac{3}{4}$ gallinas y las 4 aves restantes son gallos. ¿Cuántas aves hay en la granja? **R.** 80 aves.

3. Si un empleado gasta $\frac{3}{4}$ de su dinero y $\frac{2}{3}$ de lo que le quedó en libros y ahora tiene $38 menos que los $\frac{2}{5}$ de lo inicial, ¿cuánto tenía al principio? **R.** $120

PROBLEMA 6

Si la edad actual de Francisco es la mitad de la de Irma, y hace 10 años la edad de Francisco era $\frac{3}{7}$ de la edad de Irma, ¿cuáles son sus edades actuales?

Siendo *x* = edad actual de Francisco

Si la edad actual de Francisco es la mitad de la de Irma, la edad actual de Irma es el doble de la de Francisco; luego,

2*x* = edad actual de Irma

Hace 10 años cada uno tenía 10 años me-nos que ahora; por tanto:

x - 10 = edad de Francisco hace 10 años

2*x* - 10 = edad de Irma hace 10 años

Dadas las condiciones del problema, la edad de Francisco hace 10 años, *x* - 10, era $\frac{3}{7}$ de la edad de Irma hace 10 años, o sea $\frac{3}{7}$ de 2x - 10; por tanto tenemos la ecuación:

$$x - 10 = \frac{3}{7}(2x - 10)$$

Resolviendo: $7x - 70 = 6x - 30$

$7x - 6x = 70 - 30$

x = 40 años es la edad actual de Francisco

2*x* = 80 años es la edad actual de Irma.

PROBLEMA 7

Hace 10 años la edad *A* era $\frac{3}{5}$ de la edad que tendrá dentro de 20 años. ¿Cuál es la edad actual de *A*?

Siendo *x* = edad actual de *A*

Hace 10 años la edad de *A* era *x* - 10 y dentro de 20 años será *x* + 20

La edad de *A* hace 10 años, *x* -10, era $\frac{3}{5}$ de la edad que tendrá dentro de 20 años, es decir, de $\frac{3}{5}$ de *x* + 20; tenemos la ecuación

$$x - 10 = \frac{3}{5}(x + 20)$$

Resolviendo: $5x - 50 = 3x + 60$

$2x = 110$

$x = \frac{110}{7} = 55$

55 años es la edad actual de *A.*

EJERCICIOS

1. La edad de A es $\frac{1}{3}$ de la de *B*, pero hace 15 años era $\frac{1}{6}$ de la de *B.* Hallar las edades actuales.
R. *A* tiene 25 años; *B* tiene 75 años.

2. La edad de *A* es el triple de la de *B* y dentro de 20 años será el doble. Hallar las edades actuales.
R. *A* tiene 60 años y *B* tiene 20 años.

3. La edad de un hijo es $\frac{2}{5}$ de la de su padre y hace 8 años la edad del hijo era $\frac{2}{7}$ de la edad del padre. Hallar las edades actuales.
R. El hijo tiene 20 años; el padre 50 años.

4. La edad de *A* es el triple de la de *B* y hace 4 años la suma de ambas edades era igual a la que tendrá *B* dentro de 16 años. Hallar las edades actuales. **R.** *A,* tiene 24 años; *B*, tiene 8 años.

PROBLEMA 8

A tiene el doble de dinero que *B*, y si le da a *B* 34 dólares, le quedarán $\frac{5}{11}$ de lo que tenga B. ¿Cuánto tiene cada uno?

Siendo x = lo que tiene *B*

Entonces $2x$ = lo que tiene *A*

Si *A* le da a *B* 34 dólares, *A* se queda con $2x - 34$ dólares y *B* tendrá entonces $x + 34$ dólares.

Cuando *A* le da a *B* 34 dólares le queda $2x - 34$ dólares, o sea $\frac{5}{11}$ de lo que tiene B, que son $\frac{5}{11}$ de de $x + 34$ dólares; esto nos da la ecuación:

$$2x - 34 = \frac{5}{11}(x + 34)$$

Resolviendo: $22x - 374 = 5x + 170$

$$22x - 5x = 374 + 170$$

$$17x = 544$$

$$x = \frac{544}{17} = \$\,32 \text{ es lo que tiene B}$$

$$2x = 64 \text{ dólares es lo que tiene } A$$

PROBLEMA 9

Un padre tiene 40 años y su hijo 15. ¿Dentro de cuántos años la edad del hijo será $\frac{4}{9}$ de la del padre?

Siendo x el número de años que deben transcurrir para que la edad del hijo sea $\frac{4}{9}$ la del padre, dentro de x años la edad del padre será $40 + x$ años, y la del hijo $15 + x$ años.

La edad del hijo dentro de x años, $15 + x$, será $\frac{4}{9}$ de la edad del padre dentro de x años, o sea $\frac{4}{9}$ de $40 + x$; tenemos la ecuación:

$$15 + x = \frac{4}{9}(40 + x)$$

Resolviendo: $135 + 9x = 160 + 4x$

$$5x = 25$$

$$x = 5$$

La respuesta es: dentro de 5 años.

PROBLEMA 10

La longitud de un rectángulo excede al ancho en 8 metros. Si cada dimensión se aumenta en 3 metros, el área crecería 57 m^2. Hallar las dimensiones del rectángulo.

Siendo x = ancho del rectángulo

Entonces $x + 8$ = longitud del rectángulo

Como el área de un rectángulo se obtiene multiplicando longitud por ancho, tendremos:

$$x(x + 8) = \text{área del rectángulo dado}$$

Al aumentar cada dimensión 3 metros, el ancho será $x + 3$ metros y la longitud $(x + 8) + 3 = x + 11$ metros.

El área será $(x + 3)(x + 11)$ m^2

Dadas las condiciones del problema, esta nueva superficie $(x + 3)(x + 11)$ m^2 tiene 57 m^2 más que la superficie del rectángulo dado $x(x + 8)$; con ello se tiene la ecuación:

$$(x + 3)(x + 11) - 57 = x(x + 8)$$

Resolviendo:

$$x^2 + 14x + 33 - 57 = x^2 + 8x$$

$$14x - 8x = 57 - 33$$

$$6x = 24$$

$x = 4$ m, ancho del rectángulo dado

$x + 8 = 12$ m, longitud del rectángulo dado

EJERCICIOS

1. *A* tiene el doble de dinero que *B*. Si *A* le diera 20 dólares tendría $\frac{4}{5}$ de lo que tendría *B*. ¿Cuánto tiene cada uno?

R. A, 60 dólares; B, 30 dólares.

2. Alma tiene la mitad de lo que tiene Susana, pero si ésta le da 24 dólares a Alma las dos tendrán lo mismo. ¿Cuánto tiene cada una?

R. Alma, 48 dólares; Susana, 96 dólares.

3. Pedrito y Juanito empiezan a jugar y Juanito tiene $\frac{2}{3}$ de lo que tiene Pedrito. Cuando Juanito ha ganado $22 tiene $\frac{7}{5}$ de lo que le queda a Pedrito. ¿Con cuánto empezó a jugar cada niño?

R. Pedrito con 72 dólares y Juanito con 48 dólares.

4. *B* tiene el doble de lo que tiene *A*, pero si *B* le da a *A* $6 tendrá los $\frac{3}{5}$ de lo que le quede a B. ¿Cuánto tiene cada uno?

R. *A*, $48; *B*, $96

EJERCICIOS

1. Un hombre tiene 52 años y su esposa 48. ¿Hace cuántos años la edad de la esposa era $\frac{9}{10}$ de la del hombre?

R. 12 años.

2. Ruth tiene 27 años y Hortencia 18. ¿Hace cuántos años la edad de Hortencia era $\frac{1}{4}$ de la de Ruth?

R. 15 años.

3. Álvaro tiene $50 y Ricardo $22. Si ambos reciben una misma suma de dinero, Ricardo tendrá los $\frac{3}{5}$ de lo que tiene Álvaro. ¿Cuál es esa suma?

R. $20

4. Una de las dimensiones de una sala rectangular es el doble de la otra. Si cada dimensión se aumenta 5 m el área crecería 160 m^2. Hallar las dimensiones del rectángulo.

R. 18 m × 9 m

5. La dimensión de un rectángulo excede a otra por 2 m. Si ambas se disminuyen 5 m el área disminuiría 115 m^2. Hallar las dimensiones del rectángulo.

R. 15 m × 13 m

6. La longitud de un campo rectangular excede a su ancho en 30 m. Si la longitud se disminuye 20 m y el ancho se aumenta 15 m, el área disminuirá 150 m^2. Hallar las dimensiones del rectángulo.

R. 90 m × 60 m

7. La longitud de una sala excede a su ancho en 10 m. Si la longitud se disminuye 2 m y el ancho se aumenta 1 m el área no varía. Hallar las dimensiones de la sala.

R. 18m × 8 m

8. La longitud de un rectángulo excede al ancho en 3 m. Si cada dimensión se aumenta en 1 m la superficie se aumenta en 22 m^2. Hallar las dimensiones del rectángulo.

R. 12 m × 9 m

PROBLEMA 11

El denominador de una fracción excede al numerador en 5. Si el denominador se aumenta en 7, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$ hallar la fracción.

Siendo x = numerador de la fracción

Como el denominador excede al numerador en 5: $x + 5$ = denominador de la fracción.

Por lo tanto, la fracción será $\frac{x}{x+5}$

Si el denominador de esta fracción se aumenta en 7, la fracción equivale a $\frac{1}{2}$; por tanto tendremos la ecuación:

$$\frac{x}{x+5+7} = \frac{1}{2}$$

Resolviendo:

$$\frac{x}{x+12} = \frac{1}{2}$$

$2x = x + 12$

$x = 12$, numerador de la fracción

$x + 5 = 17$, denominador de la fracción

La fracción buscada es $\frac{12}{17}$

EJERCICIOS

1. El numerador de una fracción es 8 unidades menor que el denominador. Si a los dos términos de la fracción se les suma 1, el valor de la fracción es $\frac{3}{4}$ Hallar la fracción. **R.** $\frac{23}{31}$

2. El denominador de una fracción excede al doble del numerador en 1. Si al numerador se le resta 4, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$. Hallar la fracción. **R.** $\frac{13}{27}$

3. El denominador de una fracción excede al doble del numerador en 6. Si el numerador se aumenta en 15 y el denominador se disminuye en 1, el valor de la fracción es $\frac{4}{3}$. Hallar la fracción. **R.** $\frac{5}{16}$

PROBLEMA 12

Las decenas de un número de dos cifras exceden en 3 a las unidades, y si el número se divide por la suma de sus cifras el cociente es 7. Hallar el número.

Siendo x = cifra de las unidades

Entonces $x + 3$ = cifra de las decenas

Obtenemos el número multiplicando por 10 la cifra de las decenas y sumándole la cifra de las unidades; luego:

$10(x + 3) + x = 10x + 30 + x =$

$11x + 30$ = el número

El número $11x + 30$ dividido por la suma de sus cifras, $x + x + 3 = 2x + 3$, da 7 de cociente; por tanto tenemos la ecuación:

$$\frac{11x+30}{2x+3} = 7$$

Resolviendo:

$11x + 30 = 14x + 21$

$11x - 14x = -30 + 21$

$-3x = -9$

$x = 3$ cifra de las unidades

$x + 3 = 6$, cifra de las decenas

El número buscado es 63

EJERCICIOS

1. Las decenas de un número de dos cifras son el doble de las unidades y si el número, disminuido en 9, se divide por la suma de sus cifras, el cociente es 6. Hallar el número. **R.** 63

2. Las decenas de un número de dos cifras exceden en 1 a las unidades. Si el número se multiplica por 3 este producto equivale a 21 veces la suma de sus cifras. Hallar el número.

R. 21

3. La suma de las decenas y las unidades de un número de dos cifras es 7. Si el número, aumentado en 8, se divide por el doble de las decenas el cociente es 6. Hallar el número. **R.** 52

PROBLEMA 13

Un albañil puede hacer una obra en 3 días y otro en 5 días. ¿En cuánto tiempo la terminarán si trabajan juntos?

Siendo *x* el número de días en que harían la obra trabajando juntos.

Si en *x* días los dos hacen toda la obra, en 1 día harán $\frac{1}{x}$.

El primer albañil, solo, hace la obra en 3 días; por tanto, en un día hace $\frac{1}{3}$

El segundo albañil, solo, hace la obra en 5 días; por tanto, en un día hace $\frac{1}{5}$ los dos juntos harán en un día $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)$ de la obra; pero como en un día los dos hacen $\frac{1}{x}$ tendremos:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1}{x}$$

Resolviendo:

$$5x + 3x = 15$$

$$8x = 15$$

$$x=\frac{15}{8}=1\ \frac{7}{8}\text{días}$$

PROBLEMA 14

¿A qué hora entre las 4 y las 5 están opuestas las manecillas del reloj?

Para resolver este tipo de problemas se recomienda hacer siempre un gráfico como el de la figura 23, donde se representa la posición del horario y el minutero a las 4. Después representamos la posición de ambas manecillas cuando están opuestas, el horario en *C* y el minutero en *D*.

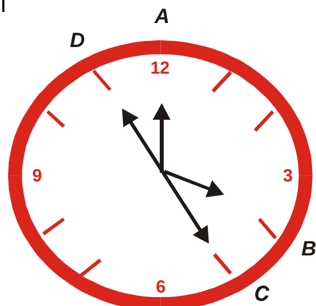


Figura 23

Mientras el minutero da una vuelta completa al reloj (60 divisiones de minuto) el horario avanza de una hora a la siguiente, 5 divisiones de minuto, o sea $\frac{1}{12}$ de lo que ha recorrido el minutero; por tanto, el horario siempre avanza $\frac{1}{12}$ de las divisiones que avanza el minutero.

Siendo *x* = el número de divisiones de 1 minuto del arco *ABCD* que ha recorrido el minutero hasta quedar opuesto al horario.

Entonces $\frac{x}{12}$ = número de divisiones de 1 minuto del arco *BC* que ha recorrido el horario.

En la figura el arco *ABCD* = *x* equivale al arco *AB* = 20 divisiones de 1 minuto, más el arco BC = $\frac{x}{12}$ más el arco *CD* = 30 divisiones de 1 minuto; con esto tendremos la ecuación:

$$x=20+\frac{x}{12}+30$$

Resolviendo:

$$x=50+\frac{x}{12}$$

$$12x = 600 + x$$

$$11x = 600$$

$x=\frac{600}{11}=54\frac{6}{11}$ divisiones de 1 min

Por tanto, entre las 4 y las 5 las manecillas del reloj están opuestas a las 4 y 54 $\frac{6}{11}$ minutos.

EJERCICIOS

1. Una llave llena un depósito en 10 minutos y otra en 20 minutos. ¿En cuánto tiempo lo llenarán las dos?

R. $6\frac{2}{3}$ min

2. *A* puede hacer una obra en 4 días, *B* en 6 días y *C* en 12 días. ¿En cuánto tiempo terminarían los tres juntos? **R.** 2 días

3. Una llave llena un depósito en 4 minutos, otra en 8 minutos y un desagüe puede vaciarlo, estando lleno, en 20 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito, si estando vacío y abierto el desagüe se abren las dos llaves?

R. $3\frac{1}{13}$ minutos

EJERCICIOS

1. ¿A qué hora, entre la 1 y las 2, están opuestas las manecillas del reloj? **R.** 1 y 38 $\frac{2}{11}$minutos.

2. ¿A qué hora, entre las 10 y las 11, las manecillas del reloj forman ángulo recto? **R.** A las 10 y 5 $\frac{5}{11}$ min y a las 10 y 38 $\frac{2}{11}$ minutos.

3. ¿A qué hora, entre las 12 y la 1, están opuestas las manecillas del reloj? **R.** 12 y 32 $\frac{8}{11}$ minutos.

4. ¿A qué hora, entre las 2 y las 3, forman el ángulo recto las agujas **del reloj?**

R. A las 2 y 27 $\frac{3}{11}$ minutos.

5. **¿**A qué hora, entre las 4 y las 5, coinciden las agujas del reloj?

R. A las 4 y 21 $\frac{9}{11}$ minutos.

6. ¿A qué hora, entre las 3 y las 4, el minutero dista exactamente 5 divisiones del horario, después de haberlo pasado? 11

R. A las 3 y 21 $\frac{9}{11}$ minutos.

7. ¿A qué hora, entre las 8 y las 9, el minutero dista exactamente del horario 10 divisiones?

R. A las 8 y 32 $\frac{8}{11}$min y a las 8 y 54 $\frac{6}{11}$ minutos.

PROBLEMA 15

¿A qué hora, entre las 5 y las 6, las manecillas del reloj forman un ángulo recto?

Entre las 5 y las 6 las manecillas están en ángulo recto en 2 posiciones: una antes de que el minutero pase sobre el horario, y otra después.

1) Antes de que el minutero pase sobre el horario.

A las 5 el horario está en *C* y el minutero en *A*. Representemos la posición en que forman ángulo recto antes de pasar el minutero sobre el horario: el minutero en *B* y el horario en *D* (fig. 24).

Siendo x = el arco *AB* que ha recorrido el minutero; entonces $\frac{x}{12}$ = el arco *CD* que ha recorrido el horario.

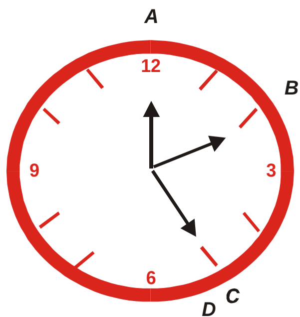


Figura 24

En la figura 24 vemos: arco *AB* + arco *BD* = arco *AC* + arco *CD*, pero arco *AB* = x, arco *BD* = 15, arco *AC* = 25 y arco *CD* = x ; luego:

$$x+15=25+\frac{x}{12}$$

Resolviendo:

$12x+180=300+x$

$11x=120$

$$x=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11} \text{ div. 1 min}$$

Por tanto, estarán en ángulo recto por primera vez a las 5 y $10\frac{10}{11}$ minutos.

2) Después de que el minutero ha pasado sobre el horario.

A las 5 el horario está en *B* y el minutero en *A*. Después de pasar el minutero sobre el horario, cuando forman ángulo recto, el horario está en *C* y el minutero en *D*.

Siendo x = el arco *ABCD* que ha recorrido el minutero; $\frac{x}{12}$ = el arco *BC* que ha recorrido el horario.

En la figura 25 vemos: arco *ABCD* = arco *AB* + arco *BC* + arco *CD*, o sea,

$$x=25+\frac{x}{12}+15$$

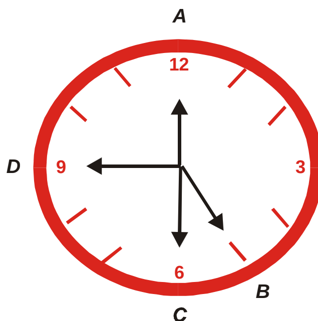


Figura 25

Resolviendo:

$12x=300+x+180$

$11x=480$

$$x=\frac{480}{11}=43\frac{7}{11} \text{ divisiones de 1 min}$$

Por tanto, formarán ángulo recto por segunda vez a las 5 y $43\frac{7}{11}$ minutos.

EJERCICIOS

Problemas diversos que se resuelven por ecuaciones de primer grado.

1. La diferencia entre dos números es 6 y la mitad del mayor excede en 10 a los $\frac{3}{8}$ del menor. Hallar los números. **R.** 62 y 56

2. *A* tenía $120 y *B* $90. Después que *A* le dio a *B* cierta suma, *B* tiene $\frac{11}{10}$ de lo que le queda a *A*. ¿Cuánto le dio *A* a *B*? **R.** $20

3. Un número se aumentó en 6 unidades y la suma se dividió entre 8; al cociente se le sumó 5 y esta nueva suma se dividió entre 2, obteniendo 4 de cociente. Hallar el número. **R.** 18

4. La edad de *B* es $\frac{2}{5}$ de la de *A* y la de *C* $\frac{2}{3}$ de la de *B*. Si entre los tres tienen 25 años, ¿cuál es la edad de cada uno? **R.** *A*, 15 años; *B*, 6 años; *C*, 4 años.

5. Vendí un automóvil por 8,000 dólares más la tercera parte de lo que me había costado, y en esta operación gané 2,000 dólares. ¿Cuánto me había costado? **R.** $9,000

6. Compré cierto número de libros, 4 ejemplares por $3, y un número igual a $\frac{3}{4}$ del número de libros anterior a 10 ejemplares por $7. Si vendí todos a 2 ejemplares por $3 y gané $54, ¿cuántos libros compré? **R.** 70 libros.

7. Dividir 150 en cuatro partes tales que la segunda sea $\frac{5}{6}$ de la primera; la tercera $\frac{3}{5}$ de la segunda y la cuarta $\frac{1}{3}$ de la tercera. **R.** 60, 50, 30 y 10

8. ¿A qué hora, entre las 9 y las 10, coinciden las manecillas del reloj?

R. 9 y $49\frac{1}{11}$ min.

9. Hallar dos números consecutivos tales que la diferencia de sus cuadrados exceda en 43 a $\frac{1}{11}$ del número menor.

R. 23 y 22

10. Un padre de raza gasta $\frac{3}{5}$ de su sueldo anual en reparaciones y mejoras a su casa, $\frac{1}{8}$ en ropa, $\frac{1}{20}$ en diversiones y ahorra 810 dólares al año. ¿Cuál es su sueldo anual? **R.** 3,600 dólares.

11. Dividir 350 en dos partes tales que la diferencia entre la menor y $\frac{3}{5}$ de la mayor equivalga a la diferencia entre la mayor y $\frac{17}{15}$ de la menor. **R.** 200 y 150

12. El lunes gasté la mitad de lo que tenía y $2 más; el martes la mitad de lo que me quedaba y $2 más; el miércoles la mitad de lo que me quedaba y $2 más hasta que ya no tuve nada. ¿Cuánto tenía el lunes antes de empezar a gastar? **R.** 28 dólares.

PROBLEMAS DE LOS MÓVILES

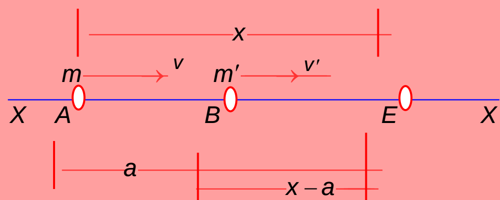


Figura 26

Siendo los móviles *m* y *m* ' animados de movimiento uniforme, es decir que la velocidad de cada uno es constante, se mueven en la misma dirección y en el mismo sentido (de izquierda a derecha, como lo indican las flechas), suponemos que el móvil *m* pasa por el punto *A* en el mismo instante en que el móvil *m* ' pasa por el punto *B*. Designamos como *a* la distancia entre los puntos *A* y *B*.

Siendo *v* la velocidad del móvil *m* y *v* ' la del móvil *m* ', suponemos que *v* > *v* '. Aquí se trata de hallar a qué distancia del punto *A*, el móvil *m* alcanzará al móvil *m* '.

Siendo *E* el punto de encuentro de los móviles, designamos como *x* la distancia del punto *A* al punto *E* (que es lo que se busca); por tanto, la distancia del punto *B* al *E* será *x* - *a* .

El móvil *m* pasa por *A* en el mismo instante que *m* ' pasa por *B* y *m* alcanza a *m* ' en *E* ; luego, es evidente que el tiempo que le lleva al móvil *m* ir desde *A* hasta *E* es igual al tiempo que el móvil *m* ' va desde *B* hasta *E*. Dado que el movimiento de los móviles es uniforme, el tiempo es igual al espacio partido por la velocidad.

Así, el tiempo en que el móvil *m* va desde *A* hasta *E* será igual al espacio que debe recorrer *x* partido por su velocidad *v*, o sea $\frac{x}{v}$.

El tiempo del móvil *m* ' para ir desde *B* hasta *E* será igual al espacio que debe recorrer *x* - *a* partido por su velocidad *v* ' o sea $\frac{x-a}{v'}$. Pero, según se dijo antes, estos tiempos son iguales, por lo que tenemos la ecuación:

$$\frac{x}{v} = \frac{x-a}{v'}$$

Resolviendo: $v'x = v(x - a)$

$$v'x = vx - av$$

$$v'x - vx = -av$$

Cambiando los signos de todos los términos:

$$vx - v'x = av$$

$$x(v - v') = av$$

$$x = \frac{av}{v-v'}$$

Esta fórmula da la distancia de *A* al punto de encuentro *E* en función de *a*, la distancia entre *A* y *B* (cantidad conocida) y de las velocidades *v* y *v* ' de los móviles (también conocidas).

En una discusión acerca de esta fórmula $x = \frac{av}{v-v'}$ se pretende saber qué valores toma *x* de acuerdo con los de *a, v* y *v* ' en cuya función viene dada *x* .

Viendo la Fig. 26 se pueden considerar los 5 casos siguientes:

1) *V* > *V* '. El numerador *av* es positivo y el denominador *v* - *v* ' también es positivo por ser el minuendo *v* mayor que el sustraendo *v* '; luego, *x* es positiva, esto significa que el móvil *m* alcanza al *m* ' en un punto situado a la derecha de *B*.

2) *V* < *V* '. El numerador *av* es positivo y el denominador *v* - *v* ' negativo por ser el minuendo *v* menor que el sustraendo *v* '; luego, *x* es negativa, esto significa que si los móviles se encontraron fue en un punto situado a la izquierda de *A*, y a partir de ese momento, como la velocidad de *m* es menor que la de *m* ', éste se apartó cada vez más de *m*, hallándose ahora a una distancia *a* de él, misma que continuará aumentando.

3) *V* = *V* '. La fórmula $x = \frac{av}{v-v'}$ se convierte en

$$x = \frac{av}{0} = \infty$$

esto significa que los móviles se encuentran en el infinito; así se expresa el hecho de mantenerse siempre a la misma distancia *a*, ya que la velocidad de *m* es igual a la de *m* '.

4) *V* = *V* ' y *a* = 0. La fórmula se convierte en $x = \frac{0 \times v}{v-v'} = \frac{0}{0} =$ **valor indeterminado**, lo cual significa que la distancia del punto *A* al punto de encuentro puede ser cualquiera. En efecto, siendo *a* = 0, los puntos *A* y *B* coinciden; luego, los móviles están juntos, y como sus velocidades son iguales, estarán juntos a cualquier distancia de *A*.

5) *V* ' es negativa. (El móvil *m* ' se desplaza de derecha a izquierda.) Esta fórmula se convierte en $x = \frac{av}{v-(-v')} = \frac{av}{v+v'}$..

Tanto el numerador como el denominador son positivos; luego *x* es positiva, pero menor que *a* .

La fracción $\frac{av}{v+v'}$ que es el valor de x , puede escribirse $a\left(\frac{v}{v+v'}\right)$, donde el factor $\frac{v}{v+v'}$ es una fracción menor que 1 por tener el numerador menor que el denominador, y al multiplicar *a* por una cantidad menor que 1, el producto será menor que *a* . Como *x* es positiva y menor que *a* , significa que los móviles se encuentran en un punto a la derecha de *A* y que este punto mantiene una distancia menor que *a* , o sea que el punto de encuentro está entre *A* y *B*.

Si en la hipótesis de que *v* ' es negativa suponemos que *v* = *v* ', la fórmula se convierte en

$$x = \frac{av}{v-(-v)} = \frac{av}{v+v} = \frac{av}{2v} = \frac{a}{2}$$

Es decir que el punto de encuentro está precisamente en medio de la línea *AB*.

APLICACIÓN PRÁCTICA DEL PROBLEMA DE LOS MÓVILES

Ejemplos

1) Un camión que viaja a 60 km por hora pasa por el punto *A* en el mismo instante que otro camión a 40 km por hora pasa por el punto *B*, situado a la derecha de *A* y a una distancia de 80 km. Ambos siguen la misma dirección y van en el mismo sentido. ¿A qué distancia de *A* se encontrarán?

La fórmula es $x = \frac{av}{v - v'}$. En este caso a = 80 km, v = 60 km por hora, *v* ' = 40 kilómetros por hora, luego:

$$x = \frac{80 \times 60}{60 - 40} = \frac{4800}{20} = 204 \quad \text{km}$$

Por tanto se encontrarán en un punto situado 240 km a la derecha de *A*.

Para saber el tiempo que tardarán en encontrarse sólo hay que dividir el espacio por la velocidad. Si el punto de encuentro está a 240 km de *A* y el camión que consideramos en *A* iba a 60 km por hora, para alcanzar al otro necesita:

$$\frac{240 \quad \text{km}}{60 \quad \text{km por hora}} = 4 \text{ horas}$$

2) Un auto pasa por la ciudad *A* rumbo a la ciudad *B* a 40 km por hora y en el mismo instante otro auto pasa por *B* hacia *A* a 35 km por hora. La distancia entre *A* y *B* es de 300 km. ¿A qué distancia de *A* y *B* se encontrarán y cuánto tiempo después de pasar por esos puntos?

En este caso *a* = 300 km, *v* = 40 km por hora, *v* ' = 35 km por hora y como van uno hacia el otro, *v* ' es negativa, luego:

$$x = \frac{av}{v - (-v')} = \frac{av}{v + v'} = \frac{300 \times 40}{40 + 35} = \frac{12000}{75} = 160 \text{ km}$$

Se encontrarán a 160 km de la ciudad *A*.

La distancia del punto de encuentro a la ciudad *B* será 300 km - 160 km = 140 km

El tiempo que les llevó a encontrarse fue $\frac{160}{40}$ = 4 horas

EJERCICIOS

1. Un deportista que parte de *A* da una ventaja de 30 m a otro que sale de *B*. El primero corre a 8 m por seg y el segundo a 5 m por seg. ¿A qué distancia de *A* se encontrarán?

R. 80 m

2. Dos autos parten de *A* y *B* distantes entre sí 160 km y van uno hacia el otro. El que parte de *A* va a 50 km por hora y el de *B* a 30 km por hora. ¿A qué distancia de *A* se encontrarán?

R. 100 km

3. Un tren que va a 90 km por hora pasa por *A* en el mismo instante que otro a 40 km pasa por *B*, viniendo ambos hacia *C* . La distancia entre *A* y *B* es de 200 km. ¿A qué distancias de *A* y *B* se encontrarán?

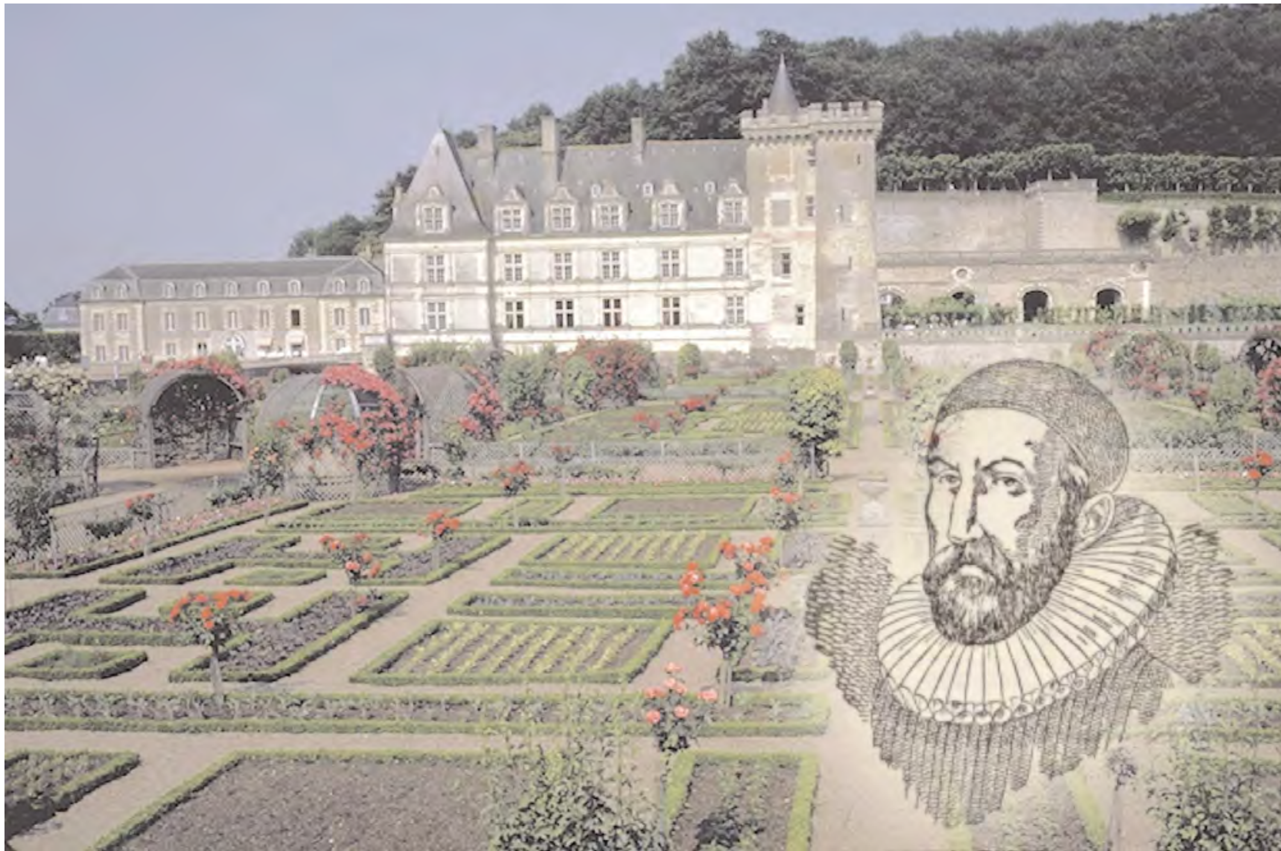
R. 360 km de *A* y 160 km de *B*.

4. Un tren de carga que va a 42 km por hora es seguido 3 horas después por un tren de pasajeros a 60 km por hora. ¿En cuántas horas alcanzará el tren de pasajeros al de carga y a qué distancia del punto de partida?

R. 7 horas; 420 km

5. Dos autos a la misma velocidad pasan en el mismo instante por dos puntos, *A* y *B*, distantes entre sí 186 km y van uno hacia el otro. ¿A qué distancia de *A* y *B* se encontrarán?

R. *A* 93 km



John Neper fue uno de los más geniales matemáticos ingleses, introdujo el punto decimal para separar las cifras decimales de las enteras. Observó las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas descubriendo así el principio que rige a los logaritmos.

CAPÍTULO XIX

FÓRMULAS

Una **fórmula** es la expresión de una ley o un principio general por medio de símbolos o letras. Por ejemplo, la Geometría nos enseña que el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su **base** por su **altura**. Siendo *A* el área de un triángulo, *b* la base y *h* la altura, este principio general se expresa **exacta** y **brevemente** con la fórmula

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

que nos permite encontrar el área de **cualquier triángulo** sólo con sustituir *b* y *h* por sus valores concretos en cualquier caso dado. Si la base de un triángulo es 8 m y su altura 3 m, su área será:

$$A = \frac{8 \times 3}{2} = 12\ m^2$$

FÓRMULAS ALGEBRAICAS

Las fórmulas algebraicas se aplican en ciencias como Geometría, Física, Mecánica, etc., y su utilidad y ventajas son muy importantes, ya que:

1) Expresan **brevemente** una ley o un principio general.

2) Son fáciles de recordar.

3) Su aplicación es muy sencilla: para resolver un problema utilizando la fórmula adecuada, basta sustituir las letras por sus valores en el caso dado.

4) Una fórmula nos dice la **relación** que existe entre las variables que intervienen en ella, pues según se ha probado en Aritmética, la variable cuyo valor se da por medio de una fórmula es **directamente proporcional** con las variables (factores) que se hallan en el **numerador** del segundo miembro e **inversamente proporcional** con las que tenga el **denominador** si las demás permanecen constantes.

Para traducir una fórmula al lenguaje vulgar, es decir, para **dar la regla** contenida en una fórmula, basta sustituir las letras por las magnitudes que representan y expresar las relaciones que según la fórmula existen entre ellas. Por ejemplo:

1) Mencionar la regla contenida en la fórmula $A = h\left(\frac{b+b'}{2}\right)$, donde A representa el área de un trapecio, h su altura, b y b' sus bases.

Regla: El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases.

2) Indicar la regla contenida en la fórmula $v = \frac{e}{t}$, donde v representa la **velocidad** de un automóvil con movimiento uniforme y e el **espacio** recorrido en el **tiempo** t.

Regla: La velocidad de un automóvil con movimiento uniforme es igual al espacio que ha recorrido dividido entre el tiempo empleado en recorrerlo.

En cuanto a la **relación** de v con e y t, la fórmula dicta dos **leyes:**

1) La **velocidad** es **directamente** proporcional al **espacio** (porque e está en el numerador) para un mismo tiempo.

2) La **velocidad** es **inversamente** proporcional al **tiempo** (porque t está en el denominador) para un mismo espacio.

EXPRESAR POR MEDIO DE SÍMBOLOS

Para expresar por medio de símbolos una ley matemática o física obtenida como resultado de una investigación, es decir, para escribir su **fórmula**, generalmente se designan las variables por las **iniciales** de sus nombres con las que se escribe una expresión que muestra las **relaciones** observadas entre las variables.

Ejemplos

1) Escribir una fórmula que exprese que la altura de un triángulo es igual al doble de su área dividido entre la base.

Siendo la altura h, el área A y la base b, la fórmula será:

$$h = \frac{2A}{b}$$

2) Escribir una fórmula que exprese que la presión que ejerce un líquido sobre el fondo del recipiente que lo contiene es igual a la superficie del fondo multiplicada por la altura del líquido y por su densidad.

Siendo la presión P, la superficie del fondo del recipiente S, la altura del líquido h y su densidad d, la fórmula será: $P = Shd$

EJERCICIOS

Señala la regla correspondiente a estas fórmulas:

1. $A = \frac{1}{2}bh$ siendo A el área de un triángulo, b su base y h su altura.

2. $e = vt$, siendo e el espacio recorrido por un automóvil con movimiento uniforme, v su velocidad y t el tiempo.

3. $t = \frac{e}{v}$. Las letras tienen el significado del caso anterior.

4. $T = Fe$, siendo T trabajo, F fuerza y e camino recorrido.

5. $A = \frac{D \times D'}{2}$ siendo A el área de un rombo, D y D' sus diagonales.

6. $V = h \times B$, siendo V el volumen de un prisma, h su altura y B el área de su base.

7. $V = \frac{1}{3}h \times B$, siendo V el volumen de una pirámide, h su altura y B el área de su base.

8. $A = \pi r^2$, siendo A el área de un círculo y r el radio. (p es una constante igual a 3.1416 ó 22).

9. $e = \frac{1}{2}gt^2$, siendo e el espacio recorrido por un automóvil que cae libremente desde cierta altura partiendo del reposo, g la aceleración de la gravedad (9.8 m. por seg.) y t el tiempo en caer.

10. $A = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$, siendo A el área un triángulo equilátero y l su lado.

11. $F = \frac{mv^2}{r}$, siendo F la fuerza centrífuga, m la masa del automóvil, v su velocidad y r el radio de la circunferencia que describe.

EJERCICIOS

Designa las variables por la inicial de su nombre y escribe la fórmula que expresa:

1. La suma de dos números multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados**.**

2. El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

3. La base de un triángulo es igual al doble de su área dividido entre su altura.

4. La densidad de un cuerpo es igual al peso dividido por el volumen.

5. El peso de un cuerpo es igual al producto de su volumen por su densidad.

6. El área de un cuadrado es igual al cuadrado del lado.

7. El volumen de un cubo es igual al cubo de su arista.

8. El radio de una circunferencia es igual a la longitud de la circunferencia dividida entre 2p.

9. El cuadrado de un cateto de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.

10. El área de un cuadrado es la mitad del cuadrado de su diagonal.

11. La fuerza de atracción entre dos cuerpos es igual al producto de una constante *k* por el cociente que resulta de dividir el producto de las masas de los cuerpos por el cuadrado de su distancia.

12. El tiempo que emplea una piedra en caer libremente al fondo de un pozo es igual a la raíz cuadrada del doble de la profundidad del pozo dividido entre 9.8.

13. El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto de su apotema por el perímetro.

14. La potencia de una máquina es igual al trabajo que realiza en 1 segundo.

EMPLEO DE FÓRMULAS EN CASOS PRÁCTICOS

Para utilizar fórmulas en casos prácticos sólo se sustituyen las letras de la fórmula por sus valores.

Ejemplos

1) Hallar el área de un trapecio cuya altura mide 5 m y sus bases 6 y 8 m respectivamente.

La fórmula es $A = h\left(\frac{b+b'}{2}\right)$

Aquí, h = 5 m, b = 6 m, b' = 8 m, sustituyendo:

$$A = 5\left(\frac{6+8}{2}\right) = 5\times 7 = \ 35\ m^2$$

2) Hallar el volumen de una pirámide cuya altura es de 12 m y el área de la base 36 m^2.

La fórmula es $V = \frac{1}{3}\ h \times B$

Aquí, h = 12 m, B = 36 m^2, sustituyendo:

$$V = \frac{1}{3} \times 12 \times 36 = 4 \times 36 = 144\ m^3$$

3) Si se deja caer una piedra desde la azotea de un edificio tarda 4 segundos en llegar al suelo. Hallar la altura del edificio.

La altura del edificio es el espacio que recorre la piedra.

La fórmula es: $e = \frac{1}{2}gt^2$

g vale 9.8 m y t = 4 seg,

sustituyendo:

$$e = \frac{1}{2}\times 9.8\times 4^2 =$$

$$\frac{1}{2}\times 9.8\times 16 = 9.8\times 8 = 78.4$$

La altura del edificio es 78.4 metros.

EJERCICIOS

1. Hallar el área de un triángulo de 10 cm de base y 8 de altura

$A = \frac{1}{2}bh$ **R.** 40 cm^2

2. Encuentra el área de un cuadrado cuya diagonal mide 8 m $A = \frac{d^2}{2}$.

R. 32 m^2

3. ¿Qué distancia recorre un móvil en 15 seg si tiene un movimiento uniforme y lleva una velocidad de 9 m por seg? $e = vt$ **R.** 135 m

4. ¿En qué tiempo recorrerá el mismo automóvil 108 m? **R.** 12 seg

5. Hallar la hipotenusa a de un triángulo rectángulo, siendo sus catetos b = 4 m y c = 3 m $a^2 = b^2 + c^2$ **R.** 5 m

6. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 m y uno de los catetos 5 m. Hallar el otro cateto.

$b^2 = a^2 - c^2$ **R.** 12 m

7. Hallar el área de un círculo de 5 m de radio $A = \pi r^2$, $\pi = \frac{22}{7}$

R. $78\frac{4}{7}m^2$

8. ¿Cuál es la longitud de una circunferencia de 5 metros de radio? $C = 2\pi r$ **R.** $31\frac{3}{7}m$

9. Encuentra el volumen de un cono cuya altura es de 9 m y el radio de la base 2 m.

$v = \frac{1}{3}h\pi r^2$ **R.** $37\frac{5}{7}m^3$

10. El volumen de un cuerpo es de 8 cm^3 y pesa 8.24 g. ¿Cuál es su densidad? $D = \frac{P}{V}$ **R.** 1.03

11. Hallar el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 4 m.

$A = \frac{1^2}{4}\sqrt{3}$ **R.** 6.92 m^2

12. Encuentra la suma de los ángulos interiores de un exágono regular S = 180° (N - 2). (N es el número de lados del polígono).

R. 720°.

CAMBIO DEL SUJETO DE UNA FÓRMULA

El **sujeto de una fórmula** es la variable cuyo valor se da por medio de la fórmula. Una fórmula es una ecuación literal y podemos despejar cualquiera de los elementos que entran en ella considerándolo como incógnita, y con ello **cambiamos el sujeto** de la fórmula.

Ejemplos

1) Dada la fórmula $e = \frac{1}{2} at^2$ hacer a t el sujeto de la fórmula.

Hay que despejar t en esta ecuación literal; t es la incógnita. Suprimiendo denominadores, tenemos: $2e = at^2$

Despejando t^2: $$t^2 = \frac{2e}{a}$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros:

$$t = \sqrt{\frac{2e}{a}}$$

2) Dada la fórmula $S = 2R(N - 2)$ hacer a N el sujeto de la fórmula.

Hay que despejar N, que es la incógnita.

Efectuando el producto indicado: $S = 2NR - 4R$

Trasponiendo: $S + 4R = 2NR$

$$N = \frac{S + 4R}{2R}$$

3) En la fórmula $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ despejar p'.

El m. c. m. de los denominadores es $pp'f$. Quitando denominadores tendremos:

$$pp' = p'f + pf$$

La incógnita es p'. Trasponiendo: $pp' - p'f = pf$

$$p'(p - f) = pf$$

$$p' = \frac{pf}{p' - f}$$

4) Despejar a en $v = \sqrt{2ae}$

Elevando al cuadrado ambos miembros para destruir el radical tenemos:

$$v^2 = 2ae$$

Despejando a : $a = \frac{v^2}{2e}$

Cambiar el sujeto de una fórmula es una operación de incalculable utilidad para el estudioso de Matemática y Física.

EJERCICIOS

1. En la fórmula $e = vt$, despejar v y t.

R. $v = \frac{e}{t}$, $t = \frac{e}{v}$

2. En $A = h\left(\frac{b + b'}{2}\right)$ hacer a h el sujeto de la fórmula

R. $h = \frac{2A}{b + b'}$

3. En $e = \frac{1}{2} at\ 2$, despejar a **R.** $a = \frac{2e}{t^2}$

4. En $A = \frac{1}{2}$ a l n, despejar a, l y n

R. $a = \frac{2A}{ln}$, $l = \frac{2A}{an}$, $n = \frac{2A}{al}$

5. En $A = \pi r^2$, despejar r **R.** $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

6. En $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times x$, despejar x

R. $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$

7. En $V = V_0 + at$, despejar V_0, a y t

R. $V_0 = V - at$, $a = \frac{V - V_0}{t}$, $t = \frac{V - V_0}{a}$

8. En $V = V_0 - at$, despejar V_0, a y t

R. $V_0 == V + at$, $a = \frac{V_0 - V}{t}$, $t = \frac{V_0 - V}{a}$

9. En $D = \frac{P}{V}$, despejar V y P $R.\ V = P,\ P = V\ D$

R. $V = \frac{P}{D}$, $P = VD$

10. En $a^2 = b^2 + c^2$, despejar b y c

R. $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

11. En $V = at$, despejar a y t R. $a = V$, $t = V$

R. $a = \frac{V}{t}$, $t = \frac{V}{a}$

12. En $\frac{1}{f} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$, despejar p' y p

R. $p' = \frac{pf}{p + f}$, $p = \frac{p'f}{f - p'}$

13. En $e = \frac{v^2}{2a}$, despejar v **R.** $v = \sqrt{2ae}$



Descartes, filósofo y matemático francés. Dio clases de matemáticas en la corte sueca donde muere. Es considerado el primer filósofo de la Edad Moderna, y es el que sistematiza el método científico; aplicó el Álgebra a la Geometría, creando así la Geometría Analítica.

CAPÍTULO XX

DESIGUALDADES E INECUACIONES

La **desigualdad** es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra, y sus signos son > que se lee **mayor que**, y < que se lee **menor que**. 5 > 3 se lee 5 **mayor que** 3; - 4 < - 2 se lee - 4 **menor que** - 2.

Una cantidad *a* es **mayor** que otra cantidad *b* cuando la diferencia *a* - *b* es positiva. Así, 4 es mayor que - 2 porque la diferencia 4 - (- 2) = 4 + 2 = 6 es positiva; - 1 es mayor que - 3 porque - 1 - (- 3) = - 1 + 3 = 2 es una cantidad **positiva**.

Una cantidad *a* es **menor** que otra cantidad *b* cuando la diferencia *a* - *b* es negativa: Así, - 1 es menor que 1 porque la diferencia - 1 - 1 = - 2 es negativa: - 4 es menor que - 3 porque la diferencia - 4 - (- 3) = - 4 + 3 = - 1 negativa.

Según lo anterior, cero es **mayor que cualquier cantidad negativa**, por lo tanto 0 es mayor que - 1 porque 0 - (- 1) = 0 + 1 = 1, cantidad positiva.

MIEMBROS Y TÉRMINOS

El **primer miembro** de una desigualdad es la expresión que está a la izquierda y el **segundo miembro** está a la derecha del signo de desigualdad.

En $a + b > c - d$ el primer miembro es $a + b$ y el segundo $c - d$.

Los **términos** de una desigualdad son las cantidades separadas de otras por el signo + ó -, o por la cantidad que está sola en un miembro.

En la desigualdad anterior los términos son a, b, c y $- d$.

Dos desigualdades son del **mismo signo** o **subsisten en el mismo sentido** cuando sus primeros miembros son mayores o menores que los segundos.

De este modo, $a > b$ y $c > d$ son desigualdades del mismo sentido.

Dos desigualdades son de **signo contrario** o **no subsisten en el mismo sentido** cuando sus primeros miembros no son mayores o menores que los segundos. Así, $5 > 3$ y $1 < 2$ son desigualdades de sentido contrario.

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

1) Si a dos miembros de una desigualdad se les suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no varía.

Dada la desigualdad $a > b$, podemos escribir:

$a + c > b + c$ y $a - c > b - c$

En una desigualdad un término cualquiera puede pasar de un miembro al otro cambiándole el signo.

En la desigualdad $a > b + c$ podemos pasar c al primer miembro con signo - y quedará $a - c > b$, porque equivale a restar c a los dos miembros.

En la desigualdad $a - b > c$, podemos pasar b con signo + al segundo miembro y quedará $a > b + c$, porque equivale a sumar b a los dos miembros.

2) Si dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad positiva, el signo de la desigualdad no varía.

Dada la desigualdad $a > b$ y siendo c una cantidad positiva, podemos escribir:

$$ac > bc \quad y \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Es posible **suprimir denominadores** en una desigualdad **sin que varíe** el signo de la desigualdad, porque ello equivale a multiplicar todos los términos de la desigualdad, o sea sus dos miembros, por el m. c. m. de los denominadores.

3) Si dos miembros de una desigualdad se **multiplican** o **dividen** por una misma **cantidad negativa**, el signo de la desigualdad varía.

Si en la desigualdad $a > b$ multiplicamos ambos miembros por $- c$, tendremos:

$$- ac < - bc$$

y dividiéndolos por $- c$, o sea multiplicando por $-\frac{1}{c}$, tendremos:

$$-\frac{a}{c} < -\frac{b}{c}$$

Al cambiar el signo a **todos** los términos, es decir, a los **dos miembros** de una desigualdad, el signo de ésta **varía** porque equivale a multiplicar los dos miembros de la desigualdad por - 1.

Si en la desigualdad $a - b > - c$ cambiamos el signo a todos los términos, tendremos:

$$b - a < c$$

4) Si cambia el **orden** de los miembros, la desigualdad **cambia de signo.**

Si $a > b$ es evidente que $b < a$

5) Si se invierten los **dos miembros**, la desigualdad **cambia** de signo.

Siendo $a > b$ se tiene que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

6) Cuando los miembros de una desigualdad son **positivos** y se elevan a una misma **potencia positiva**, el signo de la desigualdad no cambia.

$5 > 3$ y elevando al cuadrado : $5^2 > 3^2$ o sea $25 > 9$

7) Si los dos miembros o **sólo uno** es negativo y se eleva a una potencia **impar positiva**, el signo de la desigualdad **no** cambia.

Siendo $- 3 > - 5$ y elevando al cubo:

$(- 3)^3 > (- 5)^3$ o sea $- 27 > - 125$

Siendo $2 > - 2$ y elevando al cubo:

$2^3 > (- 2)$ o sea $8 > - 8$

8) Si los **dos** miembros son **negativos** y se elevan a una **misma potencia par positiva**, el signo de la desigualdad **cambia.**

Siendo $- 3 > - 5$ y elevando al cuadrado:

$(- 3)^2 = 9$ y $(- 5)^2 = 25$ y queda $9 < 25$

9) Cuando un miembro es **positivo** y otro **negativo**, y ambos se elevan a una misma potencia par positiva, el signo de la desigualdad puede cambiar.

Siendo $3 > - 5$ y elevando al cuadrado:

$3^2 = 9$ y $(- 5)^2 = 25$ y queda $9 < 25$ (cambia)

Siendo $8 > - 2$ y elevando al cuadrado:

$8^2 = 64$ y $(- 2)^2 = 4$ y queda $64 > 4$ (no cambia)

10) Cuando los dos miembros de una desigualdad son positivos y se les **extrae una misma raíz positiva**, el signo de la desigualdad no cambia.

$a > b$ y n es positivo, tendremos:

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

11) Si dos o más desigualdades del mismo signo se suman o multiplican miembro por miembro, resulta una desigualdad del mismo signo.

Si $a > b$ y $c > d$, tendremos:

$a + c > b + d$ y $ac > bd$

12) Cuando dos desigualdades del mismo signo se restan o dividen miembro por miembro, el resultado no necesariamente será una desigualdad del mismo signo, pues, puede ser una igualdad.

En $10 > 8$ y $5 > 2$, restando miembro por miembro: $10 - 5 = 5$ y $8 - 2 = 6$; luego, queda $5 < 6$ (cambia el signo).

Al dividir miembro por miembro las desigualdades $10 > 8$ y $5 > 4$ tenemos

$\frac{10}{5}10 = 2$ y

$\frac{8}{4} = 2$; luego, queda $2 = 2$ (igualdad).

INECUACIONES

Una **inecuación** es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas. Las inecuaciones también se conocen como **desigualdades de condición.**

La desigualdad $2x - 3 > x + 5$ es una inecuación porque tiene la incógnita x y sólo se verifica para cualquier valor de x mayor que 8.

Para $x = 8$ se convertiría en una igualdad y para $x < 8$ en una desigualdad de signo contrario.

Para resolver una **inecuación** deben encontrarse los valores de las incógnitas que satisfagan la inecuación.

La resolución de inecuaciones se fundamenta en las propiedades de las desigualdades antes expuestas y en las **consecuencias** que de las mismas se derivan.

EJERCICIOS

Encuentra el límite de x en estas inecuaciones:

1. $x - 5 < 2x - 6$ **R.** $x > 1$

2. $5x - 12 > 3x - 4$ **R.** $x > 4$

3. $x - 6 > 21 - 8x$ **R.** $x > 3$

4. $3x - 14 < 7x - 2$ **R.** $x > -3$

5. $2x - \frac{5}{3} > \frac{x}{3} + 10$ **R.** $x > 7$

6. $3x - 4 + \frac{x}{4} < \frac{5x}{2} + 2$ **R.** $x < 8$

7. $(x - 1)^2 - 7 > (x - 2)^2$ **R.** $x > 5$

8. $(x + 2)(x - 1) + 26 < (x + 4)(x + 5)$ **R.** $x > \frac{1}{2}$

9. $3(x - 2) + 2x(x + 3) > (2x - 1)(x + 4)$ **R.** $x > 1$

10. $6(x 2 + 1) - (2x - 4)(3x + 2) < 3(5x + 21)$ **R.** $x < -7$

11. $(x - 4)(x + 5) < (x - 3)(x - 2)$ **R.** $x < \frac{13}{3}$

12. $(2x - 3)^2 + 4x^2(x - 7) < 4(x - 2)^3$ **R.** $x > \frac{41}{60}$

13. $\frac{2x+1}{3x-1} > \frac{2x+5}{3x+2}$ **R.** $x < \frac{7}{6}$

14. $\frac{x+3}{3} - \frac{4}{x+2} > \frac{x}{3}$ **R.** $x > 2$

15. $\frac{5}{3x+1} - \frac{20}{9x^2-1} < \frac{2}{3x-1}$ **R.** $x < 3$

16. $\frac{1}{x^2+x} > \frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1}$ **R.** $x > 2$

17. Encuentra los números enteros cuyo tercio aumentado en 15 sea mayor que su mitad aumentada en 1.

R. Los números enteros menores que 84

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES

Ejemplos

1) Resolver $2x - 3 > x + 5$

Pasando x al primer miembro y 3 al segundo tenemos:

$$2x - x > 5 + 3$$

Reduciendo $x > 8$

8 es el límite inferior de x, es decir que la desigualdad sólo se verifica para los valores de x mayores que 8.

2) Hallar el límite de x en $7 - \frac{x}{2} > \frac{5x}{3} - 6$

Suprimiendo denominadores: $42 - 3x > 10x - 36$

Trasponiendo: $-3x - 10x > -36 - 42$

$-13x > -78$

Cambiando el signo a los dos miembros, lo cual hace cambiar el signo de la desigualdad, tenemos: $13x < 78$

Dividiendo por 13: $x < \frac{78}{13}$ o sea $x < 6$

6 es el límite superior de x, es decir que la desigualdad sólo se verifica para los valores de x menores que 6.

3) Encontrar el límite de x en $(x + 3)(x - 1) < (x - 1)^2 + 3x$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$x^2 + 2x - 3 < x^2 - 2x + 1 + 3x$$

Suprimiendo x^2 en ambos miembros y transponiendo:

$$2x + 2x - 3x < 1 + 3$$

$$x < 4$$

4 es el límite superior de x.

INECUACIONES SIMULTÁNEAS

Las inecuaciones simultáneas son aquellas que tienen soluciones comunes.

Ejemplos

1) Qué valores de x satisfacen las inecuaciones:

$2x - 4 > 6$

$3x + 5 > 14$

Resolviendo la primera:

$2x > 6 + 4$

$2x > 10$

$x > 5$

Resolviendo la segunda:

$3x > 14 - 5$

$3x > 9$

$x > 3$

La primera inecuación se satisface para $x > 5$ y la segunda para $x > 3$, luego tomamos como solución general de ambas $x > 5$, ya que cualquier valor de x mayor que 5 será mayor que 3.

Por tanto, el límite inferior de las soluciones comunes es 5.

2) Hallar el límite de las soluciones comunes a las inecuaciones:

$3x + 4 < 16$

$- 6 - x > - 8$

Resolviendo la primera:

$3x < 16 - 4$

$3x < 12$

$x < 4$

Resolviendo la segunda:

$- x > - 8 + 6$

$- x > - 2$

$x < 2$

La solución común es $x < 2$, ya que todo valor de x menor que 2 evidentemente es menor que 4.

Por tanto, 2 es el límite superior de las soluciones comunes.

3) Encontrar el límite superior e inferior de los valores de x que satisfacen las inecuaciones:

$5x - 10 > 3x - 2$

$3x + 1 < 2x - 6$

Resolviendo la primera:

$5x - 3x > - 2 + 10$

$2x > 8$

$x > 4$

Resolviendo la segunda:

$3x - 2x < 6 - 1$

$x < 5$

La primera se satisface para $x > 4$ y la segunda para $x < 5$, luego todos los valores de x que sean a la vez mayores que 4 y menores que 5, satisfacen ambas inecuaciones.

Por tanto, 4 es el límite inferior y 5 el límite superior de las soluciones comunes, y esto se expresa
$4 < x < 5$.

EJERCICIOS

Encuentra el límite de las soluciones comunes para:

1. $x - 3 > 5$ y $2x + 5 > 17$

R. x > 8

2. $5 - x > - 6$ y $2x + 9 > 3x$

R. x < 9

3. $6x + 5 > 4x + 11$ y $4 - 2x > 10 - 5x$

R. x > 3

4. $5x - 4 > 7x - 16$ y $8 - 7x < 16 - 15x$

R. x < 1

5. $\frac{x}{2} - 3 > \frac{x}{4} + 2 \quad y \quad 2x + \frac{3}{5} < 6x - 23\frac{2}{5}$

R. x > 20

Encuentra el límite superior e inferior de las soluciones comunes para:

6. $2x - 3 < x + 10$ y $6x - 4 > 5x + 6$

R. 10 < x < 13

7. $\frac{x}{4} - 1 > \frac{x}{3} - 1\frac{1}{2} \quad y \quad 2x - 3\frac{3}{5} > x + \frac{2}{5}$

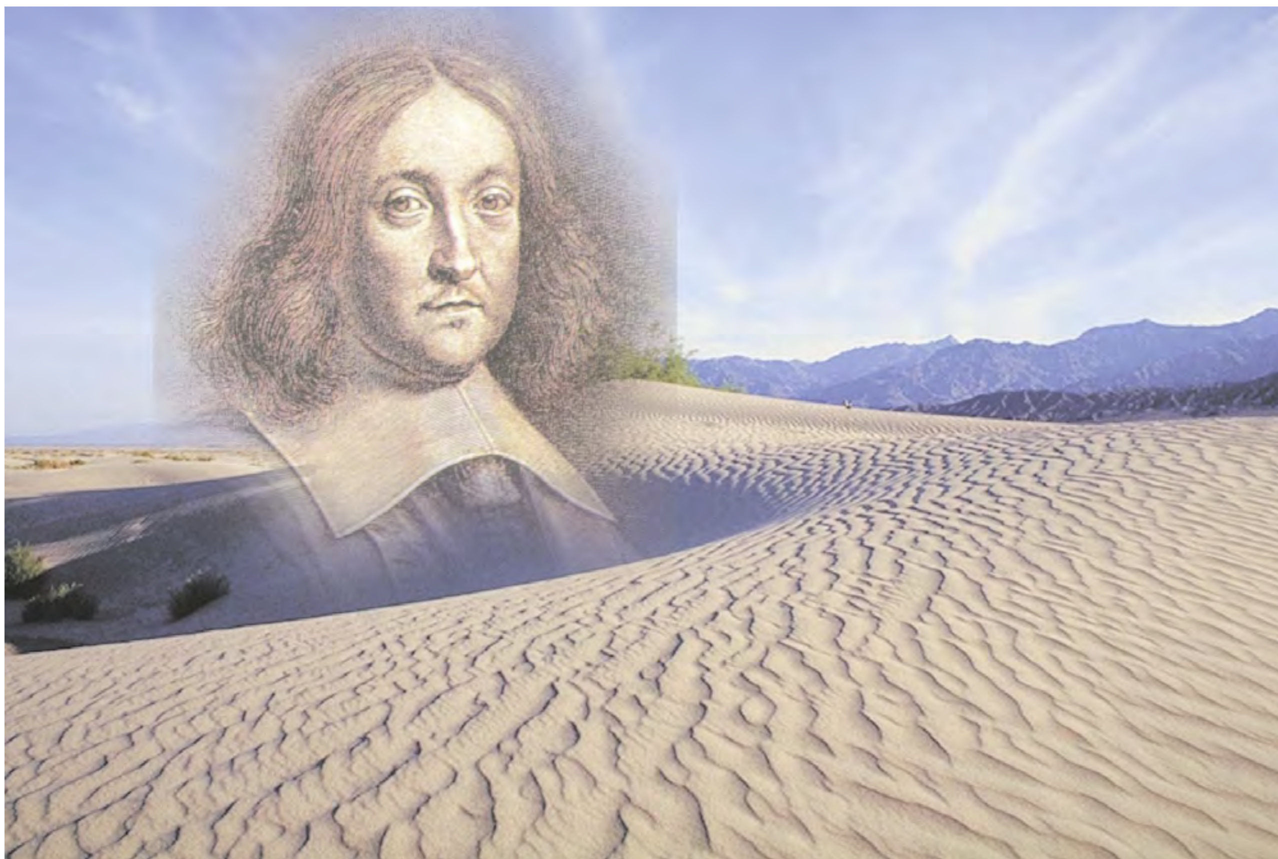
R. 4 < x < 6

8. $\frac{x+2}{x+8} > \frac{x-2}{x+3} \quad y \quad \frac{x-1}{x+4} < \frac{x-5}{x-1}$

R. 21 < x < 22

9. Encuentra los números enteros cuyo triple menos 6 sea mayor que su mitad más 4 y cuyo cuádruple aumentado en 8 sea menor que su triple aumentado en 15.

R. 5 y 6



Pierre Fermat, matemático francés a quien Pascal llamó "el primer cerebro del mundo", profundizó en la matemática pura; trabajó incansablemente en la Teoría de los Números o Aritmética Superior, dejando varios teoremas que llevan su nombre el más famoso es el llamado último Teorema de Fermat.

CAPÍTULO XXI

FUNCIONES

Cuando una **cantidad variable** depende de otra se dice que está en **función** de esta última.

En una definición moderna de **función**, Cauchy explica que *y* es función de *x* cuando el valor de la variable *x* corresponden uno o varios valores determinados de la variable *y* .

La notación para expresar que *y* es función de *x* es:

$$y = f(x)$$

CONSTANTES Y VARIABLES

Son **constantes** las cantidades que intervienen en una cuestión matemática cuando tienen un valor fijo y determinado, y **variables** cuando toman diversos valores. Veamos dos ejemplos:

1) Si un metro de tela cuesta $2, el **costo** de una pieza de tela dependerá de su **número de metros**. Si la pieza tiene 5 **metros**, el **costo** será $10; si tiene 8 **metros**, será $16, etc. Aquí, el **costo de un metro** que siempre es el mismo, $2, es una **constante**; el **número de metros** y el **costo de la pieza**, que toman diversos valores, son **variables**.

En este caso el **costo de la pieza** depende del **número de metros** que tenga. El **costo de la pieza** es la variable **dependiente** y el **número de metros** la variable **independiente**.

2) Si un automóvil desarrolla una velocidad de 6 m por segundo, el **espacio** que recorra dependerá del **tiempo** que esté en movimiento. Si avanza durante 2 **segundos**, recorrerá un **espacio** de 12 m y durante 3 **segundos** recorrerá 18 m. Aquí, la **velocidad** de 6 m es constante; el **tiempo** y el **espacio** recorrido, que toman sucesivos valores, son **variables**.

En este caso el **espacio** recorrido depende del **tiempo** que esté avanzando el automóvil. El **tiempo** es la variable **independiente** y el **espacio** recorrido la variable **dependiente** .

FUNCIÓN DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE Y DE VARIAS VARIABLES

Cuando el valor de una variable *y* sólo depende del valor de otra variable *x* , tenemos una función de una sola variable independiente, como en los ejemplos anteriores. Pero si el valor de una variable *y* depende de los valores de dos o más variables, tenemos una función de varias variables independientes.

Por ejemplo, el área de un triángulo depende de los valores de su base y su altura; luego, el área de un triángulo es función de **dos** variables independientes (base y altura). Siendo *A* el área, *b* la base y *h* la altura, escribimos: $A = f(b, h)$.

El volumen de una caja depende de la longitud, el ancho y la altura; luego, el volumen es función de **tres** variables independientes.

Siendo el volumen *v*, la longitud *l*, el ancho *a* y la altura *h*, escribimos:

$$v = f(l, a, h)$$

LA LEY DE DEPENDENCIA

Siempre que los valores de una variable *y* dependen de los valores de otra variable *x* , *y* es función de *x* ; la palabra **función** indica **dependencia**. Pero no basta con saber que *y* depende de *x* , es muy importante saber **cómo** depende *y* de *x* , **de qué modo varía** *y* **cuando varía** *x* , la relación que liga a las variables, a lo que se llama **ley de dependencia** entre las variables.

No en todas las funciones se conoce de un modo preciso la relación matemática o analítica que liga a la variable independiente con la variable dependiente o función, es decir, no siempre se conoce la ley de dependencia. En algunos casos podemos saber que una cantidad depende de otra, pero no conocemos la relación que liga a las variables. De ahí la división de las funciones en analíticas y concretas.

FUNCIONES ANALÍTICAS

Cuando se conoce con precisión la relación analítica que liga a las variables, esta relación puede establecerse matemáticamente por medio de una fórmula o ecuación que nos permite, para cualquier valor de la variable independiente, hallar el valor correspondiente de la función. Estas son las **funciones analíticas** y podemos citar los siguientes ejemplos:

El costo de una pieza de tela, está en función del número de metros.

Conocido el costo de un metro, se puede calcular el costo de cualquier número de metros.

El tiempo empleado en hacer una obra está en función del número de obreros. Conocido el tiempo que les lleva a cierto número de obreros hacer la obra, puede calcularse el tiempo que emplearía cualquier otro número de obreros en hacerla.

El espacio que recorre un cuerpo en su caída libre desde cierta altura está en función del tiempo. Conocido el tiempo que emplea en caer un móvil, se puede calcular el espacio recorrido.

FUNCIONES CONCRETAS

Cuando se sabe, por observación de los hechos, que una cantidad depende de otra, pero no se ha podido determinar la relación analítica que liga a las variables, tenemos una **función concreta**. En este caso, la ley de dependencia, que no se conoce con precisión, no puede establecerse matemáticamente por medio de una fórmula o ecuación porque la relación funcional, aunque existe, no es siempre la misma.

Un ejemplo es la velocidad de un cuerpo que se desliza sobre otro, la función del roce o frotamiento que hay entre los dos cuerpos. Al aumentar el roce disminuye la velocidad, pero no se conoce con precisión la relación analítica que liga a estas variables. Muchas leyes físicas, fuera de ciertos límites, son funciones de esta clase.

En las funciones concretas suelen construirse tablas o gráficas donde figuran los casos observados y nos permiten hallar **aproximadamente** el valor de la función que corresponde a un valor dado de la variable independiente.

VARIACIÓN DIRECTA DE UNA FUNCIÓN

Se dice que *A* varía directamente a *B* o que *A* es directamente proporcional a *B* cuando al multiplicar o dividir una de estas dos variables por una cantidad, la otra queda multiplicada o dividida por esa misma cantidad.

Ejemplo

Si un automóvil recorre con movimiento uniforme 30 km en 10 minutos, en 20 minutos recorrerá 60 km y en 5 minutos 15 km, luego la variable espacio recorrido es directamente proporcional a la variable tiempo y viceversa.

Si *A* es proporcional a *B*, *A* es igual a *B* multiplicada por una constante.

En el ejemplo anterior, la relación entre el espacio y el tiempo es constante.

En 10 min el automóvil recorre 30 km ; la relación es

$$\frac{30}{10} = 3$$

En 20 min recorre 60 km ; la relación es $\frac{60}{20} = 3$

En 5 min recorre 15 km ; la relación es $\frac{15}{5} = 3$

Si *A* es proporcional a *B*, la relación entre *A* y *B* es constante.

Luego, siendo esta constante *k*, tenemos:

$\frac{A}{B} = k$ y de aquí $A = kB$

VARIACIÓN INVERSA

A varía **inversamente** a *B* o *A* es **inversamente proporcional** a *B* cuando al multiplicar o dividir una de estas variables por una cantidad, la otra queda dividida en el primer caso y multiplicada en el segundo por la misma cantidad.

Ejemplo

Si 10 hombres hacen una obra en 6 horas, 20 hombres la harán en 3 horas y 5 hombres en 12 horas, luego la variable *tiempo* empleado en hacer la obra es inversamente proporcional a la variable número de hombres y viceversa.

Si *A* es inversamente proporcional a *B*, *A* es igual a una constante dividida en tre *B.*

En el ejemplo anterior, el **producto** del número de hombres por el tiempo empleado en hacer la obra es **constante.**

10 hombres emplean 6 horas;
el producto es 10 × 6 = 60

20 hombres emplean 3 horas;
el producto es 20 × 3 = 60

5 hombres emplean 12 horas;
el producto es 5 × 12 = 60

Si *A* es inversamente proporcional a *B*, el producto *AB* es constante; luego, siendo esta constante *k*, tenemos:

$AB = k$ y de aquí $A = \frac{k}{B}$

VARIACIÓN DIRECTA E INVERSA A LA VEZ

Se dice que *A* es proporcional a *B* e inversamente proporcional a *C* cuando *A* es proporcional a la relación $\frac{B}{C}$ lo que se expresa:

$$A = \frac{kB}{C}$$

VARIACIÓN CONJUNTA

Si *A* es proporcional a *B* cuando *C* es constante y *A* es proporcional a *C* cuando *B* es constante, *A* es proporcional a *BC* cuando *B* y *C* varían. Este principio se expresa:

$$A = kBC$$

donde *k* es constante, lo que se puede expresar diciendo que si una cantidad es proporcional a otras, lo es también a su **producto**.

Ejemplo

El área de un triángulo es proporcional a la altura si la base es constante, y proporcional a la base si la altura es constante; si la base y la altura varían, el área es proporcional al producto de la base por la altura. Siendo *A* el área, *b* la base y *h* la altura, tenemos:

$$A = kbh$$

y la constante $k = \frac{1}{2}$ (por Geometría);

luego $A = \frac{1}{2}bh$

RESUMEN DE LAS VARIACIONES

Si *A* es proporcional a *B* $\quad A = kB$

Si *A* es inversamente proporcional a *B*

$A = \frac{k}{B}$

Si *A* es proporcional a *B* y *C* $\quad A = kBC$

Si *A* es proporcional a *B* e in versamente proporcional a *C*

$A = \frac{kB}{C}$

Ejemplos

1) *A* es proporcional a *B* y *A* = 20 cuando *B* = 2

Hallar *A* cuando *B* = 6

Siendo *A* proporcional a *B*, se tiene:
A = *kB*

Para hallar la constante *k*, como
A = 20 cuando *B* = 2, tendremos:

$20 = k \times 2 \therefore k = \frac{20}{2} = 10$

Si *k* = 10, cuando *B* = 6, *A* valdrá:

A = *kB* = 10 × 6 = 60

2) *A* es inversamente proporcional a *B* y *A* = 5 cuando *B* = 4

Hallar *A* cuando *B* = 10

Como *A* es inversamente proporcional a *B*, se tiene: $A = \frac{k}{B}$

Hallemos *k*, haciendo *A* = 5 y *B* = 4:

$5 = \frac{k}{4} \therefore k = 20$

Siendo *k* = 20, cuando *B* = 10,*A* valdrá: $A = \frac{k}{B} = \frac{20}{10}2$

3) *A* es proporcional a *B* y *C* ; *A* = 6 cuando *B* = 2 y *C* = 4.

Hallar *B* cuando *A* = 15 y *C* = 5

Siendo *A* proporcional a *B* y *C* , se tiene: *A* = *kBC* (1)

Para hallar *k* :

$6 = k \times 2 \times 4$ ó $6 = k \times 8 \therefore k = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Para hallar *B* la despejamos en (1):

$B = \frac{A}{kC}$

Sustituyendo $A = 15, k = \frac{3}{4}, C = 5,$

tendremos: $B = \frac{15}{\frac{3}{4} \times 5} = \frac{60}{15} = 4$

4) *x* es proporcional a *y* e inversamente proporcional a *z*

Si *x* = 4 cuando *y* = 2, *z* = 3, hallar *x* cuando *y* = 5, *z* = 15. Siendo *x* proporcional a *y* e inversamente proporcional a *z*, tendremos:

$x = \frac{ky}{z} \quad (1)$

Haciendo *x* = 4, *y* = 2, *z* = 3, se tiene:

$4 = \frac{k \times 2}{3} \therefore k = \frac{12}{2} = 6$

Haciendo en (1) *k* = 6, *y* = 5, *z* = 15, se tiene:

$x = \frac{ky}{z} = \frac{6 \times 5}{15} = 2$

EJERCICIOS

1. x es proporcional a y. Si $x = 9$ cuando $y = 6$, hallar x cuando $y = 8$

R. 12

2. x es proporcional a y. Si $y = 3$ cuando $x = 2$, hallar y cuando $x = 24$

R. 36

3. A es proporcional a B y C. Si $A = 30$ cuando $B = 2$ y $C = 5$, hallar A cuando $B = 7$, $C = 4$

R. 84

4. x es proporcional a y y a z. Si $x = 4$ cuando $y = 3$ y $z = 6$, hallar y cuando $x = 10$, $z = 9$

R. 5

5. A es inversamente proporcional a B. Si $A = 3$ cuando $B = 5$, hallar A cuando $B = 7$

R. $2\frac{1}{7}$

6. B es inversamente proporcional a A. Si $A = \frac{1}{2}$ cuando $B = \frac{1}{3}$, hallar A cuando $B = \frac{1}{12}$

R. 2

7. A es proporcional a B e inversamente proporcional a C. Si $A = 8$ cuando $B = 12$, $C = 3$, hallar A cuando $B = 7$, $C = 14$.

R. 1

8. x es proporcional a y e inversamente proporcional a z. Si $x = 3$ cuando $y = 4$, $z = 8$, hallar z cuando $y = 7$, $x = 10$.

R. $4\frac{1}{5}$

9. x es proporcional a $y^2 - 1$. Si $x = 48$ cuando $y = 5$, hallar x cuando $y = 7$

R. 96

10. x es inversamente proporcional a $y^2 - 1$. Si $x = 9$ cuando $y = 3$ hallar x cuando $y = 5$

R. 3

11. El área de un cuadrado es proporcional al cuadrado de su diagonal. Si el área es 18 m^2 cuando la diagonal es 6 m, hallar el área cuando la diagonal sea 10 m

R. 50 m^2

12. El área lateral de una pirámide regular es proporcional a su apotema y al perímetro de la base. Si el área es 480 m^2 cuando el apotema es 12 m y el perímetro de la base 80 m, hallar el área cuando el apotema es 6 m y el perímetro de la base 40 m

R. 120 m^2

13. El volumen de una pirámide es proporcional a su altura y al área de su base. Si el volumen de una pirámide, cuya altura es 8 m y el área de su base 36 m^2, es 96 m^3, ¿cuál será el volumen de una pirámide cuya altura es 12 m y el área de su base 64 m^2?

R. 256 m^3

14. El área de un círculo es proporcional al cuadrado del radio. Si el área de un círculo de 14 cm de radio es 616 cm^2, ¿cuál será el área de un círculo de 7 cm de radio?

R. 154 cm^2

15. La longitud de una circunferencia es proporcional al radio. Si una circunferencia de 7 cm de radio tiene una longitud de 44 cm, ¿cuál es el radio de una circunferencia de 66 cm de longitud?

R. $10\frac{1}{2}$ cm

16. x es inversamente proporcional al cuadrado de y. Cuando $y = 6$, $x = 4$. Hallar y cuando $x = 9$

R. ± 4

FUNCIONES EXPRESABLES POR FÓRMULAS

En general, las funciones son expresables por fórmulas o ecuaciones cuando se conoce la relación matemática que liga a la variable dependiente o función con las variables independientes, es decir, cuando se conoce la ley de dependencia. En estos casos habrá una ecuación que será la expresión analítica de la función y que define la función.

Así, $y = 2x + 1$, $y = 2x^2$, $y = x^3 + 2x - 1$

son funciones expresadas por ecuaciones o fórmulas.

$2x + 1$ es una función de primer grado; $2x^2$ es de segundo grado y $x^3 + 2x - 1$ es de tercer grado.

Los ejemplos anteriores son funciones de la variable x porque a cada valor de x corresponde un valor determinado de la función.

Considerando la función $2x + 1$, que representamos por y, tendremos: $y = 2x + 1$

Para $x = 0$, $y = 2 \times 0 + 1 = 1$

$x = 1$, $y = 2 \times 1 + 1 = 3$

$x = 2$, $y = 2 \times 2 + 1 = 5$

Para $x = -1$, $y = 2(-1) + 1 = -1$

$x = -2$, $y = 2(-2) + 1 = -3$, etc.

x es la variable **independiente**; y la variable **dependiente.**

DETERMINACIÓN DE LA FÓRMULA CORRESPONDIENTE A FUNCIONES DADAS CUYA LEY DE DEPENDENCIA SEA SENCILLA

Ejemplos

1) El costo de una pieza de tela es proporcional al número de metros. Determinar la fórmula de la función costo, sabiendo que una pieza de 10 metros cuesta \$30. Siendo x la variable independiente número de metros, y la función costo, tendremos, al ser y proporcional a x:

$$y = kx \ (1)$$

Buscamos la constante k sustituyendo $y = 30, x = 10$:

$$30 = k \times 10 \therefore k = 3$$

Como la constante es 3, sustituyendo este valor en (1), la función costo vendrá dada por la ecuación:

$$y = 3x$$

2) El área de un cuadrado es proporcional al cuadrado de su diagonal. Hallar la fórmula del área de un cuadrado en función de la diagonal, sabiendo que el área de un cuadrado cuya diagonal mide 8 m es 32 m^2.

Siendo A el área y D la diagonal, tendremos:

$$A = kD^2 \ (1)$$

Hallemos k haciendo A = 32 y D = 8:

$$32 = k \times 64 \therefore k = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo $k = \frac{1}{2}$ en (1), el área de un cuadrado en función de la diagonal vendrá dada por la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}D^2$$

3) La altura de una pirámide es proporcional al volumen si el área de la base es constante, e inversamente proporcional al área de la base si el volumen es constante. Determinar la fórmula de la altura de una pirámide en función del volumen y el área de la base, sabiendo que una pirámide cuya altura es 15 m y el área de su base 16 m^2 tiene un volumen de 80 m^3.

Siendo la altura h, el volumen V y el área de la base B, tendremos:

$$h = \frac{kV}{B} \quad (1)$$

La variable V, directamente proporcional con h, va en el numerador y la variable B, inversamente proporcional con h, va en el denominador.

$$15 = \frac{k \times 80}{16}$$

Busquemos la constante k haciendo h = 15, V = 80, B = 16:

$$15 \times 16 = 80k$$

$$K = \frac{240}{80} = 3$$

Haciendo k = 3 en (1), la altura de una pirámide en función del volumen y el área de la base vendrá dada por la fórmula:

$$h = \frac{3V}{B}$$

4) Determinar la fórmula correspondiente a una función, sabiendo que a cada valor de la variable independiente corresponde un valor de la función que es igual al triple del valor de la variable independiente aumentado en 5.

Siendo y la función, x la variable independiente, tendremos:

$$y = 3x + 5$$

EJERCICIOS

1) Si A es proporcional a B y A = 10 cuando B =5, escribir la fórmula que las relaciona.
R. $A = 2B$

2) El espacio recorrido por un automóvil (movimiento uniforme) es proporcional al producto de la velocidad por el tiempo. Escribe la fórmula que expresa el espacio e en función de la velocidad v y del tiempo t. (k = 1)
R. $e = vt$

3) El área de un rombo es proporcional al producto de sus diagonales.

Escribe la fórmula del área A de un rombo en función de sus diagonales D y D' sabiendo que cuando D = 8 y D' = 6 el área es 24 cm^2

R. $A = \frac{1}{2}DD'$

4. Sabiendo que A es proporcional a B e inversamente proporcional a C, escribe la fórmula de A en función de B y C. (k = 3)

R. $A = \frac{3B}{C}$



Blas Pascal, matemático y escritor francés. De naturaleza enfermiza, fue un verdadero niño prodigio. A los doce años, había demostrado las 32 proposiciones de Euclides. Al sostener correspondencia con Fermat, Pascal determina las bases de la Teoría de las Probabilidades.

CAPÍTULO XXII

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES

Dos líneas rectas que se cortan constituyen un **sistema de ejes coordenados**. Cuando las líneas son perpendiculares entre sí, tenemos un sistema de **ejes coordenados rectangulares**; cuando no lo son, tenemos un sistema de **ejes oblicuos**.

Tracemos dos líneas rectas *XOX* ', *YOY* ' que se cortan en el punto *O* formando un ángulo recto. Estas líneas constituyen un sistema de **ejes coordenados rectangulares**.

La línea *XOX* ' se llama **eje de las *x*** o **eje de las abscisas** y la línea *YOY* ' **ejes de las *y* o eje de las ordenadas.** El punto *O* es el origen de las coordenadas.

Los ejes dividen al plano del papel en cuatro partes llamadas **cuadrantes.** *XOY* es el primer cuadrante, *YOX* ' el segundo, *X'OY'* el tercero y *Y ' OX* el cuarto cuadrante.

SISTEMA RECTANGULAR DE COORDENADAS CARTESIANAS

Este sistema se forma con dos líneas rectas que constituyen el sistema de ejes coordenados, las rectas se cortan en el punto *O* formando un ángulo recto; este punto donde se cortan se denomina origen y a su vez éste divide a cada eje en dos semiejes, uno **positivo** y otro **negativo**. *OX* es el semieje positivo y *OX* ' el semieje negativo del eje de las *x* ; *OY* es el semieje positivo y *OY* ' el semieje negativo del eje de las *y*.

Los ejes dividen al plano del papel en cuatro partes llamadas cuadrantes.

Cualquier distancia medida sobre el eje de las *y* de *O* hacia **arriba es positiva** y de *O* hacia **abajo** es **negativa.**

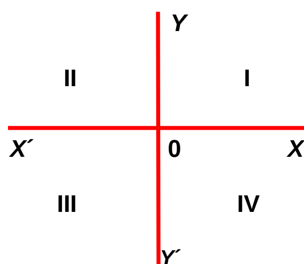


Figura 27

SIGNO DE LAS COORDENADAS

Las abscisas medidas del eje *YY* ' hacia la **derecha** son **positivas** y hacia la **izquierda son negativas**. En la figura 29, *BP* y DP_3 son positivas; BP_1 y DP_2 son negativas.

Las ordenadas medidas del eje ***XX*** ' hacia **arriba** son **positivas** y hacia **abajo** son **negativas**. En la figura 29, *AP* y CP_1 son positivas, CP_2 y AP_3 son negativas.

DETERMINACIÓN DE UN PUNTO POR SUS COORDENADAS

Una vez conocidas las coordenadas de un punto se puede fijar el punto en el plano.

1) Determinar el punto cuyas coordenadas son 2 y 3.

El número que se da primero siempre es la abscisa y el segundo la ordenada. La notación empleada para indicar que la abscisa es 2 y la ordenada 3 es "punto (2, 3)".

Escogemos de manera arbitraria una unidad de medida (Fig. 28). Como la abscisa es 2 (positiva), tomamos la unidad escogida dos veces sobre *OX* de *O* hacia la *derecha*.

Como la ordenada 3 es positiva, levantamos en *A* una perpendicular a *OX* y sobre ella hacia **arriba** tomamos tres veces la unidad.

P es el punto (2, 3) del primer cuadrante.

2) Determinar el punto (- 3, 4)

Como la abscisa es negativa, – 3, tomamos sobre *OX* ' de *O* hacia la **izquierda** tres veces la unidad escogida; en *B* levantamos una perpendicular a *OX* ' y sobre ella llevamos 4 veces la unidad hacia arriba porque la ordenada es positiva, 4. P_1 es el punto (– 3, 4) del segundo cuadrante.

3) Determinar el punto (– 2, – 4)

Llevamos la unidad dos veces sobre *OX* ' de *O* hacia la **izquierda** porque la abscisa es – 2, y sobre la perpendicular hacia abajo porque la ordenada es - 4, la tomamos 4 veces. P_2 es el punto (– 2, – 4) del tercer cuadrante.

4) Determinar el punto (4, – 2)

De *O* hacia la derecha, porque la abscisa 4 es positiva, llevamos la unidad 4 veces y perpendicularmente a *OX* , hacia abajo, porque la ordenada es – 2, la llevamos 2 veces. P_3 es el punto (4, – 2) del cuarto cuadrante.

En estos casos también se puede marcar el valor de la ordenada sobre *OY* o sobre *OY* ', según la ordenada sea positiva o negativa, y sobre *OX* u *OX* el valor de la abscisa, según la abscisa sea positiva o negativa. Entonces, por la última división de la ordenada, hay que trazar una paralela al eje de las abscisas y por la última división de la abscisa trazar una paralela al eje de las ordenadas, y el punto donde se corten será el que buscamos. Es indistinto usar un procedimiento u otro.

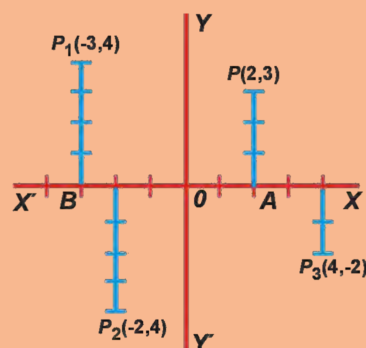


Figura 28

Por lo antes expuesto se comprende fácilmente que:

1) Las coordenadas del origen son (0, 0).

2) La abscisa de cualquier punto situado en el eje de las *y* es 0.

3) La ordenada de cualquier punto situado en el eje de las *x* es 0.

4) Los signos de las coordenadas de un punto serán:

	Ab.	**Or.**
En el 1er. Cuadrante *XOY*	+	+
En el 2do. cuadrante *YOX* '	–	+
En el 3er. cuadrante *X* '*OY* '	–	–
En el 4to. cuadrante *Y* '*OX*	+	–

ABSCISA Y ORDENADA DE UN PUNTO

La distancia de un punto al eje de las ordenadas se llama abscisa del punto y su distancia al eje de las abscisas es la ordenada del punto. La abscisa y la ordenada son las coordenadas cartesianas del punto.

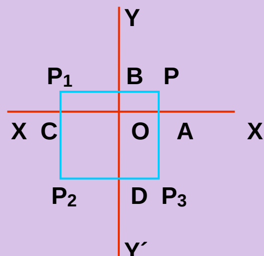


Figura 29

En la figura 29 la abscisa del punto *P* es *BP* = *OA* y su ordenada *AP* = *OB*. *BP* y *AP* son las **coordenadas** del punto *P*.

Las coordenadas de P_1 son: abscisa
$BP_1 = OC$ y ordenada $CP_1 = OB$

Las coordenadas de P_2 son: abscisa
$DP_2 = OC$ y ordenada $CP_2 = OD$

Las coordenadas de P_3 son: abscisa
$DP_3 = OA$ y ordenada $AP_3 = OD$

Las abscisas se representan por *x* y las ordenadas por *y*.

GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN

Siendo $y = f(x)$, sabemos que para cada valor de *x* corresponden uno o varios valores de *y*. Tomando los valores de *x* como abscisas y los correspondientes de *y* como ordenadas, obtendremos una serie de puntos cuyo conjunto será una línea recta o curva, que es el **gráfico** de la función o el gráfico de la ecuación $y = f(x)$ que representa la función.

En la práctica, basta ubicar unos cuantos puntos y unirlos convenientemente (**interpolación**) para obtener, con bastante aproximación, el gráfico de la función.

PAPEL CUADRICULADO

Para todos los gráficos suele usarse papel cuadriculado. Se refuerza con el lápiz una línea horizontal que será el eje *XOX* ' y otra perpendicular que será el eje *YOY* '. Tomando como **unidad** una de las divisiones del papel cuadriculado (pueden tomarse dos o más divisiones), determinar un punto por sus coordenadas resulta muy fácil, pues sólo hay que contar un número de divisiones igual a las unidades que tenga la abscisa o la ordenada; asimismo, dado el punto, se miden muy fácilmente sus coordenadas.

En la figura 30 aparecen determinados los puntos *P* (4, 2), P_1 (- 3, 4), P_2 (- 3, - 3), P_3 (2, - 5), P_4 (0, 3) y P_5 (2, 0).

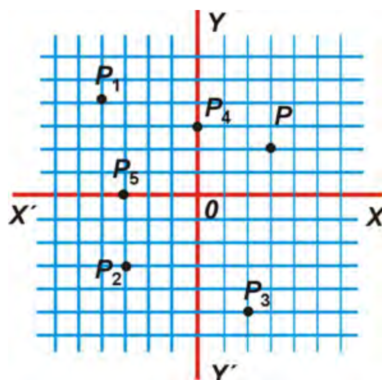


Figura 30

EJERCICIOS

Determina gráficamente los puntos siguientes:

1. (1, 2) 2. (- 1, 2) 3. (_ 2, - 1) 4. (2, - 3)

Traza la línea que pasa por estos puntos:

5. (1, 2) y (3, 4) 6. (- 2, 1) y (- 4, 4)

7. (- 3, - 2) y (- 1, - 7)

8. Dibuja el triángulo cuyos vértices son los puntos (0, 6), (3, 0) y (- 3, 0).

9. Dibuja el cuadrado cuyos vértices son (4, 4), (- 4, 4), (- 4, - 4) y (4, - 4)

10. Dibujar la recta que pasa por (4, 0) y (0, 6) y la recta que pasa por (0, 1) y (4, 5) y encuentra el punto de intersección de las dos rectas.

11. Prueba gráficamente que la línea que pasa por (- 4, 0) y (0, - 4) es perpendicular a la línea que pasa por (- 1, - 1) y (- 4, - 4).

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LINEAL DE PRIMER GRADO

1) Representar gráficamente la función $y = 2x$

Dando valores a *x* obtendremos una serie de valores correspondientes de *y*:

Para $x = 0$, $y = 0$, el origen es un punto del gráfico.

Para
$x = 1, \quad y = 2$
$x = 2, \quad y = 4$
$x = 3, \quad y = 6$, etc.
$x = -1, \quad y = -2$
$x = -2, \quad y = -4$
$x = -3, \quad y = -6$, etc.

Al representar los valores de *x* como abscisas y los correspondientes de *y* como ordenadas (Fig. 31), obtenemos la serie de puntos que aparecen en el gráfico. La línea recta *MN* que **pasa por el origen** es el gráfico de $y = 2x$.

2) Representar gráficamente la función $y = x + 2$

Los valores de *x* y los correspondientes de *y* suelen disponerse en una tabla, como se indica a continuación, escribiendo debajo de cada valor de *x* el correspondiente de *y* :

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	....
Y	-1	0	1	2	3	4	5	....

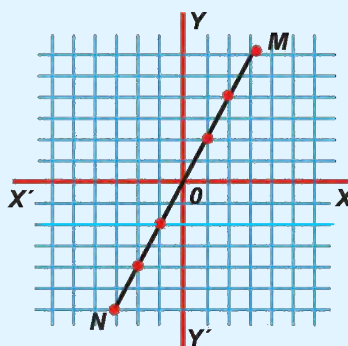


Figura 31

Representando los valores de x como abscisas y los correspondientes de y como ordenadas, según se muestra en la Fig. 32, se obtiene la línea recta *MN* que no pasa por el origen. *MN* es el gráfico de $y = x + 2$.

Nótese que el punto *P*, donde la recta corta el eje de las *y*, se obtiene haciendo $x = 0$, y el punto *Q* , donde la recta corta el eje de las *x* , se obtiene haciendo $y = 0$. *OP* se llama **intercepto** sobre el eje de las *y*, y *OQ* intercepto sobre el eje de las *x* . El segmento *OP* es la **ordenada en el origen** y el segmento *OQ* la **abscisa en el origen**.

Asimismo, *OP* = 2, igual que el término independiente de la función $y = x + 2$

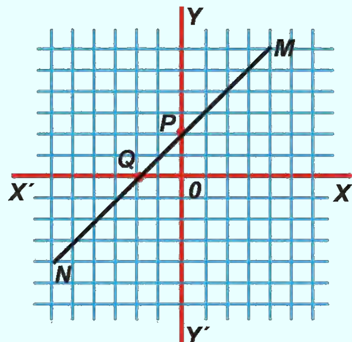


Figura 32

3) Representar gráficamente la función $y = 3x$ y la función: $y = 2x + 4$

En la función $y = 3x$, se tiene:

x	-2	-1	0	1	2	. . . .
y	-6	-3	0	3	6	. . . .

El gráfico es la línea *AB* que pasa por el origen (Fig. 33).

En la función $y = 2x + 4$ tenemos:

x	-2	-1	0	1	2	. . . .
y	0	2	4	6	8	. . . .

El gráfico es la línea *CD* que no pasa por el origen (Fig. 33).

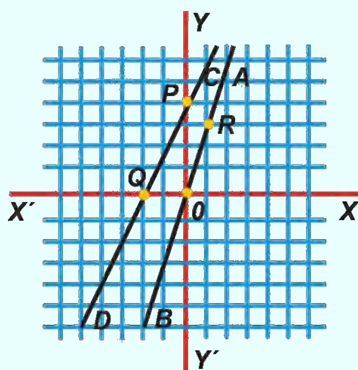


Figura 33

Los interceptos *OP* y *OQ* se obtienen $x = 0$ y $y = 0$, respectivamente. Obsérvese que *OP* = 4, término independiente de $y = 2x + 4$

Con lo anterior, podemos establecer los siguientes principios:

1) Toda función de primer grado representa una línea recta y por eso se llama **función lineal**, y la ecuación que representa la función se llama ecuación lineal.

2) Si la función **carece** de término independiente, es decir si es de la forma $y = ax$, donde a es constante, la línea recta que representa pasa por el **origen**.

3) Si la función tiene término independiente, es decir, si es de la forma $y = ax + b$, donde a y b son constantes, la línea recta que representa **no pasa** por el **origen** y su **intercepto** sobre el eje de las *y* es igual al término independiente *b*.

Dado que **dos puntos determinan una recta**, para obtener el gráfico de una función de primer grado, basta obtener **dos puntos cualesquiera** y unirlos por medio de una línea recta.

Si la función carece de término independiente, como uno de los puntos del gráfico es el **origen**, basta obtener un punto cual-quiera y unirlo con el origen.

Si la función tiene término independiente, lo más fácil es hallar los **interceptos sobre los ejes** haciendo $x = 0$ e $y = 0$, y unir los dos puntos así obtenidos.

Ejemplo

Representar gráficamente la función $2x - y = 5$ donde *y* es la variable dependiente.

Cuando en una función la variable dependiente no está despejada, como en este caso, la función se llama implícita y cuando la variable dependiente está despejada, la función es explícita .

Al despejar *y* tendremos $y = 2x - 5$ y en este caso la función es explícita .

Para hallar los interceptos sobre los ejes (Fig. 34), se escribe:

Para $x = 0$, $y = - 5$
Para $y = 0$, tendremos:
$0 = 2x - 5$ luego $5 = 2x \therefore x = 2.5$
El gráfico de $y = 2x - 5$ es la línea recta *AB*

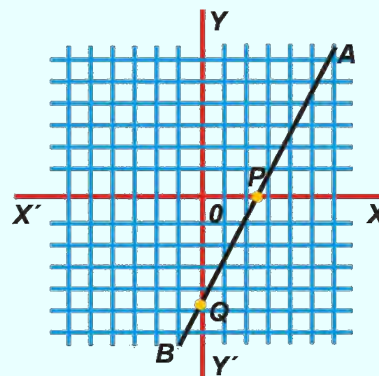


Figura 34

GRÁFICOS DE ALGUNAS FUNCIONES DE SEGUNDO GRADO

1) Gráfico de $y = x^2$

Se forma una tabla con los valores de *x* y los correspondientes de *y*:

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	0	1	1.5	2	2 . 5	3	...
y	9	6.25	4	2.25	1	0	1	2.25	4	6.25	9	...

En el gráfico (Fig. 35) aparecen representados los valores de *y* correspondientes a los dados para *x* .

La posición de esos puntos nos indica la forma de la curva; es una **parábola**, una curva ilimitada.

El trazado de la curva uniendo entre sí los puntos que encontramos de cada lado del eje de las *y* es aproximado. Cuantos más puntos se localicen, mayor aproximación se obtendrá.

A la operación de trazar la curva después de obtener sólo algunos puntos se le llama **interpolación**, y consiste en hacer pasar la curva por muchos otros puntos que no hemos hallado, pero que suponemos pertenecen a la curva.

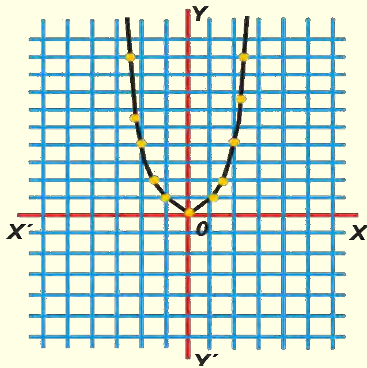


Figura 35

2) Gráfico de $x^2 + y^2 = 16$

Despejando *y* tendremos:

$$y^2 = 16 - x^2; \text{ luego, } y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

El signo ± proviene de que la raíz cuadrada de una cantidad positiva tiene dos signos + y -. Por ejemplo,

$\sqrt{4} = \pm 2$ porque

(+ 2) × (+ 2) = + 4 y (- 2) × (- 2) = + 4

Por tanto, en este caso, a cada valor de *x* corresponderán dos valores de *y* , uno positivo y otro negativo.

Dando valores a *x* :

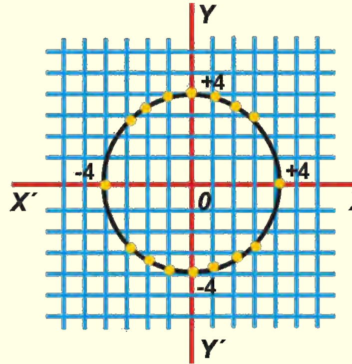


Figura 36

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	±2.6	±3.4	±3.8	±4	±3.8	±3.4	±2.6	0

La curva (Fig. 36) es un círculo cuyo centro está en el origen.

Toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 = r^2$ representa un círculo cuyo radio es *r* . En el caso anterior, el radio es 4, que es la raíz cuadrada de 16.

3) Gráfico de $9x^2 + 25y^2 = 225$

Despejando *y* tendremos:

$$25y^2 = 225 - 9x^2 \quad \therefore \quad y^2 = \frac{225 - 9x^2}{25}$$

$$y^2 = 9 - \frac{9x^2}{25} \quad \therefore \quad y = \pm\sqrt{9 - \frac{9x^2}{25}}$$

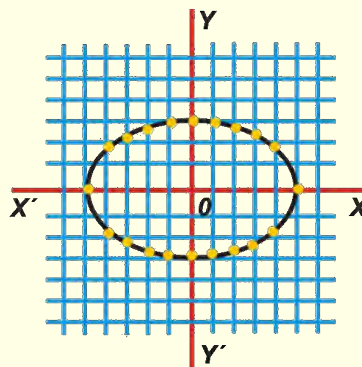


Figura 37

Dando los valores a x tendremos:

X	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	0	±1.8	±2.4	±2.6	±2.8	±3	±2.8	±2.6	±2.4	±1.8	0

En la figura 37 aparecen representados los valores de y correspondientes a los que dimos para x. La curva obtenida es una **elipse** o curva cerrada.
Toda ecuación de la forma $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, o sea

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, representa una elipse.

4) Gráfico de $xy = 5$ ó $y = \frac{5}{x}$

Dando a x valores positivos tenemos:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	. . . .	$\pm\infty$
y	$\pm\infty$	10	5	2.5	1.6	1.25	1	0.8	0.7	0.6	. . . .	0

Si marcamos cuidadosamente estos puntos obtendremos la curva situada en el primer cuadrante de la figura 38.

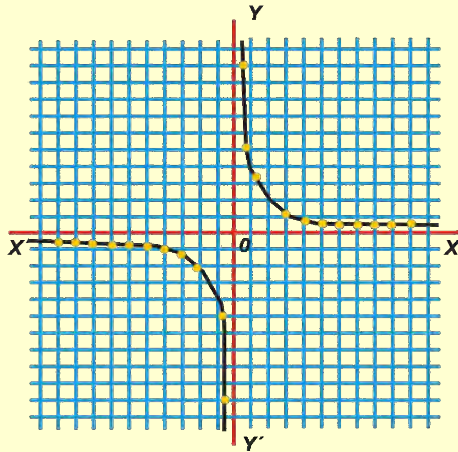


Figura 38

Dando a x valores negativos tenemos:

X	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	. . . .	$\pm\infty$
y	$\pm\infty$	10	-5	-2.5	-.16	-1.25	-1	-0.8	-0.7	-0.6	. . . .	0

Al marcar cuidadosamente estos puntos se obtiene la curva situada en el tercer cuadrante de la figura 38.

La curva obtenida es una hipérbola rectangular. Toda ecuación de la forma $xy = a$ ó $y = \frac{a}{x}$ donde a es constante, representa una hipérbola de este tipo.

La **parábola**, la **elipse** y la **hipérbola** son conocidas como **secciones cónicas** o simplemente **cónicas**. El **círculo** es un caso especial de la elipse.

En los gráficos no es imprescindible que la unidad sea una división del papel cuadriculado. Se puede tomar como unidad dos, tres o más divisiones, lo que en muchos casos resulta muy conveniente.

La unidad para las ordenadas puede ser diferente a la de las abscisas.

EJERCICIOS

Representa gráficamente las siguiente funciones:

1. $y = x$

2. $y = -2x$

3. $y = x + 2$

4. $y = x - 3$

5. $y = x + 4$

6. $y = 3x + 3$

7. $y = 8 - 3x$

8. $y = \frac{5x}{4}$

9. $y = \frac{x+6}{2}$

Representar las siguientes funciones siendo y la variable dependiente:

10. $x + y = 0$

11. $2x = 3y$

12. $2x + y = 10$

13. $3y = 4x + 5$

14. $4x + y = 8$

15. $y + 5 = x$

16. $5x - y = 2$

17. $2x = y - 1$

Traza el gráfico de:

18. $y - x^2 = 2$

19. $xy = 4$

20. $x^2 + y^2 = 36$

21. $y = x^2 + 2x$

22. $36x^2 + 25y^2 = 900$

23. $x^2 + y^2 = 49$

24. $y = x^2 - 3x$

25. $xy = 6$

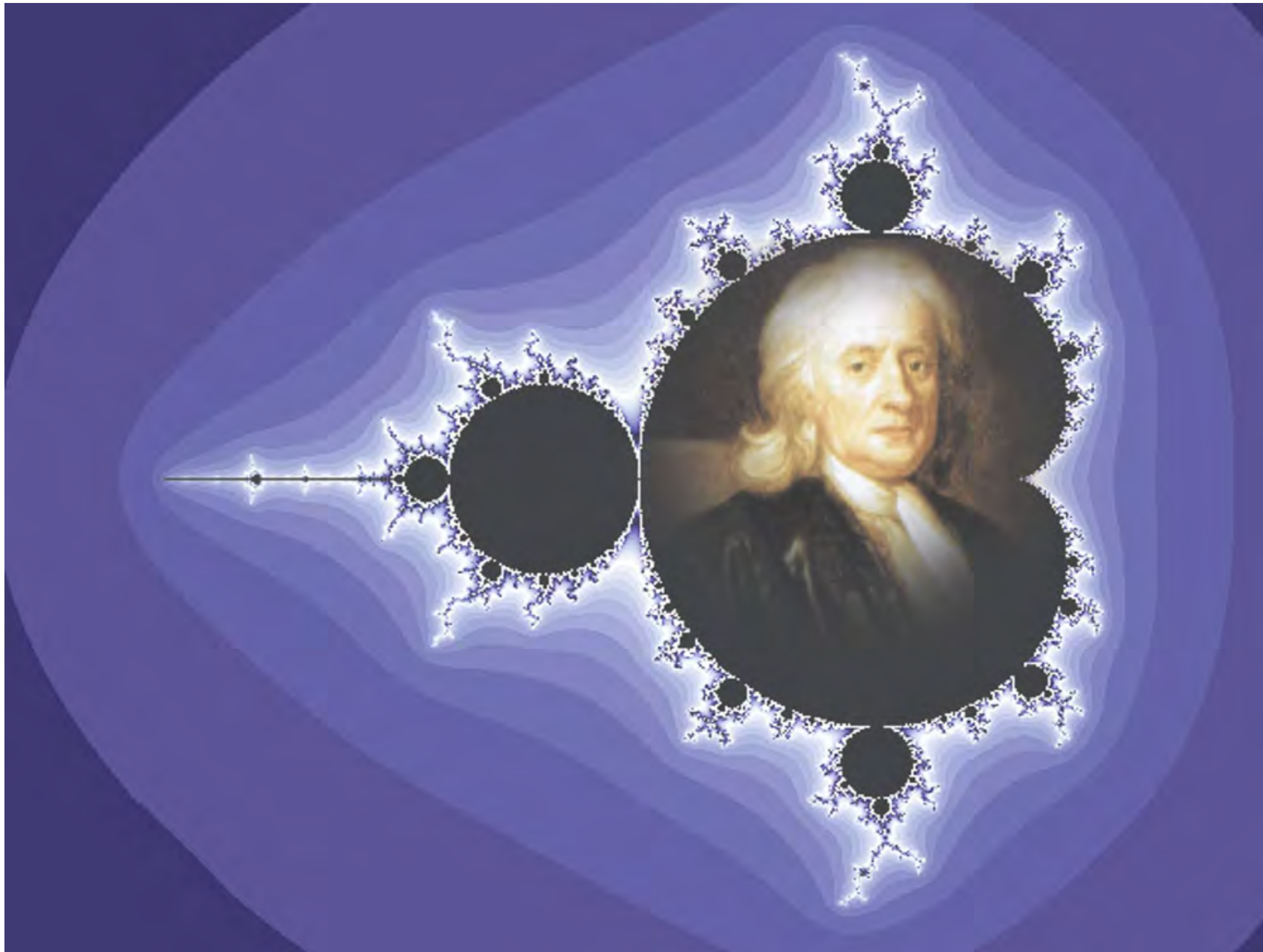
26. $y = x + \frac{x^2}{2}$

27. $y = \frac{x^2}{2}\ 2$

28. $x^2 + y^2 = 25$

29. $9x^2 + 16y^2 = 144$

30. $y = x^2 + 1$



Gracias al libro "Principia Mathematica", Isaac Newton considerado como uno de los más grandes portentos de la mente humana, descubrió, casi simultáneamente con Leibnitz, el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral. Basándose en los trabajos de Kepler, formuló la Ley de Gravitación Universal. Dentro del Álgebra desarrolló el Binomio que lleva su nombre.

CAPÍTULO XXIII

APLICACIONES PRÁCTICAS DE LAS GRÁFICAS

Los gráficos son de gran utilidad en Matemáticas, Física, Estadística, así como en la industria y el comercio.

Siempre que una cantidad sea proporcional a otra será igual a ésta multiplicada por una constante. Si y es proporcional a x, escribimos $y = ax$, donde a es constante, y sabemos que esta ecuación representa una **línea recta** que pasa por el **origen**.

Por tanto, las variaciones de una cantidad proporcional a otra estarán representadas por una línea recta que pasa por el origen. Ejemplos de esto son: el salario proporcional al tiempo de trabajo; el costo proporcional al número de cosas u objetos comprados; el espacio proporcional al tiempo, si la velocidad es constante, etcétera.

UTILIDAD DE LOS GRÁFICOS

Ejemplos

1) Un obrero gana \$2 por hora. Hallar la gráfica del salario en función del tiempo.

Sobre el eje de las *x* (fig. 39) señalamos el tiempo (cuatro divisiones representan una hora) y sobre el eje de las *y* el salario (cada división representa un peso).

El obrero gana en una hora \$2; determinamos el punto *A* que marca el valor del salario \$2 para una hora, y como el salario es proporcional al tiempo, la gráfica tiene que ser una línea recta que pase por el origen. Unimos *A* con *O* y la recta *OM* es la gráfica del salario.

Esta tabla gráfica nos da el valor del salario para cualquier número de horas. Para conocer el salario correspondiente a un tiempo dado sólo hay que leer el valor de la ordenada para ese valor de la abscisa: en 2 horas el salario es \$4; en 2 horas y cuarto \$4.50; en 3 horas, \$6; en 3 horas y 45 minutos o $3\frac{3}{4}$ horas, \$7.50.

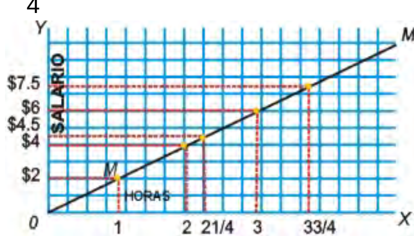


Figura 39

2) Sabiendo que 15 dólares equivalen a 225 pesos, formar una tabla que permita convertir dólares en pesos y viceversa.

Las abscisas serán dólares (Fig. 40) y cada división es U.S. \$1.00; las ordenadas serán pesos y cada división son 15 pesos. Hallamos el valor de la ordenada cuando la abscisa es U.S. \$15.00 y tenemos el punto *A*. Lo unimos con *O* y tendremos la gráfica *OM*.

Al dar suficiente extensión a los ejes, podemos saber cuántos pesos son cualquier número de dólares. En el gráfico se ve que U.S. \$1 equivale a 15 pesos, U.S. \$4.50 a 67.50 pesos, U.S. \$9 a 135 pesos y U.S. \$18 a 270 pesos.

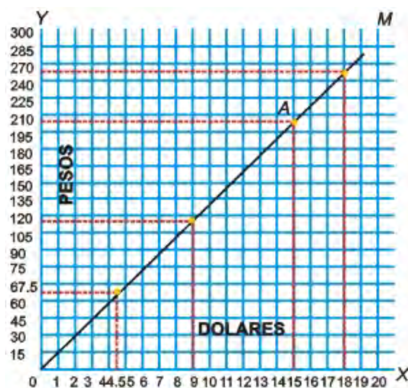


Figura 40

3) Un tren que va a 40 km por hora sale de un punto *O* a las 7 a.m. Trazar una gráfica que permita ver a qué distancia se halla del punto de partida en cualquier momento y a qué hora llegará al punto *P* situado a 140 km de *O*.



Figura 41

Las horas (Fig. 41) son las abscisas; cada división tiene 10 minutos. Las distancias son las ordenadas; cada división tiene 20 km.

Saliendo a las 7, a las 8 habrá avanzado ya 40 km. Marcamos el punto *A* y lo unimos con *O*. La línea *OM* es la gráfica de la distancia.

Midiendo el valor de la ordenada, veremos que por ejemplo, a las 8:20 se halla a 53.3 km del punto de partida; a las 9:15 a 90 km. Al punto *P* situado a 140 km llega a las 10:30 a.m.

4) Un hombre sale de *O* hacia *M*, situado a 20 km de *O*, a las 10 a. m. y va a 8 km por hora. Cada vez que camina una hora, se detiene 20 minutos para descansar. Hallar gráficamente a qué hora llegará a *M*.

Cada división de *OX* (fig. 42) representa 10 minutos; cada división de *OY* representa 4 km.

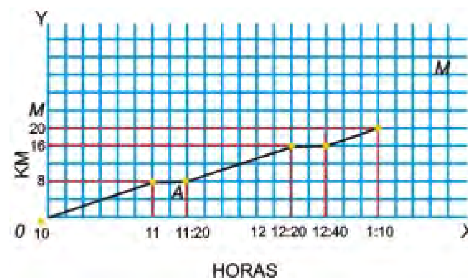


Figura 42

Como va a 8 km por hora y sale a las 10 a. m. Para las 11 habrá caminado ya 8 km; se halla a *A*.
El tiempo que descansa, de 11 a 11:20, se expresa con un segmento *AB* paralelo al eje de las horas, porque el tiempo sigue avanzando.

A las 11:20 emprende de nuevo su marcha y en una hora, de 11:20 a 12:20, recorre otros 8 km, luego se hallará en *C* que corresponde a la ordenada 16 km. Descansa otros 20 minutos, de 12:20 a 12:40 (segmento *CD*) y a las 12:40 emprende otra vez la marcha.

Ahora le faltan 4 km para llegar a *M*. De *D* a *M* la ordenada aumenta 4 km y al punto *M* corresponde en la abscisa la 1:10 p.m.

EJERCICIOS

Elige las unidades adecuadas**.**

1. Traza una gráfica que permita conocer el costo de cualquier número de metros de tela (hasta 10 m) sabiendo que 3 m cuestan $4.

2. Sabiendo que 1 dólar = 15 pesos, construir una gráfica que permita cambiar pesos por dólares y viceversa, hasta 20 dólares. Encuentra gráficamente cuántos dólares son 37.50, 45 y 63 pesos, y cuántos pesos son 4.50 y 7 dólares.

3. Un hombre sale de *O* hacia *M*, situado a 63 km de *O*, a 10 km por hora, a las 11 a.m. y otro sale de *M* hacia *O*, en el mismo instante, a 8 km por hora. Determinar gráficamente el punto de encuentro y la hora a la que se encuentran.

4. Un litro de un líquido pesa 800 g. Hallar gráficamente cuánto pesan 1.4 l, 2.8 l y 3.75 l.

5. 1 kg = 2.2 lb. Hallar gráficamente cuántos kg son 11 lb y cuántas libras son 5.28 kg.

6. Si 6 yardas = 5.5 m, hallar gráficamente cuántas yardas son 22 m y 38.5 m.

7. Un auto sale de *A* hacia *B*, situado a 200 km de *A*, a las 8 a.m. y regresa sin detenerse en *B*. De ida va a 40 km por hora y de regreso a 50 km por hora. Hallar la gráfica del viaje de ida y vuelta y la hora a la que llega al punto de partida**.**

ESTADÍSTICA

La Estadística es una ciencia que actualmente se estudia en varias Universidades, dada su creciente importancia en la industria, el comercio, la educación, la salud pública, etc.

Para elaborar una estadística fiel, lo primero es obtener todos los datos posibles acerca del asunto a tratar para luego clasificarlos rigurosamente y pro-ceder a la representación de los mismos, que puede hacerse por medio de **tabulares** o de **gráficos.**

TABULAR

En la representación **tabular** los datos estadísticos se disponen en columnas de modo que puedan leerse tanto vertical como horizontalmente.

El título de una hoja tabular debe indicar con toda claridad su objeto y el **tiempo** y **lugar** a que se refiere. Los datos se disponen en columnas separadas por rayas y encima de cada columna se coloca un título explicativo de lo que representa. Las columnas horizontales también pueden llevar títulos.

Generalmente los **totales** de las columnas van al pie de las mismas y los totales de las filas horizontales en su extremo derecho.

Los tabulares, según su índole, pueden ser de muy diversas formas y clases. Veamos un ejemplo:

VENTAS DE LA AGENCIA DE VEHÍCULOS AUTOMOTORES DE JALISCO ENERO JUNIO

CAMIONES Y AUTOMÓVILES POR MESES

		AUTOMÓVILES			TOTAL AUTOS Y CAMIONES
MESES	CAMIONES	CARGA	PASAJE	TOTAL	
ENERO	18	20	2	22	40
FEBRERO	24	30	5	35	59
MARZO	31	40	8	48	79
ABRIL	45	60	12	72	117
MAYO	25	32	7	39	64
JUNIO	15	20	3	23	38
TOTALES	158	202	37	239	397

GRÁFICOS

Asimismo, los gráficos son útiles para representar toda clase de datos estadísticos por medio de **barras, círculos, líneas rectas o curvas.**

BARRAS

Para expresar simples comparaciones de medidas se utilizan las **barras**, que pueden ser horizontales o verticales. Estos gráficos suelen llevar su escala, y cuando se presenta alguna anomalía o aclaración se agrega una nota al pie.

PRODUCCIÓN DE GASOLINA MILLONES DE LITROS

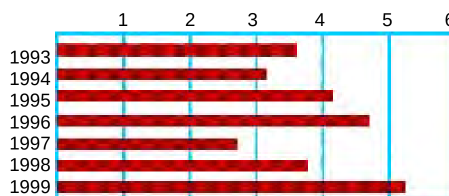


Gráfico con barras horizontales

Figura 43

VENTAS DE FRIJOL

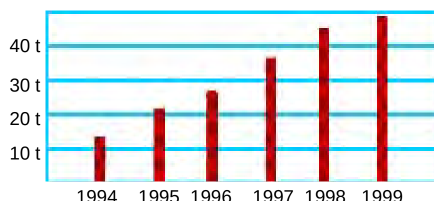


Gráfico con barras verticales

Figura 44

CÍRCULOS

En la comparación de medidas también se emplean los **círculos**, de modo que sus diámetros o sus áreas sean proporcionales a las cantidades comparadas**.**



Figura 45

En la figura 45-A se representan las ventas de un establecimiento comercial durante un año: $40,000 en la capital y $20,000 en provincia, por medio de dos círculos, siendo el **diámetro** del que representa $40,000 el doble del que representa $20,000.

En la figura 45-B el **área** del círculo mayor es el doble que la del menor.

Es preferible usar el sistema de **áreas** proporcionales a las cantidades representadas, en lugar del sistema de diámetros (o bien el de las barras).

Los círculos también se emplean para comparar entre sí las **partes**, representándolas por sectores circulares cuyas áreas serán proporcionales a las partes comparadas.

De este modo, para indicar que de los $30,000 de venta de una empresa de tejidos en 1958, el 20% se vendió al contado y el resto a plazos, se puede proceder así:

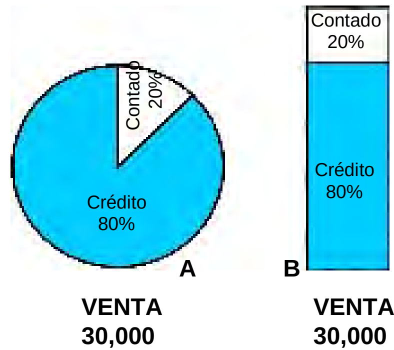


Figura 46

No obstante, es preferible usar el método de barras *B*, dada la dificultad para calcular con precisión el área del sector circular.

Para expresar que de los $120,000 en mercancías que tiene en existencia un almacén, el 25% es azúcar, el 20% café y el resto víveres, procedemos así:

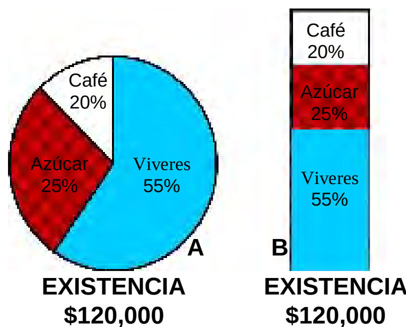


Figura 47

A estos gráficos donde las partes de un todo se representan por sectores circulares se les conoce en inglés "pie charts" **(gráficos de pastel)** por su semejanza con los cortes que se hacen en un pastel.

EJERCICIOS

1. Expresa por medio de barras horizontales o verticales que en 1992 las colonias cañeras de Central *X* produjeron: la colonia *A*, 2 millones de arrobas; la colonia *B*, 3 millones y medio; la colonia *C* , un millón y cuarto y la colonia *D*, $4\frac{1}{4}$ millones.

2. Expresa por medio de sectores circulares y barras que de los 80,000 sacos de mercancías que tiene un almacén, el 40% son de azúcar y el resto de arroz.

3. Expresa con barras horizontales que el ejército del país *A* tiene 3 millones de hombres, el *B* un millón 800,000 y el *C* 600,000.

4. Expresa por medio de barras verticales que la circulación de una revista de marzo a julio de 1992 ha sido: marzo, 10,000 ejemplares; abril, 14,000; mayo, 22,000; junio, 25,000 y julio, 30,000.

5. Elabora un gráfico que exprese las temperaturas máximas siguientes: día 14, 32°; día 15, 35°; día 16, 38°; día 17, 22°; día 18, 15°; día 19, 25°.

6. Las importaciones de un almacén, de febrero a noviembre de 1998, fueron: febrero, $56,000; marzo, $80,000; abril $90,000; mayo, $100,000; junio, $82,000; julio $74,000; agosto, $60,000; septiembre, $94,000; octubre, $75,000 y noviembre, $63,000. Elaborar la gráfica.

7. Exprese por barras que de los 200 alumnos de un colegio, hay 50 de 10 años, 40 de 11 años, 30 de 13 años, 60 de 14 años y 20 de 15 años.

8. Exprese por medio de sectores circulares y de barras que de los 200,000 autos que produjo una fábrica en 1996, 100,000 fueron camiones, 40,000 autos compactos y el resto de lujo.

9. Indique por medio de barras que un almacén ganó en 1990 $3000 y después de cada año hasta 1999, ganó $1500 más que el año anterior.

10. Un alumno hace un examen de Álgebra cada mes, en octubre obtuvo 55 puntos y en cada mes posterior hasta mayo obtuvo 5 puntos más que en el mes anterior. Hallar la gráfica de sus calificaciones

LÍNEAS RECTAS

Para expresar en Estadística las variaciones de una cantidad en función del tiempo, se emplea la **representación gráfica por medio de ejes coordenados.** Las abscisas representan los tiempos y las ordenadas la otra cantidad relacionada con el tiempo.

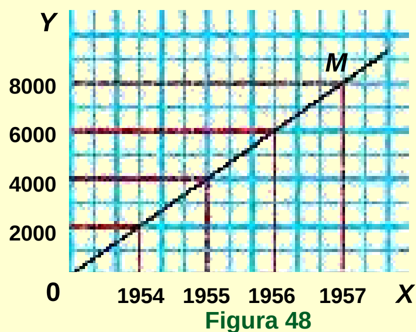


Figura 48

Si una cantidad *y* es proporcional al tiempo *t* , la ecuación que la liga con éste es $y = at$, donde *a* es constante, luego el gráfico de sus variaciones será una
línea recta a través del origen, y si su relación con el tiempo es de la forma $y = at + b$, donde *a* y *b* son constantes, el gráfico será una línea recta que no pasa por el origen

La estadística gráfica de las ganancias de un almacén (de 1954 a 1957) sabiendo que en 1954 ganó $2,000 y en cada año posterior ganó $2,000 más que en el inmediato anterior, está representada por la línea recta *OM* en la figura 48

Sin embargo, lo usual es que las variaciones de la cantidad que representan las ordenadas sean más o menos irregulares, y entonces el gráfico es una **línea curva o quebrada**

La figura 49 muestra las variaciones de la temperatura mínima en una ciudad del día 15 al 20 de diciembre. Notamos que el día 15 la mínima fue de 17.5°; el día 16 de 10°, el 17 de 15°, el 18 de 25°, el 19 de 22° y el 20 de 15°. La línea quebrada que se obtiene es la gráfica de las variaciones de la temperatura.

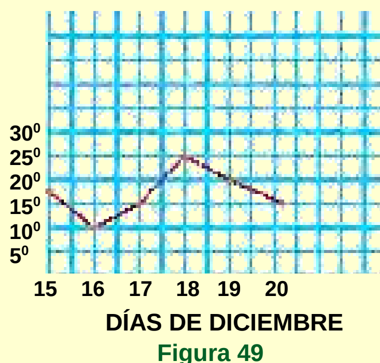


Figura 49

En la figura 50 se representa la producción de una fábrica de automóviles durante los 12 meses del año en
1994, 1995, 1996 y 1997

El valor de la ordenada correspondiente a cada mes da como resultado la producción en ese mes

El gráfico exhibe los meses de mínima máxima producción en cada año.

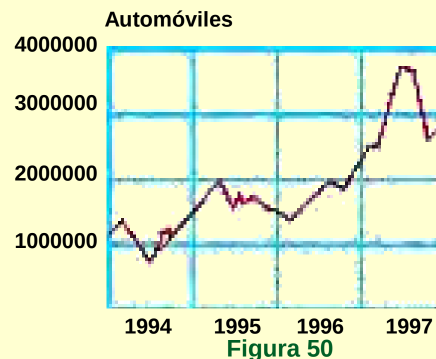


Figura 50

En la figura 51 se expresa el aumento de la población de una ciudad, desde 1955 hasta 1980. Vemos que en 1955 la población era de 5,000 y aumentó de 1955 a 1960 en 2,000; de 1960 a 1965 en 6,000, etc. La población para 1975 es de 30,000 ha-bitantes y en 1980 de 47,000.

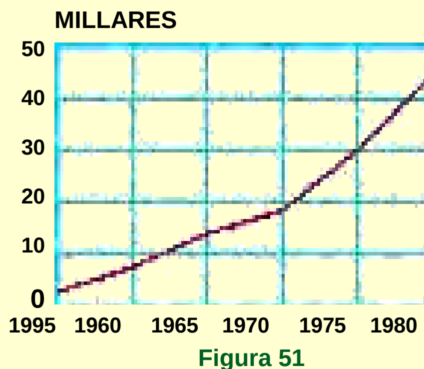
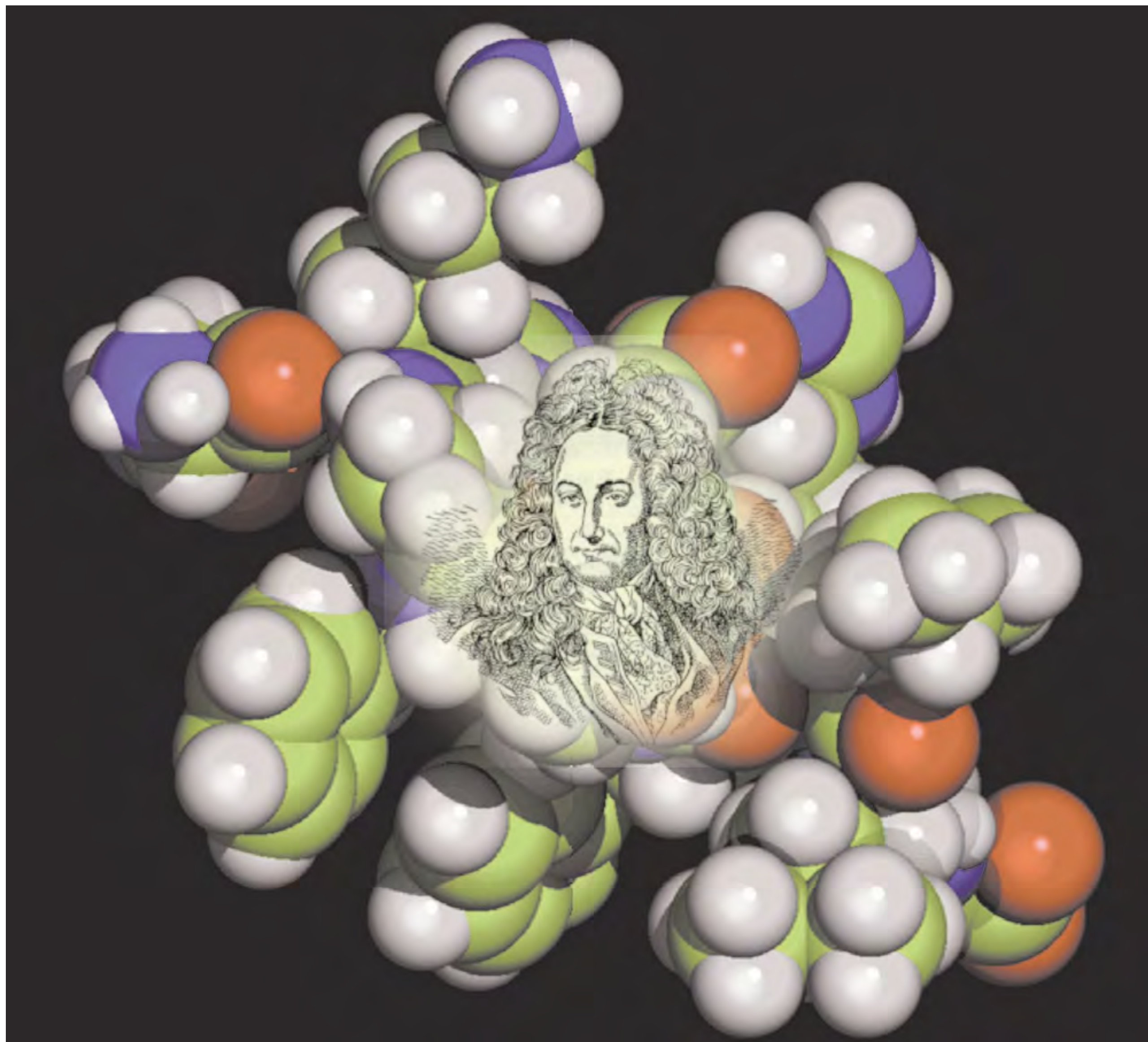


Figura 51



Rotfried W. Leibnitz, filósofo y matemático alemán. Al igual que Newton, descubrió casi al mismo tiempo el Cálculo Diferencial; desarrolló notablemente el Análisis Combinatorio. Durante toda su vida, mantuvo la idea de una matemática simbólica universal, que Grassman comenzó a lograr al desarrollar el Álgebra de Hamilton.

CAPÍTULO XXIV

ECUACIONES INDETERMINADAS

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas Los valores de las incógnitas que satisfacen simultáneamente a todas las ecuaciones del sistema se denominan soluciones del sistema de ecuaciones.

Cuando un sistema de ecuaciones admite soluciones se dice que es compatible y en caso contrario incompatible. Los sistemas compatibles pueden ser **determinados o indeterminados.** Se dice que un sistema de ecuaciones es compatible determinado cuando la solución del sistema es única.

Por el contrario, se dice que un sistema de ecuaciones es compatible **indeterminado** cuando tiene más de una solución.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

La ecuación $2x + 3y = 12$ tiene dos variables o incógnitas, y al despejar y tendremos:

$$3y = 12 - 2x \quad \therefore \quad y = \frac{12 - 2x}{3}$$

Por cada valor que demos a x obtendremos un valor para y. Así, para

$$x = 0, y = 4 \qquad x = 2, y = \frac{2}{3}$$

$$x = 1, y = 3\frac{1}{3} \qquad x = 3, y = 2, \text{etc.}$$

Estos pares de valores, sustituidos en la ecuación dada, la convierten en identidad, o sea que satisfacen la ecuación. Dando valores a x podemos obtener infinitos pares de valores que satisfacen la ecuación, en este caso una ecuación indeterminada. Por lo tanto, podemos decir que toda ecuación de primer grado con dos variables es indeterminada.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS. SOLUCIONES ENTERAS Y POSITIVAS

Como ya vimos, toda ecuación de primer grado con dos incógnitas es indeterminada y en consecuencia tiene infinitas soluciones; pero si establecemos como condición que las soluciones sean **enteras y positivas**, podría verse **limitada** en algunos casos dicha cantidad de soluciones.

Ejemplos

1) Resolver $x + y = 4$ para valores enteros y positivos.

Despejando y tenemos: $y = 4 - x$

El valor de y depende del valor de x; x tiene que ser entera y positiva según la condición establecida, y para que y sea entera y positiva, el mayor valor que podemos dar a x es 3, porque si $x = 4$, entonces $y = 4 - x = 4 - 4 = 0$, y si x es 5 ya se tendría $y = 4 - 5 = -1$, negativa. Por tanto, las soluciones enteras y positivas de la ecuación son:

$x = 1 \quad y = 3$
$x = 2 \quad y = 2$
$x = 3 \quad y = 1$

2) Resolver $5x + 7y = 128$ para valores enteros y positivos.

Despejando x, que tiene el menor coeficiente, queda:

$$5x = 128 - 7y \quad \therefore \quad x = \frac{128 - 7y}{5}$$

A continuación descomponemos $128y - 7y$ en dos sumandos, uno de los cuales será el mayor múltiplo de 5 que contiene cada uno, y tendremos:

$$x = \frac{125 + 3 - 5y - 2y}{5} = \frac{125}{5} - \frac{5y}{5} + \frac{3 - 2y}{5} =$$

$$= 25 - y + \frac{3 - 2y}{5}$$

Por tanto queda: $x = 25 - y + \frac{3 - 2y}{5}$ y de aquí

$$x - 25 + y = \frac{3 - 2y}{5}$$

Siendo x e y enteros (condición establecida), el primer miembro de esta igualdad debe ser entero, por lo que el segundo miembro también será entero y tendremos:

$$\frac{3 - 2y}{5} = \text{entero}$$

En seguida multiplicamos el numerador por un número tal que al dividir el coeficiente de y entre 5 nos dé como residuo 1 (en este caso por 3) y tendremos:

$$\frac{9 - 6y}{5} = \text{entero}$$

o sea $\frac{9 - 6y}{5} = \frac{5 + 4 - 5y - y}{5} = \frac{5}{5} - \frac{5y}{5} + \frac{4 - y}{5} =$

$$1 - y + \frac{4 - y}{5} = \text{entero}$$

Por tanto queda $1 - y + \frac{4 - y}{5} =$ entero

Para que $1 - y + \frac{4 - y}{5}$ sea entero es necesario que:

$\frac{4 - y}{5} =$ entero. Llamemos m a este entero:

$$\frac{4 - y}{5} = m$$

Despejando y: $4 - y = 5m$
$-y = 5m - 4$
$y = 4 - 5m$ (1)

Sustituyendo este valor de y en la ecuación dada $5x + 7y = 128$ tenemos:

$5x + 7(4 - 5m) = 128$
$5x + 28 - 35m = 128$
$5x = 100 + 35m$

$$x = \frac{100 + 35m}{5}$$

$x = 20 + 7m$ (2)

Al reunir los resultados de (1) y (2) tenemos:

$$\begin{cases} x = 20 + 7m & \text{donde } m \text{ es entero} \\ y = 4 - 5m \end{cases}$$

Ahora, dando valores a m obtendremos valores para x e y. Si algún valor es negativo, se desecha la solución.

Para	$m = 0$	$x = 20$,	$y = 4$
	$m = 1$	$x = 27$,	$y = -1$ se desecha

No se prueban más valores positivos de m porque darían y negativa. .

Para	$m = -1$	$x = 13$,	$y = 9$
	$m = -2$	$x = 6$,	$y = 14$
	$m = -3$	$x = -1$,	se desecha

No se prueban más valores negativos de m porque darían x negativa.

Por tanto, las soluciones enteras y positivas de la ecuación son:

$x = 20$	$y = 4$
$x = 13$	$y = 9$
$x = 6$	$y = 14$

Los resultados (1) y (2) son la solución general de la ecuación.

3) Resolver $7x - 12y = 17$ para valores enteros y positivos.

Despejando x : $7x = 17 + 12y \quad \therefore \quad x = \dfrac{17 + 12y}{7}$

o sea: $x = \dfrac{14 + 3 + 7y + 5y}{7} = \dfrac{14}{7} + \dfrac{7y}{7} + \dfrac{3 + 5y}{7} =$

$$= 2 + y + \frac{3 + 5y}{7}$$

por tanto queda $\quad x = 2 + y + \dfrac{3 + 5y}{7}$

o sea $\quad x - 2 - y = \dfrac{3 + 5y}{7}$

Siendo x e y enteros, $x - 2 - y$ es entero, luego

$$\frac{3 + 5y}{7} = \text{entero}$$

Multiplicando el numerador por 3 (porque 3 × 5 = 15 y 15 dividido entre 7 da como residuo 1) tendremos:

$$\frac{9 + 15y}{7} = \text{entero}$$

o sea $\dfrac{9 + 15y}{7} = \dfrac{7 + 2 + 14y + y}{7} = \dfrac{7}{7} + \dfrac{14y}{7} + \dfrac{y + 2}{7} =$

$$= 1 + 2y + \frac{y + 2}{7} = \text{entero}$$

por tanto queda: $1 + 2y + \dfrac{y + 2}{7} = \text{entero}$

Para que esta expresión sea un número entero, es necesario que $\dfrac{y + 2}{7} = \text{entero}$.

Llamemos m a este entero: $\dfrac{y + 2}{7} = m$

Despejando y : $\quad y + 2 = 7m$
$y = 7m - 2$ (1)

Sustituyendo este valor de y en la ecuación dada $7x - 12y = 17$ tenemos:

$7x - 12(7m - 2) = 17$

$7x - 84m + 24 = 17$

$7x = 84m - 7$

$$x = \frac{84m - 7}{7}$$

$x = 12m - 1 \qquad$ (2)

La solución general es: $\begin{cases} x = 12m - 1 \text{ donde } m \text{ es entero} \\ y = 7m - 2 \end{cases}$

Si m es cero o negativo, x e y serían negativas; por lo que se desechan esas soluciones.

Para cualquier valor positivo de m, x e y son positivas, y tendremos:

Para	$m = 1$	$x = 11$	$y = 5$
	$m = 2$	$x = 23$	$y = 12$
	$m = 3$	$x = 35$	$y = 19$
	$m = 4$	$x = 47$	$y = 26$
	....		

y así sucesivamente, por tanto el número de soluciones enteras y positivas es ilimitado.

Si en la ecuación dada el término que contiene la x está conectado con el término que contiene la y por medio del signo +, el número de soluciones enteras y positivas es limitado, y si está conectado por el signo - será ilimitado.

EJERCICIOS

Encuentra todas las soluciones enteras y positivas de:

1. $15x + 7y = 136$ **R.** $x = 3, y = 13$
2. $7x + 5y = 104$
R. $x = 2, y = 18; x = 7, y = 11; x = 12, y = 4$
3. $10x + 13y = 294$ **R.** $x = 6, y = 18; x = 19, y = 8$
4. $x + 5y = 24$
R. $x = 4, y = 4; x = 9, y = 3; x = 14, y = 2, x = 19, y = 1$
5. $10x + y = 32$
R. $x = 1, y = 22; x = 2, y = 12; x = 3, y = 2$
6. $11x + 8y = 300$
R. $x = 4, y = 32; x = 12, y = 21; x = 20, y = 10$
7. $3x + 5y = 43$
R. $x = 1, y = 8; x = 6, y = 5; x = 11, y = 2$
8. $9x + 11y = 203$ **R.** $x = 3, y = 16; x = 14, y = 7$
9. $9x + 4y = 86$ **R.** $x = 2, y = 17; x = 6, y = 8$
10. $21x + 25y = 705$. **R.** $x = 5, y = 24; x = 30, y = 3$
11. $x + 3y = 9$ **R.** $x = 3, y = 2; x = 6, y = 1$
12. $9x + 11y = 207$ **R.** $x = 1, y = 18; x = 12, y = 9$
13. $7x + 8y = 115$ **R.** $x = 5, y = 10; x = 13, y = 3$
14. $8x + 13y = 162$ **R.** $x = 4, y = 10; x = 17, y = 2$
15. $11x + 12y = 354$
R. $x = 6, y = 24; x = 18, y = 13; x = 30, y = 2$
16. $x + y = 5$
R. $x = 1, y = 4; x = 2, y = 3; x = 3, y = 2; x = 4, y = 1$

Encuentra la solución general y los tres menores pares de valores enteros y positivos de x e y que satisfacen las ecuaciones siguientes:

17. $8x - 13y = 407$
R. $x = 13m + 46; y = 8m - 3; x = 59, y = 5; x = 72, y = 13; x = 85, y = 21$
18. $5x - 8y = 1$
R. $x = 8m - 3, y = 5m - 2; x = 5, y = 3; x = 13, y = 8; x = 21, y = 13$
19. $14x - 17y = 32$
R. $x = 17m - 5, y = 14m - 6; x = 12, y = 8; x = 29, y = 22; x = 46, y = 36$
20. $20y - 23x = 411$
R. $x = 20m - 17, y = 23m + 1; x = 3, y = 24; x = 23, y = 47; x = 43, y = 70$
21. $7x - 13y = 43$
R. $x = 13m - 5, y = 7m - 6; x = 8, y = 1; x = 21, y = 8; x = 34, y = 15$
22. $7x - 11y = 83$
R. $x = 11m + 4, y = 7m - 5; x = 15, y = 2; x = 26, y = 9; x = 37, y = 16$
23. $5y - 7x = 312$
R. $x = 5m - 1, y = 7m + 61; x = 4, y = 68; x = 9, y = 75; x = 14, y = 82$
24. $3x - 4y = 5$
R. $x = 4m -1, y = 3m -2; x = 3, y = 1; x = 7, y = 4; x = 11, y = 7$
25. $11x - 12y = 0$
R. $x = 12m, y = 11m ; x = 12, y = 11; x = 24, y = 22; x = 36, y = 33$.

PROBLEMAS SOBRE ECUACIONES INDETERMINADAS

Un comerciante invierte 64 dólares en la compra de lapiceros a 3 dólares cada uno y plumas a 5 dólares cada una. ¿Cuántos lapiceros y cuántas plumas puede comprar?

Siendo x = número de lapiceros

y = número de plumas

Si cada lapicero cuesta 3 dólares los x lapiceros costarán $3x$ dólares y como cada pluma cuesta 5 dólares las y plumas costarán $5y$ dólares. Por todo esto paga 64 dólares; luego, tenemos la ecuación:

$$3x + 5y = 64$$

Resolviendo para valores enteros y positivos, se obtienen las soluciones siguientes:

$x = 18, y = 2$ $\quad x = 8, \quad y = 8$

$x = 13, y = 5$ $\quad x = 3, \quad y = 11$

De este modo, con 64 dólares puede comprar 18 lapiceros y 2 plumas, o 13 lapiceros y 5 plumas, u 8 lapiceros y 8 plumas, o 3 lapiceros y 11 plumas.

EJERCICIOS

1. ¿De cuántas formas se pueden tener \$42 en billetes de \$2 y \$5?
R. 1 de \$2 y 8 de \$5; 6 de \$2 y 6 de \$5; 11 de \$2 y 4 de \$5 ó 16 de \$2 y 2 de \$5.

2. ¿De cuántos modos se pueden pagar \$45 en monedas de \$5 y de \$10?
R. 1 de \$5 y 4 de \$10; 3 de \$5 y 3 de \$10; 5 de \$5 y 2 de \$10 ó 7 de \$5 y 1 de \$10.

3. Encuentra dos números tales que si uno se multiplica por 5 y el otro por 3, la suma de sus productos sea 62.
R. 1 y 19; 4 y 14; 7 y 9 ó 10 y 4.

4. En una excursión cada niño pagó 45 cts. y cada adulto \$1. Si el costo total fue de \$17, ¿cuántos adultos y niños iban? **R.** 8 adultos y 20 niños.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN LINEAL

A las ecuaciones de primer grado con dos variables se les llama lineales porque representan **líneas rectas.**

Si en la ecuación 2x - 3y = 0 despejamos y tendremos:

$$-3y = -2x \text{, o sea, } 3y = 2x \quad \therefore \quad Y = \frac{2}{3}x$$

donde vemos que y es función de primer grado de x sin término independiente, y sabemos que esto representa una línea recta que pasa por el origen.

Si en la ecuación 4x - 5y = 10 despejamos y tendremos:

$$-5y = 10 - 4x \text{ o sea } 5y = 4x - 10 \quad \therefore$$

$$y = \frac{4x-10}{5} \text{ o sea } y = \frac{4}{5}x - 2$$

donde vemos que y es función de primer grado de x con término independiente, y sabemos que esto representa una línea recta que no pasa por el origen.

De acuerdo con lo anterior, podemos afirmar que toda ecuación de primer grado con dos variables representa una línea recta. Si la ecuación carece de término independiente, la línea recta pasa por el origen, pero si tiene término independiente, la línea recta no pasa por el origen.

Ejemplos

1) Representar gráficamente la ecuación 5x - 3y = 0

Dado que carece de término independiente, el origen es un punto de la recta (Fig. 52), por lo que basta hallar otro punto cualquiera y unirlo con el origen.

Despejando y :

$$-3y = -5x \text{ o sea } 3y = 5x \quad \therefore \quad y = \frac{5}{3}x$$

Busquemos el valor de y para un valor cualquiera de x , por ejemplo:

Para x = 3, y = 5

El punto (3, 5) es un punto de la recta que unido con el origen determina la recta 5x - 3y = 0

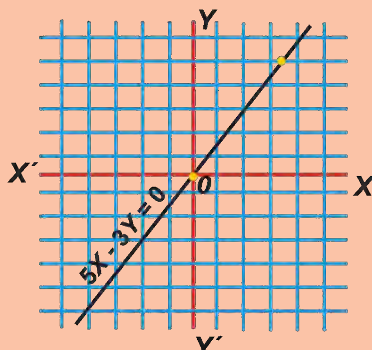


Figura 52

2) Gráfico de 3x + 4y = 15

Como esta ecuación tiene término independiente, la línea recta que representa no pasa por el origen. En este caso, lo más fácil es localizar los interceptos sobre los ejes. El intercepto sobre el eje de las x se obtiene haciendo y = 0 y sobre el eje de las y haciendo x = 0.

Así, tenemos:

Para $y = 0$, $x = 5$

$X = 0$, $y = 3\frac{3}{4}$

Marcando los puntos (5, 0) y $\left(0{,}3\frac{3}{4}\right)$, como en la Fig. 53

y uniéndolos entre sí, queda trazada la recta que representa la ecuación 3x + 4y = 15

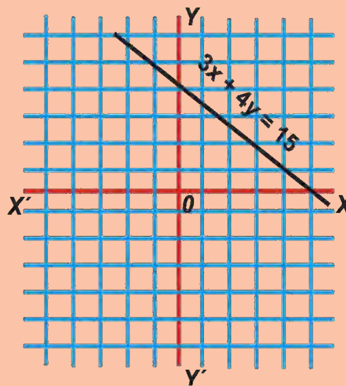


Figura 53

3) Gráfico de x - 3 = 0

Despejando x tenemos x = 3

Esta ecuación equivale a 0y + x = 3

Para cualquier valor de y , el término 0y = 0. Para y = 0, x = 3; para y = 1, x = 3; para y = 2, x = 3, etc., luego la ecuación x = 3 es el lugar geométrico de todos los puntos cuya abscisa es 3, o sea que x - 3 = 0 ó x = 3 representa una línea recta paralela al eje de las y que pasa por el punto (3, 0) (Fig. 54).

Del mismo modo, x + 2 = 0 ó x = - 2 representa una línea recta paralela al eje de las y que pasa por el punto (- 2, 0) (Fig. 54).

La ecuación x = 0 representa el eje de las ordenadas.

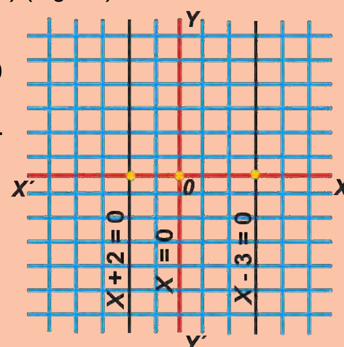


Figura 54

4) Gráfico de $y - 2 = 0$

Despejando y tenemos $y = 2$

Esta ecuación equivale a $0x + y = 2$, o sea que para cualquier valor de x, $y = 2$, luego $y - 2 = 0$ ó $y = 2$ es el lugar geométrico de todos los puntos cuya ordenada es 2, luego $y = 2$ representa una línea recta paralela al eje de las x que pasa por el punto (0, 2) (Fig. 55).

Del mismo modo, $y + 4 = 0$ ó $y = -4$ representa una línea recta paralela al eje de las x que pasa por el punto (0, – 4) (Fig. 55).

La ecuación $y = 0$ representa el eje de las abscisas.

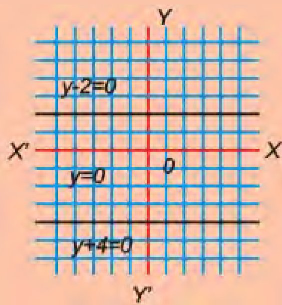


Figura 55

5) Ubicar la intersección de $3x + 4y = 10$ con $2x + y = 0$

Representemos ambas líneas (Fig. 56).

En $3x + 4y = 10$, y tenemos:

Para $x = 0$, $y = 2\frac{1}{2}$ $y = 0$, $x = 3\frac{1}{3}$

Marcando los puntos $\left(0, 2\frac{1}{2}\right)$ y $\left(3\frac{1}{3}, 0\right)$ y uniéndolos
queda representada la ecuación $3x + 4y = 10$

En $2x + y = 0$ tenemos:

Para $x = 1$, $y = -2$

Uniendo el punto (1, – 2) con el origen (la ecuación carece de término independiente), queda representada $2x + y = 0$

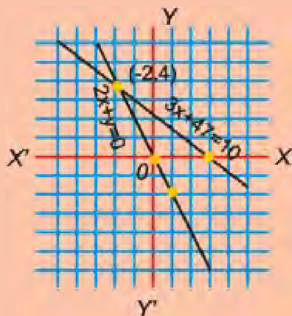


Figura 56

En el gráfico se ve que las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas son $x = -2$, $y = 4$, luego el punto de intersección es (– 2, 4).

6) Hallar la intersección de $2x + 5y = 4$con $3x + 2y = -5$

En $2x + 5y = 4$ tenemos:

Para $x = 0$, $y = \frac{4}{5}$ $y = 0$, $x = 2$

Marcando estos puntos (Fig. 57) y uniéndolos queda representada la ecuación $2x + 5y = 4$.

En $3x + 2y = -5$ tenemos:

Para $x = 0$, $y = -2\frac{1}{2}$ $y = 0$, $x = -1\frac{2}{3}$

Marcando estos puntos y uniéndolos queda representada la ecuación $3x + 2y = -5$

La intersección de las dos rectas es el punto (– 3, 2)

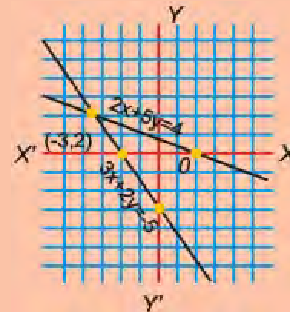


Figura 57

EJERCICIOS

Representa gráficamente las siguientes ecuaciones:

1. $8x = 3y$
2. $5x - 4y = 8$
3. $10x - 3y = 0$
4. $x + y = 5$
5. $x - y = -4$
6. $2x + 5y = 30$
7. $9x + 2y = -12$
8. $x - 1 = 0$
9. $x + 6 = 0$
10. $4x + 5y = -20$
11. $7x - 2y - 14 = 0$
12. $y + 5 = 0$
13. $y - 7 = 0$
14. $7x - 12y = 84$
15. $3x - 4y - 6 = 0$
16. $5x + 2y = 0$
17. $2x + 3y = -20$
18. $2y - 3x = 9$
19. $8y - 15x = 40$
20. $x - y = 0$

Encuentra la intersección de:

21. $x + 1 = 0$ con $y - 4 = 0$ **R.** (– 1, 4)
22. $x + 5 = 0$ con $6x - 7y = -9$ **R.** (– 5, – 3)
23. $3x = 2y$ con $x + y = 5$ **R.** (2, 3)
24. $3x + 8y = 28$ con $5x - 2y = -30$ **R.** (– 4, – 5)
25. $x - y = 2$ con $3x + y = 18$ **R.** (5, 3)
26. $y - 4 = 0$ con $7x + 2y = 22$ **R.** (2, 4)
27. $2x - y = 0$ con $5x + 4y = -26$ **R.** (– 2, – 4)
28. $6x = -5y$ con $4x - 3y = -38$ **R.** (– 5, 6)
29. $5x + 6y = -9$ con $4x - 3y = 24$ **R.** (3, – 4)



En la obra "Método de los incrementos directos e inversos" Brook Taylor desarrolló los principios básicos del cálculo de las diferencias finitas. En el Álgebra elemental conocemos el Teorema de Taylor, cuya consecuencia es el Teorema de Maclaurin.

CAPÍTULO XXV

ECUACIONES SIMULTÁNEAS DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Se dice que dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas son **simultáneas** cuando se satisfacen para **iguales valores** de las incógnitas.

De este modo, las ecuaciones $x + y = 5$

$x - y = 1$

son simultáneas porque $x = 3$, $y = 2$ satisfacen **ambas** ecuaciones.

Por otra parte, las **ecuaciones equivalentes** son aquellas que se obtienen una de la otra, y además tienen soluciones comunes infinitas. Por ejemplo, $x + y = 4$

$2x + 2y = 8$

son equivalentes porque al dividir por 2 la segunda ecuación se obtiene la primera.

ECUACIONES INDEPENDIENTES

Las ecuaciones **independientes** no se obtienen una de la otra, y cuando tienen una sola solución común se les llama **simultáneas.**

De este modo, se les llama las ecuaciones a $x + y = 5$ y $x - y = 1$, éstas son independientes porque no se obtienen una de la otra, y además son simultáneas por-que el único par de valores que las satisface es $x = 3$, $y = 2$.

Las ecuaciones independientes que no tienen solución común se conocen como **incompatibles.**

Las ecuaciones

$$x + 2y = 10$$
$$2x + 4y = 5$$

son incompatibles porque no hay ningún par de valores de x e y que las verifique a ambas.

SISTEMA DE ECUACIONES

Un **sistema de ecuaciones** es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.

Por ejemplo:

$$2x + 3y = 13$$
$$4x - y = 5$$

forman un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

La **solución** de un sistema de ecuaciones es un grupo de valores de las incógnitas que satisface todas las ecuaciones del sistema. (La solución del sistema anterior es $x = 2$, $y = 3$).

Un sistema de ecuaciones es **posible** o **compatible** cuando tiene solución, y es **imposible** o **incompatible** cuando no la tiene. Por otro lado, un sistema compatible es **determinado** cuando tiene una sola solución e **indeterminado** cuando tiene infinitas soluciones.

ELIMINACIÓN POR IGUALACIÓN

Resolver el sistema

$7x + 4y = 13$ (1)
$5x - 2y = 19$ (2)

Despejamos cualquiera de las incógnitas, por ejemplo x , en ambas ecuaciones.

Despejando x en (1):

$$7x = 13 - 4y \quad \therefore \quad x = \frac{13 - 4y}{7}$$

Despejando x en (2):

$$5x = 19 + 2y \quad \therefore \quad x = \frac{19 + 2y}{5}$$

En seguida se **igualan** entre sí los dos valores de x obtenidos:

$$\frac{13 - 4y}{7} = \frac{19 + 2y}{5}$$

y ya tenemos **una** sola ecuación con **una** incógnita al haber eliminado la x .

Resolviendo esta ecuación:

$$5(13 - 4y) = 7(19 + 2y)$$
$$65 - 20y = 133 + 14y$$
$$- 20y - 14y = 133 - 65$$
$$- 34y = 68$$
$$y = - 2$$

Al sustituir este valor de y en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1) (generalmente se sustituye en la más sencilla), tenemos:

$$7x + 4(- 2) = 13$$
$$7x - 8 = 13$$
$$7x = 21$$
$$x = 3$$

R. $x = 3$, $y = 2$

Para verificar la operación sustituimos $x = 3$, $y = - 2$ en las dos ecuaciones dadas y **ambas** se convierten en identidad.

SISTEMA DE DOS ECUACIONES SIMULTÁNEAS DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Para resolver un sistema de este tipo es necesario obtener de las dos ecuaciones dadas una sola ecuación con **una** incógnita, y a esta operación se le llama **eliminación**.

Los métodos de eliminación más usuales son el de igualación, de sustitución y de reducción (este también llamado de suma o resta).

EJERCICIOS

Resuelve por el método de igualación:

1. $x + 6y = 27$; $7x - 3y = 9$ **R.** $x = 3$, $y = 4$

2. $7x - 4y = 5$; $9x + 8y = 13$ **R.** $x = 1, y = \frac{1}{2}$

3. $15x - 11y = - 87$; $-12x - 5y = - 27$ **R.** $x = -\frac{2}{3}, y = 7$

4. $3x - 2y = - 2$; $5x + 8y = - 60$ **R.** $x = - 4$, $y = - 5$

5. $9x + 16y = 7$; $4y - 3x = 0$ **R.** $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{4}$

6. $7x + 9y = 42$; $12x + 10y = - 4$ **R.** $x = - 12$, $y = 14$

7. $3x + 5y = 7$; $2x - y = - 4$ **R.** $x = - 1$, $y = 2$

8. $14x - 11y = - 29$; $13y - 8x = 30$ **R.** $x = -\frac{1}{2}, y = 2$

9. $6x - 18y = - 85$; $24x - 5y = - 5$ **R.** $x = \frac{5}{6}, y = 5$

ELIMINACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Resolver el sistema:

$2x + 5y = -24 \quad (1)$
$8x - 3y = 19 \quad (2)$

Despejamos cualquiera de las incógnitas, por ejemplo x, en una de las ecuaciones, en este caso la (1), y tendremos:

$$2x = -24 - 5y \quad \therefore \quad x = \frac{-24-5y}{2}$$

Sustituimos este valor de x en la ecuación (2)

$$8\left(\frac{-24-5y}{2}\right) - 3y = 19$$

y ya tenemos **una** ecuación con **una** incógnita, al haber **eliminado** la x.

Para resolver esta ecuación simplificamos 8 y 2, con lo que nos queda:

$$4(-24-5y) - 3y = 19$$
$$-96 - 20y - 3y = 19$$
$$-20y - 3y = 19 + 96$$
$$-23y = 115$$
$$y = -5$$

Sustituyendo $y = -5$ en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1), tenemos:

$$2x + 5(-5) = -24$$
$$2x - 25 = -24$$

$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

R. $x = \frac{1}{2}$, $y = -5$

Para verificar hacemos

$$x = \frac{1}{2}, y = -5$$

en las dos ecuaciones dadas y ambas se convierten en identidad.

EJERCICIOS

Resuelve por sustitución:

1. $x + 3y = 6$; $5x - 2y = 13$ — **R.** $x = 3$, $y = 1$
2. $x - 5y = 8$; $-7x + 8y = 25$ — **R.** $x = -7$, $y = -3$
3. $4x + 5y = 5$; $-10y - 4x = -7$ — **R.** $x = \frac{3}{4}, y = \frac{2}{5}$
4. $5x + 7y = -1$; $-3x + 4y = -24$ — **R.** $x = 4$, $y = -3$
5. $15x + 11y = 32$; $7y - 9x = 8$ — **R.** $x = \frac{2}{3}, y = 2$
6. $32x - 25y = 13$; $16x + 15y = 1$ — **R.** $x = \frac{1}{4}, y = -\frac{1}{5}$
7. $4y + 3x = 8$; $8x - 9y = -77$ — **R.** $x = -4$, $y = 5$
8. $10x + 18y = -11$; $16x - 9y = -5$ — **R.** $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Resolver el sistema:

$5x + 6y = 20 \quad (1)$
$4x - 3y = -23 \quad (2)$

Con este método se busca igualar los coeficientes de una de las incógnitas. Aquí igualaremos los coeficientes de y en ambas ecuaciones, porque es lo más sencillo.

El m. c. m. de los coeficientes de y, 6 y 3, es 6. Multiplicamos la segunda ecuación por 2, porque 2 × 3 = 6, y tendremos:

$5x + 6y = 20$
$8x - 6y = 46$

Dado que los coeficientes de y que igualamos tienen **signos distintos**, se **suman** estas ecuaciones porque con ello se **elimina** la y :

$$\begin{array}{r} 5x + 6y = 20 \\ 8x - 6y = -46 \\ \hline 13x = -26 \end{array}$$

$$x = -\frac{26}{13} = -2$$

Sustituyendo $x = -2$ en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1), tenemos:

$$5(-2) + 6y = 20$$
$$-10 + 6y = 20$$
$$6y = 30$$
$$y = 5$$

R. $x = -2$, $y = 5$

Resolver el sistema

$10x + 9y = 8 \quad (1)$
$8x - 15y = -1 \quad (2)$

Igualaremos los coeficientes de x. El m. c. m. de 10 y 8 es 40; se multiplica la primera ecuación por 4, porque 4 × 10 = 40 y la segunda por 5, porque 5 × 8 = 40, y tenemos:

$40x + 36y = 32$
$40x - 75y = -5$

Como los coeficientes que igualamos tienen **signos iguales**, se **restan** ambas ecuaciones para **eliminar** la x. **Cambiando los signos** a cualquiera de ellas, por ejemplo a la segunda, tenemos:

$$\begin{array}{r} 40x + 36y = 32 \\ -40x + 75y = 5 \\ \hline 111y = 37 \end{array}$$

$$y = \frac{37}{111} = \frac{1}{3}$$

Al sustituir $y = \frac{1}{3}$ en (2)

tenemos:

$$8x - 15\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

$$8x - 5 = -1$$
$$8x = 4$$
$$x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

R. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$

El método expuesto, que es el más sencillo, se le conoce también como **suma** o **resta**, porque según vimos en los ejemplos anteriores, si los coeficientes que se igualan tienen signos **distintos** se **suman** las dos ecuaciones, y si tienen signos **iguales**, se restan.

Es indistinto igualar los coeficientes de x o de y. Generalmente se igualan aquellos en que la operación resulte más sencilla.

EJERCICIOS

Resuelve por suma o resta:

1. $\begin{cases} 6x + 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$ **R.** $x = 1,\ y = 3$

2. $\begin{cases} 10x - 3y = 36 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$ **R.** $x = 3,\ y = -2$

3. $\begin{cases} 12x - 14y = 20 \\ 12y - 14x = -19 \end{cases}$ **R.** $x\ \frac{1}{2},\ y = -1$

4. $\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$ **R.** $x = -2,\ y = -1$

5. $\begin{cases} 11x - 9y = 2 \\ 13x - 15y = -2 \end{cases}$ **R.** $x = 1,\ y = 1$

6. $\begin{cases} 15x - y = 40 \\ 19x + 8y = 236 \end{cases}$ **R.** $x = 4,\ y = 20$

7. $\begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 11x + 6y = 47 \end{cases}$ **R.** $x = 7,\ y = -5$

8. $\begin{cases} 18x + 5y = -11 \\ 12x + 11y = 31 \end{cases}$ **R.** $x = -2,\ y = 5$

9. $\begin{cases} 36x - 11y = -14 \\ 24x - 17y = 10 \end{cases}$ **R.** $x = -1,\ y = -2$

10. $\begin{cases} 9x + 11y = -14 \\ 6x - 5y = -34 \end{cases}$ **R.** $x = -4,\ y = 2$

11. $\begin{cases} 9x + 7y = -4 \\ 11x - 13y = -48 \end{cases}$ **R.** $x = -2,\ y = 2$

12. $\begin{cases} 12x - 17y = 104 \\ 15x + 19y = -31 \end{cases}$ **R.** $x = 3,\ y = -4$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NUMÉRICOS DE DOS ECUACIONES ENTERAS CON DOS INCÓGNITAS

Una vez conocidos los métodos de eliminación, resolveremos sistemas en los que antes de eliminar hay que simplificar las ecuaciones.

1. Resolver el sistema $\begin{cases} 3x - (4y + 6) = 2y - (x + 18) \\ 2x - 3 = x - y + 4 \end{cases}$

Suprimimos los signos de agrupación: $\begin{cases} 3x - 4y - 6 = 2y - x - 18 \\ 2x - 3 = x - y + 4 \end{cases}$

Transponemos: $\begin{cases} 3x - 4y - 2y + x = -18 + 6 \\ 2x - x + y = 4 + 3 \end{cases}$

Reducimos términos semejantes: $\begin{cases} 4x - 6y = -12 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Dividimos la primera ecuación por 2: $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x + y = 7 \quad (1) \end{cases}$

Igualaremos los coeficientes de y multiplicando la segunda ecuación por 3 y sumamos:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -6 \\ 3x + 3y &= 21 \\ \hline 5x \qquad &= 15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 3$ en (1) tenemos:

$$\begin{aligned} 3 + y &= 7 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

R. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

2. Resolver el sistema $\begin{cases} 3(2x + y) - 2(y - x) = -4(y + 7) \\ 3(2y + 3x) - 20 = -53 \end{cases}$

Efectuamos las operaciones indicadas: $\begin{cases} 6x + 3y - 2y + 2x = -4y - 28 \\ 6y + 9x - 20 = -53 \end{cases}$

Transponemos: $\begin{cases} 6x + 3y - 2y + 2x + 4y = -28 \\ 9x + 6y = -53 + 20 \end{cases}$

Reducimos: $\begin{cases} 8x + 5y = -28 \\ 9x + 6y = -33 \end{cases}$

Dividimos por 3 la segunda ecuación: $\begin{cases} 8x + 5y = -28 \\ 3x + 2y = -11 \quad (1) \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por 8: $\begin{cases} 24x + 15y = -84 \\ 24x + 16y = -88 \end{cases}$

Cambiamos signos a la primera ecuación:

$$\begin{aligned} -24x - 15y &= 84 \\ 24x + 16y &= -88 \\ \hline y &= -4 \end{aligned}$$

Sustituyendo $y = -4$ en (1):

$$\begin{aligned} 3x + 2(-4) &= -11 \\ 3x - 8 &= -11 \\ 3x &= -3 \end{aligned}$$

R. $\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$

EJERCICIOS

Resuelve los siguientes sistemas:

1. $8x - 5 = 7y - 9$; $6x = 3y + 6$ **R.** $x = 3$, $y = 4$

2. $(x - y) - (6x + 8y) = -(10x + 5y + 3)$; $(x + y) - (9y - 11x) = 2y - 2x$ **R.** $x = 5$, $y = 7$

3. $x - 1 = y + 1$; $x - 3 = 3y - 7$ **R.** $x = 5$, $y = 3$

4. $5(x + 3y) - (7x + 8y) - 6$; $7x - 9y - 2(x - 18y) = 0$ **R.** $x = 1\frac{73}{89}$, $y = -\frac{30}{89}$

5. $3(x + 2) = 2y$; $2(y + 5) = 7x$ **R.** $x = 4$, $y = 9$

6. $2(x + 5) = 4(y - 4x)$; $10(y - x) = 11y - 12x$ **R.** $x = -1$, $y = -2$

7. $x - 1 = 2(y + 6)$; $x + 6 = 3(1 - 2y)$ **R.** $x = 9$, $y = -2$

8. $3x - 4y - 2(2x - 7) = 0$; $5(x - 1) - (2y - 1) = 0$ **R.** $x = 2$, $y = 3$

9. $30 - (8 - x) = 2y + 30$; $5x - 29 = x - (5 - 4y)$ **R.** $x = 4$, $y = -2$

10. $12(x + 2y) - 8(2x + y) = 2(5x - 6y)$; $20(x - 4y) = -10$ **R.** $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$

11. $3x - (9x + y) = 5y - (2x + 9y)$; $4x - (3y + 7) = 5y - 47$ **R.** $x = 6$, $y = 8$

12. $x(y - 2) - y(x - 3) = -14$; $y(x - 6) - x(y + 9) = 54$ **R.** $x = -2$, $y = -6$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS NUMÉRICOS DE DOS ECUACIONES FRACCIONARIAS CON DOS INCÓGNITAS

1. Resolver el sistema $\begin{cases} x - \dfrac{3x+4}{7} = \dfrac{y+2}{3} \\ 2y - \dfrac{5x+4}{11} = \dfrac{x+24}{2} \end{cases}$

Suprimimos denominadores: $\begin{cases} 21x - 3(3x + 4) = 7(y + 2) \\ 44y - 2(5x + 4) = 11(x + 24) \end{cases}$

Efectuamos operaciones: $\begin{cases} 21x - 9x - 12 = 7y + 14 \\ 44y - 10x - 8 = 11x + 264 \end{cases}$

Transponemos: $\begin{cases} 21x - 9x - 7y = 14 + 12 \\ -10x - 11x + 44y = 264 + 8 \end{cases}$

Reducimos: $\begin{cases} 12x - 7y = 26 \quad (1) \\ -21x + 44y = 272 \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 7 y la segunda por 4:

$$\begin{array}{r} 84x - 49y = 182 \\ -84x + 176y = 1088 \\ \hline 127y = 1270 \\ y = 10 \end{array}$$

Sustituyendo $y = 10$ en (1):

$$12x - 70 = 26$$
$$12x = 96$$
$$x = 8$$

R. $\begin{cases} x = 8 \\ y = 10 \end{cases}$

2. Resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = -\dfrac{2}{7} \\ \dfrac{8x+y-1}{x-y-2} = 2 \end{cases}$

Suprimimos denominadores: $\begin{cases} 7(x + y) = -2(x - y) \\ 8x + y - 1 = 2(x - y - 2) \end{cases}$

Efectuamos operaciones: $\begin{cases} 7x + 7y = -2x + 2y \\ 8x + y - 1 = 2x - 2x - 2y - 4 \end{cases}$

Transponemos: $\begin{cases} 7x + 7y + 2x - 2y = 0 \\ 8x + y - 2x + 2y = -4 + 1 \end{cases}$

Reducimos: $\begin{cases} 9x + 5y = 0 \quad (1) \\ 6x + 3y = -3 \end{cases}$

Dividimos por 3 la segunda ecuación: $\begin{cases} 9x + 5y = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

Multiplicamos por – 5 la segunda ecuación:

$$\begin{array}{r} 9x + 5y = 0 \\ -10x - 5y = 5 \\ \hline -\quad x \quad = 5 \\ x = -5 \end{array}$$

Sustituyendo $x = -5$ en (1):

$$9(-5) + 5y = 0$$
$$-45 + 5y = 0$$
$$5y = 45$$
$$y = 9$$

R. $\begin{cases} x = -5 \\ y = 9 \end{cases}$

EJERCICIOS

Resuelve los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} \frac{3x}{2} + y = 11 \\ x + \frac{y}{2} = 7 \end{cases}$

R. $x = 6$, $y = 2$

2. $\begin{cases} \frac{x}{8} - \frac{y}{5} = -1\frac{1}{10} \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = -1\frac{19}{40} \end{cases}$

R. $x = -8$, $y = \frac{1}{2}$

3. $\begin{cases} \frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0 \\ \frac{x-4}{2} + \frac{y+2}{5} = 3 \end{cases}$

R. $x = 6$, $y = 8$

4. $\begin{cases} \frac{5x}{12} - y = 9 \\ \frac{x-3y}{4} = 15 \end{cases}$

R. $x = 12$, $y = -4$

5. $\begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{8} = 0 \\ \frac{1}{7}x - \frac{3}{4}y = 7 \end{cases}$

R. $x = 7$, $y = -8$

6. $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = -\frac{13}{36} \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y+1}{2} = -\frac{2}{3} \end{cases}$

R. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4}$

7. $\begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5 \\ 3y - \frac{x}{14} = 26 \end{cases}$

R. $x = 14$, $y = 9$

8. $\begin{cases} \frac{2x+1}{5} = \frac{y}{4} \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

R. $x = 2$, $y = 4$

9. $\begin{cases} \frac{x+1}{10} = \frac{y-4}{5} \\ \frac{x-4}{5} = \frac{y-2}{10} \end{cases}$

R. $x = 7$, $y = 8$

10. $\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{4} \\ \frac{y}{3} = \frac{x}{3} - 1 \end{cases}$

R. $x = 15$, $y = 12$

11. $\begin{cases} 12x + 5y + 6 = 0 \\ \frac{5x}{3} - \frac{7y}{6} = -12 \end{cases}$

R. $x = -3$, $y = 6$

12. $\begin{cases} x = -\frac{3y+3}{4} \\ y = -\frac{1+5x}{4} \end{cases}$

R. $x = -9$, $y = 11$

13. $\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ 2x = \frac{5}{2}y \end{cases}$

R. $x = 5$, $y = 4$

14. $\begin{cases} \frac{x}{5} = 3(y+2) \\ \frac{y}{5} + 3x = 44\frac{4}{5} \end{cases}$

R. $x = 15$, $y = -1$

15. $\begin{cases} \frac{x+y}{6} = \frac{x-y}{12} \\ \frac{2x}{3} = y + 3 \end{cases}$

R. $x = 3$, $y = -1$

16. $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = 1 \\ \frac{1}{8}y - \frac{5}{6}x = 2 \end{cases}$

R. $x = -3$, $y = -4$

17. $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{6} = -\frac{1}{30} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{20} = 1\frac{1}{12} \end{cases}$

R. $x = 4$, $y = 5$

18. $\begin{cases} \frac{7}{2x-3y+6} = \frac{7}{3x-2y-1} \\ \frac{6}{x-y+4} = \frac{10}{y+2} \end{cases}$

R. $x = 6$, $y = 10$

19. $\begin{cases} 3x - \frac{y-3}{5} = 6 \\ 3y - \frac{x-2}{7} = 9 \end{cases}$

R. $x = 2$, $y = 3$

20. $\begin{cases} \frac{x+y}{6} - \frac{y-x}{3} = \frac{7}{24} \\ \frac{x}{2} + \frac{x-y}{6} = \frac{5}{12} \end{cases}$

R. $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{2}$

SISTEMAS LITERALES DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Ejemplos

1) Resolver el sistema $\begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 & (1) \\ bx + ay = 2ab & (2) \end{cases}$

Igualamos los coeficientes de la x multiplicando la primera ecuación por b y la segunda por a y tenemos:

$$\begin{cases} abx + b^2y = a^2b + b^3 \\ abx + a^2y = 2a^2b \end{cases}$$

Restamos la segunda ecuación de la primera:

$$\begin{cases} abx + b^2y = a^2b + b^3 \\ -abx - a^2y = -2a^2b \end{cases}$$
$$\overline{b^2y - a^2y = a^2b + b^3 - 2a^2b}$$

Reducimos términos semejantes:

$$b^2y - a^2y = b^3 - a^2b$$

Sacamos el factor común y en el primer miembro y el factor común b en el segundo:

$$y\,(b^2 - a^2) = b\,(b^2 - a^2)$$

Dividimos por $(b^2 - a^2)$ ambos miembros:

$$y = b$$

Sustituyendo $y = b$ en (2) tenemos:

Transponiendo: $\begin{aligned} bx + ab &= 2ab \\ bx &= ab \end{aligned}$ **R.** $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

Dividimos por b

$$x = a$$

2) Resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{b}{a} & (1) \\ x - y = a & (2) \end{cases}$$

Quitando denominadores en (1), nos queda:

$$\begin{cases} bx - ay = b^2 \\ x - y = a \end{cases}$$

Multiplicamos por b la segunda ecuación y cambiamos el signo:

$$\begin{cases} bx - ay = b^2 \\ -bx + by = -ab \end{cases}$$
$$\overline{by - ay = b^2 - ab}$$

Sacamos el factor común y en el primer miembro y b en el segundo:

$$y\,(b - a) = b\,(b - a)$$

Dividimos por $(b - a)$:

$$y = b$$

Sustituyendo en (2) este valor de y tenemos:

$\begin{aligned} x - b &= a \\ x &= a + b \end{aligned}$ **R.** $\begin{cases} x = a + b \\ y = b \end{cases}$

3) Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{a^2 + b^2}{ab} \\ ax - by = 2b \end{cases}$$

Quitando los denominadores:

$$\begin{cases} abx + aby = a^2 + b^2 & (1) \\ ax - by = 2b & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por a y sumamos:

$$\begin{cases} abx + aby = a^2 + b^2 \\ a^2x - aby = 2ab \end{cases}$$
$$\overline{a^2x + abx = a^2 + 2ab + b^2}$$

Factoramos ambos miembros: $ax\,(a + b) = (a + b)^2$

Dividimos por $(a + b)$: $ax = a + b$

$$x = \frac{a + b}{a}$$

Este valor de x se puede sustituir en cualquier ecuación para encontrar y, aunque aquí vamos a hallar y eliminando la x, para lo cual tomamos otra vez el sistema (1) y (2):

$$\begin{cases} abx + aby = a^2 + b^2 & (1) \\ ax - by = 2b & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos (2) por b, y cambiándole el signo:

$$\begin{aligned} abx + aby &= a^2 + b^2 \\ -abx + b^2y &= -2b^2 \end{aligned}$$
$$\overline{aby + b^2y = a^2 - b^2}$$

Factoramos ambos miembros: $by\,(a + b) = (a + b)(a - b)$

$\begin{aligned} by &= a - b \\ y &= \frac{a - b}{b} \end{aligned}$ **R.** $\begin{aligned} x &= \frac{a + b}{a} \\ y &= \frac{a - b}{b} \end{aligned}$

Este sistema de hallar la segunda incógnita eliminando la primera en muchos casos resulta más sencillo que el de sustituir.

EJERCICIOS

Resuelve los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x + y = a + b \\ x - y = a - b \end{cases}$

R. $x = a$, $y = b$

2. $\begin{cases} ax - by = 0 \\ x + y = \dfrac{a+b}{ab} \end{cases}$

R. $x = \dfrac{1}{a}$, $y = \dfrac{1}{b}$

3. $\begin{cases} ax - by = 0 \\ ay - bx = \dfrac{a^2 - b^2}{ab} \end{cases}$

R. $x = \dfrac{1}{a}$, $y = \dfrac{1}{b}$

4. $\begin{cases} 2x + y = b + 2 \\ bx - y = 0 \end{cases}$

R. $x = 1$, $y = b$

5. $\begin{cases} mx - ny = m^2 + n^2 \\ nx + my = m^2 + n^2 \end{cases}$

R. $x = m + n$, $y = m - n$

6. $\begin{cases} \dfrac{x}{b^2} + \dfrac{y}{a^2} = a + b \\ x - y = ab(b - a) \end{cases}$

R. $x = ab^2$, $y = a^2b$

7. $\begin{cases} 2x - y = 3a \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

R. $x = 2a$, $y = a$

8. $\begin{cases} \dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 2m \\ mx - ny = m^3 - mn^2 \end{cases}$

R. $x = m^2$, $y = mn$

9. $\begin{cases} nx + my = m + n \\ mx - ny = \dfrac{m^3 - n^3}{mn} \end{cases}$

R. $x = \dfrac{m}{n}$, $y = \dfrac{n}{m}$

10. $\begin{cases} x - y = 1 - a \\ x + y = 1 + a \end{cases}$

R. $x = 1$, $y = a$

11. $\begin{cases} x + y = a \\ ax - by = a(a + b) + b^2 \end{cases}$

R. $x = a + b$, $y = -b$

ECUACIONES SIMULTÁNEAS CON INCÓGNITAS EN LOS DENOMINADORES

En ciertos casos, cuando las incógnitas están en los denominadores, el sistema puede resolverse por un método especial donde no se suprimen los denominadores, como en los dos ejemplos siguientes:

Ejemplos

1) Resolver el sistema

$$\frac{10}{x} + \frac{9}{y} = 2 \qquad (1)$$
$$\frac{7}{x} - \frac{6}{y} = \frac{11}{2} \qquad (2)$$

Eliminamos la y multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por 3, y tenemos:

$$\frac{20}{x} + \frac{18}{y} = 4$$
$$\frac{21}{x} - \frac{18}{y} = \frac{33}{2}$$

Sumamos: $\dfrac{41}{x} = \dfrac{41}{2}$

Quitamos denominadores:

$82 = 41x$

$x = \dfrac{82}{41} = 2$

Sustituyendo $x = 2$ en (1):

$\dfrac{10}{2} + \dfrac{9}{y} = 2$

$10y + 18 = 4y$

$6y = -18$

$y = -3$

R. $x = 2$, $y = -3$

2) Resolver el sistema

$$\frac{2}{x} + \frac{7}{3y} = 11 \qquad (1)$$
$$\frac{3}{4x} + \frac{5}{2y} = 9 \qquad (2)$$

Eliminamos la x multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 2:

$$\frac{6}{4x} + \frac{21}{12y} = \frac{33}{4}$$
$$\frac{6}{4x} + \frac{10}{2y} = 18$$

Simplificamos y restamos:

$$\frac{3}{2x} + \frac{7}{4y} = \frac{33}{4}$$
$$-\frac{3}{2x} - \frac{5}{y} = -18$$
$$-\frac{13}{4y} = -\frac{39}{4}$$

o sea $\dfrac{13}{4y} = \dfrac{39}{4}$

Quitamos denominadores:
$13 = 39y$

$y = \dfrac{13}{39} = \dfrac{1}{3}$

Sustituyendo $y = \dfrac{1}{3}$ en (1)

$\dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{3\left(\frac{1}{3}\right)} = 11$

$\dfrac{2}{x} + 7 = 11$

$2 + 7x = 11x$

$2 = 4x$

$x = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

R. $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{3}$

EJERCICIOS

Resuelve los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{7}{6} \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3} \end{cases}$ **R.** x = 2 , y = 3

2. $\begin{cases} \frac{5}{x}+\frac{4}{y}=7 \\ \frac{7}{x}-\frac{6}{y}=4 \end{cases}$ **R.** x = 1 , y = 2

3. $\begin{cases} \frac{9}{x}+\frac{3}{y}=27 \\ \frac{5}{x}+\frac{4}{y}=22 \end{cases}$ **R.** $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$

4. $\begin{cases} \frac{9}{x}+\frac{10}{y}=-11 \\ \frac{7}{x}-\frac{15}{y}=-4 \end{cases}$ **R.** x = -1 , y = -5

5. $\begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=\frac{1}{2} \\ \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{23}{12} \end{cases}$ **R.** x = 3 , y = 4

6. $\begin{cases} \frac{12}{x}+\frac{5}{y}=-\frac{13}{2} \\ \frac{18}{x}+\frac{7}{y}=-\frac{19}{2} \end{cases}$ **R.** x = -3 ,y = -2

7. $\begin{cases} \frac{6}{x}-\frac{8}{y}=-23 \\ \frac{4}{x}+\frac{11}{y}=50 \end{cases}$ **R.** $x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{4}$

8. $\begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{7}{3y}=\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4x}+\frac{8}{y}=\frac{103}{84} \end{cases}$ **R.** $x=3$, $y=7$

9. $\begin{cases} \frac{3}{10x}+\frac{1}{3y}=1\frac{47}{60} \\ \frac{6}{5x}+\frac{1}{4y}=2\frac{4}{5} \end{cases}$ **R.** $x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{4}$

10. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=b \end{cases}$ **R.** $x=\frac{2}{a+b}, y=\frac{2}{a-b}$

11. $\begin{cases} \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2 \\ \frac{2}{x}-\frac{3b}{y}=\frac{2-3a}{a} \end{cases}$ **R.** $x=a$, $y=b$

12. $\begin{cases} \frac{1}{2x}-\frac{3}{y}=\frac{3}{4} \\ \frac{1}{x}+\frac{5}{2y}=-\frac{4}{3} \end{cases}$ **R.** x = -2 , y = -3

13. $\begin{cases} \frac{2}{5x}-\frac{1}{3y}=-\frac{11}{45} \\ \frac{1}{10x}-\frac{3}{5y}=\frac{4}{5} \end{cases}$ **R.** $x=-\frac{1}{2}, y=-\frac{3}{5}$

14. $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{m+n}{mn} \\ \frac{m}{x}-\frac{n}{y}=0 \end{cases}$ **R.** $x=2m$, $y=2n$

DETERMINANTE

Si del producto *ab* restamos el producto *cd* , obtendremos la expresión *ab* – *cd*, que puede escribirse con la siguiente notación:

$$ab-cd=\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$$

En este caso la expresión $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$ es una **determinante**.

En una determinante las columnas están constituidas por las cantidades ubicadas en una misma línea **vertical**. En el ejemplo anterior $\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}$ es la primera columna y $\begin{matrix} d \\ b \end{matrix}$ la segunda.

Las filas se forman por las cantidades ubicadas en una misma línea **horizontal.** En el ejemplo, *a d* es la primera fila y *c b* la segunda.

Por otra parte, una determinante es **cuadrada** cuando tiene el mismo número de columnas que de filas. Así, $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$ es una determinante cuadrada, porque tiene dos columnas y dos filas.

El **orden** de una determinante cuadrada lo da el número de elementos de cada fila o columna. Por ejem. $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ son determinantes de **segundo** orden.

En la determinante $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$ la línea que une *a* con *b* es la **diagonal principal**, y la línea que une *c* con *d* es la **diagonal secundaria**.

Los **elementos** de esta determinante son los productos *ab* y *cd* , a cuya diferencia equivale esta determinante.

Una determinante de segundo orden equivale al producto de los términos que pertenecen a la diagonal principal, **menos** el producto de los términos de la diagonal secundaria.

Ejemplos

1) $\begin{vmatrix} a & n \\ m & b \end{vmatrix}=ab-m$

2) $\begin{vmatrix} a & -n \\ m & b \end{vmatrix}=ab-m(-n)=ab+mn$

3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=3\times4-5\times2=12-10=2$

4) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3(-2)-1(-5)=-6+5=-1$

5) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}=$

$=(-2)(-9)-(-5)(-3)=$
$=18-15=3$

EJERCICIOS

Desarrolla las siguientes determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ **R.** 2

2. $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ **R.** – 59

3. $\begin{vmatrix} -15 & -1 \\ 13 & 2 \end{vmatrix}$ **R.** – 17

4. $\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -19 & -21 \end{vmatrix}$ **R.** – 47

5. $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ **R.** – 11

6. $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -8 \end{vmatrix}$ **R.** – 46

7. $\begin{vmatrix} 12 & -1 \\ 13 & -9 \end{vmatrix}$ **R.** – 95

8. $\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$ **R.** 6

9. $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ **R.** – 26

10. $\begin{vmatrix} 9 & -11 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$ **R.** 30

11. $\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 17 & 13 \end{vmatrix}$ **R.** 79

12. $\begin{vmatrix} 31 & -85 \\ -20 & 43 \end{vmatrix}$ **R.** – 367

RESOLUCIÓN POR DETERMINANTES DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Siendo el sistema

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (1)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (2)$$

Si lo resolvemos por el método general ya estudiado tendremos:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (3) \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (4)$$

Nótese que ambas fracciones **tienen el mismo denominador** $a_1b_2 - a_2b_1$ y esta expresión es el desarrollo de la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (5)$$

formada con los **coeficientes de las incógnitas** en las ecuaciones (1) y (2). Esta es la **determinante del sistema**.

El numerador de x, $c_1b_2 - c_2b_1$, es el desarrollo de la determinante

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

que se obtiene de la determinante del sistema (5) con sólo **sustituir** en ella la columna de los coeficientes de x $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$ por la columna de los términos independientes $\begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}$ de las ecuaciones (1) y (2).

El **numerador** de y, $a_1c_2 - a_2c_1$, es el desarrollo de la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

que se obtiene de la determinante del sistema (5) con sólo **sustituir**, en ella la columna de los coeficientes de y $\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$ por la columna de los términos independientes $\begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}$ de las ecuaciones dadas.

Por tanto, los valores de x e y, igualdades (3) y (4), pueden escribirse así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Con lo anterior podemos decir que para **resolver** un sistema de **dos ecuaciones con dos incógnitas** por determinantes debe considerarse lo siguiente:

1) El valor de x es una fracción cuyo denominador es la determinante formada con los coeficientes de x e y (determinante del sistema) y cuyo numerador es la determinante obtenida al sustituir en la determinante del sistema la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes de las ecuaciones dadas.

2) El valor de *y* es una fracción cuyo denominador es la determinante del sistema y cuyo numerador es la determinante obtenida al sustituir en la determinante del sistema la columna de los coeficientes de *y* por la columna de los términos independientes de las ecuaciones dadas.

Ejemplos

1) Resolver por determinantes $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ 4x + 7y = 27 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 27 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{35-81}{35-12} = \frac{-46}{23} = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{135-20}{23} = \frac{115}{23} = 5 \qquad \textbf{R.} \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

2) Resolver por determinantes $\begin{cases} 9x + 8y = 12 \\ 24x - 60y = -29 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 8 \\ -29 & -60 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 24 & -60 \end{vmatrix}} = \frac{-720+232}{-540-192} = \frac{-488}{-732} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 24 & -29 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 24 & -60 \end{vmatrix}} = \frac{-261-288}{-732} = \frac{-549}{-732} = \frac{3}{4} \qquad \textbf{R.} \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

3) Resolver por determinantes $\begin{cases} \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{7} \\ \frac{x+4}{3} - \frac{y-9}{6} = \frac{8}{3} \end{cases}$

Quitamos denominadores: $\begin{cases} 7x + 7 = 5y - 10 \\ 2x + 8 - y + 9 = 16 \end{cases}$

Transponemos y reducimos: $7x - 5y = -17$
$2x - y = -1$

Tendremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -17 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{17-5}{-7+10} = \frac{12}{3} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -17 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-7+34}{3} = \frac{27}{3} = 9 \qquad \textbf{R.} \begin{cases} X = 4 \\ Y = 9 \end{cases}$$

EJERCICIOS

Resuelve por determinantes:

1. $\begin{cases} 7x + 8y = 29 \\ 5x + 11y = 26 \end{cases}$

R. $x = 3$, $y = 1$

2. $\begin{cases} 2x - \frac{2y+3}{17} = y + 2 \\ 3y - \frac{4+1}{21} = 3x + 5 \end{cases}$

R. $x = 5$, $y = 7$

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 8x - 5y = -5 \end{cases}$

R. $x = -5$, $y = -7$

4. $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = -4 \\ \frac{x}{8} - \frac{y}{12} = 0 \end{cases}$

R. $x = -8$, $y = -12$

5. $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 4 \\ \frac{x-y-1}{x+y+1} = \frac{1}{9} \end{cases}$

R. $x = 5$, $y = 3$

6. $\begin{cases} 13x - 31y = -326 \\ 25x + 37y = 146 \end{cases}$

R. $x = -6$, $y = 8$

7. $\begin{cases} x - y = 2b \\ \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2 \end{cases}$

R. $x = a + b$, $y = a - b$

8. $\begin{cases} 3x - (y+2) = 2y + 1 \\ 5y - (x+3) = 3x + 1 \end{cases}$

R. $x = 9$, $y = 8$

9. $\begin{cases} \frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{8} = \frac{5}{6} \\ \frac{y-5}{6} - \frac{2x-3}{5} = 0 \end{cases}$

R. $x = -1$, $y = -1$

RESOLUCIÓN GRÁFICA DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Si una recta pasa por un punto, las coordenadas de este punto **satisfacen** la ecuación de la recta. Para saber si la recta $2x + 5y = 19$ pasa por el punto (2, 3), hacemos $x = 2$, $y = 3$ en la ecuación de la recta y tenemos:

$$2(2) + 5(3) = 19, \text{ o sea, } 19 = 19;$$

por tanto la recta $2x + 5y = 19$ pasa por el punto (2, 3).

De manera recíproca si las **coordenadas** de un punto **satisfacen** la ecuación de una **recta**, dicho punto pertenece a la recta.

Siendo el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$

Al resolver este sistema se encuentra $x = 3$, $y = 4$, valores que satisfacen **ambas** ecuaciones.

Esta solución $x = 3$, $y = 4$ representa en el plano el punto (3, 4).

Ahora bien, $x = 3$, $y = 4$ satisfacen la ecuación $2x + 3y = 18$; luego, el punto (3, 4) pertenece a la recta que representa esta ecuación, y como $x = 3$, $y = 4$ satisfacen también la ecuación $3x + 4y = 25$, el punto (3, 4) pertenece a **ambas** rectas; por tanto, necesariamente el punto (3, 4) es la **intersección** de las dos rectas.

La solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas representa las **coordenadas del punto de intersección** de las dos rectas que representan las ecuaciones; por lo tanto, para resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas hay que localizar el **punto de intersección** de las dos rectas.

Ejemplos

1) Resolver gráficamente el sistema $\begin{cases} x + y = 6 \\ 5x - 4y = 12 \end{cases}$

Hay que hallar la intersección de estas dos rectas. Representemos ambas ecuaciones. (Fig. 58).

En $x + y = 6$, tenemos: En $5x - 4y = 12$, tenemos:

Para $x = 0$, $y = 6$ Para $x = 0$, $y = -3$

$y = 0$, $x = 6$ $y = 0$, $x = 2\frac{2}{3}$

La intersección es el punto (4, 2), por tanto la solución del sistema es $x = 4$, $y = 2$

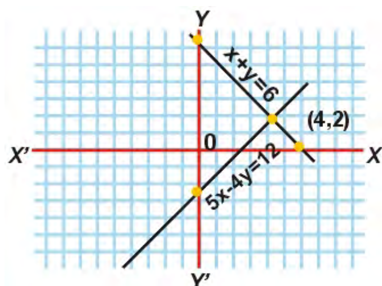
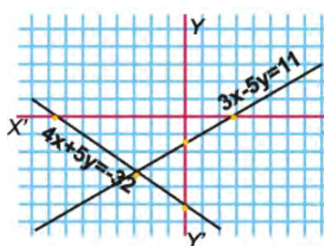


Figura 58

2) Resolver gráficamente el sistema $4x + 5y = -32$ $3x - 5y = 11$

Buscamos la intersección de estas rectas (Fig. 59).

En $4x + 5y = -32$, tenemos:



Para $x = 0$, $y = -6\frac{2}{3}$

$y = 0$, $x = -8$

En $3x - 5y = 11$, tenemos:

Para $x = 0$, $y = -2$ 1

$y = 0$, $x = 3$ 2

Figura 59

El punto de intersección es (- 3, - 4), por tanto la solución del sistema es $x = -3$, $y = -4$

3) Resolver gráficamente $x - 2y = 6$

$2x - 4y = 5$

Representamos ambas ecuaciones (Figura 60).

En $x - 2y = 6$ tenemos: En $2x - 4y = 5$ tenemos:

Para $x = 0$, $y = -3$ Para $x = 0$, $y = -1\frac{1}{4}$

$y = 0$, $x = 6$ $y = 0$, $x = 2\frac{1}{2}$ 1

Las líneas son paralelas, no hay puntos de intersección, por tanto el sistema no tiene solución; esto es, las ecuaciones son incompatibles.

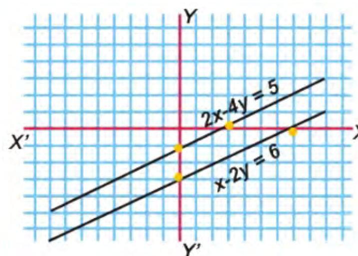


Figura 60

4) Resolver gráficamente $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 10 \end{cases}$

Representamos ambas ecuaciones (Figura 61).
En $x - 2y = 5$, tenemos: En $2x - 4y = 10$, tenemos:

Para $x = 0$, $y = -2\frac{1}{2}$ Para $x = 0$, $y = -2\frac{1}{2}$

$y = 0$, $x = 5$ $y = 0$, $x = 5$

Aquí vemos que ambas rectas coinciden y tienen infinitos puntos comunes. Las dos ecuaciones representan la misma línea, por lo tanto son equivalentes.

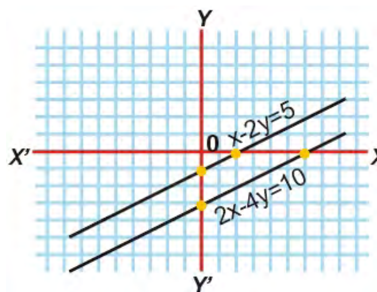


Figura 61

EJERCICIOS

Resuelve gráficamente:

1. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$ **R.** $x = 4$, $y = 3$

2. $\begin{cases} 3x = -4y \\ 5x - 6y = 38 \end{cases}$ **R.** $x = 4$, $y = -3$

3. $\begin{cases} x + 8 = y + 2 \\ y - 4 = x + 2 \end{cases}$ **R.** Equivalentes

4. $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 3x + 9y = 10 \end{cases}$ **R.** Incompatibles

5 $\begin{cases} x - 2y = 10 \\ 2x + 3y = -8 \end{cases}$ **R.** $x = 2$, $y = -4$

6 $\begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ **R.** $x = 1$, $y = 3$

7. $\begin{cases} \dfrac{3x}{5} + \dfrac{y}{4} = 2 \\ x - 5y = 25 \end{cases}$ **R.** $x = 5$, $y = -4$

8. $\begin{cases} 2x + 3y = -13 \\ 6x + 9y = -39 \end{cases}$ **R.** Equivalentes

9. $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 7x - y = -16 \end{cases}$ **R.** $x = -3$, $y = -5$

10. $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$ **R.** $x = 4$, $y = -2$

11. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = -\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = -\dfrac{7}{12} \end{cases}$ **R.** $x = -1$, $y = -1$

12. $\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{y-3}{3} = 4 \\ \dfrac{y-2}{2} + \dfrac{x-3}{3} = -6 \end{cases}$ **R.** $x = 4$, $y = -6$

Encuentra gráficamente el par de valores de x e y que satisfacen cada uno de los siguientes grupos de ecuaciones:

13. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 4y = 18 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$ **R.** $x = 2$, $y = 3$

14. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = -13 \\ 3x - 2y = -19 \end{cases}$ **R.** $x = -3$, $y = 5$

15. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2y - x = -4 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$ **R.** $x = -2$, $y = -3$

16. $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -1 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$ **R.** $x = 4$, $y = 5$



Leonard Euler, matemático suizo, fue alumno de Johannes Bernoulli. Durante 12 años ganó el premio que anualmente ofrecía la Academia de París sobre temas científicos. Por su "Tratado sobre Mecánica" puede considerarse el fundador de la ciencia moderna.

CAPÍTULO XXVI

ECUACIONES SIMULTÁNEAS CON TRES O MÁS INCÓGNITAS

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas procede lo siguiente:

1) Se combinan dos de las ecuaciones dadas y se elimina una de las incógnitas (lo más sencillo es eliminarla por suma o resta) y con esto se obtiene una ecuación con dos incógnitas.

2) Se combina la tercera ecuación con otra de las ecuaciones dadas y se elimina entre ellas la misma incógnita que se eliminó antes, obteniéndose otra ecuación con dos incógnitas.

3) Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones con dos incógnitas que se han obtenido, hallando de este modo dos de las incógnitas.

4) Los valores obtenidos de las incógnitas se sustituyen en una de las ecuaciones dadas de tres incógnitas, con lo cual se encuentra la tercera incógnita.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS

Ejemplos

1) Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 4y - z = 6 & (1) \\ 2x + 5y - 7z = -9 & (2) \\ 3x - 2y + z = 2 & (3) \end{cases}$$

Combinamos las ecuaciones (1) y (2) y eliminamos la x. Multiplicamos la ecuación (1) por 2 y tenemos:

$$\begin{cases} 2x + 8y - 2z = 12 \\ -2x - 5y + 7z = 9 \end{cases}$$

Resta $3y + 5z = 21$ (4)

Combinamos la tercera ecuación (3) con cualquiera de las otras dos ecuaciones da-das, en este caso con (1), para eliminar la x. Multiplicando (1) por 3 tenemos:

$$\begin{cases} 3x + 12y - 3z = 18 \\ -3x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

Restando: $14y - 4z = 16$

Dividiendo entre 2:

$7y - 2z = 8$ (5)

En seguida tomamos las dos ecuaciones con dos incógnitas obtenidas: (4) y (5), y formamos un sistema:

$3y + 5z = 21$ (4)
$7y - 2z = 8$ (5)

Resolvemos este sistema eliminando la z al multiplicar (4) por 2 y (5) por 5:

$6y + 10z = 42$
$35y - 10z = 40$
$41y = 82$
$y = 2$

Sustituyendo $y = 2$ en (5) tenemos:

$7(2) - 2z = 8$
$14 - 2z = 8$
$-2z = -6$
$z = 3$

Sustituyendo $y = 2$, $z = 3$ en cualquiera de las tres ecuaciones dadas, por ejemplo en (1), tenemos:

$x + 4(2) - 3 = 6$ $\quad x = 1$

$x + 8 - 3 = 6$ $\quad$ **R.** $y = 2$

$x = 1$ $\quad z = 3$

Para verificar esto, los valores $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ tienen que satisfacer las tres ecuaciones dadas.

Al hacer la sustitución se verá que las tres ecuaciones dadas se convierten en identidad.

2) Resolver el sistema

$$\begin{cases} z - 4 + \dfrac{6x - 19}{5} = -y \\ 10 - \dfrac{x - 2z}{8} = 2y - 1 \\ 4z + 3y = 3x - y \end{cases}$$

Quitamos denominadores

$$\begin{cases} 5z - 20 + 6x - 19 = -5y \\ 80 - x + 2z = 16y - 8 \\ 4z + 3y = 3x - y \end{cases}$$

Transponemos y reducimos:

$$\begin{cases} 6x + 5y + 5z = 39 & (1) \\ -\ x - 16y + 2z = -88 & (2) \\ -3x + 4y + 4z = 0 & (3) \end{cases}$$

Eliminamos x combinando (1) y (2) y multiplicamos (2) por 6:

$6x + 5y + 5z = 39$
$-6x - 96y + 12z = -528$

Sumando: $-91y + 17z = -489$ (4)

Combinamos (2) y (3). Multiplicamos (2) por 3 y le cambiamos el signo:

$$\begin{cases} 3x + 48y - 6z = 264 \\ -3x + 4y + 4z = 0 \end{cases}$$

$52y - 2z = 264$

Dividimos por 2:

$26y - z = 132$ (5)

Combinamos (4) y (5):

$$\begin{cases} -91y + 17z = -489 & (4) \\ 26y - z = 132 & (5) \end{cases}$$

Multiplicamos (4) por 2 y (5) por 7:

$$\begin{cases} -182y + 34z = -978 \\ 182y - 7z = 924 \end{cases}$$

Sumando: $27z = -54$

$z = -2$

Sustituyendo $z = -2$ en (5):

$26y - (-2) = 132$
$26y + 2 = 132$
$26y = 130$
$y = 5$

Sustituyendo y = 5, z = - 2en (3):

$-3x + 4(5) + 4(-2) = 0$
$-3x + 20 - 8 = 0$ $\quad x = 4$
$-3x = -12$ $\quad$ **R.** $y = 5$
$x = 4$ $\quad z = -2$

3) Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y = 13 & (1) \\ 4y + z = -8 & (2) \\ x - y - z = -2 & (3) \end{cases}$$

En algunos casos no hay reglas fijas para resolver el sistema y depende de la habilidad del estudiante encontrar el modo más fácil de resolverlo. Este ejemplo puede resolverse así:

La ecuación (1) tiene x e y. Entonces buscamos otra ecuación de dos incógnitas que tenga x e y para formar con (1) un sistema de dos ecuaciones y que ambas tengan x e y.

Reunimos (2) y (3):

$$\begin{cases} 4y + z = -8 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

Sumando: $x + 3y = -10$ (4)

Ya tenemos la ecuación buscada. Ahora formamos un sistema con (1) y (4) :

$$\begin{cases} 2x - 5y = 13 \\ x + 3y = -10 \end{cases}$$

Multiplicando esta última ecuación por 2 y restamos:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 13 \\ -2x - 6y = 20 \end{cases}$$

$-11y = 33$
$y = -3$

Sustituyendo $y = -3$ en (1):

$2x - 5(-3) = 13$
$2x + 15 = 13$
$2x = -2$
$x = -1$

Sustituyendo $x = -1$, $y = -3$ en (3) :

$-1 - (-3) - z = -2$
$-1 + 3 - z = -2$
$-z = -4$
$z = 4$

$x = -1$
R. $y = -3$
$z = 4$

EJERCICIOS

Resuelve los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 6x - 2y - z = -14 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$ **R.** $x = -2,\ y = 3,\ z = -4$

2. $\begin{cases} 9x + 4y - 10z = 6 \\ 6x - 8y + 5z = -1 \\ 12x + 12y - 15z = 10 \end{cases}$ **R.** $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{4}, z = -\frac{1}{5}$

3. $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$ **R.** $x = 3,\ y = 4,\ z = 5$

4. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = -4 \end{cases}$ **R.** $x = -1,\ y = 1,\ z = 4$

5. $\begin{cases} 2x + y - 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = -12 \\ 3x - 2y - z = -5 \end{cases}$ **R.** $x = 1,\ y = 3,\ z = 2$

6. $\begin{cases} 5x + 3y - z = -11 \\ 10x - y + z = 10 \\ 15x + 2y - z = -7 \end{cases}$ **R.** $x = \frac{1}{5}, y = -2, z = 6$

7. $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -1 \\ z + x = -6 \end{cases}$ **R.** $x = -2,\ y = 3,\ z = -4$

8. $\begin{cases} 2x - z = 14 \\ 4x + y - z = 41 \\ 3x - y + 5z = 53 \end{cases}$ **R.** $x = 10,\ y = 7,\ z = 6$

9. $\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 3 \\ 10x - 8y - 9z = 0 \\ 4x + 4y - 3z = 2 \end{cases}$ **R.** $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{3}$

10. $\begin{cases} 5x - 2y + z = 24 \\ 2x + 5y - 2z = -14 \\ x - 4y + 3z = 26 \end{cases}$ **R.** $x = 3,\ y = -2,\ z = 5$

11. $\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 8 \\ 3x + 4y + 2z = -1 \\ 2x - y + 5z = 3 \end{cases}$ **R.** $x = 5,\ y = -3,\ z = -2$

12. $\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 12 \\ 9x - y + 4z = 37 \\ 10x + 5y + 3z = 21 \end{cases}$ **R.** $x = 5,\ y = -4,\ z = -3$

13. $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2y + z = 0 \\ x + 2z = 11 \end{cases}$ **R.** $x = 3$, $y = -2,\ z = 4$

14. $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 3y - 4z = 25 \\ z - 5x = -14 \end{cases}$ **R.** $x = 2,\ y = 3,\ z = -4$

15. $\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = -17 \end{cases}$ **R.** $x = 5,\ y = -6,\ z = -8$

16. $\begin{cases} 7x + 3y - 4z = -35 \\ 3x - 2y + 5z = 38 \\ x + y - 6z = -27 \end{cases}$ **R.** $x = 1,\ y = -10,\ z = 3$

17. $\begin{cases} 4x - \ \ y + 5z = -6 \\ 3x + 3y - 4z = 30 \\ 6x + 2y - 3z = 33 \end{cases}$ **R.** $x = 3,\ y = 3,\ z = -3$

18. $\begin{cases} 3z - 5x = 10 \\ 5x - 3y = -7 \\ 3y - 5z = -13 \end{cases}$ **R.** $x = 1,\ y = 4,\ z = 5$

19. $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z = 5 \\ x + y + z = 8 \end{cases}$ **R.** $x = 6,\ y = 3,\ z = -1$

20. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 3 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{6} - \frac{z}{2} = -5 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 0 \end{cases}$ **R.** $x = 6,\ y = 12,\ z = 18$

21. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 21 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{6} - \frac{z}{3} = 0 \\ \frac{x}{10} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6} = 3 \end{cases}$ **R.** $x = 30,\ y = 12,\ z = 24$

Empleo de las determinantes en la resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

Determinante de tercer orden

Una determinante como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

que consta de tres filas y tres columnas, es de tercer orden.

HALLAR EL VALOR DE UNA DETERMINANTE DE TERCER ORDEN

El método más sencillo para encontrar el valor de una determinante de tercer orden consiste en aplicar la **Regla de Sarrus**. Explicaremos esta sencilla regla práctica con dos ejemplos.

1) Resolver por la Regla de Sarrus.

1	- 2	- 3
- 4	2	1
5	- 1	3

Debajo de la tercera fila horizontal se repiten las dos primeras filas horizontales con lo que tenemos:

1	- 2	- 3
- 4	2	1
5	- 1	3
1	- 2	- 3
- 4	2	1

Ahora trazamos 3 diagonales de derecha a izquierda y 3 de izquierda a derecha, como se indica:

1	-2	-3
-4	2	1
5	-1	3
1	-2	-3
4	2	1

En seguida se multiplican entre sí los tres números por los que pasa cada diagonal.

Los productos de los números que están en las diagonales trazadas de **izquierda a derecha** se escriben con **su propio signo,** y los de **derecha a izquierda** con el **signo cambiado**. En este caso tenemos.

6 - 12 - 10 + 30 + 1- 24 = - 9

que es el valor de la determinante dada.

Detalle de los productos

De izquierda a derecha:

1 × 2 × 3 = 6   (- 4) × (- 1) × (- 3) = - 12   5 × (- 2) × 1 = - 10

De derecha a izquierda:

(- 3) × 2 × 5 = - 30 cambiándole el signo + 30
1 × (- 1) × 1 = - 1 cambiándole el signo + 1
3 × (- 2) × (- 4) = 24 cambiándole el signo - 24

2) Resolver por la Regla de Sarrus

- 3 -	6	1
4	1	- 3
5	8	7

Aplicando el procedimiento ya explicado tendremos:

-3	-6	1
4	1	-3
5	8	7
-3	-6	1
4	1	-3

- 21 + 32 + 90 - 5 - 72 + 168 = 192

EJERCICIOS

Encuentra el valor de las siguientes determinantes:

1.	- 9	3	- 4	
	. 7	- 5	- 3	**R.** – 422
	4	6	1	
2.	11	- 5	7	
	- 12	3	8	**R.** 378
	- 13	1	9	
3.	1	2	1	
	1	3	4	**R.** 7
	1	0	2	
4.	1	2	- 2	
	1	- 3	3	**R.** – 45
	- 1	4	5	
5.	- 3	4	1	
	2	- 3	0	**R.** 14
	1	2	7	
6.	2	5	- 1	
	3	- 4	3	**R.** – 44
	6	2	4	
7.	5	- 1	- 6	
	- 2	5	3	**R.** 115
	3	4	2	
8.	4	1	5	
	3	2	- 6	**R.** – 65
	12	3	2	

RESOLUCIÓN POR DETERMINANTES DE UN SISTEMA DE TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS

Por otra parte, para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por determinantes aplicamos la **Regla de Kramer**, que dice:

El valor de cada incógnita es una fracción cuyo denominador es la determinante formada con los coeficientes de las incógnitas (determinante del sistema) y cuyo numerador es la determinante que se obtiene sustituyendo en la determinante del sistema la columna de los coeficientes de la incógnita que se halla por la columna de los términos independientes de las ecuaciones dadas.

Ejemplos

1) Resolver por determinantes

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = -5 \\ 3x + 4y + 7z = 10 \end{cases}$$

Para hallar x aplicando la Regla de Kramer tendremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 5 \\ 10 & 4 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-69}{-23} = 3$$

Aquí vemos que la determinante del denominador (determinante del sistema) está formada con los coeficientes de las incógnitas en las ecuaciones dadas.

El numerador de x se forma sustituyendo en la determinante del sistema

la columna $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$ de los coeficientes de x por la columna $\begin{matrix} 4 \\ -5 \\ 10 \end{matrix}$ de los términos in dependientes de las ecuaciones dadas.

Para encontrar y tendremos:

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-46}{-23} = 2$$

El denominador es el mismo de antes, la determinante del sistema. El numerador

se obtiene sustituyendo la columna $\begin{matrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{matrix}$ de los coeficientes de y por la columna $\begin{matrix} 4 \\ -5 \\ 10 \end{matrix}$ de los términos independientes.

Para encontrar z tendremos:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{23}{-23} = -1$$

El denominador es la determinante del sistema; el numerador se obtiene sustituyendo la columna $\begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{matrix}$ de los coeficientes de z por la columna $\begin{matrix} 4 \\ -5 \\ 10 \end{matrix}$ de los términos independientes.

La solución del sistema es $\begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{matrix}$

2) Resolver por determinantes

$$\begin{matrix} 2x + y - 3z = 12 \\ 5x - 4y + 7z = 27 \\ 10x + 3y - z = 40 \end{matrix}$$

Tendremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & -3 \\ 27 & -4 & 7 \\ 40 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 10 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-620}{-124} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & -3 \\ 5 & 27 & 7 \\ 10 & 40 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 10 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{496}{-124} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 5 & -4 & 27 \\ 10 & 3 & 40 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \\ 10 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{248}{-124} = -2$$

R. $\begin{matrix} x = 5 \\ y = -4 \\ z = -2 \end{matrix}$

EJERCICIOS

Resuelve por determinantes:

1. $x + y + z = 11$; $x - y + 3z = 13$; $2x + 2y - z = 7$
R. $x = 2$, $y = 4$, $z = 5$

2. $x + y + z = -6$; $2x + y - z = -1$; $x - 2y + 3z = 6$
R. $x = -1$, $y = -2$, $z = -3$

3. $x + 4y + 5z = 11$; $3x - 2y + z = 5$; $4x + y - 3z = -26$
R. $x = -2$, $y = -3$, $z = 5$

4. $7x + 10y + 4z = -2$; $5x - 2y + 6z = 38$; $3x + y - z = 21$
R. $x = 8$, $y = -5$, $z = -2$

5. $4x - 7y + 5z = -2$; $6x + 3y + 7z = 6$; $x - y + 9z = -21$
R. $x = 5$, $y = -1$, $z = -3$

6. $3x - 5y + 2z = -22$; $2x - y + 6z = 32$; $8x + 3y - 5z = -33$
R. $x = -2$, $y = 6$, $z = 7$

7. $3x - 2y = -1$; $4x + z = -28$; $x + 2y + 3z = -43$
R. $x = -5$, $y = -7$, $z = -8$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE PUNTOS DEL ESPACIO Y PLANOS

Ejes coordenados en el espacio

Si por un punto del espacio *O* trazamos tres ejes *OX, OY, OZ,* de modo que cada eje sea perpendicular a los otros dos, tenemos un sistema **de ejes coordenados rectangulares** en el espacio. Si los ejes no son perpendiculares entre sí, tenemos un sistema de ejes coordenados **oblicuos**. El punto 0 se llama origen.

Cada dos de estos ejes **determinan un plano**, de modo que los ejes *OX* y *OY* determinan el plano *XY* ; los ejes *OY* y *OZ* determinan el plano *YZ* , y los ejes *OZ* y *OX* determinan el plano *ZX* , y son los **planos coordenados.**

Estos tres planos, cada uno perpendicular a los otros dos, forman un **triedro trirrectángulo**.

Cuando los ejes están dispuestos como se indica en la figura 62, se dice que el triedro trirrectángulo es **inverso**. Si el eje *OX* ocupara la posición del eje *OY* y viceversa, el triedro sería **directo**. Nosotros trabajaremos con el triedro inverso.

Para aclarar los conceptos anteriores, se sugiere al estudiante que se fije en el ángulo de la izquierda de su salón de clase. El **suelo** es el plano *XY* ; la pared a la izquierda del alumno es el plano *YZ* ; la pared que le queda enfrente es el plano *ZX* . El eje *OX* es la intersección de la pared de enfrente con el suelo; el eje *OY* es la intersección de la pared de la izquierda con el suelo; el eje *OZ* es la intersección de la pared de la izquierda con la pared del frente. El punto donde concurren los tres ejes (la esquina del suelo, a la izquierda) es el origen.

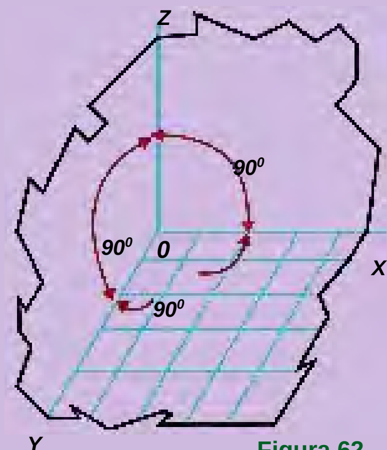


Figura 62

COORDENADAS CARTESIANAS DE UN PUNTO DEL ESPACIO

La posición de un punto del espacio queda determinada por sus **coordenadas en el espacio**, que son sus distancias a los planos coordenados.

Siendo el punto *P* (figura 63), sus coordenadas son:

1) La **abscisa** *x* , que es la distancia de *P* al plano *YZ* .

2) La **ordenada** *y* , que es la distancia de *P* al plano *ZX* .

3) La cota *z*, que es la distancia de *P* al plano *XY* .

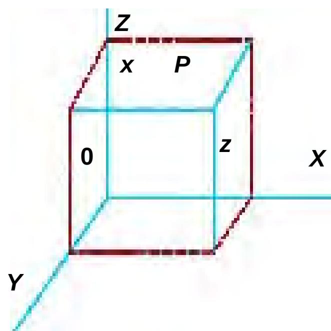


Figura 63

El punto *P* dado por sus coordenadas se expresa *P* (*x* , *y* , *z*). De este modo, (2, 4, 5) es un punto del espacio tal que, para una unidad escogida, su abscisa es 2, su ordenada 4 y su cota 5.

Las coordenadas de un punto del espacio en un salón de clase son: **abscisa**, la distancia del punto a la pared de la izquierda; **ordenada**, la distancia del punto a la pared de enfrente; **cota**, la distancia del punto al suelo.

En la práctica, para representar un punto del espacio se mide la abscisa sobre el eje *OX* y se trazan líneas que representen la ordenada y la cota.

En la figura 64 está representado el punto *P* (3, 2, 4)

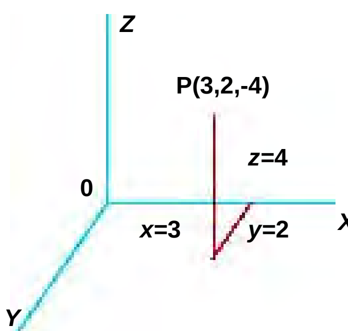


Figura 64

REPRESENTACIÓN DE UN PUNTO CUANDO UNA O MÁS COORDENADAS SON CERO (0)

Cuando **una** de las coordenadas es 0 y las otras dos no, el punto está situado en uno de los planos coordenados (Figura 65).

Si *x* = 0, el punto está situado en el plano *YZ* ; en la figura, P_1(0, 2, 3).

Si *y* = 0, el punto está en el plano *ZX*; en la figura, P_2(3, 0, 3). Si *z* = 0, el punto está situado en el plano *XY* ; en la figura, P_3(3, 2, 0).

Si **dos** de las coordenadas son 0 y la otra no, el punto está situado en uno de los ejes.

Si *x* = 0, *y* = 0, el punto está situado en el eje *OZ* ; en la figura, P_4(0, 0, 3).

Si *x* = 0, *z* = 0, el punto está en el eje *OY* ; en la figura, P_5(0, 2, 0).

Si *y* = 0, *z* = 0, el punto está en el eje *OX* ; en la figura, P_6(3, 0, 0).

Si las **tres** coordenadas son 0, el punto es el origen.

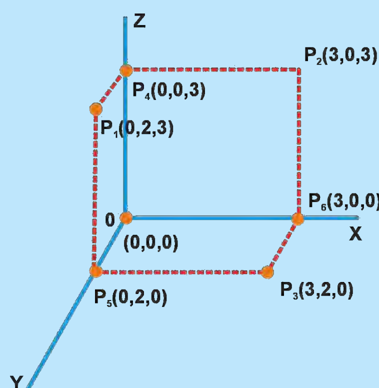


Figura 65

EJERCICIOS

Representa gráficamente los siguientes puntos:

1. (0, 5, 0) **2.** (1, 1, 3)
3. (3, 5, 6) **4.** (7, 5, 4)
5. (4, 0, 4) **6.** (0, 0, 4)
7. (4, 2, 3) **8.** (2, 4, 1)
9. (3, 1, 6) **10.** (4, 2, 0)
11. (5, 0, 0) **12.** (5, 4, 2)
13. (4, 3, 7) **14.** (6, 3, 4)

EL PLANO

Toda ecuación de primer grado con tres variables representa un plano. De este modo, **toda** ecuación de la forma $Ax + By + C z = D$ representa un plano (Figura 66).

Los segmentos *OA, OB* y *OC* son los trazos del plano sobre los ejes.

En la figura, el trazo del plano sobre el eje *OX* es $OA = a$; el trazo sobre el eje *OY* es $OB = b$ y el trazo sobre el eje *OZ* es $OC = c$.

Los puntos *A, B* y *C*, donde el plano intersecta a los ejes, por ser puntos de los ejes, tienen dos coordenadas nulas.

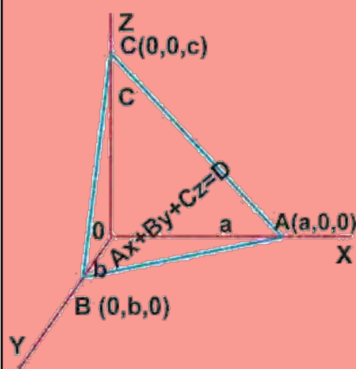


Figura 66

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON TRES VARIABLES

1) Representar la ecuación

$$4x + 3y + 2z = 12$$

Primero buscamos los trazos del plano que representa sobre los ejes (Fig. 67).

El trazo sobre el eje *OX* se encuentra haciendo $y = 0$, $z = 0$ en la ecuación dada, con lo que tendremos:

Para $y = 0$, $z = 0$, queda
$4x = 12 \therefore x = 3$

Se representa el punto (3, 0, 0)

El trazo sobre el eje *OY* se encuentra haciendo $x = 0$, $z = 0$ en la ecuación dada, con lo que tendremos:

Para $x = 0$, $z = 0$ queda
$3y = 12$ \ $y = 4$

Se representa el punto (0, 4, 0)

El trazo sobre el eje *OZ* se localiza haciendo $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación dada, con lo que tendremos:

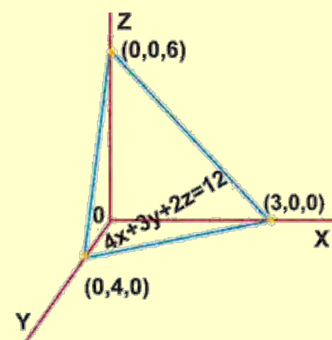


Figura 67

Para $x = 0$, $y = 0$ queda

$$2z = 12 \therefore z = 6$$

Se representa el punto (0, 0, 6)

Al unir entre sí los tres puntos localizados, obtenemos un plano que es la representación gráfica de la ecuación

$$4x + 3y + 2z = 12$$

2) Representar gráficamente

$$4x + 5y + 8z = 20 \text{ (Figura 68).}$$

Tenemos:

Para

$y = 0,\ z = 0,\ x = \frac{20}{4} = 5$ Punto (5,0,0)

Para

$x = 0,\ z = 0,\ y = \frac{20}{4} = 4$ Punto (0,4,0)

Para

$x = 0,\ y = 0,\ z = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$ P.$(0,0,2\frac{1}{2})$

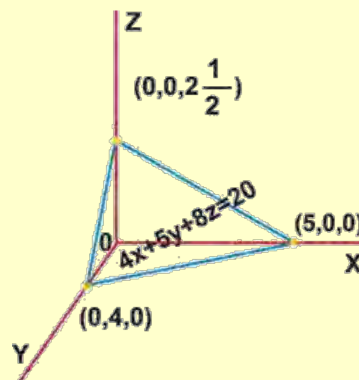


Figura 68

Al unir estos puntos entre sí queda trazado un plano que es la representación gráfica de la ecuación $4x + 5y + 8z = 20$

EJERCICIOS

Representa gráficamente las siguientes ecuaciones:

1. $15x + 20y + 24z = 120$
2. $3x + 6y + 2z = 6$
3. $15x + 10y + 6z = 30$
4. $2x + y + 4z = 4$
5. $14x + 10y + 5z = 35$
6. $4x + 6y + 3z = 12$
7. $3x + y + 2z = 10$
8. $15x + 6y + 5z = 30$
9. $4x + 2y + 3z = 18$
10. $2x + y + 3z = 6$

PLANO QUE PASA POR UN PUNTO

Si un plano pasa por un punto del espacio, las coordenadas de ese punto satisfacen la ecuación del plano. Para saber si el plano $2x + y + 3z = 13$ pasa por el punto (1, 2, 3), hacemos $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ en la ecuación del plano y tendremos: $2(1) + 2 + 3(3) = 13$, o sea $13 = 13$; por tanto, el plano pasa por el punto (1, 2, 3), o dicho de otro modo, el punto pertenece al plano.

EJERCICIOS

Resuelve y representa gráficamente los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 23 \\ 2x + 3y + 2z = 20 \\ 4x + 3y + 2z = 24 \end{cases}$

R. $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$

2. $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 35 \\ 2x + 5y + 3z = 27 \\ 2x + y + z = 13 \end{cases}$

R. $x = 4$, $y = 2$, $z = 3$

3. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 8 \\ 2x + 3y + 3z = 14 \end{cases}$

R. $x = 1$, $y = 1$, $z = 3$

4. $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + 2y + z = 9 \\ 3x + 3y + 5z = 24 \end{cases}$

R. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

5. $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 24 \\ 4x + 5y + 2z = 35 \\ 3x + 2y + z = 19 \end{cases}$

R. $x = 3$, $y = 3$, $z = 4$

6. $\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 42 \\ 3x + 4y + 3z = 33 \\ 2x + 5y + 2z = 29 \end{cases}$

R. $x = 2$, $y = 3$, $z = 5$

SIGNIFICACIÓN GRÁFICA DE LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS

Siendo el sistema

$$x + y + z = 12$$
$$2x - y + 3z = 17$$
$$3x + 2y - 5z = -8$$

Resolviéndolo se obtiene:

$$x = 3,\ y = 4,\ z = 5$$

Esta solución representa un punto del espacio, el punto (3, 4, 5). Ahora bien: $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ satisfacen las tres ecuaciones del sistema; por tanto, el punto (3, 4, 5) pertenece a los tres planos que representan las ecuaciones dadas y (3, 4, 5) es un punto por el que pasan los tres planos, es decir, el **punto común** a los tres planos.

Para resolver gráficamente un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se localiza el punto del espacio por el que pasan los tres planos, procediendo de la siguiente manera:

1) Se representan gráficamente los tres planos de las tres ecuaciones del sistema encontrando sus trazos.

2) Se traza la intersección de dos de ellos, que será una línea recta.

3) Se traza la intersección del tercer plano con cualquiera de los anteriores, y ésta será otra línea recta.

4) Se busca el punto donde se cortan las dos rectas (intersecciones) halladas y ese será el **punto común** a los tres planos. Las coordenadas de este punto son la solución del sistema.

Ejemplo

Resolver gráficamente el sistema

$$2x + 2y + z = 12$$
$$x + y + z = 8$$
$$3x + 2y + 5z = 30$$

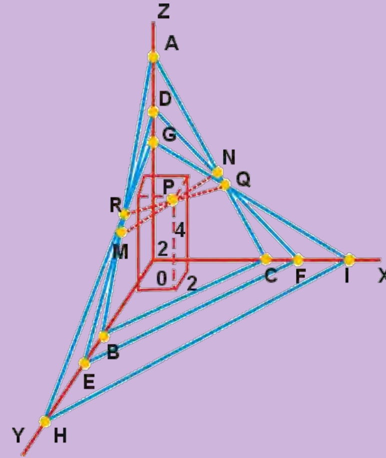


Figura 69

Para resolverlo aplicamos el procedimiento anterior (Fig. 69).

Representamos $2x + 2y + z = 12$

Para $y = 0$, $z = 0$, $x = 6$
$x = 0$, $z = 0$, $y = 6$
$x = 0$, $y = 0$, $z = 12$

Esta ecuación representa el plano *ABC*.

Representamos $x + y + z = 8$

Para $y = 0$, $z = 0$, $x = 8$
$x = 0$, $z = 0$, $y = 8$
$x = 0$, $y = 0$, $z = 8$

Esta ecuación representa el plano *DEF*.

Representamos $3x + 2y + 5z = 30$

Para $y = 0$, $z = 0$, $x = 10$
$x = 0$, $z = 0$, $y = 15$
$x = 0$, $y = 0$, $z = 6$

Esta ecuación representa el plano *GHI.*

Trazamos la intersección del plano *ABC* con el plano *DEF* que es la línea recta *MN*; trazamos la intersección del plano *DEF* con el plano *GHI* que es la línea recta *RQ*. Ambas intersecciones se cortan en el punto *P*, que pertenece a los tres planos.

Las coordenadas de *P*, que como vemos en la figura son $x = 2$, $y = 2$, $z = 4$, son la solución del sistema.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE CUATRO ECUACIONES CON CUATRO INCÓGNITAS

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 10 \quad (1)\\ 2x - y + 3z - 4u &= 9 \quad (2)\\ 3x + 2y - z + 5u &= 13 \quad (3)\\ x - 3y + 2z - 4u &= -3 \quad (4)\end{aligned}$$

Combinando (1) y (2) eliminamos la x multiplicando (1) por 2 y restamos:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z + 2u &= 20\\ -2x + y - 3z + 4u &= -9\\ \hline 3y - z + 6u &= 11 \quad (5)\end{aligned}$$

Combinando (1) y (3) eliminamos la x multiplicando (1) por 3 y restamos:

$$\begin{aligned} 3x + 3y + 3z + 3u &= 30\\ -3x - 2y + z - 5u &= -13\\ \hline y + 4z - 2u &= 17 \quad (6)\end{aligned}$$

Combinando (1) y (4) eliminamos la x, y restamos:

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 10\\ -x + 3y - 2z + 4u &= 3\\ \hline 4y - z + 5u &= 13 \quad (7)\end{aligned}$$

Al reunir las ecuaciones (5), (6) y (7) obtenidas tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} 3y - z + 6u &= 11 \quad (5)\\ y + 4z - 2u &= 17 \quad (6)\\ 4y - z + 5u &= 13 \quad (7)\end{aligned}$$

Para eliminar la z combinamos (5) y (6), multiplicamos (5) por 4 y sumamos:

$$\begin{aligned} 12y - 4z + 24u &= 44\\ y + 4z - 2u &= 17\\ \hline 13y + 22u &= 61 \quad (8)\end{aligned}$$

Combinando (5) y (7) eliminamos la z restándolas:

$$\begin{aligned} 3y - z + 6u &= 11\\ -4y + z - 5u &= -13\\ \hline -y + u &= -2 \quad (9)\end{aligned}$$

Al reunir (8) y (9) tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} 13y + 22u &= 61 \quad (8)\\ -y + u &= -2 \quad (9)\end{aligned}$$

Resolvemos este sistema multiplicando (9) por 13 y sumando:

$$\begin{aligned} 13y + 22u &= 61\\ -13y + 13u &= -26\\ \hline 35u &= 35\end{aligned}$$

$$\boxed{u = 1}$$

Ahora, sustituimos $u = 1$ en una ecuación de dos incógnitas, por ejemplo en (9), y tenemos:

$$-y + 1 = -2$$

$$\boxed{y = 3}$$

Sustituimos $u = 1$, $y = 3$ en una ecuación de tres incógnitas, por ejemplo en (5), y tenemos:

$$3(3) - z + 6(1) = 11$$
$$9 - z + 6 = 11$$

$$\boxed{z = 4}$$

Finalmente sustituimos $u = 1$, $y = 3$, $z = 4$ en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en (1), y tenemos:

$$x + 3 + 4 + 1 = 10$$

$$\boxed{x = 2}$$

R. $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$, $u = 1$

EJERCICIOS

Resuelve estos sistemas:

1. $\begin{cases} x + y + z + u = 4\\ x + 2y + 3z - u = -1\\ 3x + 4y + 2z + u = -5\\ x + 4y + 3z - u = -7\end{cases}$

R. $x = -2$, $y = -3$, $z = 4$, $u = 5$

2. $\begin{cases} x + y - z = -4\\ 4x + 3y + 2z - u = 9\\ 2x - y + 4z + u = -1\\ x + 2y + 3z + 2u = -1\end{cases}$

R. $x = 4$, $y = -5$, $z = 3$, $u = -2$

3. $\begin{cases} x + y + z + u = 10\\ 2x + y - 2z + 2u = 2\\ x - 2y + 3z - u = 2\\ x + 2y - 4z + 2u = 1\end{cases}$

R. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$

4. $\begin{cases} x + 2y + z = -4\\ 2x + 3y + 4z = -2\\ 3x + y + z + u = 4\\ 6x + 3y - z + u = 3\end{cases}$

R. $x = 3$, $y = -4$, $z = 1$, $u = -2$

5. $\begin{cases} x - 2y + z + 3u = -3\\ 3x + y - 4z + 2u = 7\\ 2x + 2y - z - u = 1\\ x + 4y + 2z - 5u = 12\end{cases}$

R. $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$, $u = -4$

6. $\begin{cases} 3x + 2y = -2\\ x + y + u = -3\\ 3x - 2y - u = -7\\ 4x + 5y + 6z + 3u = 11\end{cases}$

R. $x = -2$, $y = 2$, $z = 3$, $u = -3$

7. $\begin{cases} 2x - 3y + z + 4u = 0\\ 3x + y - 5z - 3u = -10\\ 6x + 2y - z + u = -3\\ x + 5y + 4z - 3u = -6\end{cases}$

R. $x = -3$, $y = 4$, $z = -2$, $u = 5$

8. $\begin{cases} 2x - 3z - u = 2\\ 3y - 2z - 5u = 3\\ 4y - 3u = 2\\ x - 3y + 3u = 0\end{cases}$

R. $x = 3$, $y = -1$, $z = 2$, $u = -2$



Jean Le Rond D'Alembert, realizó con Diderot, la *Enciclopedia* que lleva el nombre de éste último, redactó todos los artículos sobre matemáticas que aparecen en la famosa Enciclopedia. Fue Secretario Perpetuo de la Academia Francesa.

CAPÍTULO XXVII

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Para solucionar los problemas hay que resolver las desigualdades entre letras que sólo se cumplen para determinados valores o intervalos de las letras.

La teoría de las ecuaciones y las inecuaciones se desarrollan paralelamente. En general respetando las leyes de monotonía, se convierte la inecuación en un polinomio positivo.

Descompuesto el polinomio en sus factores lineales o cuadráticos se deducen de la composición los intervalos que deben satisfacer la incógnita.

PROBLEMA 1

Si la diferencia de dos números es 14 y $\frac{1}{4}$ de su suma es 13,

¿cuáles son los números?

Siendo x = el número mayor
y = el número menor

De acuerdo con las condiciones del problema, tenemos el sistema:

$$x - y = 14 \quad (1) \qquad \frac{x+y}{4} = 13 \quad (2)$$

Quitamos denominadores y sumamos:

$$\begin{aligned} x - y &= 14 \\ x + y &= 52 \\ \hline 2x &= 66 \\ x &= 33 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 33$ en (1):

$$\begin{aligned} 33 - y &= 14 \\ y &= 19 \end{aligned}$$

Los números buscados son 33 y 19.

EJERCICIOS

1. La diferencia de dos números es 40 y $\frac{1}{8}$ de su suma es 11. ¿Cuáles son los números?
   R. 64 y 24.
2. La suma de dos números es 190 y $\frac{1}{9}$ de su diferencia es 2. Encuentra los números.
   R. 104 y 86.
3. La suma de dos números es 1,529 y su diferencia 101. Hallar los números. **R.** 815 y 714.
4. Un cuarto de la suma de dos números es 45 y un tercio de su diferencia es 4. Hallar los números.
   R. 96 y 84.
5. Los $\frac{2}{3}$ de la suma de dos números son 74 y los $\frac{3}{5}$ de su diferencia 9. Hallar los números.
   R. 63 y 48
6. Dividir 80 en dos partes tales que los $\frac{3}{8}$ de la parte mayor equivalgan a los $\frac{3}{2}$ de la menor.
   R. 64 y 16.

PROBLEMA 2

6 lb de café y 5 lb de azúcar costaron \$2.27, y 5 lb de café y 4 lb de azúcar (a los mismos precios) costaron \$1.88. Hallar el precio de una libra de café y una de azúcar.

Siendo:

x = precio de 1 libra de café en cts.

y = precio de 1 libra de azúcar en cts.

Si una libra de café cuesta x, 6 lb costarán $6x$; si una lb de azúcar cuesta y, 5 lb de azúcar costarán $5y$, y como el importe de esta compra fue \$2.27 ó 227 cts., tendremos:

$$6x + 5y = 227 \quad (1)$$

5 lb de café cuestan $5x$, 4 de azúcar $4y$, y como el importe de esta compra fue de \$1.88 ó 188 cts., tendremos:

$$5x + 4y = 188 \quad (2)$$

Al reunir las ecuaciones (1) y (2) tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 227 & (1) \\ 5x + 4y = 188 & (2) \end{cases}$$

multiplicamos (1) por 5 y (2) por 6 y restamos:

$$\begin{cases} 30x + 25y = 1135 \\ -30x - 24y = -1128 \end{cases}$$
$$y = 7$$

Sustituyendo $y = 7$ en (1) tenemos $x = 32$

Una libra de café cuesta 32 cts. y una libra de azúcar 7 cts.

EJERCICIOS

1. 5 trajes y 3 sombreros cuestan 4,180 dólares y 8 trajes y 9 sombreros 6,940 dólares. Hallar el precio de un traje y de un sombrero. **R.** Traje, 800 dólares; sombrero, 60 dólares.

2. Si a 5 veces el mayor de dos números se añade 7 veces el menor, la suma es 316, y si a 9 veces el menor se resta el cuádruple del mayor, la diferencia es 83. Hallar los números **R.** 31 y 23.

3. $\frac{3}{7}$ de la edad de *A* aumentados en $\frac{3}{8}$ de la edad de *B* suman 15 años, y $\frac{2}{3}$ de la edad de *A* disminuidos en $\frac{3}{4}$ de la de *B* equivalen a 2 años. Hallar ambas edades. **R.** *A*, 21 años; *B*, 16 años.

PROBLEMA 3

Si a los dos términos de una fracción se añade 3, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$, y si a los dos términos se resta 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$. Hallar la fracción.

Siendo x = el numerador
y = el denominador

Entonces $\frac{x}{y}$ = la fracción

Si añadimos 3 a cada término, la fracción se convierte en $\frac{x+3}{y+3}$ y según las condiciones del problema el valor de esta fracción es $\frac{1}{2}$; luego:

$$\frac{x+3}{y+3} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Si restamos 1 a cada término, la fracción se convierte en $\frac{x-1}{y-1}$, y según las condiciones, el valor de esta fracción es $\frac{1}{3}$ luego:

$$\frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

Al reunir las ecuaciones (1) y (2) tenemos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{y+3} = \frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Quitamos denominadores:

$$\begin{cases} 2x + 6 = y + 3 \\ 3x - 3 = y - 1 \end{cases}$$

Transponemos y reducimos:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3x - y = 2 \quad (3) \end{cases}$$

Restamos: $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$
$$x = 5$$

Sustituyendo $x = 5$ en (3):

$$15 - y = 2$$
$$y = 13$$

Por tanto, la fracción es $\frac{5}{13}$

EJERCICIOS

1. Si a los dos términos de una fracción se añade 1, el valor de la fracción es $\frac{2}{3}$, y si a los dos términos se resta 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Hallar la fracción. **R.** $\frac{3}{5}$

2. Si a los dos términos de una fracción se resta 3, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$ y si los dos términos se aumentan en 5, el valor de la fracción es $\frac{3}{5}$. Hallar la fracción **R.** $\frac{7}{15}$

3. Si al numerador de una fracción se añade 5, el valor de la fracción es 2, y si al numerador se resta 2, el valor de la fracción es 1. Hallar la fracción.
R. $\frac{9}{7}$

4. Multiplicando por 3 el numerador de una fracción y añadiendo 12 al denominador, el valor de la fracción es $\frac{3}{4}$, y si el numerador se aumenta en 7 y se triplica el denominador, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Hallar la fracción. **R.** $\frac{5}{8}$

PROBLEMA 4

Dos números están en la relación de 3 a 4. Si el menor se aumenta en 2 y el mayor se disminuye en 9, la relación es de 4 a 3. Hallar los números.

Siendo x = el número menor
y = el número mayor

La relación de dos números es el **cociente** de dividir uno por el otro. Según las condiciones, x e y están en la relación de 3 a 4; luego,

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{4} \qquad (1)$$

Si el menor se aumenta en 2, quedará $x + 2$; si el mayor se disminuye en 9, quedará $y - 9$; la relación de estos números, según las condiciones, es de 4 a 3; luego,

$$\frac{x+2}{y-9}=\frac{4}{3} \qquad (2)$$

Al reunir (1) y (2) tenemos el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4} \\[2ex] \dfrac{x+2}{y-9}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema obtendremos $x = 18$, $y = 24$; estos son los números buscados.

EJERCICIOS

1. Dos números están en la relación de 5 a 6. Si el menor se aumenta en 2 y el mayor se disminuye en 6, la relación es de 9 a 8. Hallar los números. **R.** 25 y 30
2. Las edades de *A* y *B* están en la relación de 5 a 7. Dentro de 2 años la relación entre la edad de *A* y la de *B* será de 8 a 11. Hallar las edades actuales. **R.** *A*, 30 años; *B*, 42 años.
3. Antes de una batalla, las fuerzas de dos ejércitos estaban en la relación de 7 a 9. El ejército menor perdió 15,000 hombres en la batalla y el mayor 25,000 hombres. Si la relación ahora es de 11 a 13, ¿cuántos hombres tenía cada ejército? **R.** Menor, 70,000 hombres; mayor, 90,000 hombres.

PROBLEMA 5

Si el mayor de dos números se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 9, y si 3 veces el menor se divide por el mayor, el cociente es 1 y el residuo 14. Hallar los números.

Siendo x = el número mayor
y = el número menor

Según las condiciones, al dividir x entre y el cociente es 2 y el residuo 9, pero si el residuo se le resta al dividendo x, quedará $x - 9$ y entonces la división entre y es exacta; luego:

$$\frac{x-9}{y}=2 \qquad (1)$$

Dividiendo $3y$ entre x, según las condiciones, el cociente es 1 y el residuo 14, pero restando 14 del dividendo la división será exacta;

luego: $$\frac{3y-14}{x}=1 \qquad (2)$$

Al reunir (1) y (2) tenemos el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x-9}{y}=2 \\[2ex] \dfrac{3y-14}{x}=1 \end{cases}$$

Quitamos denominadores:
$x - 9 = 2y$ (3) $\quad 3y - 14 = x$

Transponemos:
$$\begin{aligned} x - 2y &= 9 \\ -x + 3y &= 14 \\ y &= 23 \end{aligned}$$

Sustituyendo $y = 23$ en (3) se obtiene $x - 9 = 46$; luego, $x = 55$.

Los números buscados son 55 y 23.

EJERCICIOS

1. Si el mayor de dos números se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 4, y si 5 veces el menor se divide por el mayor, el cociente es 2 y el residuo 17. Hallar los números. **R.** 54 y 25
2. Si el mayor de dos números se divide por el menor, el cociente es 3, y si 10 veces el menor se divide por el mayor, el cociente es 3 y el residuo 19. Hallar los números. **R.** 57 y 19
3. Si el doble del mayor de dos números se divide por el triple del menor, el cociente es 1 y el residuo 3, y si 8 veces el menor se divide por el mayor, el cociente es 5 y el residuo 1. Hallar los números. **R.** 27 y 17.

PROBLEMA 6

La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 15, y si al número se resta 9, las cifras se invierten. Hallar el número.

Siendo x = la cifra de las decenas
y = la cifra de las unidades

Según las condiciones:

$$x + y = 15 \qquad (1)$$

El **número** se obtiene multiplicando por 10 la cifra de las decenas y sumándole la cifra de las unidades; luego, el número será $10x + y$.

Según las condiciones, restando 9 de este número, las cifras se invierten; luego,

$$10x + y - 9 = 10y + x \qquad (2)$$

Al reunir (1) y (2) tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 15 \\ 10x + y - 9 &= 10y + x \end{aligned}$$

Transponemos y reducimos:

$$\begin{aligned} x + y &= 15 \\ 9x - 9y &= 9 \end{aligned}$$

Dividimos la segunda ecuación por 9 y sumamos:

$$\begin{aligned} x + y &= 15 \\ x - y &= 1 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = 8$ en (1) se tiene $8 + y = 15 \therefore y = 7$

El número buscado es 87.

EJERCICIOS

1. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 12, y si al número se resta 18, las cifras se invierten. Hallar el número. **R.** 75
2. Si un número de dos cifras se disminuye en 17 y esta diferencia se divide por la suma de sus cifras, el cociente es 5, y si el número disminuido en 2 se divide por la cifra de las unidades disminuida en 2, el cociente es 19. Hallar el número. **R.** 97.
3. Si a un número de dos cifras se añade 9, las cifras se invierten, y si este número que resulta se divide entre 7, el cociente es 6 y el residuo 1. Hallar el número. **R.** 34.
4. La suma de las dos cifras de un número es 9. Si la cifra de las decenas se aumenta en 1 y la de las unidades disminuye en 1, se invertirán las cifras. Hallar el número. **R.** 45.

PROBLEMA 7

Un hombre tiene $120 en 33 billetes de $5 y $2. ¿Cuántos billetes son de $5 y cuántos de $2?

Siendo x = número de billetes de $2
y = número de billetes de $5

Según las condiciones:

$$x + y = 33 \quad (1)$$

Con x billetes de $2 se tienen 2x$ y con y billetes de $5 se tienen 5y$, y como la cantidad total es $120, tendremos:

$$2x + 5y = 120 \quad (2)$$

Al reunir (1) y (2) tenemos el sistema

$$x + y = 33$$
$$2x + 5y = 120$$

Si resolvemos obtendremos $x = 15$, $y = 18$; por tanto, hay 15 billetes de $2 y 18 billetes de $5.

EJERCICIOS

1. Un niño tiene $11.30 en 78 monedas de 20 cts. y 10 cts. ¿Cuántas monedas son de 10 cts. y cuántas de 20 cts.? **R.** 35 de 20 cts. y 43 de 10 cts.
2. En un cine hay 700 personas entre adultos y niños. Cada adulto pagó 40 cts. y cada niño 15 cts. por su entrada. La recaudación es de $180. ¿Cuántos adultos y cuántos niños hay en el cine? **R.** 300 adultos, 400 niños.
3. Se reparten monedas de 20 cts. y de 25 cts. entre 44 personas, dando una moneda a cada una. Si la cantidad repartida es $9.95, ¿cuántas personas recibieron monedas de 20 cts. y cuántas de 25 cts.? **R.** de 20 cts. 21; de 25 cts. 23

PROBLEMA 8

Si *A* le da a *B* $2, ambos tendrán una suma igual, y si *B* le da a *A* $2, *A* tendrá el triple de lo que le queda a *B*. ¿Cuánto tiene cada uno?

Siendo x = lo que tiene *A*
y = lo que tiene *B*

Si *A* le da a *B* $2, *A* se queda con $($x - 2$) y *B* tendrá $($y + 2$), y según las condiciones ambos tienen una suma igual, por tanto:

$$x - 2 = y + 2 \quad (1)$$

Si *B* le da a *A* $2, *B* se queda con $($y - 2$) y *A* tendrá $($x + 2$), y según las condiciones *A* tiene el triple de lo que le queda a *B*; por tanto:

$$x + 2 = 3(y - 2) \quad (2)$$

Al reunir (1) y (2) tenemos el sistema

$$x - 2 = y + 2$$
$$x + 2 = 3(y - 2)$$

Si resolvemos este sistema obtendremos $x = 10$, $y = 6$; luego, *A* tiene $10 y *B* tiene $6.

PROBLEMA 9

Hace 8 años la edad de *A* era el triple que la de *B*, y dentro de 4 años la edad de *B* será $\frac{5}{9}$ la de A. ¿ Cuáles son las edades actuales?

Siendo x = edad actual de *A*
y = edad actual de *B*

Hace 8 años *A* tenía $x - 8$ años y *B*, $y - 8$ años; según las condiciones:

$$x - 8 = 3(y - 8) \quad (1)$$

Dentro de 4 años, *A* tendrá $x + 4$ años y *B*, $y + 4$ años, y según las condiciones:

$$y + 4 = \frac{5}{9}(x + 4) \quad (2)$$

Al reunir (1) y (2) tenemos el sistema:

$$x - 8 = 3(y - 8)$$
$$y + 4 = \frac{5}{9}(x + 4)$$

Si resolvemos el sistema obtendremos $x = 32$, $y = 16$.

A tiene 32 años y *B* 16 años.

EJERCICIOS

1. Si *A* le da a *B* $1, ambos tienen lo mismo, y si *B* le da a *A* $1, *A* tendrá el triple de lo que le quede a *B*. ¿Cuánto tiene cada uno? **R.** *A*, $5; *B*, $3.
2. La edad de *A* hace 5 años era 3 la de *B* ; dentro de 10 años la edad de *B* será 7 la de *A*. Hallar las edades actuales. **R.** *A*, 35 años; *B*, 25 años
3. *A* y *B* deciden jugar cartas. Si *A* pierde $25, *B* tendrá igual suma que *A*, y si *B* pierde $35, lo que le quede será $\frac{5}{17}$ de lo que tendrá A. ¿Con cuánto empezó a jugar cada uno? **R.** *A*, $135; *B*, $85
4. Hace 6 años tu edad era $\frac{1}{5}$ de la mía; dentro de 9 años será $\frac{2}{5}$. Hallar ambas edades actuales. **R.** Padre, 51 a.; hijo, 15 a.
5. *A* le dice a *B* : dame la mitad de lo que tienes y 60 cts. más, y tendré 4 veces lo que tú, y *B* le contesta: dame 80 cts. y tendré $3.10 más que tú. ¿Cuánto tiene cada uno? **R.** *A*, $1.50; *B,* $3.00

PROBLEMA 10

Una canoa navega por un río y recorre 15 kilómetros en $1\frac{1}{2}$ horas yendo a favor de la corriente, y 12 kilómetros en 2 horas contra la corriente.

Hallar la velocidad de la canoa en agua tranquila así como la velocidad del río.

Siendo

x = la velocidad, en km por hora, de la canoa en agua tranquila.

y = la velocidad, en km por hora, del río.

Entonces

$x + y$ = velocidad de la canoa a favor de la corriente.

$x - y$ = velocidad de la canoa contra la corriente.

El tiempo es igual al espacio partido por la velocidad; luego, el tiempo empleado en recorrer los 15 km a **favor de la corriente**, $1\frac{1}{2}$ horas, es igual al espacio recorrido, 15 km, dividido entre la velocidad de la canoa, $x + y$, o sea:

$$\frac{15}{x+y} = 1\frac{1}{2} \qquad (1)$$

El tiempo empleado en recorrer los 12 km contra la corriente, 2 horas, es igual al espacio recorrido, 12 km, dividido entre la velocidad de la canoa, $x - y$, o sea:

$$\frac{12}{x-y} = 2 \qquad (2)$$

Al reunir (1) y (2) tenemos el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{15}{x-y} = 1\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{12}{x-y} = 2 \end{cases}$$

Si lo resolvemos obtendremos $x = 8$, $y = 2$; por tanto, la velocidad de la canoa en agua tranquila es de 8 km por hora, y la velocidad del río de 2 km por hora.

EJERCICIOS

1. Un hombre rema río abajo 10 km en una hora y río arriba 4 km en una hora. Hallar la velocidad de la canoa en agua tranquila así como la velocidad del río. **R.** Canoa, 7 km/h; río, 3 km/hora

2. Una tripulación rema 28 km en $1\frac{3}{4}$ horas río abajo y 24 km en 3 horas río arriba. Hallar la velocidad de la embarcación en agua tranquila así como la velocidad del río. **R.** Embarcación, 12 km/hora; río, 4 km/hora.

PROBLEMA 11

La suma de tres números es 160. Un cuarto de la suma del mayor y el mediano equivale al menor disminuido en 20, y si a $\frac{1}{2}$ de la diferencia entre el mayor y el menor se suma el número del medio, el resultado es 57. Hallar los números.

x = número mayor
y = número mediano
z = número menor

Según las condiciones del problema, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 160 \\ \dfrac{x+y}{4} = z - 20 \\ \dfrac{x-z}{2} + y = 57 \end{cases}$$

Al resolver obtenemos $x = 62$, $y = 50$, $z = 48$, que son los números buscados.

PROBLEMA 12

La suma de las tres cifras de un número es 16. La suma de las centenas y las decenas es el triple de las unidades, y si al número se le resta 99, las cifras se invierten. Hallar el número.

Siendo x = la cifra de las centenas
y = la cifra de las decenas
z = la cifra de las unidades

Según las condiciones, la suma de las tres cifras es 16; por tanto,

$$x + y + z = 16 \qquad (1)$$

La suma de las centenas x con las decenas y es el triple de la cifra de las unidades z; luego,

$$x + y = 3z \qquad (2)$$

El **número** será $100x + 10y + z$. Si restamos 99 al número, las cifras se invierten; luego,

$$100x + 10y + z - 99 = 100z + 10y + x \quad (3)$$

Al reunir (1), (2) y (3) tenemos el sistema:

$$x + y + z = 16$$
$$x + y = 3z$$
$$100x + 10y + z - 99 = 100z + 10y + x$$

Al resolverlo obtendremos $x = 5$, $y = 7$, $z = 4$; por tanto, el número buscado es 574.

EJERCICIOS

1. La suma de tres números es 37. El menor disminuido en 1 equivale a $\frac{1}{3}$ de la suma del mayor y el mediano; la diferencia entre el mediano y el menor equivale al mayor disminuido en 13. Hallar los números. **R.** 10, 12, 15

2. 5 kilos de azúcar, 3 de café y 4 de frijoles cuestan $1.18; 4 de azúcar, 5 de café y 3 de frijoles cuestan $1.45; 2 de azúcar, 1 de café y 2 de frijoles cuestan 46 cts. Hallar el precio de un kilo de cada mercancía. **R.** Azúcar, 6 cts.; café, 20 cts.; frijol, 7 cts. kilo.

3. La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°. El mayor excede al menor en 35° y el menor excede en 20° a la diferencia entre el mayor y el mediano. Hallar los ángulos. **R.** 80°, 55°, 45°.

4. Un hombre tiene 110 animales entre vacas, caballos y borregos, $\frac{1}{8}$ del número de vacas más $\frac{1}{9}$ del número de caballos más $\frac{1}{5}$ del número de borregos equivalen a 15, y la suma del número de borregos con el de vacas es 65. ¿Cuántos animales de cada especie tiene? **R.** 40 v.;45 c.,25 b..

EJERCICIOS

Diversos problemas que se resuelven por medio de las ecuaciones simultáneas.

1. Determinar un número entre 300 y 400 sabiendo que la suma de sus cifras es 6 y que leído al revés es 41 del número primitivo.
R. 321.

2. Si al doble de la edad de *A* se le suma la edad de *B*, se obtiene la edad de *C* aumentada en 32 años. Si al tercio de la edad de *B* se le suma el doble de la de *C* , se obtiene la de *A* aumentada en 9 años, y el tercio de la suma de las edades de *A* y *B* es 1 año menos que la edad de *C* . Hallar las edades respectivas.
R. *A*, 15 años; *B*, 12 años; *C* , 10 años.

3. El perímetro de un cuarto rectangular es 18 m, y 4 veces el largo equivale a 5 veces el ancho. Hallar las dimensiones.
R. 5 m × 4 m

4. *A* tiene doble dinero que *B*. Si *A* le da a *B* 12 dólares ambos tendrán lo mismo. ¿Cuánto tiene cada uno?
R. *A*, 48 dólares; *B*, 24 dólares.

5. Hallar tres números tales que la suma del 1° y el 2° exceda en 18 al tercero; la suma del 1° y el 3° exceda en 78 al segundo, y la suma del 2° y el 3° exceda en 102 al 1°. .
R. 48, 60, 90

6. La suma de las dos cifras de un número es 6, y si al número se le resta 36, las cifras se invierten. Hallar el número.
R. 51.

7. Un pájaro, volando a favor del viento, recorre 55 km en 1 hora, y en contra del viento 25 km en 1 hora. Hallar la velocidad en km por hora del pájaro en aire tranquilo así como la del viento.
R. 40 km/h; 15 km/h.

8. Cierto número de personas alquiló un autobús para una excursión. Si hubieran ido 10 personas más, cada una habría pagado 5 dólares menos, y si hubieran ido 6 personas menos, cada una habría pagado 5 dólares más. ¿Cuántas personas iban en la excursión y cuánto pagó cada una?
R. 30 dólares ; 20 personas.

9. La diferencia entre la cifra de las unidades y la de las decenas de un número es 4, y si el número se suma con el que resulta de invertir sus cifras, la suma es 66. Hallar el número.
R. 15

10. El perímetro de un rectángulo es 58 m. Si el largo se aumenta en 2 m y el ancho se disminuye en 2 m, el área se disminuye en 46 m^2. Hallar las dimensiones del rectángulo.
R. 25 m × 4 m

11. El perímetro de una sala rectangular es de 56 m. Si el largo se disminuye en 2 m y el ancho se aumenta en 2 m, la sala se haría cuadrada. Hallar las dimensiones.
R. 16 m × 12 m

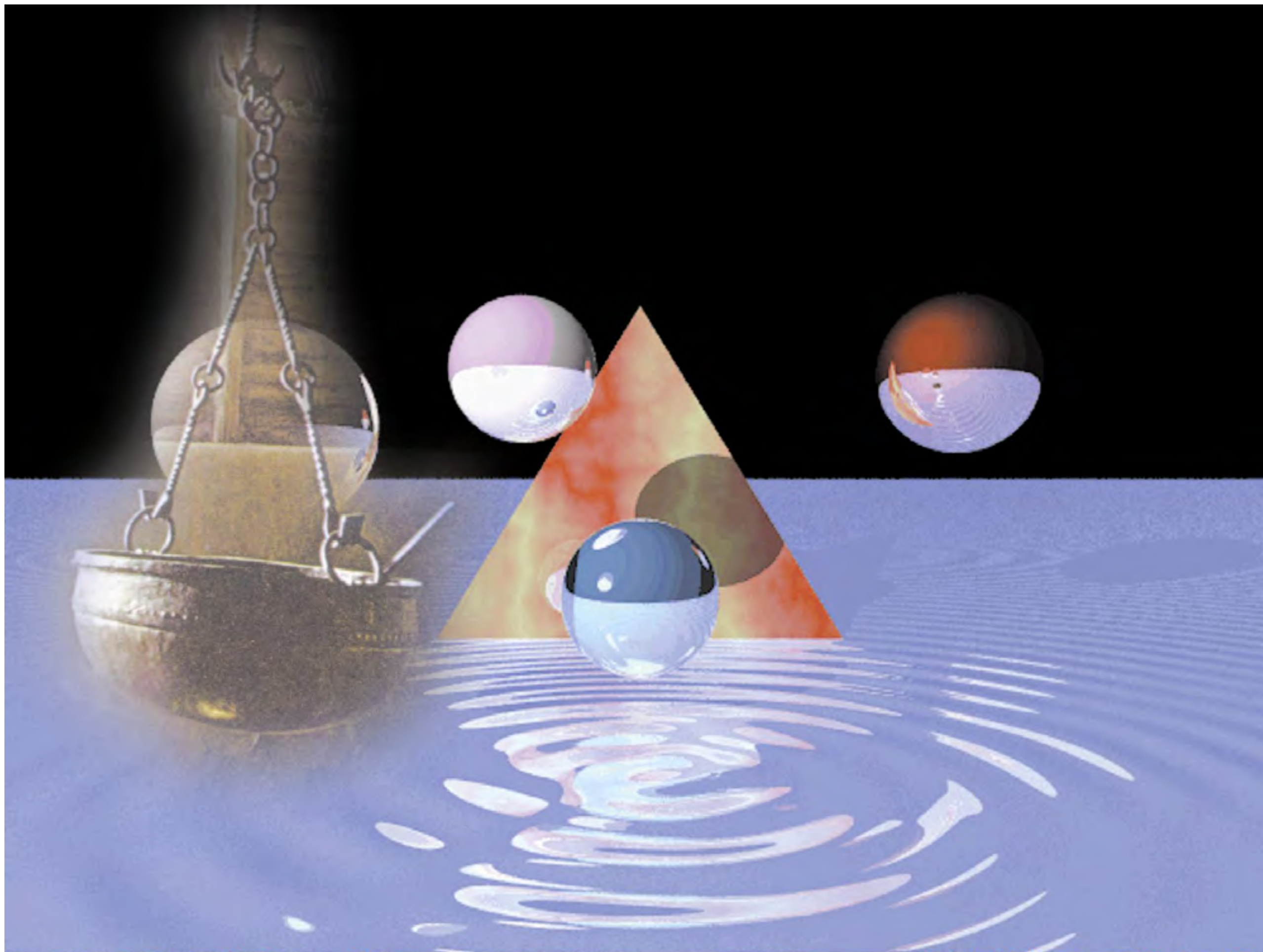
12. Una tripulación emplea 3 horas en remar 16 km río abajo y en regresar. En remar 2 km río arriba emplea el mismo tiempo que en remar 4 km río abajo. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.
R. Bote 12 km; río 4km/h

13. Dos números están en la relación 3 a 5. Si cada número se disminuye en 10, la relación es de 1 a 2. Hallar los números.
R. 30 y 50

14. En 5 horas *A* camina 4 km más que *B* en 4 horas, y *A* en 7 horas camina 2 km más que *B* en 6 horas. ¿Cuántos km anda cada uno en cada hora?
R. *A*, 8; *B*, 9 km

15. Un hombre compró cierto número de libros. Si hubiera comprado 5 libros más por el mismo dinero, cada libro le habría costado $2 menos, y si hubiera comprado 5 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado $4 más. ¿Cuántos libros compró y cuánto pagó por cada uno? **R.** 15 a 8 dólares.

16. Un comerciante empleó $1910 en comprar 50 trajes de a $40 y de a $35. ¿Cuántos trajes de cada precio compró?
R. 32 de 40 dólares y 18 de 35 dólares.



José Luis Lagranje, a los 16 años fue nombrado profesor de matemáticas en la Real Escuela de Artillería de Turín. Su mayor contribución el Álgebra está en la memoria que escribió en Berlín hacia 1767, "Sobre la resolución de las ecuaciones numéricas"; sin embargo su obra fundamental fue "Mecánica Analítica".

CAPÍTULO XXVIII

ESTUDIO ELEMENTAL DE LA TEORÍA COORDINATORIA

La **teoría coordinatoria** estudia la ordenación de las cosas o elementos.

La distinta ordenación da origen a las **coordinaciones**, **permutaciones y combinaciones.**

Las **coordinaciones** o **arreglos** son los grupos que se pueden formar con varios elementos (letras, objetos, personas), tomándolos uno a uno, dos a dos, tres a tres, etc., de modo que dos grupos del mismo número de elementos se diferencien por lo menos en un elemento o, si tienen los mismos elementos, por el orden en que están colocados.

ARREGLOS O COORDINACIONES

Ya se mencionó que las **coordinaciones** o **arreglos** son los grupos que se pueden formar con diversos elementos, por ejemplo: letras, cosas, animales, personas; y éstos pueden tomarse uno a uno, dos a dos, tres a tres, etc., de forma que dos grupos del mismo número de elementos se diferencien por lo menos en un elemento o, si tienen los mismos elementos, por el orden en que están colocados.

Formemos coordinaciones con las letras a, b, c, d.

Las coordinaciones monarias de estas cuatro letras son los grupos de una letra que podemos formar con ellas, o sea:

$$a, b, c, d$$

Las coordinaciones **binarias** se forman escribiendo a la derecha de cada letra todas las demás, una a una:

ab,	*ac*,	*ad*,
ba,	*bc*,	*bd*,
ca,	*cb*,	*cd*,
da,	*db*,	*dc*

(Aquí los grupos *ab* y *ac* se diferencian en un elemento porque el primero tiene *b*, que no tiene el segundo, y el segundo tiene *c*, que no tiene el primero; los grupos *ab* y *cd* se diferencian en dos elementos; los grupos *ab* y *ba* se diferencian en el orden de los elementos).

Las coordinaciones ternarias se forman escribiendo a la derecha de cada binaria, una a una, todas las letras que no entren en ella:

abc,	*abd*,	*acb*,	*acd*,	*adb*,	*adc*,
bac,	*bad*,	*bca*,	*bcd*,	*bda*,	*bdc*,
cab,	*cad*,	*cba*,	*cbd*,	*cda*,	*cdb*,
dab,	*dac*,	*dba*,	*dbc*,	*dca*,	*dcb*

Aquí los grupos *abc* y *abd* se diferencian en un elemento; los grupos *abc* y *bac* se diferencian en el orden).

Las coordinaciones **cuaternarias** se formarían escribiendo a la derecha de cada ternaria la letra que no entra en ella.

El símbolo de las coordinaciones es A, con un **subíndice** que indica el número de elementos y un **exponente** que indica cuántos elementos entran en cada grupo (**orden** de las coordinaciones).

En el caso anterior, las coordinaciones monarias de a, b, c, d se expresan ${}^1A_4$; las binarias, ${}^2A_4$; las ternarias, ${}^3A_4$ y las cuaternarias, ${}^4A_4$.

CÁLCULO DEL NÚMERO DE COORDINACIONES DE *m* ELEMENTOS TOMADOS *n* A *n*

Con m elementos, tomados de uno en uno, se pueden formar m coordinaciones monarias; luego,

$${}^1A_m = m$$

Para formar las binarias, a la derecha de cada uno de los m elementos se escriben, uno a uno, los demás $m - 1$ elementos; luego, cada elemento origina $m - 1$ coordinaciones binarias y los m elementos darán $m(m - 1)$ coordinaciones binarias; por tanto,

$${}^2A_m = m(m - 1),$$

o sea, ${}^2A_m = {}^1A_m(m - 1)$, porque $m = {}^1A$.

Para formar las ternarias a la derecha de cada binaria escribimos, uno a uno, los $m - 2$ elementos que no entran en ella; luego, cada binaria produce $m - 2$ ternarias y tendremos:

$${}^3A_m = {}^2A_m(m - 2)$$

Para formar las cuaternarias, a la derecha de cada ternaria escribimos, uno a uno, los $m - 3$ elementos que no entran en ella; así cada ternaria produce $m - 3$ cuaternarias y tendremos:

$${}^4A_m = {}^3A_m(m - 3)$$

Siguiendo con este procedimiento, obtendríamos la siguiente serie:

$${}^1A_m = m$$
$${}^2A_m = {}^1A_m(m - 1)$$
$${}^3A_m = {}^2A_m(m - 2)$$
$${}^4A_m = {}^3A_m(m - 3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$${}^nA_m = {}^{n-1}A_m(m - n + 1)$$

Multiplicando miembro por miembro estas igualdades y suprimiendo los factores comunes a los dos miembros tenemos:

$${}^nA_m = m(m - 1)(m - 2)\ldots\ldots(m - n + 1) \quad (1)$$

es la fórmula de las coordinaciones de m elementos tomados de n en n.

Ejemplos

1) ¿Cuántos números distintos de 4 cifras se pueden formar con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?

Aplicamos la fórmula (1). Aquí $m = 9$, $n = 4$

$${}^4A_9 = 9 \times 8 \times \ldots \times (9 - 4 + 1) = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

2) ¿Cuántas señales distintas pueden hacerse con 7 banderas izando 3 a la vez?

Las señales pueden ser distintas por diferenciarse una de otra en una o más banderas o por el orden en que se izan las banderas.

Aplicamos la fórmula (1). Aquí $m = 7$, $n = 3$ y tendremos:

$${}^3A_7 = 7 \times \ldots\ldots \times (7 - 3 + 1) = 7 \times 6 \times 5 = 210 \text{ señales}$$

Si se establece la condición de que cierto número de elementos tengan que ocupar **lugares fijos** en los grupos formados, al aplicar la fórmula, m y n se disminuyen en el número de elementos fijos.

Por ejemplo, con 10 jugadores de basquetbol, ¿de cuántos modos se puede disponer el equipo de 5 jugadores si los dos atacantes deben ser siempre los mismos?

Aquí hay dos jugadores que ocupan lugares fijos: $m = 10$ y $n = 5$, pero tenemos que disminuir m y n en 2, porque al haber 2 jugadores fijos en dos posiciones, quedan 8 jugadores para ocupar las 3 posiciones que quedan; luego, los arreglos de 3 que podemos formar con los 8 jugadores son:

$${}^{5-2}A_{10-2} = {}^3A_8 = 8 \times 7 \times 6 = 336 \text{ modos}$$

PERMUTACIONES

Las **permutaciones** son los grupos que se pueden formar con varios elementos entrando todos en cada grupo, de modo que un grupo se diferencie de otro cualquiera en el orden en que están colocados los elementos.

Así, las permutaciones que se pueden formar con las letras *a* y *b* son

ab y *ba*

Las permutaciones de las letras *a*, *b* y *c* se obtienen formando las permutaciones de *a* y *b* , que son *ab* y *ba*, y haciendo que la *c* ocupe todos los lugares (detrás, en medio, adelante) en cada una de ellas y serán:

abc,	*acb*,	*cab*,
bac,	*bca*,	*cba*

Las permutaciones de *a*, *b*, *c* y *d* se obtienen haciendo que en cada una de las anteriores la *d* ocupe todos los lugares, y así sucesivamente.

CÁLCULO DEL NÚMERO DE PERMUTACIONES DE *M* ELEMENTOS

Las permutaciones son un caso particular de las coordinaciones donde todos los elementos entran en cada grupo.

Por tanto, la fórmula del número de permutaciones de *m* elementos, P_m , se obtiene de la fórmula que nos da el número de coordinaciones:

$^{n}A_{m} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$

haciendo $m = n$. Si hacemos $m = n$ el factor $m - n + 1 = 1$, y quedará:

$$P_m = m(m-1)(m-2)\ldots\times 1,$$

o sea,

$$P_m = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times m = m$$

A la expresión $m!$ se le llama **factorial** e indica el producto de los números enteros consecutivos de 1 a *m* . Por tanto,

$$P_m = m! \quad (2)$$

Ejemplos

1) ¿De cuántos modos pueden colocarse en un estante 5 libros?

En cada arreglo que se haga deben entrar los 5 libros, por lo que aplicando la fórmula (2) tenemos:

$P_5 = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ modos

2) ¿De cuántos modos pueden sentarse 6 personas a un mismo lado de una mesa?

$P_6 = 6! = 720$ modos

Si se establece la condición de que de-terminados elementos deban ocupar lugares fijos, el número total de permutaciones es el que se puede formar con los demás elementos.

Ejemplo

Con 9 jugadores de beisbol, ¿de cuántos modos se puede disponer una novena si el pitcher y el catcher son siempre los mismos?

Hay dos elementos fijos, quedan 9 - 2 = 7 para permutar, luego $P_7 = 7! = 5{,}040$ modos.

PERMUTACIONES CIRCULARES

Las permutaciones circulares son utilizadas para resolver problemas como el que se enuncia enseguida: Cuando *m* elementos se disponen alrededor de un círculo, el número de permutaciones es (m - 1), si se cuenta siempre en el mismo sentido a partir de un mismo elemento.

Ejemplo

¿De cuántos formas o maneras pueden sentarse 6 personas en una mesa redonda, contando en un solo sentido, a partir de una de ellas?

$P_{6-1} = P_5 = 5! = 120$ modos

COMBINACIONES

Las **combinaciones** son los grupos que se pueden formar con varios elementos tomándolos uno a uno, dos a dos, tres a tres, etc., de modo que dos grupos que tengan el mismo número de elementos se diferencien por lo menos en un elemento.

Formaremos combinaciones con las letras *a*, *b*, *c*, *d* .

Las combinaciones binarias se forman escribiendo a la derecha de cada letra, una a una, todas las letras siguientes:

ab,	*ac*,	*ad*,
	bc,	*bd*,
		cd

Las combinaciones ternarias se forman escribiendo a la derecha de cada binaria, una a una, las letras que siguen a la última de cada binaria:

abc, *abd*, *acd*, *bcd*

En los ejemplos anteriores notamos que no hay dos grupos que tengan los mismos elementos; todos se diferencian por lo menos en uno.

CÁLCULO DEL NÚMERO DE COMBINACIONES DE *m* ELEMENTOS TOMADOS *n A n*

Si en las combinaciones binarias anteriores permutamos los elementos de cada combinación, obtendremos las coordinaciones binarias; si en las combinaciones ternarias anteriores permutamos los elementos de cada combinación, obtendremos las coordinaciones ternarias; pero al permutar los elementos de cada combinación, el número de grupos (coordinaciones) que se obtiene es igual al **producto** del número de **combinaciones** por el número de **permutaciones** de los elementos de cada combinación. Por tanto, designando por ${}^nC_m$ las combinaciones de *m* cosas tomadas *n* a *n* , por P_n las permutaciones que se pueden formar con los *n* elementos de cada grupo y por ${}^nA_m$ las coordinaciones que se obtienen al permutar los *n* elementos de cada grupo, tendremos:

$$ {}^nC_m \times P = {}^nA_m \qquad {}^nC_m = \frac{{}^nA_m}{P_n} \quad (3)$$

Esto nos dice que el número de combinaciones de *m* elementos tomados *n* a *n* es igual al número de coordinaciones de los *m* elementos tomados *n* a *n* dividido entre el número de permutaciones de los *n* elementos de cada grupo.

Ejemplos

1) Entre 7 personas, ¿de cuántos modos puede formarse un comité de 4 personas?

Aplicamos la fórmula (3)

Aquí $m = 7$, $n = 4$

$${}^4C_7 = \frac{{}^4A_7}{P_4} = \frac{7\times6\times...(7-4+1)}{4!} = \frac{7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4} = 35$$

2) En un examen se presentan 8 temas para que el alumno escoja 5. ¿Cuántas selecciones puede hacer el alumno?

$${}^5C_8 = \frac{{}^5A_8}{P_5} = \frac{8\times7\times.....\times(8-5+1)}{5!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4\times5} = 56$$

EJERCICIOS

1. ¿Cuántos números distintos de 3 cifras se pueden formar con los números 4, 5, 6, 7, 8 y 9?
R. 120

2. Con 5 jugadores, ¿de cuántos modos se puede disponer un equipo de basketbol de 5 hombres?
R. 120

3. Con 7 personas, ¿cuántos grupos distintos de 5 personas pueden formarse?
R. 21

4. ¿Cuántos números mayores de 2,000 y menores de 3,000 se pueden formar con los números 2, 3, 5 y 6?
R. 6

5. De entre 8 candidatos, ¿cuántas ternas se pueden escoger?
R. 56

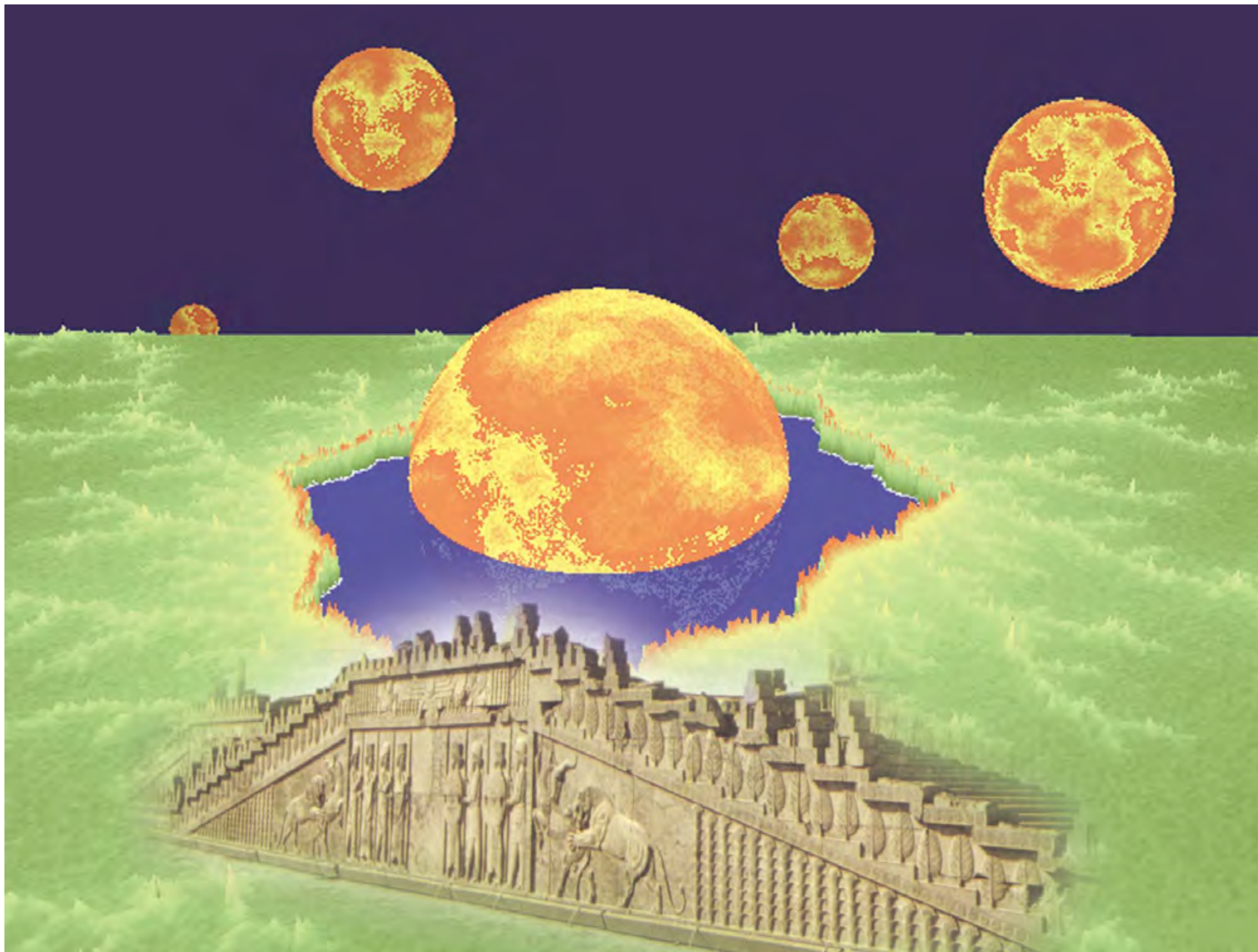
6. ¿Cuántos números de 5 cifras que empiecen con 1 y acaben con 8 se pueden formar con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?
R. 120

7. Con 5 consonantes y tres vocales, ¿cuántas palabras distintas de 8 letras se pueden formar? ¿y cuántas si las vocales son fijas?
R. 40,320 palabras; 120 si las vocales son fijas

8. ¿De cuántos modos se puede disponer un equipo de basketbol de 5 hombres con 5 jugadores si el centro es fijo?
R. 24

9. ¿Cuántas selecciones de 4 letras pueden hacerse con las letras de la palabra *Alfredo* ?
R. 35

10. Hay 7 hombres para formar una tripulación de 5, pero el timonel y el stroke son siempre los mismos. ¿De cuántos modos se puede disponer la tripulación?
R. 60



Gaspard Monge, matemático francés, se desarrolló principalmente en el campo de la Geometría, dentro de la cual creó la Geometría Descriptiva que es el fundamento para los dibujos de mecánica y procesos de ingeniería; fue el creador de la Teoría de la Superficie.

CAPÍTULO XXIX

POTENCIACIÓN

La **potencia** de una expresión algebraica es la misma expresión o el resultado de tomarla como factor dos o más veces.

La primera potencia de una expresión es esa misma expresión: $(2a)^1 = 2a$

La segunda potencia o cuadrado es el resultado de tomarla como factor dos veces:

$$(2a)^2 = 2a \times 2a = 4a^2$$

El cubo de una expresión es el resultado de tomarla como factor tres veces:

$(2a)^3 = 2a \times 2a \times 2a = 8a^3$. En general, $(2a)^n = 2a \times 2a \times 2a \ldots\ldots n$ veces

SIGNOS DE LAS POTENCIAS

Cualquier potencia de una cantidad positiva evidentemente es positiva, porque equivale a un producto en el que todos los factores son positivos.

En cuanto a las potencias de cantidad negativa, sabemos:

1) Toda potencia par de una cantidad negativa es positiva.

2) Toda potencia impar de una cantidad negativa es negativa.

Así, $(-2a)^2 = (-2a) \times (-2a) = 4a^2$

$(-2a)^3 = (-2a) \times (-2a) \times (-2a) = -8a^3$

$(-2a)^4 = (-2a) \times (-2a) \times (-2a) \times (-2a) = 16a^4$, etc.

Para elevar un monomio a una potencia debemos elevar su coeficiente a esa potencia y multiplicar el exponente de cada letra por el exponente que indica la potencia.

Si el monomio es negativo, el signo de la potencia es + cuando el exponente es par, y - cuando es impar.

Ejemplos

1) Desarrollar $(3ab^2)^3$

$$(3ab^2)^3 = 3^3 \bullet a^{1\times 3} \bullet b^{2\times 3} = 27a^3b^6$$

En efecto: $(3ab^2)^3 = 3ab^2 \times 3ab^2 \times 3ab^2 = 27a^3b^6$

2) Desarrollar $(-3a^2b^3)^2$

$$(-3a^2b^3)^2 = 3^2 \bullet a^{2\times 2} \bullet b^{3\times 2} = 9a^4b^6$$

En efecto: $(-3a^2b^3)^2 = (-3a^2b^3) \times (-3a^2b^3) = 9a^4b^6$

3) Desarrollar $(-5x^3y^4)^3$

$$(-5x^3y^4)^3 = 125x^9y^{12}$$

4) Desarrollar $\left(-\dfrac{2x}{3y^2}\right)^4$

Cuando el monomio es una fracción, para elevarlo a una potencia cualquiera, primero se eleva su numerador y su denominador a esa potencia. En este caso tenemos:

$$\left(-\frac{2x}{3y^2}\right)^4 = \frac{(2x)^4}{(3y^2)^4} = \frac{16x^4}{81y^8}$$

5) Desarrollar $\left(-\dfrac{2}{3}a^3b^4\right)^5$

$$\left(-\frac{2}{3}a^3b^4\right)^5 = \frac{32}{243}a^{15}b^{20}$$

EJERCICIOS

Desarrollar:

1. $(a^mb^n)^x$ **R.** $a^{mx}b^{nx}$

2. $(-5a)^3$ **R.** $-125a^3$

3. $(-2x^3y^5z^6)^4$ **R.** $16x^{12}y^{20}z^{24}$

4. $(3xy)^3$ **R.** $27x^3y^3$

5. $(-3m^3n)^3$ **R.** $-27m^9n^3$

6. $(-6a^2b)^2$ **R.** $36a^4b^2$

7. $(a^2b^3c)^m$ **R.** $a^{2m}b^{3m}c^m$

8. $(-2x^2y^3)^3$ **R.** $-8x^6y^9$

9. $(4a^2)^2$ **R.** $16a^4$

10. $(-m^2nx^3)^4$ **R.** $m^8n^4x^{12}$

11. $(4a^2b^3c^4)^3$ **R.** $64a^6b^9c^{12}$

12. $(-3a^2b)^5$ **R.** $-243a^{10}b^5$

13. $(-6x^4y^5)^2$ **R.** $36x^8y^{10}$

14. $(7x^5y^6z^8)^2$ **R.** $49x^{10}y^{12}z^{16}$

15. $(-7ab^3c^4)^3$ **R.** $-343a^3b^9c^{12}$

16. $\left(-\dfrac{2m}{n^2}\right)^3$ **R.** $-\dfrac{8m^3}{n^6}$

17. $\left(\dfrac{2m^3n}{3x^4}\right)^5$ **R.** $-\dfrac{32m^{15}n^5}{243x^{20}}$

18. $\left(\dfrac{ab^2}{5}\right)^3$ **R.** $\dfrac{a^3b^6}{125}$

19. $\left(-\dfrac{3}{4}a^3b^2\right)^2$ **R.** $\dfrac{9}{16}a^6b^4$

20. $\left(-\dfrac{3x^2}{4y}\right)^2$ **R.** $\dfrac{9x^4}{16y^2}$

21. $\left(-\dfrac{1}{3}mn^2\right)^2$ **R.** $\dfrac{1}{81}m^4n^8$

CUADRADO DE UN BINOMIO

Sabemos que: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Aunque en los productos notables ya trabajamos con estas formas, veremos algunos casos más, dada su importancia.

Ejemplos

1) Desarrollar $(3a^6 - 5a^2b^4)^2$

$$(3a^6 - 5a^2b^4)^2 = (3a^6)^2 - 2(3a^6)(5a^2b^4) + (5a^2b^4)^2$$
$$= 9a^{12} - 30a^8b^4 + 25a^4b^8$$

2) Desarrollar $\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}y^3\right)^2$

$$\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}y^3\right)^2 = \left(\frac{2}{3}x^2\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}x^2\right)\left(\frac{3}{4}y^3\right) + \left(\frac{3}{4}y^3\right)^2$$
$$= \frac{4}{9}x^4 + x^2y^3 + \frac{9}{16}y^6$$

3) Desarrollar $\left(10a^3 - \frac{4}{5}a^2b^7\right)^2$

$$\left(10a^3 - \frac{4}{5}a^2b^7\right)^2 = \left(10a^3\right)^2 - 2\left(10a^3\right)\left(\frac{4}{5}a^2b^7\right) + \left(\frac{4}{5}a^2b^7\right)^2$$
$$= 100a^6 - 16a^5b^7 + \frac{16}{25}a^4b^{14}$$

4) Desarrollar $\left(\frac{x^3}{10} - \frac{5y^2}{6x^5}\right)^2$

$$\left(\frac{x^3}{10} - \frac{5y^2}{6x^5}\right)^2 = \left(\frac{x^3}{10}\right)^2 - 2\left(\frac{x^3}{10}\right)\left(\frac{5y^2}{6x^5}\right) + \left(\frac{5y^2}{6x^5}\right)^2$$
$$= \frac{1}{100}x^6 - \frac{y^2}{6x^2} + \frac{25y^4}{36x^{10}}$$

EJERCICIOS

Desarrollar:

1. $\left(\frac{3}{4}a^2 - \frac{2}{5}b^2\right)^2$ **R.** $\frac{9}{16}a^4 - \frac{3}{5}a^2b^2 + \frac{4}{25}b^4$

2. $\left(\frac{2x}{3} - \frac{3y}{5}\right)^2$ **R.** $\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{5}xy + \frac{9}{25}y^2$

3. $\left(3x^4 - 5xy^3\right)^2$ **R.** $9x^8 - 30x^5y^3 + 25x^2y^6$

4. $\left(\frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{5}xy^2\right)^2$ **R.** $\frac{25}{36}x^6 + x^4y^2 + \frac{9}{25}x^2y^4$

5. $\left(\frac{a^3}{8} + \frac{4a^2}{7b}\right)^2$ **R.** $\frac{1}{64}a^6 + \frac{a^5}{7b} + \frac{16a^4}{49b^2}$

6. $\left(a^2b^3 - a^5\right)^2$ **R.** $a^4b^6 - 2a^7b^3 + a^{10}$

7. $\left(\frac{3}{2x} - \frac{2x^4}{3}\right)^2$ **R.** $\frac{9}{4x^2} - 2x^3 + \frac{4x^8}{9}$

8. $\left(7x^5 - 8x^3y^4\right)^2$ **R.** $49x^{10} - 112x^8y^4 + 64x^6y^8$

9. $\left(a^5 + 7b^4\right)^2$ **R.** $a^{10} + 14a^5b^4 + 49b^8$

CUBO DE UN BINOMIO

Sabemos que:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplos

1) Desarrollar $(4a^3 + 5a^2b^2)^3$

$(4a^3 + 5a^2b^2)^3 = (4a^3)^3 + 3(4a^3)^2(5a^2b^2) + 3(4a^3)$
$(5a^2b^2)^2 + (5a^2b^2)^3$

$$= 64a^9 + 240a^8b^2 + 300a^7b^4 + 125a^6b^6$$

2) Desarrollar $\left(\frac{3}{5}x - \frac{5}{6}y^2\right)^3$

$$\left(\frac{3}{5}x - \frac{5}{6}y^2\right)^3 =$$

$$\left(\frac{3}{5}x\right)^3 - 3\left(\frac{3}{5}x\right)^2\left(\frac{5}{6}y^2\right) + 3\left(\frac{3}{5}x\right)\left(\frac{5}{6}y^2\right) - \left(\frac{5}{6}y^2\right)^3$$

$$= \frac{27}{125}x^3 - \frac{9}{10}x^2y^2 + \frac{5}{4}xy^4 - \frac{125}{216}y^6$$

3) Desarrollar $\left(\frac{2x^3}{5y} - \frac{10y^4}{3}\right)^3$

$$\left(\frac{2x^3}{5y} - \frac{10y^4}{3}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{2x^3}{5y}\right)^3 - 3\left(\frac{2x^3}{5y}\right)^2\left(\frac{10y^4}{3}\right) + 3\left(\frac{2x^3}{5y}\right)\left(\frac{10y^4}{3}\right)^2 - \left(\frac{10y^4}{3}\right)^3$$

$$= \frac{8x^9}{125y^3} - \frac{8}{5}x^6y^2 + \frac{40}{3}x^3y^7 - \frac{1000}{27}y^{12}$$

EJERCICIOS

Desarrollar:

1. $(2a + 3b)^3$

R. $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$

2. $\left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b^2\right)^3$

R. $\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{2}{3}ab^4 + \frac{8}{27}b^6$

3. $\left(\frac{2a^2}{5} - \frac{5}{2b^3}\right)^3$

R. $\frac{8a^6}{125} - \frac{6a^4}{5b^3} + \frac{15a^2}{2b^6} - \frac{125}{8b^9}$

4. $(4a - 3b^2)^3$

R. $64a^3 - 144a^2b^2 + 108ab^4 - 27b^6$

5. $\left(\frac{3}{4}a^2 - \frac{4}{5}b^2\right)^3$

R. $\frac{27}{64}a^6 - \frac{27}{20}a^4b^2 + \frac{36}{25}a^2b^4 - \frac{64}{125}b^6$

6. $\left(4x^4 - \frac{3x}{y^3}\right)^3$

R. $64x^{12} - \frac{144x^9}{y^3} + \frac{108x^6}{y^6} - \frac{27x^3}{y^9}$

7. $(5x^2 + 6y^3)^3$

R. $125x^6 + 450x^4y^3 + 540x^2y^6 + 216y^9$

8. $\left(\frac{3a}{2b} + \frac{4b^2}{5}\right)^3$

R. $\frac{27a^3}{8b^3} + \frac{27a^2}{5} + \frac{72ab^3}{25} + \frac{64b^6}{125}$

9. $(4x^3 - 3xy^2)^3$

R. $64x^9 - 144x^7y^2 + 108x^5y^4 - 27x^3y^6$

10. $(7a^4 - 5a^2b^3)^3$

R. $343a^{12} - 735a^{10}b^3 + 525a^8b^6 - 125a^6b^9$

11. $(a^8 + 9a^5x^4)^3$

R. $a^{24} + 27a^{21}x^4 + 243a^{18}x^8 + 729a^{15}x^{12}$

12. $(8x^4 - 7x^2y^4)^3$

R. $512x^{12} - 1344x^{10}y^4 + 1176x^8y^8 -$
$343x^6y^{12}$

13. $(3a^2b - 5a^3b^2)^3$

R. $27a^6b^3 - 135a^7b^4 + 225a^8b^5 - 125a^9b^6$

CUADRADO DE UN POLINOMIO (Deducción de la regla para elevar un polinomio al cuadrado)

1) Elevaremos al cuadrado el trinomio $a + b + c$. Escribiéndolo $(a + b) + c$ podemos considerarlo como un **binomio** cuyo primer término es $(a + b)$, y el segundo c, con lo que tendremos:

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$
$$\text{(ordenando)} = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \quad (1)$$

2) Siendo el trinomio $(a - b + c)$ tendremos:

$$(a - b + c)^2 = [(a - b) + c]^2 = (a - b)^2 + 2(a - b)c + c^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2$$
$$\text{(ordenando)} = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc \quad (2)$$

3) Siendo el polinomio $a + b + c - d$ tendremos:

$$(a + b + c - d)^2 = [(a + b) + (c - d)]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)(c - d) + (c - d)^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc - 2ad - 2bd + c^2 - 2cd + d^2$$
$$\text{(ordenando)} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac - 2ad + 2bc - 2bd - 2cd \quad (3)$$

Los resultados de (1), (2) y (3) nos permiten establecer la siguiente regla:

El **cuadrado** de un polinomio es igual a la **suma** de los **cuadrados** de cada uno de sus términos más el doble de las combinaciones binarias que se pueden formar con ellos. Esta regla se cumple sin importar el número de términos del polinomio.

Las combinaciones binarias se entienden **productos** tomados con el **signo** que resulte de multiplicar. Obsérvese que los cuadrados de todos los términos son positivos.

Ejemplos

1) Elevar al cuadrado $x^2 - 3x + 4$

Si aplicamos la regla anterior tenemos:

$$(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2)^2 + (-3x)^2 + 4^2 + 2(x^2)(-3x) + 2(x^2)(4) + 2(-3x)(4)$$
$$= x^4 + 9x^2 + 16 - 6x^3 + 8x^2 - 24x$$
$$= x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 16$$

Aquí las combinaciones binarias se forman: 1° y 2°, 1° y 3°, 2° y 3°, cada término con los siguientes, nunca con los anteriores, y al formar las combinaciones cada término se escribe con su propio signo.

2) Desarrollar $(3x^3 - 5x^2 - 7)^2 =$

$$= (3x^3)^2 + (-5x^2)^2 + (-7)^2 + 2(3x^3)(-5x^2) + 2(3x^3)(-7) + 2(-5x^2)(-7)$$
$$= 9x^6 + 25x^4 + 49 - 30x^5 - 42x^3 + 70x^2$$
$$= 9x^6 - 30x^5 + 25x^4 - 42x^3 + 70x^2 + 49$$

3) Elevar al cuadrado $a^3 - 3a^2 + 4a - 1$

$$(a^3 - 3a^2 + 4a - 1)^2 = (a^3)^2 + (-3a^2)^2 + (4a)^2 + (-1)^2 + 2(a^3)(-3a^2)$$
$$+ 2(a^3)(4a) + 2(a^3)(-1) + 2(-3a^2)(4a) + 2(-3a^2)(-1) + 2(4a)(-1)$$
$$= a^6 + 9a^4 + 16a^2 + 1 - 6a^5 + 8a^4 - 2a^3 - 24a^3 + 6a^2 - 8a$$
$$= a^6 - 6a^5 + 17a^4 - 26a^3 + 22a^2 - 8a + 1$$

EJERCICIOS

Eleva al cuadrado:

1. $x^2 - 2x + 1$

R. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

2. $2a^2 + 2ab - 3b^2$

R. $4a^4 + 8a^3b - 8a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4$

3. $2x^2 + x + 1$

R. $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$

4. $x^3 - x^2 + x + 1$

R. $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - x^2 + 2x + 1$

5. $x^2 - 5x + 2$

R. $x^4 - 10x^3 + 29x^2 - 20x + 4$

6. $\frac{a}{2} - b + \frac{c}{4}$

R. $\frac{a^2}{4} + b^2 + \frac{c^2}{16} - ab + \frac{ac}{4} - \frac{bc}{2}$

7. $x^3 - 3x^2 - 2x + 2$

R. $x^6 - 6x^5 + 5x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 8x + 4$

8. $x^3 - 5x^2 + 6$

R. $x^6 - 10x^5 + 25x^4 + 12x^3 - 60x^2 + 36$

9. $\frac{x}{5} - 5y + \frac{5}{3}$

R. $\frac{x^2}{25} - 2xy + \frac{2x}{3} + 25y^2 - \frac{50y}{3} + \frac{25}{9}$

10. $4a^4 - 3a^2 + 5$

R. $16a^8 - 24a^6 + 49a^4 - 30a^2 + 25$

11. $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{2}{3}$

R. $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{4}{9}$

12. $x + 2y - z$

R. $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz$

13. $\frac{a}{x} - \frac{1}{3} + \frac{x}{a}$

R. $\frac{a^2}{x^2} - \frac{2a}{3x} + 2\frac{1}{9} - \frac{2x}{3a} + \frac{x^2}{a^2}$

14. $3 - x^3 - x^6$

R. $9 - 6x^3 - 5x^6 + 2x^9 + x^{12}$

CUBO DE UN POLINOMIO

Deducción de la regla para elevar un polinomio al cubo.

1) Siendo el trinomio $a + b + c$ tendremos:

$$(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$$
$$= (a + b)^3 + 3(a^2 + 2ab + b^2)c + 3(a + b)c^2 + c^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$$

(ordenando) $= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$ (1)

2) Si elevamos $a + b + c + d$ al cubo por el procedimiento anterior obtendremos:

$$(a + b + c + d)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3b^2a + 3b^2c + 3b^2d + 3c^2a + 3c^2b + 3c^2d + 3d^2a + 3d^2b + 3d^2c + 6abc + 6abd + 6acd + 6bcd \quad (2)$$

Los resultados de (1) y (2) nos permiten establecer la siguiente regla:

El cubo de un polinomio es igual a la suma de los cubos de cada uno de sus términos más el triple del cuadrado de cada uno por cada uno de los demás más el séxtuplo de las combinaciones ternarias (productos) que se pueden formar con sus términos.

1) Elevar al cubo $x^2 - 2x + 1$

Si aplicamos la regla anterior tenemos:

$$(x^2 - 2x + 1)^3 = (x^2)^3 + (-2x)^3 + 1^3$$
$$+ 3(x^2)^2(-2x) + 3(x^2)^2(1)$$
$$+ 3(-2x)^2(x^2) + 3(-2x)^2(1)$$
$$+ 3(1)^2(x^2) + 3(1)^2(-2x) + 6(x^2)(-2x)(1)$$

(ordenando $= x^6 - 8x^3 + 1 - 6x^5 + 3x^4 + 12x^4 + 12x^2 + 3x^2 - 6x - 12x^3$

y reduciendo) $= x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

Hay que tener bien presente que todas las cantidades negativas al cuadrado dan el signo más.

En los trinomios sólo hay una combinación ternaria: 1o., 2o. y 3o.

2) Elevar al cubo $x^3 - x^2 + 2x - 3$

$(x^3 - x^2 + 2x - 3)^3 =$

$$= (x^3)^3 + (-x^2)^3 + (2x)^3 + (-3)^3$$
$$+ 3(x^3)^2(-x^2) + 3(x^3)^2(2x) + 3(x^3)^2(-3)$$
$$+ 3(-x^2)^2(x^3) + 3(-x^2)^2(2x) + 3(-x^2)^2(-3)$$
$$+ 3(2x)^2(x^3) + 3(2x)^2(-x^2) + 3(2x)^2(-3)$$
$$+ 3(-3)^2(x^3) + 3(-3)^2(-x^2) + 3(-3)^2(2x)$$
$$+ 6(x^3)(-x^2)(2x) + 6(x^3)(-x^2)(-3) + 6(x^3)(2x)(-3) + 6(-x^2)(2x)(-3)$$
$$= x^9 - x^6 + 8x^3 - 27 - 3x^8 + 6x^7 - 9x^6 + 3x^7 + 6x^5 - 9x^4 + 12x^5$$
$$= 12x^4 - 36x^2 + 27x^3 - 27x^2 + 54x - 12x^6 + 18x^5 - 36x^4 + 36x^3$$
$$= x^9 - 3x^8 + 9x^7 - 22x^6 + 36x^5 - 57x^4 + 71x^3 - 63x^2 + 54x - 27$$

EJERCICIOS

Eleva al cubo:

1. $1 - x^2 + 2x^4 - x^6$

R. $1 - 3x^2 + 9x^4 - 16x^6 + 24x^8 - 27x^{10} + 23x^{12} - 15x^{14} + 6x^{16} - x^{18}$

2. $x^2 + x + 1$

R. $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1$

3. $2 - 3x + x^2$

R. $8 - 36x + 66x^2 - 63x^3 + 33x^4 - 9x^5 + x^6$

4. $a^3 + \frac{a^2}{2} - \frac{a}{3}$

R. $a^9 + \frac{3}{2}a^8 - \frac{1}{4}a^7 - \frac{7}{8}a^6 + \frac{1}{12}a^5 + \frac{1}{6}a^4 - \frac{1}{25}a^3$

5. $x^3 - 2x^2 + x - 3$

R. $x^9 - 6x^8 + 15x^7 - 29x^6 + 51x^5 - 60x^4 + 64x^3 - 63x^2 + 2 + 27x - 27$

6. $2x^2 - x - 1$

R. $8x^6 - 12x^5 - 6x^4 + 11x^3 + 3x^2 - 3x - 1$

7. $x^3 - 2x^2 - 4$

R. $x^9 - 6x^8 + 12x^7 - 20x^6 + 48x^5 - 48x^4 + 48x^3 - 96x^2 - 64$

8. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 2$

R. $\frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{4}x^5 + \frac{5}{3}x^4 - \frac{55}{27}x^3 + \frac{20}{3}x^2 - 4x + 8$

9. $x^3 - 4x^2 + 2x - 3$

R. $x^9 - 12x^8 + 54x^7 - 112x^6 + 180x^5 - 228x^4 + 179x^3 - 144x^2 + 54x - 27$

10. $1 - 3x + 2x^2$

R. $1 - 9x + 33x^2 - 63x^3 + 66x^4 - 36x^5 + 8x^6$

11. $x^4 - x^2 - 2$

R. $x^{12} - 3x^{10} - 3x^8 + 11x^6 + 6x^4 - 12x^2 - 8$

12. $a^3 - a^2 + a - 1$

R. $a^9 - 3a^8 + 6a^7 - 10a^6 + 12a^5 - 12a^4 + 10a^3 - 6a^2 + 3a - 1$

BINOMIO DE NEWTON

Elevar un binomio a una potencia entera y positiva.

Siendo el binomio $a + b$, la multiplicación nos da:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

En estos desarrollos se cumplen las siguientes leyes:

1) Cada desarrollo tiene un término más que el exponente del binomio.

2) El exponente de *a* en el primer término del desarrollo es igual al exponente del binomio, y en cada término posterior al primero, disminuye 1.

3) El exponente de *b* en el segundo término del desarrollo es 1, y en cada término posterior a éste, aumenta 1.

4) El coeficiente del primer término del desarrollo es 1 y el coeficiente del segundo término es igual al exponente de *a* en el primer término del desarrollo.

5) El coeficiente de cualquier término se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente de *a* en dicho término anterior y dividiendo este producto por el exponente de *b* en ese mismo término, aumentado en 1.

6) El último término del desarrollo es *b* elevada al exponente del binomio.

Todos estos resultados en conjunto constituyen la **Ley del Binomio**, que se cumple para **cualquier** exponente entero y positivo, como lo probaremos en seguida.

Esta Ley general se representa por medio de la siguiente **fórmula**:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\bullet 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\bullet 2\bullet 3}a^{n-3}b^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\bullet 2\bullet 3\bullet 4}a^{n-4}b^4 + \cdots\cdots b^n \qquad (1)$$

Esta **fórmula** descubierta por **Newton** nos permite elevar un binomio a una potencia cualquiera, directamente, sin tener que hallar las potencias anteriores.

DESARROLLO DE $(a - b)^n$

Cuando el segundo término del binomio es negativo, los signos del desarrollo son alternativamente + y -. En efecto:

$$(a - b)^n = [a + (-b)]^n$$

y al desarrollar $[a + (-b)]^n$ los términos 2o., 4o., 6o., etc., de acuerdo con la fórmula (1) contendrán el segundo término $(-b)$ elevado a un exponente impar, y como toda potencia impar de una cantidad negativa es negativa, dichos términos serán negativos, y los términos 3o., 5o., 7o., etc. contendrán a $(-b)$ elevada a un exponente **par**, y como toda potencia par de una cantidad negativa es positiva, dichos términos serán positivos. Por tanto, podemos escribir:

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \bullet 2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \bullet 2 \bullet 3}a^{n-3}b^3 + \cdots\cdots + (-b)^n$$

El último término será positivo si n es par y negativo si n es impar.

En el desarrollo de una potencia cualquiera de un binomio los denominadores de los coeficientes pueden escribirse, si se desea, como factoriales. De tal modo, 1 • 2 puede escribirse 2!; 1 • 2 • 3 = 3!, etc.

Ejemplos

1) Desarrollar $(x + y)^4$

Aplicando la ley del binomio tenemos: $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

El coeficiente del primer término es 1 y el del segundo es 4, igual que el exponente de x en el primer término del desarrollo.

El coeficiente del tercer término 6 se halla multiplicando el coeficiente del término anterior 4 por el exponente que tiene x en ese término 3, o sea 4 × 3 = 12, y dividiendo este producto por el exponente de y en dicho segundo término aumentado en 1, o sea por 2 y, se tiene 12 ÷ 2 = 6.

El coeficiente del cuarto término se encuentra multiplicando el coeficiente del término anterior 6 por el exponente de x en ese término: 6 × 2 = 12, y dividiendo este producto por el exponente de y en ese término aumentado en 1, o sea por 3 y, se tiene 12 ÷ 3 = 4, y así sucesivamente.

2) Desarrollar $(a - 2x)^5$

Dado que el segundo término es negativo, los signos se alternan: $(a - 2x)^5 = a^5 - 5a^4(2x) + 10a^3(2x)^2 - 10a^2(2x)^3 + 5a(2x)^4 - (2x)^5$

(efectuando) $= a^5 - 10a^4x + 40a^3x^2 - 80a^2x^3 + 80ax^4 - 32x^5$

Los coeficientes se obtienen del mismo modo que se explicó en el ejemplo anterior.

En la práctica basta encontrar la mitad, o la mitad más 1 de los coeficientes, según el exponente del binomio sea impar o par, pues los coeficientes se repiten (en cuanto se repite uno, se repiten los demás).

3) Desarrollar $(2x^2 + 3y^4)^5$

$$(2x^2 + 3y^4)^5 = (2x^2)^5 + 5(2x^2)^4(3y^4) + 10(2x^2)^3(3y^4)^2 + 10(2x^2)^2(3y^4)^3 + 5(2x^2)(3y^4)^4 + (3y^4)^5$$

$$= 32x^{10} + 240x^8y^4 + 720x^6y^8 + 1080x^4y^{12} + 810x^2y^{16} + 243y^{20}$$

4) Desarrollar $\left(a^5 - \frac{b^3}{2}\right)^6$

$$\left(a^5 - \frac{b^3}{2}\right)^6 = \left(a^5\right)^6 - 6\left(a^5\right)^5\left(\frac{b^3}{2}\right) + 15\left(a^5\right)^4\left(\frac{b^3}{2}\right)^2 - 20\left(a^5\right)^3\left(\frac{b^3}{2}\right)^3$$

$$+15\left(a^5\right)^2\left(\frac{b^3}{2}\right)^4 - 6\left(a^5\right)\left(\frac{b^3}{2}\right)^5 + \left(\frac{b^3}{2}\right)^6$$

$$= a^{30} - 3a^{25}b^3 + \frac{15}{4}a^{20}b^6 - \frac{5}{2}a^{15}b^9 + \frac{15}{16}a^{10}b^{12} - \frac{3}{16}a^5b^{15} + \frac{1}{64}b^{18}$$

PRUEBA POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA DE LA LEY DEL BINOMIO

Ahora probaremos que la Ley del Binomio se cumple para cualquier exponente entero y positivo. Si admitimos que la Ley se cumple para $(a+b)^n$ obtendremos el resultado (1).

Multiplicando ambos miembros de la fórmula (1) por $a+b$ (se multiplica primero por a, después por b y se suman los productos) y combinando los términos semejantes, tendremos:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)a^n b + \frac{n(n+1)}{1\bullet 2}a^{n-1}b^2 + \frac{n(n+1)(n-1)}{1\bullet 2\bullet 3}a^{n-2}b^3 + \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{1\bullet 2\bullet 3\bullet 4}a^{n-3}b^4 + \cdots b^{n+1} \quad (2)$$

Este desarrollo (2) es similar al (1), pero con $n+1$ donde el anterior tiene n.

Vemos, que la Ley del Binomio se cumple para $(a+b)^{n+1}$ al igual que para $(a+b)^n$.

Por tanto, si la Ley se cumple para un exponente entero y positivo cualquiera n, también se cumple para $n+1$.

Ahora bien, en un ejemplo anterior ya probamos, por medio de la multiplicación, que la Ley se cumple para $(a+b)^4$, por tanto se cumple para $(a+b)^5$; si se cumple para $(a+b)^5$, se cumple para $(a+b)^6$; si se cumple para $(a+b)^6$, se cumple para $(a+b)^7$ y así sucesivamente; luego, la Ley se cumple para cualquier exponente entero y positivo.

EJERCICIOS

Desarrolla:

1. $(x-2)^4$
R. $x^4 - 8x^3 + 24x^3 - 32x + 16$

2. $(x^2+2y^2)^7$
R. $x^{14} + 14x^{12}y^2 + 84x^{10}y^4 + 280x^8y^6 + 560x^6y^8 + 672x^4y^{10} + 448x^2y^{12} + 128y^{14}$

3. $(a+3)^4$
R. $a^4 + 12a^3 + 54a^2 + 108a + 81$

4. $\left(2x - \frac{y}{2}\right)^6$
R. $64x^6 - 96x^5y + 60x^4y^2 - 20x^3y^3 + \frac{15}{4}x^2y^4 - \frac{3}{8}xy^5 + \frac{1}{64}y^6$

5. $(x^3-1)^8$
R. $x^{24} - 8x^{21} + 28x^{18} - 56x^{15} + 70x^{12} - 56x^9 + 28x^6 - 8x^3 + 1$

6. $(2-x)^5$
R. $32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5$

7. $\left(3 - \frac{x^2}{3}\right)^5$
R. $243 - 135x^2 + 30x^4 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{5}{27}x^8 - \frac{1}{243}x^{10}$

8. $(2x+5y)^4$
R. $16x^4 + 160x^3y + 600x^2y^2 + 1000xy^3 + 625y^4$

9. $(2m^3-3n^4)^6$
R. $64m^{18} - 576m^{15}n^4 + 2160m^{12}n^8 - 4320m^9n^{12} + 4860m^6n^{16} - 2916m^3n^{20} + 729n^{24}$

10. $(a-3)^6$
R. $a^6 - 18a^5 + 135a^4 - 540a^3 + 1215a^2 - 1458a + 729$

11. $(x^2-3)^7$
R. $x^{14} - 21x^{12} + 189x^{10} - 945x^8 + 2835x^6 - 5103x^4 + 5103x^2 - 2187$

12. $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}y^2\right)^5$
R. $\frac{1}{32}x^{10} + \frac{5}{24}x^8y^2 + \frac{5}{9}x^6y^4 + \frac{20}{27}x^4y^6 + \frac{40}{81}x^2y^8 + \frac{32}{243}y^{10}$

13. $(2a-b)^6$
R. $64a^6 - 192a^5b + 240a^4b^2 + 160a^3b^3 + 60a^2b^4 - 12ab^5 + b^6$

14. $\left(3a - \frac{b^2}{3}\right)^5$
R. $243a^5 - 135a^4b^2 + 30a^3b^4 - \frac{10}{3}a^2b^6 + \frac{5}{27}ab^8 - \frac{1}{243}b^{10}$

15. $\left(\frac{1}{5} - \frac{5a}{2}\right)^6$
R. $\frac{1}{15625} - \frac{3}{625}a + \frac{3}{20}a^2 - \frac{5}{2}a^3 + \frac{375}{16}a^4 - \frac{1875}{16}a^5 + \frac{15625}{64}a^6$

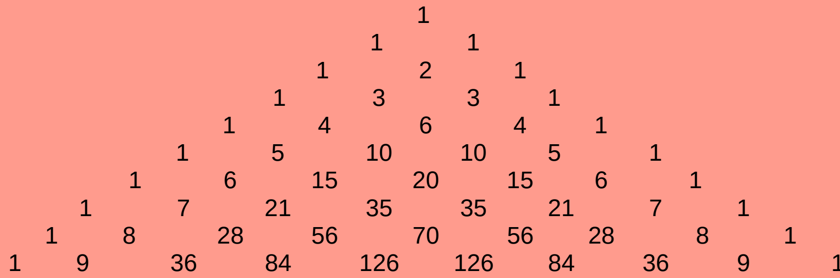
16. $(x^2+2y^3)^5$
R. $x^{10} + 10x^8y^3 + 40x^6y^6 + 80x^4y^9 + 80x^2y^{12} + 32y^{15}$

17. $(x^3+1)^6$
R. $x^{18} + 6x^{15} + 15x^{12} + 20x^9 + 15x^6 + 6x^3 + 1$

18. $(2a-3b)^5$
R. $32a^5 - 240a^4b + 720a^3b^2 - 1080a^2b^3 + 810ab^4 - 243b^5$

TRIÁNGULO DE PASCAL

Los coeficientes de los términos del desarrollo de cualquier potencia de un binomio se pueden obtener gracias al Triángulo de **Pascal:**



Para formar este triángulo se sigue este procedimiento:

En la primera fila horizontal se pone 1. En la segunda fila se pone 1 y 1.

Desde la tercera en adelante se empieza por 1 y cada número posterior al 1 se obtiene sumando en la fila anterior el 1er. número con el 2o., el 2o. con el 3o., el 3o. con el 4o., el 4o. con el 5o., etc., y se termina con 1.

Los **coeficientes** del desarrollo de cualquier potencia de un binomio son los números localizados en la fila horizontal donde después del 1 está el exponente del binomio.

Así, los coeficientes del desarrollo de $(x + y)^4$ son los números que están en la fila horizontal donde después del 1 está el 4, o sea, 1, 4, 6, 4, 1.

Los coeficientes del desarrollo de $(m + n)^5$ son los números de la fila horizontal donde después del 1 está el 5, o sea, 1, 5, 10, 10, 5, 1.

Los coeficientes del desarrollo de $(2x - 3y)^7$ son los números de la fila horizontal donde después del 1 está el 7, o sea, 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

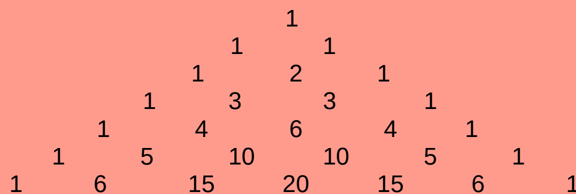
En la práctica, basta formar el triángulo hasta la fila horizontal donde después del 1 viene el exponente del binomio. Los números de esta última fila son los coeficientes que se necesitan.

Hay quienes atribuyen este triángulo al matemático **Tartaglia**.

Ejemplo

Desarrollar $(x^2 - 3y^5)^6$ por el Triángulo de Pascal.

Se forma el triángulo hasta la fila horizontal donde después del 1 viene el 6, o sea:



Al tomar los coeficientes de esta última fila tenemos:

$(x^2 - 3y^5)^6 = (x^2)^6 - 6(x^2)^5(3y^5) + 15(x^2)^4(3y^5)^2 - 20(x^2)^3(3y^5)^3 + 15(x^2)^2(3y^5)^4 - 6(x^2)(3y^5)^5 + (3y^5)^6$

$= x^{12} - 18x^{10}y^5 + 135x^8y^{10} - 540x^6y^{15} + 1215x^4y^{20} - 1458x^2y^{25} + 729y^{30}$

EJERCICIOS

Desarrollar localizando los coeficientes por el Triángulo de Pascal:

1. $(a + 2b)^6$ **R.** $a^6 + 12a^5b + 60a^4b^2 + 160a^3b^3 + 240a^2b^4 + 192ab^5 + 64b^6$

2. $\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{b}\right)^6$ **R.** $\frac{1}{729}a^6 - \frac{2a^5}{27b} + \frac{5a^4}{3b^2} - \frac{20a^3}{b^3} + \frac{135a^2}{b^4} - \frac{486a}{b^5} + \frac{729}{b^6}$

3. $(2m^2 - 3n^3)^5$ **R.** $32m^{10} - 240m^8n^3 + 720m^6n^6 - 1080m^4n^9 + 810m^2n^{12} - 243n^{15}$

4. $(1 - x^4)^8$ **R.** $1 - 8x^4 + 28x^8 - 56x^{12} + 70x^{16} - 56x^{20} + 28x^{24} - 8x^{28} + x^{32}$

5. $(x^2 + y^3)^6$ **R.** $x^{12} + 6x^{10}y^3 + 15x^8y^6 + 20x^6y^9 + 15x^4y^{12} + 6x^2y^{15} + y^{18}$

6. $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ **R.** $1 - \frac{10}{x} + \frac{45}{x^2} - \frac{120}{x^3} + \frac{210}{x^4} - \frac{252}{x^5} + \frac{210}{x^6} - \frac{120}{x^7} + \frac{45}{x^8} - \frac{10}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}$

7. $(3 - y^7)^7$ **R.** $2187 - 5103y^7 + 5103y^{14} - 2835y^{21} + 945y^{28} - 189y^{35} + 21y^{42} - y^{49}$

8. $\left(\frac{2}{m} - \frac{m^2}{2}\right)^7$ **R.** $\frac{128}{m^7} - \frac{224}{m^4} + \frac{168}{m} - 70m^2 + \frac{35}{2}m^5 - \frac{21}{8}m^8 + \frac{7}{32}m^{11} - \frac{m^{14}}{128}$

9. $\left(4 - \frac{x^5}{4}\right)^7$ **R.** $16384 - 7168x^5 + 1344x^{10} - 140x^{15} + \frac{35}{4}x^{20} - \frac{21}{64}x^{25} + \frac{7}{1024}x^{30} - \frac{1}{16384}x^{35}$

10. $\left(\frac{1}{2}x^2 + y^3\right)^5$ **R.** $\frac{1}{32}x^{10} + \frac{5}{16}x^8y^3 + \frac{5}{4}x^6y^6 + \frac{5}{2}x^4y^9 + \frac{5}{2}x^2y^{12} + y^{15}$

TÉRMINO GENERAL

El **término general** que vamos a establecer es una fórmula que nos permite hallar directamente un término cualquiera del desarrollo de un binomio sin buscar los términos anteriores.

Considerando los términos del desarrollo

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\bullet 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\bullet 2\bullet 3}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

observamos que se cumplen las siguientes leyes:

1) El numerador del coeficiente de un **término cualquiera** es un producto que empieza por el exponente del binomio; cada factor posterior a éste es 1 menos que el anterior y hay tantos factores como términos **preceden** al término de que se trate.

2) El denominador del coeficiente de un término cualquiera es una factorial de igual número de factores que el numerador.

3) El exponente de *a* en un término cualquiera es el exponente del binomio disminuido en el número de términos que **preceden** a dicho término.

4) El exponente de *b* en un término cualquiera es igual al número de términos que lo preceden.

Siguiendo las leyes anteriores encontraremos el término que ocupa el lugar *r* en el desarrollo de $(a + b)^n$.

Al término *r* lo **preceden** *r* - 1 términos, por lo que tendremos que:

1) El numerador del coeficiente del término *r* es

$n(n - 1)(n - 2) \ldots$ hasta que haya $r - 1$ factores.

2) El denominador es una factorial $1 \bullet 2 \bullet 3 \ldots$ que tiene $r - 1$ factores.

3) El exponente de *a* es el del binomio *n* menos *r* - 1, o sea, *n* - (*r* - 1).

4) El exponente de *b* es *r* - 1

Por tanto tendremos:

$$t_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots \text{hasta r - 1 factores}}{1\times 2\times 3\times\cdots\times(\text{r - 1})}a^{n-(r-1)}b^{r-1}$$

que es la **fórmula del término general.**

Ejemplos

1) Hallar el 5° término del desarrollo de $(3a + b)^7$

Aquí $r = 5$. Al 5° término lo preceden 4 términos; $r - 1 = 4$. Tenemos:

$$t_5 = \frac{7\times 6\times 5\times 4}{1\times 2\times 3\times 4}(3a)^{7-4}b^4 = \frac{7\times 5}{1}(3a)^3b^4$$

$$= 35\left(27a^3\right)b^4 = 945a^3b^4$$

2) Hallar el 6° término del desarrollo de $(x^2 - 2y)^{10}$

Al 6° término le preceden 5 términos. Tenemos:

$$t_6 = \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}\left(x^2\right)^{10-5}(-2y)^5$$

$$= 252\left(x^2\right)^5\left(-32y^3\right) = -8064x^{10}y^5$$

Cuando el segundo término del binomio es negativo, como en este caso - 2*y* , el signo del término que se busca será + si en el planteamiento este segundo término tiene exponente par y será - si tiene exponente impar, como sucede en el caso anterior.

EJERCICIOS

Encuentra:

1. El término del medio de $(3x^2 - y^2)^8$ **R.** $5670x^8y^8$

2. 3^er^. término de $(x - y)^5$ **R.** $10x^3y^2$

3. 7° término de $(x^2 - 2y)^{10}$ **R.** $13440x^8y^6$

4. 4° término de $(a - 4b)^7$ **R.** $-2240a^4b^3$

5. 8° término de $(x - y^2)^{11}$ **R.** $-330x^4y^{14}$

6. 5° término de $(1 + x)^{11}$ **R.** $330x^4$

7. 10° término de $(a^2 + b)^{15}$ **R.** $5005a^{12}b^9$

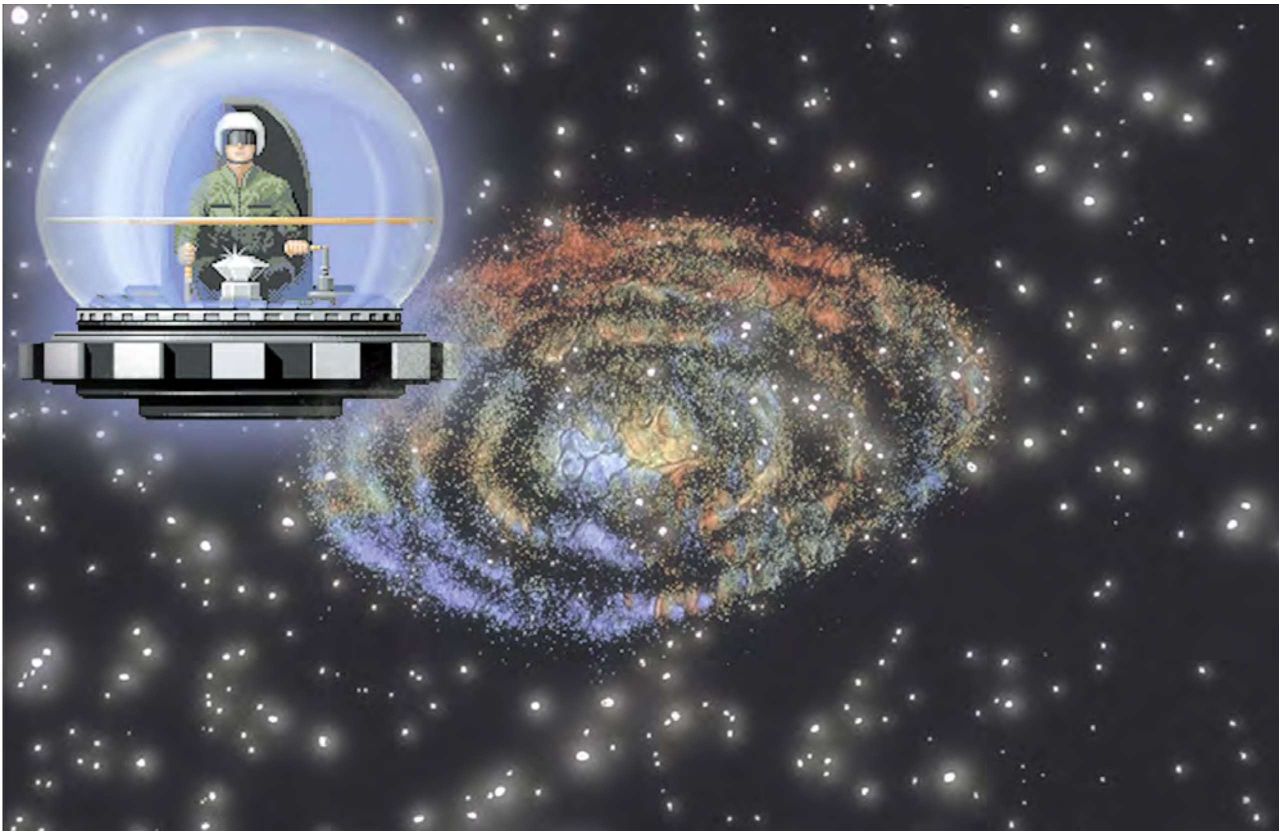
8. 4° término de $(3x - 2y)^6$ **R.** $-4320x^3y^3$

9. 9° término de $(1 - x^2)^{12}$ **R.** $495x^{16}$

10. 5° término de $(a^2 - 2b)^9$ **R.** $2016a^{10}b^4$

11. El penúltimo término de $(2a - b^2)^6$ **R.** $-12ab^{10}$

12. 6° término de $\left(2a - \frac{b}{2}\right)^8$ **R.** $-14a^3b^5$



Pierre-Simon Laplace, matemático y astrónomo francés; organizó la Escuela Politécnica y la Escuela Normal Superior. Es considerado como un excelente astrónomo por su famosa teoría sobre el origen del sistema solar, expuesta magistralmente en su obra "Exposición del Sistema del Mundo". Dentro de las matemáticas, demostró completamente el Teorema de D'Alembert.

CAPÍTULO XXX

RADICACIÓN

La raíz es toda expresión algebraica que elevada a una potencia reproduce la expresión dada.

De este modo, $2a$ es raíz cuadrada de $4a^2$ porque $(2a)^2 = 4a^2$, y $-2a$ también es raíz cuadrada de $4a^2$ porque $(-2a)^2 = 4a^2$.

$3x$ es raíz cúbica de $27x^3$ porque $(3x)^3 = 27x^3$

El **signo de la raíz es** $\sqrt{}$ **(signo radical).** Debajo de este signo se coloca la cantidad a la cual se extrae la raíz llamada **cantidad subradical.**

SIMBOLOGÍA DE LA RADICACIÓN

El signo $\sqrt{\ }$ lleva un **índice** que muestra la potencia a que hay que elevar la raíz para que reproduzca la cantidad subradical. Por convención el índice 2 se suprime y cuando el signo $\sqrt{\ }$ no lleva índice se entiende que es 2.

Así, $\sqrt{a^4}$ representa una cantidad que elevada al **cuadrado** reproduce la cantidad subradical a 4;esta raíz es a^2 y $-a^2$ porque $(a^2)^2 = a^4$ y $(-a^2)^2 = a^4$.

$\sqrt[3]{8x}$ es una cantidad que elevada al **cubo** reproduce la cantidad subradical $8x^3$; esta raíz es 2x porque $(2x)^3 = 8x^3$.

$\sqrt[5]{32a^5}$ representa una cantidad que elevada a la **quinta potencia** reproduce la cantidad subradical $-32a^5$; esta raíz es - 2a porque $(-2a)^5 = -32a^5$

Una **expresión radical** o **radical** es toda raíz indicada de un número o de una expresión algebraica: $\sqrt{4}, \sqrt[3]{9a^3}, \sqrt[4]{16a^3}$ son expresiones radicales.

Cuando la raíz indicada es exacta se dice que la expresión es **racional**; de lo contrario será **irracional**, y son estas expresiones irracionales como $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3a^2}$ las que comúnmente se llaman **radicales**.

El **grado** de un radical lo indica su índice, de modo que $\sqrt{2a}$ es un radical de segundo grado; $\sqrt[3]{5a^2}$ de tercer grado y de cuarto grado.

1) Las raíces impares de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad subradical.

Así
$$\sqrt[3]{27a^3} = 3a \text{ porque } (3a)^3 = 27a^3$$
$$\sqrt[3]{-27a^3} = -3a \text{ porque } (-3a)^3 = -27a^3$$
$$\sqrt[5]{x^{10}} = x^2 \text{ porque } (x^2)^5 = x^{10}$$
$$\sqrt[5]{-x^{10}} = -x^2 \text{ porque } (-x^2)^5 = -x^{10}$$

2) Las raíces pares de una cantidad positiva tienen doble signo: + y - .

Así, $\sqrt{25x^2} = 5x$ ó $-5x$ porque $(5x)^2 = 25x^2$ y $(-5x)^2 = 25x^2$

Lo cual se indica: $\sqrt{25x^2} = \pm 5x$

Del mismo modo, $\sqrt[4]{16a^4} = 2a$ y $-2a$ porque $(2a)^4 = 16a^4$ y $(-2a)^4 = 16a^4$

Esto se indica: $\sqrt[4]{16a^4} = \pm 2a$

CANTIDAD IMAGINARIA

Por otra parte, las raíces **pares** de una **cantidad negativa** no se pueden extraer, porque toda cantidad, ya sea positiva o negativa, elevada a una potencia **par**, da un resultado positivo. Estas raíces se llaman **cantidades imaginarias.**

Así, $\sqrt{-4}$ no se puede extraer. La raíz cuadrada de -4 no es 2 porque $2^2 = 4$ y no -4, y tampoco es -2 porque $(-2)^2 = 4$ y no - 4. es una **cantidad imaginaria.**

Las raíces $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-16x^2}$ son cantidades imaginarias.

En cuanto a la **cantidad real**, es una expresión que no contiene ninguna cantidad imaginaria: 3a ,8, $\sqrt{5}$ son cantidades reales.

VALOR ALGEBRAICO Y ARITMÉTICO DE UN RADICAL

En general, una cantidad tiene tantas raíces de un grado dado como unidades tiene el grado de la raíz. Toda cantidad tiene dos raíces cuadradas, tres raíces cúbicas, cuatro raíces cuartas, etc., pero generalmente una o más raíces de éstas son imaginarias. Más adelante hallaremos las tres raíces cúbicas de la unidad, dos de las cuales son imaginarias.

El valor **real positivo** de un radical, si existe, o el valor real **negativo**, es lo que se llama **valor aritmético** del radical. Así,

$\sqrt{9} = \pm 3$; el valor aritmético de $\sqrt{9}$ es + 3
$\sqrt[4]{16} = \pm 2$; el valor aritmético de $\sqrt[4]{16}$ es + 2

Cuando hablamos de radicales, siempre nos referimos a su **valor aritmético.**

Para extraer la raíz a una potencia se divide el exponente de la potencia por el índice de la raíz.

Decimos que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

En efecto: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\times n} = a^m$, cantidad subradical.

Aplicando esta regla tenemos:

$$\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2 \qquad \sqrt[3]{x^9} = x^{\frac{9}{3}} = x^3$$

Si el exponente de la potencia **no es divisible** por el índice de la raíz, se deja indicada la división, originándose el **exponente fraccionario.**

Así, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

RAÍZ DE UN PRODUCTO DE VARIOS FACTORES

Para extraer una raíz a un producto de varios factores, se extrae a cada uno de esos factores.

Así, $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b} \bullet \sqrt[n]{c}$, porque $\left(\sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b} \bullet \sqrt[n]{c}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \bullet \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \bullet \left(\sqrt[n]{c}\right)^n = abc$ cantidad subradical.

RAÍZ DE UN MONOMIO

Para extraer una raíz a un monomio hay que aplicar la siguiente regla:

Se extrae la raíz del coeficiente y se divide el exponente de cada letra por el índice de la raíz.

Si el índice del radical es impar, la raíz tendrá el mismo signo que la cantidad sub-radical, y si es par y la cantidad subradical positiva, la raíz tendrá el doble signo $\pm$.

Ejemplos

1) Hallar la raíz cuadrada de $9a^2b^4$

$$\sqrt{9a^2b^4} = \pm 3ab^2$$

2) Hallar la raíz cúbica de $-8a^3x^6y^9$

$$\sqrt[3]{-8a^3x^6y^9} = -2ax^2y^3$$

3) Hallar la raíz cuarta de $16a^4m^8x^{4m}$

$$\sqrt[4]{16a^4m^8x^{4m}} = \pm 2am^2x^m$$

4) Hallar la raíz quinta de $-243m^{15}n^{10x}$

$$\sqrt[5]{-243m^{15}n^{10x}} = -3m^3n^{2x}$$

5) Hallar la raíz cuadrada de $\dfrac{4a^2}{9b^4}$

Si el monomio es una fracción, como en este caso, se extrae la raíz al numerador y al denominador.

$$\sqrt{\frac{4a^2}{9b^4}} = \frac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{9b^4}} = \frac{2a}{3b^2}$$

6) Hallar la raíz cúbica de $-\dfrac{8x^6}{27a^3m^{12}}$

$$\sqrt[3]{-\frac{8x^6}{27a^3m^{12}}} = -\frac{2x^2}{3am^4}$$

EJERCICIOS

Encuentra las siguientes raíces:

1. $\sqrt{49a^{2n}b^{4n}}$ **R.** $\pm 7a^nb^{2n}$

2. $\sqrt{4a^2b^4}$ **R.** $\pm 2ab^2$

3. $\sqrt[6]{64a^{12}b^{18}c^{30}}$ **R.** $\pm 2a^2b^3c^5$

4. $\sqrt[7]{\dfrac{128}{x^{14}}}$ **R.** $\dfrac{2}{x^2}$

5. $\sqrt{25x^6y^8}$ **R.** $\pm 5x^3y^4$

6. $\sqrt{\dfrac{x^{2m}}{121y^{4n}}}$ **R.** $\pm\dfrac{x^m}{11y^{2n}}$

7. $\sqrt[3]{27a^3b^9}$ **R.** $3ab^3$

8. $\sqrt{\dfrac{9a^2}{25x^4}}$ **R.** $\pm\dfrac{3a}{5x^2}$

9. $\sqrt[9]{\dfrac{a^{18}}{b^9c^{27}}}$ **R.** $\dfrac{a^2}{bc^3}$

10. $\sqrt{64x^8y^{10}}$ **R.** $\pm 8x^4y^5$

11. $\sqrt[4]{16a^8b^{16}}$ **R.** $\pm 2a^2b^4$

12. $\sqrt[5]{x^{15}y^{20}z^{25}}$ **R.** $x^3y^4z^5$

13. $\sqrt[3]{-64a^3x^6y^{18}}$ **R.** $-4ax^2y^6$

14. $\sqrt[5]{-243m^5n^{15}}$ **R.** $-3mn^3$

15. $\sqrt{81x^6y^8z^{20}}$ **R.** $\pm 9x^3y^4z^{10}$

16. $\sqrt[3]{1000x^9y^{18}}$ **R.** $10x^3y^6$

RAÍZ CUADRADA DE POLINOMIOS ENTEROS

Para extraer la raíz cuadrada de un polinomio se aplica una regla práctica que establece lo siguiente:

1) Se ordena el polinomio dado.

2) Se encuentra la raíz cuadrada de su primer término, que será el primer término de la raíz cuadrada del polinomio; esta raíz se eleva al cuadrado y se resta del polinomio dado.

3) Se bajan los dos términos siguientes del polinomio dado y el primero se divide por el doble del primer término de la raíz. El cociente es el segundo término de la raíz, mismo que con su propio signo se escribe al lado del doble del primer término de la raíz y se forma así un binomio, el cual se multiplica por dicho segundo término y el producto se resta de los dos términos que habíamos bajado.

4) Se bajan los términos necesarios para tener tres. Se duplica la parte de raíz ya encontrada y se divide el primer término del residuo entre el primero de este doble. El cociente es el tercer término de la raíz, el cual, con su propio signo, se escribe al lado del doble de la parte de raíz hallada y se forma un trinomio, mismo que se multiplica por dicho tercer término de la raíz y el producto se resta del residuo.

5) Se continúa el procedimiento anterior, dividiendo siempre el primer término del residuo entre el primer término del doble de la parte de raíz hallada, hasta obtener un residuo cero.

Ejemplos

1) Encontrar la raíz cuadrada de $a^4 + 29a^2 - 10a^3 - 20a + 4$

Ordenando el polinomio se obtiene:

$\sqrt{a^4 - 10^3 + 29a^2 - 20a + 4}$	$a^2 - 5a + 2$
$-a^4$	$(2a^2 - 5a)(-5a) = 10a^3 + 25a^2$
$-10a^3 + 29a^2$	
$10a^3 - 25a^2$	$(2a^2 - 10a + 2)2 = 4a^2 - 20a + 4$
$4a^2 - 20a + 4$	
$-4a^2 + 20a - 4$	
0	

EXPLICACIÓN DE POLINOMIOS ENTEROS .

Encontramos la raíz cuadrada de a^4, que es a^2; este es el primer término de la raíz del polinomio. a^2 se eleva al cuadrado y da a^4; este cuadrado se resta del primer término del polinomio y bajamos los dos términos siguientes $-10a^3 + 29a^2$. Luego buscamos el doble de a^2, que es $2a^2$.

Dividimos $-10a^3 \div 2a^2 = -5a$, y éste es el segundo término de la raíz. Escribimos $-5a$ al lado de $2a^2$ y formamos el binomio $2a^2 - 5a$, el cual multiplicamos por $-5a$ y nos da $-10a^3 + 25a^2$. Este producto lo restamos (cambiándole los signos) de $-10a^3 + 29a^2$; la diferencia es $4a^2$. Bajamos los dos términos siguientes y tenemos $4a^2 - 20a + 4$. Se duplica la parte de raíz hallada $2(a^2 - 5a) = 2a^2 - 10a$. Dividimos $4a^2 \div 2a^2 = 2$, y éste es el tercer término de la raíz.

Este 2 se escribe al lado de $2a^2 - 10a$ y formamos el trinomio $2a^2 - 10a + 2$, que se multiplica por 2 y nos da $4a^2 - 20a + 4$. Este producto se resta (cambiándole los signos) del residuo $4a^2 - 20a + 4$ y nos da 0.

Para probarlo, elevamos al cuadrado la raíz cuadrada $a^2 - 5a + 2$, y si la operación está correcta debe dar la cantidad subradical.

2) Hallar la raíz cuadrada de $9x^6 + 25x^4 + 4 - 6x^5 - 20x^3 + 20x^2 - 16x$

Ordenando el polinomio y aplicando la regla dada tendremos:

$\sqrt{9x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 20x^3 + 20x^2 - 16x + 4}$	$3x^3 - x^2 + 4x - 2$
$-9x^6$	$(6x^3 - x^2)(-x^2) = -6x^5 + x^4$
$-6x^5 + 25x^4$	
$6x^5 - x^4$	$(6x^3 - 2x^2 + 4x)\,4x$
	$= 24x^4 - 8x^3 + 16x^2$
$24x^4 - 20x^3 + 20x^2$	
$-24x^4 + 8x^3 - 16x^2$	$(6x^3 - 2x^2 + 8x - 2)(-2)$
	$= 12x^3 + 4x^2 - 16x + 4$
$-12x^3 + 4x^2 - 16x + 4$	
$12x^3 - 4x^2 + 16x - 4$	
0	

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cuadrada de:

1. $16x^2 - 24xy^2 + 9y^4$

R. $4x - 3y^2$

2. $4a^4 + 8a^3b - 8a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4$

R. $2a^2 + 2ab - 3b^2$

3. $25a^4 - 70a^3x + 49a^2x^2$

R. $5a^2 - 7ax$

4. $x^6 - 2x^5 + 3x^4 + 1 + 2x - x^2$

R. $x^3 - x^2 + x + 1$

5. $x^4 + 6x^2 - 4x^3 - 4x + 1$

R. $x^2 - 2x + 1$

6. $5x^4 - 6x^5 + x^6 + 16x^3 - 8x^2 - 8x + 4$

R. $x^3 - 3x^2 - 2x + 2$

7. $4a^3 + 5a^2 + 4a^4 + 1 + 2a$

R. $2a^2 + a + 1$

8. $x^8 + 6x^6 - 8x^5 + 19x^4 - 24x^3 + 46x^2 - 40x + 25$

R. $x^4 + 3x^2 - 4x + 5$

9. $29n^2 - 20n + 4 - 10n^3 + n^4$

R. $n^2 - 5n + 2$

10. $x^6 - 10x^5 + 25x^4 + 12x^3 - 60x^2 + 36$

R. $x^3 - 5x^2 + 6$

11. $9 - 36a + 42a^2 + 13a^4 - 2a^5 - 18a^3 + a^6$

R. $3 - 6a + a^2 - a^3$

12. $16a^8 + 49a^4 - 30a^2 - 24a^6 + 25$

R. $4a^4 - 3a^2 + 5$

13. $9x^6 - 24x^5 + 28x^4 - 22x^3 + 12x^2 - 4x + 1$

R. $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

14. $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz$

R. $x + 2y - z$

15. $16x^6 - 40x^5 + 73x^4 - 84x^3 + 66x^2 - 36x + 9$

R. $4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$

16. $9 - 6x^3 + 2x^9 - 5x^6 + x^{12}$

R. $3 - x^3 - x^6$

17. $m^6 - 4m^5n + 4m^4n^2 + 4m^3n^4 - 8m^2n^5 + 4n^8$

R. $m^3 - 2m^2n + 2n^4$

18. $25x^8 - 70x^6 + 49x^4 + 30x^5 + 9x^2 - 42x^3$

R. $5x^4 - 7x^2 + 3x$

RAÍZ CUADRADA DE POLINOMIOS CON TÉRMINOS FRACCIONARIOS

Ejemplos

1) Hallar la raíz cuadrada de $\frac{a^4}{16}+\frac{9a^2b^2}{10}-\frac{a^3b}{2}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}$

Poniendo en orden descendente con relación a la *a*, y aplicando la misma regla del caso anterior, tenemos:

$$\sqrt{\frac{a^4}{16}-\frac{a^3b}{2}+\frac{9a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}} \qquad \frac{a^2}{4}-ab-\frac{b^2}{5}$$

$$-\frac{a^4}{16}$$

$$-\frac{a^3b}{2}+\frac{9a^2b^2}{10}$$

$$\frac{a^3b}{2}-a^2b^2$$

$$-\frac{a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}$$

$$\frac{a^2b^2}{10}-\frac{2ab^3}{5}-\frac{b^4}{25}$$

$$\left(\frac{a^2}{2}-ab\right)(-ab)=-\frac{a^3b}{2}+a^2b^2$$

$$\left(\frac{a^2}{2}-2ab-\frac{b^2}{5}\right)\left(-\frac{b^2}{5}\right)=\frac{a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}$$

Debe tenerse cuidado de simplificar cada vez que se pueda. Así, el doble de $\frac{a^2}{4}$ es $\frac{2a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

La división de $-\frac{a^3b}{2}$ entre $\frac{a^2}{2}$ se verifica $-\frac{a^3b}{2}\times\frac{2}{a^2}=-ab$,simplificando.

La operación $\frac{9a^2b^2}{10}-a^2b^2$ se verifica convirtiendo $-a^2b^2$ en fracción equivalente de denominador 10 y se tiene: $\rightarrow$ $\frac{9a^2b^2}{10}-\frac{10a^2b^2}{10}=-\frac{a^2b^2}{10}$

La división de $-\frac{a^2b^2}{10}$ entre $\frac{a^2}{2}$ se verifica $-\frac{a^2b^2}{10}\times\frac{2}{a^2}=-\frac{b^2}{5}$, simplificando.

2) Hallar la raíz cuadrada de $\frac{4a^2}{x^2}+\frac{31}{3}-\frac{2x}{a}-\frac{12a}{x}+\frac{x^2}{9a^2}$

Aquí procedemos en orden descendente con relación a la *a*. Como hay dos términos que tienen *a* en el numerador, un término independiente y dos términos que tienen *a* en el denominador, la manera de ordenar este polinomio en orden descendente con relación a la *a* es la siguiente: $\frac{4a^2}{x^2}-\frac{12a}{x}+\frac{31}{3}-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{9a^2}$

porque, como se verá más adelante, $\frac{31}{3}$ equivale a $\frac{31}{3}a^0$; equivale a $2a^{-1}xy$ $\frac{x^2}{9a^2}$ equivale a $\frac{a^{-2}x^2}{9}$, por tanto se conserva el orden descendente de las potencias de a, con lo que tendremos:

$$\sqrt{\frac{4a^2}{x^2}-\frac{12a}{x}+\frac{31}{3}-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{9a^2}} \qquad \frac{2a}{x}-3+\frac{x}{3a}$$

$$-\frac{4a^2}{x^2}$$

$$-\frac{12a}{x}+\frac{31}{3}$$

$$\frac{12a}{x}-9$$

$$\frac{4}{3}-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{9a^2}$$

$$-\frac{4}{3}+\frac{2x}{a}-\frac{x^2}{9a^2}$$

$$\left(\frac{4a}{x}-3\right)(-3)=-\frac{12a}{x}+9$$

$$\left(\frac{4a}{x}-6+\frac{x}{3a}\right)\frac{x}{3a}=\frac{4}{3}-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{9a^2}$$

La raíz cuadrada de un polinomio fraccionario puede extraerse pasando las letras que están en los denominadores a los numeradores y cambiándole el signo a sus exponentes. En el capítulo siguiente, después de estudiar los exponentes negativos, se extraen raíces cuadradas con este procedimiento.

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cuadrada de:

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{2x}{3}-2xy+\frac{25}{9}-\frac{50y}{3}+25y^2$ **R.** $\frac{x}{5}+\frac{5}{3}-5y$

2. $\frac{a^2}{x^2}-\frac{2x}{3a}+2\frac{1}{9}-\frac{2a}{3x}+\frac{x^2}{a^2}$ **R.** $\frac{a}{x}-\frac{1}{3}+\frac{x}{a}$

3. $\frac{x^4}{9}-\frac{4x^3y}{3}+\frac{62x^2y^2}{15}-\frac{4xy^3}{5}+\frac{y^4}{25}$ **R.** $\frac{x^2}{3}-2xy+\frac{y^2}{5}$

4. $\frac{a^2}{4}-ab+b^2+\frac{ac}{4}-\frac{bc}{2}+\frac{c^2}{16}$ **R.** $\frac{a}{2}-b+\frac{c}{4}$

5. $\frac{a^4}{16}-\frac{3a^2}{10}+\frac{9}{25}+\frac{a^2b^2}{18}-\frac{2b^2}{15}+\frac{b^4}{81}$ **R.** $\frac{a^2}{4}-\frac{3}{5}+\frac{b^2}{9}$

6. $\frac{9a^4}{16}-\frac{3a^3}{4}+\frac{29a^2}{20}-\frac{4a}{5}+\frac{16}{25}$ **R.** $\frac{3a^2}{4}-\frac{a}{2}+\frac{4}{5}$

7. $x^2+4x+2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$ **R.** $x+2-\frac{1}{x}$

8. $\frac{a^4}{16}+\frac{a^3b}{2}-ab^3+\frac{3a^2b^2}{4}+\frac{b^4}{4}$ **R.** $\frac{a^2}{4}+ab-\frac{b^2}{2}$

9. $\frac{x^2}{9}+\frac{79}{3}-\frac{20}{x}-\frac{10x}{3}+\frac{4}{x^2}$ **R.** $\frac{x}{3}-5+\frac{2}{x}$

10. $\frac{a^4}{4}-\frac{30}{a^2}-5a^2+28+\frac{9}{a^4}$ **R.** $\frac{a^2}{2}-5+\frac{3}{a^2}$

11. $\frac{x^4}{16}+\frac{3x^2y^2}{20}-\frac{x^3y}{4}+\frac{xy^3}{5}+\frac{y^4}{25}$ **R.** $\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{2}-\frac{y^2}{5}$

12. $\frac{a^4}{9}+\frac{2a^3}{3x}+\frac{a^2}{x^2}-\frac{2ax}{3}-2+\frac{x^2}{a^2}$ **R.** $\frac{a^2}{3}+\frac{a}{x}-\frac{x}{a}$

13. $\frac{4a^2b^2}{49x^2y^2}-\frac{2ab}{7xy}+\frac{21}{20}-\frac{7xy}{5ab}+\frac{49x^2y^2}{25a^2b^2}$ **R.** $\frac{2ab}{7xy}-\frac{1}{2}+\frac{7xy}{5ab}$

14. $\frac{9a^2}{x^2}-\frac{x}{3a}+\frac{65}{16}-\frac{3a}{2x}+\frac{4x^2}{9a^2}$ **R.** $\frac{3a}{x}-\frac{1}{4}+\frac{2x}{3a}$

15. $9x^4+30x^2+55+\frac{50}{x^2}+\frac{25}{x^4}$ **R.** $3x^2+5+\frac{5}{x^2}$

16. $\frac{4a^2}{25x^2}+1\frac{7}{12}-\frac{5x}{3a}-\frac{2a}{5x}+\frac{25x^2}{9a^2}$ **R.** $\frac{2a}{5x}-\frac{1}{2}+\frac{5x}{3a}$

17. $\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{5x^2}{3}-\frac{4x}{3}+\frac{4}{9}$ **R.** $\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{3}$

RAÍZ CÚBICA DE POLINOMIOS ENTEROS

Para extraer la raíz cúbica de un polinomio se aplica una regla práctica que establece lo siguiente:

1) Se ordena el polinomio dado.

2) Se extrae la raíz cúbica de su primer término, que será el primer término de la raíz; este término se eleva al cubo y se resta del polinomio.

3) Se bajan los tres términos siguientes del polinomio dado y se divide el primero de ellos por el triple del cuadrado del término ya encontrado de la raíz; el cociente de esta división es el segundo término de la raíz.

4) Se forman tres productos: 1o. El triple del cuadrado del primer término de la raíz por el segundo término. 2o. El triple del primer término por el cuadrado del segundo. 3o. El cubo del segundo término de la raíz. Estos productos se restan (cambiándoles los signos) de los tres términos del polinomio que se habían bajado.

5) Se bajan los términos que faltan del polinomio y se divide el primer término del residuo por el triple del cuadrado de la parte ya encontrada de la raíz. El cociente es el tercer término de la raíz.

Se forman tres productos: 1o. El triple del cuadrado del binomio que forman el 1o. y 2o. términos de la raíz por el 3er. término. 2o. El triple de dicho binomio por el cuadrado del tercer término. 3o. El cubo del tercer término de la raíz. Estos productos se restan (reduciendo antes los términos semejantes, si los hay) del residuo del polinomio. Si la diferencia es cero, la operación ha terminado. Si aún quedan términos en el residuo, se continúa con el procedimiento.

EJEMPLO DE RAÍZ CÚBICA DE POLINOMIOS ENTEROS

1) Hallar la raíz cúbica de $x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 36x + 8$

El polinomio está ordenado, y aplicando la regla anterior tenemos:

$\sqrt[3]{x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 36x + 8}$ | $x^2 - 3x + 2$

$-x^6$ | $3(x^2)^2 = 3x^4$

$-9x^5 + 33x^4 - 63x^3$

$9x^5 - 27x^4 + 27x^3$ | $3(x^2)^2(-3x) = -9x^5$

$6x^4 - 36x^3 + 66x^2 - 36x + 8$ | $3(x^2)(-3x)^2 = 27x^4$

$-\ 6x^4 + 36x^3 - 66x^2 + 36x - 8$ | $(-3x)^3 = -27x^3$

$3(x^2 - 3x)^2 = 3(x^4 - 6x^3 + 9x^2)$

$= 3x^4 - 18x^3 + 27x^2$

$3(x^2 - 3x)^2 \bullet 2 = 6x^4 - 36x^3 + 54x^2$

$3(x^2 - 3x) \bullet 2^2 = 12x^2 - 36x$

$2^3 = 8$

Explicación

Se encuentra la raíz cúbica de x^6 que es x^2; éste es el primer término de la raíz. x^2 se eleva al cubo y se resta de x^6. Bajamos los tres términos siguientes del polinomio; se halla el triple del cuadrado de x^2, que es $3x^4$, y se divide $-9x^5 \div 3x^4 = -3x$; éste es el segundo término de la raíz.

Se forman tres productos:

1) El triple del cuadrado de x^2 por $-3x$, que da $-9x^5$

2) El triple de x^2 por $(-3x)^2$, que da $27x^4$

3) El cubo de $-3x$, que da $-27x^3$

Estos productos se restan (cambiándoles los signos) de $-9x^5 + 33x^4 - 63x^3$; nos queda $6x^4 - 36x^3$ y bajamos los términos faltantes del polinomio.

Se obtiene el triple del cuadrado de la parte ya encontrada de la raíz, que es el binomio $x^2 - 3x$ y según se detalla arriba, el triple del cuadrado de este binomio nos da el trinomio $3x^4 - 18x^3 + 27x^2$.

Dividimos el primer término del residuo $6x^4$ entre el primer término de este trinomio y tenemos $6x^4 \div 3x^4 = 2$; éste es el tercer término de la raíz.

Se forman tres productos:

1) El triple del cuadrado del binomio $x^2 - 3x$ por 2, que nos da $6x^4 - 36x^3 + 54x^2$

2) El triple del binomio $x^2 - 3x$ por 2^2, que nos da $12x^2 - 36x$

3) El cubo de 2, que nos da 8. Estos productos se restan, (cambiándoles los signos) del residuo del polinomio y nos da cero.

Obsérvese que en los productos teníamos $54x^2$ semejante con $12x^2$, mismos que se reducen y nos da $66x^2$; cambiándole el signo para restar nos da $-66x^2$, que aparece debajo de $+66x^2$.

2) Hallar la raíz cúbica de

$8a^6 - 12a^5b + 45a^2b^4 - 35a^3b^3 - 30a^4b^2 + 27ab^5 - 27b^6$

En orden descendente con relación a la a y aplicando la regla anterior tenemos:

$\sqrt[3]{8a^6 - 12a^5b + 30a^4b^2 - 35a^3b^3 + 45a^2b^4 + 27ab^5 - 27b^6}$ | $2a^2 + ab - 3b^2$

$-8a^6$ | $3(2a^2)^2 = 12a^4$

$12a^5b - 30a^4b^2 - 35a^3b^3$

$-12a^5b - 60a^4b^2 - \ a^3b^3$ | $3(2a^2)^2 \bullet ab = 12a^5b$

$3(2a^2)(ab)^2 = 6a^4b^2$

$(ab)^3 = a^3b^3$

$-36a^4b^2 - 36a^3b^3 + 45a^2b^4 + 27ab^5 - 27b^6$

$36a^4b^2 + 36a^3b^3 - 45a^2b^4 - 27ab^5 + 27b^6$

$3(2a^2 + ab)^2 = 3(4a^4 + 4a^3b + a^2b^2)$

$= 12a^4 + 12a^3b + 3a^2b^2$

$3(2a^2 + ab)^2(-3b^2) = 36a^4b^2$

$36a^3b^3 - 9a^2b^4$ $3(2a^2 + ab)(-3b^2)^2 = 54a^2b^4 + 27ab^5$

$(-3b^2)^3 = 27b^6$

El segundo término de la raíz ab se obtiene dividiendo $12a^5b \div 12a^4 = ab$.

El tercer término de la raíz $-3b^2$ se obtiene dividiendo $-36a^4b^2 \div 12a^4 = -3b^2$

Los productos se forman según se explicó en el ejemplo anterior. Obsérvese que en los últimos productos tenemos $-9a^2b^4$ semejante con $54a^2b^4$, se reducen y nos dan $45a^2b^4$; cambiándole el signo resulta $-45a^2b^4$, que aparece debajo de $+45a^2b^4$

RAÍZ CÚBICA DE POLINOMIOS CON TÉRMINOS FRACCIONARIOS

Se aplica la misma regla de los enteros.

Ejemplo

Hallar la raíz cúbica de: $\frac{a^3}{x^3}+\frac{153x}{4a}-\frac{15a^2}{2x}-140-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3}$

Colocando en orden descendente a la *a* tendremos:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3}-\frac{15a^2}{x^2}+\frac{153a}{2x}-140+\frac{153x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3}} \quad \Big| \quad \frac{a}{x}-5+\frac{x}{2a}$$

$$-\frac{a^3}{x^3}$$

$$-\frac{15a^2}{x^2}+\frac{153a}{2x}-140$$

$$\frac{15a^2}{x^2}-\frac{75a}{x}+125$$

$$\frac{3a}{2x}-15+\frac{153x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3}$$

$$-\frac{3a}{2x}+15-\frac{153x}{4a}+\frac{15x^2}{4a^2}-\frac{x^3}{8a^3}$$

$$3\left(\frac{a}{x}\right)^2=\frac{3a^2}{x^2}$$

$$3\left(\frac{a}{x}\right)^2(-5)=-\frac{15a^2}{x^2}$$

$$3\left(\frac{a}{x}\right)(-5)^2=\frac{75a}{x}$$

$$(-5)^3=-125$$

$$3\left(\frac{a}{x}-5\right)^2=3\left(\frac{a^2}{x^2}-\frac{10a}{x}+25\right)$$

$$=\frac{3a^2}{x^2}-\frac{30a}{x}+75$$

$$3\left(\frac{a}{x}-5\right)^2\left(\frac{x}{2a}\right)=\frac{3a}{2x}-15+\frac{75x}{2a}$$

$$3\left(\frac{a}{x}-5\right)\left(\frac{x}{2a}\right)^2=\frac{3x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}$$

$$\left(\frac{x}{2a}\right)^3=\frac{x^3}{8a^3}$$

El segundo término de la raíz se obtiene dividiendo $-\frac{15a^2}{x^2}$ entre $\frac{3a^2}{x^2}$ y esta operación se verifica:

$$-\frac{15a^2}{x^2}\times\frac{x^2}{3a^2}=-5$$

El tercer término de la raíz $\frac{x}{2a}$ se obtiene dividiendo $\frac{3a}{2x}$ entre $\frac{3a^2}{x^2}$ y esta operación se verifica:

$$\frac{3a}{2x}\times\frac{x^2}{3a^2}=\frac{x}{2a}\text{, simplificando}$$

No debemos olvidar el simplificar cada vez que se haga una multiplicación.

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cúbica de:

1. $8 - 36y + 54y^2 - 27y^3$ **R.** $2 - 3y$

2. $64a^6 + 300a^2b^4 + 125b^6 + 240a^4b^2$ **R.** $4a^2 + 5b^2$

3. $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1$ **R.** $x^2 + x + 1$

4. $8x^6 - 12x^5 + 11x^3 - 6x^4 - 3x + 3x^2 - 1$ **R.** $2x^2 - x - 1$

5. $1 + 33x^2 - 9x + 66x^4 - 63x^3 - 36x^5 + 8x^6$ **R.** $1 - 3x + 2x^2$

6. $8 - 36x + 66x^2 - 63x^3 + 33x^4 - 9x^5 + x^6$ **R.** $2 - 3x + x^2$

7. $x^9 - 6x^8 + 12x^7 - 20x^6 + 48x^5 - 48x^4 + 48x^3 - 96x^2 - 64$ **R.** $x^3 - 2x^2 - 4$

8. $x^{12} - 3x^8 - 3x^{10} + 6x^4 + 11x^6 - 12x^2 - 8$ **R.** $x^4 - x^2 - 2$

9. $66x^4 - 63x^3 - 36x^5 + 33x^2 + 8x^6 - 9x + 1$ **R.** $2x^2 - 3x + 1$

10. $27a^6 - 135a^5 + 117a^4 + 235a^3 - 156a^2 - 240a - 64$ **R.** $3a^2 - 5a - 4$

11. $a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$ **R.** $a^2 - 2ab + b^2$

12. $x^6 + 42x^4y^2 - 117x^3y^3 - 9x^5y + 210x^2y^4 - 225xy^5 + 125y^6$ **R.** $x^2 - 3xy + 5y^2$

13. $a^{12} - 3a^{10} + 15a^8 + 60a^4 - 48a^2 - 25a^6 + 64$ **R.** $a^4 - a^2 + 4$

14. $a^9 - 3a^8 + 6a^7 - 10a^6 + 12a^5 - 12a^4 + 10a^3 - 6a^2 + 3a - 1$ **R.** $a^3 - a^2 + a - 1$

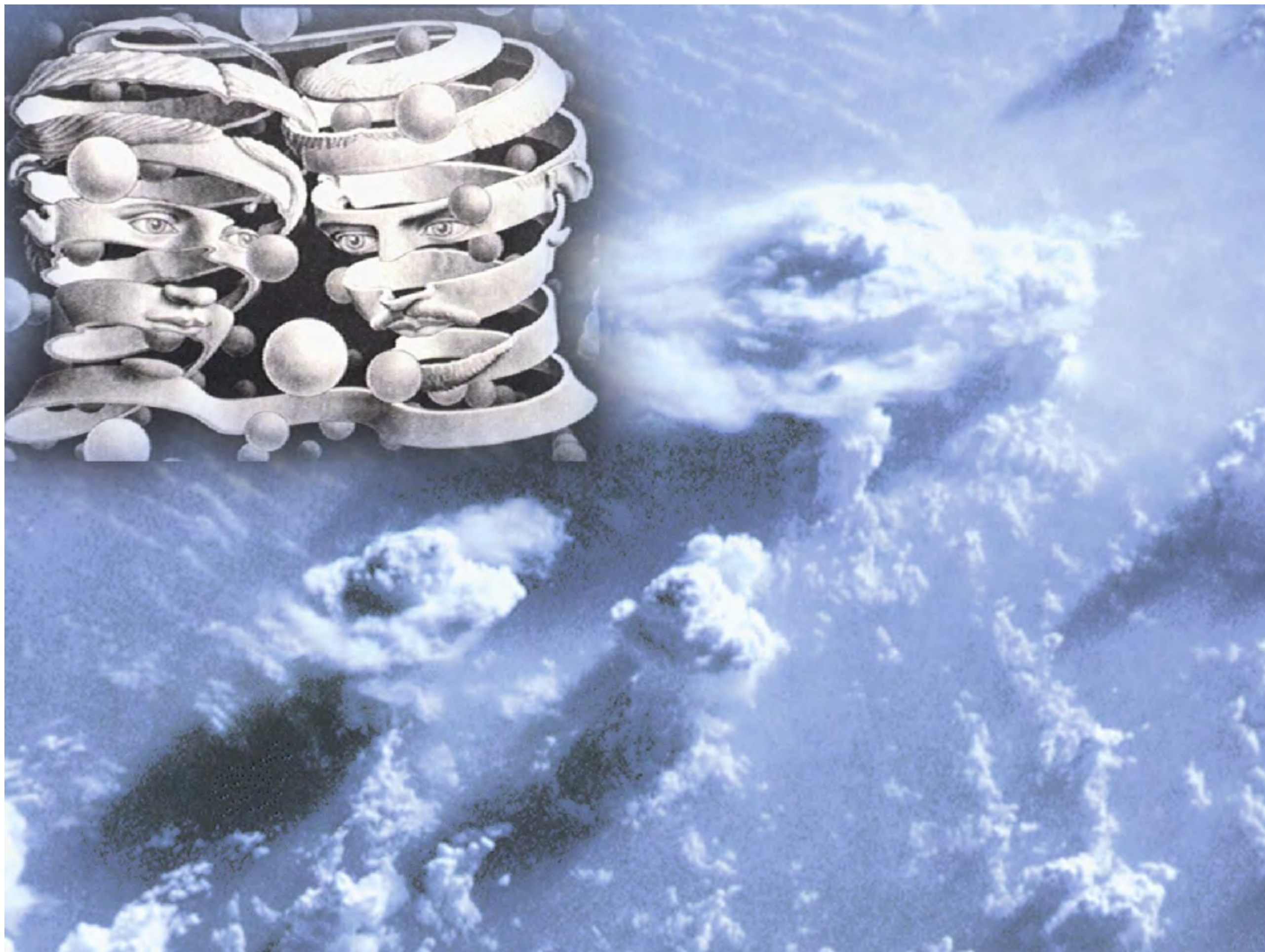
15. $a^9 + \frac{3a^8}{2} - \frac{7a^6}{8} - \frac{a^7}{4} + \frac{a^4}{6} + \frac{a^5}{12} - \frac{a^3}{27}$ **R.** $a^3 + \frac{a^2}{2} - \frac{a}{3}$

16. $\frac{8a^3}{27x^3} - \frac{2a^2}{3x^2} + \frac{a}{18x} + \frac{13}{24} - \frac{x}{36a} - \frac{x^2}{6a^2} - \frac{x^3}{27a^3}$ **R.** $\frac{2a}{3x} - \frac{1}{2} - \frac{x}{3a}$

17. $\frac{x^6}{8} - \frac{x^5}{4} + \frac{5x^4}{3} - \frac{55x^3}{27} + \frac{20x^2}{3} - 4x + 8$ **R.** $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 2$

18. $\frac{x^3}{8} - \frac{9x^2}{4} + 15x - 45 + \frac{60}{x} - \frac{36}{x^2} + \frac{8}{x^3}$ **R.** $\frac{x}{2} - 3 + \frac{2}{x}$

19. $\frac{a^3}{8b^3} + \frac{15a}{8b} - \frac{5}{2} - \frac{3a^2}{4a^2} + \frac{15b}{8a} - \frac{3b^2}{4a^2} + \frac{b^3}{8a^3}$ **R.** $\frac{a}{2b} - 1 + \frac{b}{2a}$



Conocido como el "Príncipe de las Matemáticas" Carl Friederich Gauss fue uno de los casos más extraordinarios en la historia de las ciencias. Realizó profundos estudios que lo llevaron a dejar constituida la Aritmética Superior. Demostró primero que nadie el llamado Teorema Fundamental del Álgebra.

CAPÍTULO XXXI

TEORÍA DE LOS EXPONENTES

Diferencia de una progresión aritmética o razón de una geométrica. Uno de los datos de la potenciación y de la exponenciación. El otro es la base.

Según la naturaleza del exponente la definición de la potencia es distinta a fin de conservar las propiedades formales de la misma.

Así se tiene exponente cero: $a^0 = 1$

Exponente natural: $a^n = \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet \bullet \bullet \bullet a}_{n \text{ factores}}$;

Exponente entero negativo: $\dfrac{a^{-n}}{a^n} = 1$, $a \neq 0$

ORIGEN DEL EXPONENTE CERO

El **exponente cero** proviene de dividir potencias iguales de la misma base, de esta forma:

$$a^2 \div a^2 = a^{2-2} = a^0$$
$$x^5 \div x^5 = x^{5-5} = x^0$$

Para interpretar el **exponente cero** se dice que toda cantidad elevada a cero equivale a 1. Decimos que $a^0 = 1$.

Según las leyes de la división, $a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0$, y por otra parte, como toda cantidad dividida por sí misma equivale a 1, tenemos que $a^n \div a^n = 1$.

Ahora bien, dos cosas (a^0 y 1) son iguales a una tercera ($a^n \div a^n$) y son iguales entre sí; por tanto,

$$a^0 = 1$$

ORIGEN DEL EXPONENTE FRACCIONARIO

El **exponente fraccionario** proviene de extraer una raíz a una potencia cuando el exponente de la cantidad subradical **no es divisible** por el índice de la raíz.

Sabemos que para extraer una raíz a una potencia se divide el exponente de la potencia por el índice de la raíz. Si el exponente no es divisible por el índice, hay que dejar indicada la división y se origina así el exponente fraccionario.

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$$

ORIGEN DEL EXPONENTE NEGATIVO

El **exponente negativo** proviene de dividir dos potencias de la misma base cuando el exponente del dividendo es **menor** que el del divisor. Así,

$$a^2 \div a^3 = a^{2-3} = a^{-1}$$
$$x^3 \div x^7 = x^{3-7} = x^{-4}$$

INTERPRETACIÓN DEL EXPONENTE FRACCIONARIO

Toda cantidad elevada a un exponente fraccionario equivale a una raíz cuyo índice es el denominador del exponente y la cantidad subradical es la misma cantidad elevada a la potencia que indica el numerador del exponente.

Decimos que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Se ha probado que

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; por tanto, recíprocamente, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplos

1) Expresar con signo radical $x^{\frac{3}{5}}, 2a^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}}$

$$x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3} \qquad 2a^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{a} \qquad x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[4]{y}$$

2) Expresar con exponente fraccionario $\sqrt[3]{a}$, $2\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt{x^3}\,\sqrt[5]{y^4}$

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \qquad 2\sqrt[4]{a^3} \qquad \sqrt{x^3}\,\sqrt[5]{y^4} = x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{4}{5}}$$

EJERCICIOS

Expresar con signo radical:

1. $x^{\frac{1}{3}}$ **R.** $\sqrt[3]{x}$
2. $xy^{\frac{1}{2}}$ **R.** $x\sqrt{y}$
3. $2a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{5}{2}}$ **R.** $2b^2\sqrt[5]{a^4}\sqrt{b}$
4. $8mn^{\frac{8}{3}}$ **R.** $8mn^2\sqrt[3]{n^2}$
5. $m^{\frac{3}{5}}$ **R.** $\sqrt[5]{m^3}$
6. $a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{3}{2}}$ **R.** $b^5\sqrt[2]{a^4}\sqrt{b}$
7. $4a^{\frac{3}{4}}$ **R.** $4\sqrt[4]{a^3}$
8. $x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{5}}$ **R.** $x\sqrt{x}\sqrt[4]{y}\sqrt[5]{z}$
9. $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{7}{4}}$ **R.** $bc\sqrt[4]{abc^3}$

Expresar con exponente fraccionario:

10. $\sqrt{a^5}$ **R.** $a^{\frac{5}{2}}$
11. $\sqrt[3]{m}$ **R.** $m^{\frac{1}{3}}$
12. $3\sqrt{x^7}\sqrt[5]{n^6}$ **R.** $3x^{\frac{7}{2}}y^{\frac{6}{5}}$
13. $3\sqrt[6]{m^7}\sqrt[5]{n^8}$ **R.** $3m^{\frac{7}{6}}n^{\frac{8}{5}}$
14. $\sqrt[3]{x^7}$ **R.** $x^{\frac{7}{3}}$
15. $2\sqrt[4]{x^5}$ **R.** $2x^{\frac{5}{4}}$
16. $2\sqrt[4]{ab^3c^5}$ **R.** $2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{5}{4}}$
17. $3\sqrt{a^m}\sqrt[3]{b^n}$ **R.** $3a^{\frac{m}{2}}b^{\frac{n}{3}}$

INTERPRETACIÓN DEL EXPONENTE NEGATIVO

Toda cantidad elevada a un exponente negativo equivale a una fracción cuyo numerador es 1, y su denominador es la misma cantidad con el exponente positivo.

Decimos que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

En efecto: $\frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{m-(m+n)} = a^{m-m-n} = a^{-n}$

y también $\frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m}{a^m \times a^n} = \frac{1}{a^n}$

y como dos cosas $\left(a^{-n} y \frac{1}{a^n}\right)$ iguales a una tercera $\left(\frac{a^m}{a^{m+n}}\right)$ son iguales entre sí, tenemos que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

De acuerdo con lo anterior, tenemos que:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} \qquad x^{-3}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^3 y^{\frac{1}{2}}}$$

Cualquier factor del numerador de una expresión se puede pasar al denominador y viceversa, con tal de **cambiarle el signo a su exponente.**

Siendo la expresión $\frac{a^{-2}b^{-3}}{x^{-4}y^{-5}}$, de acuerdo con el significado del exponente negativo tendremos:

$$\frac{a^{-2}b^{-3}}{x^{-4}y^{-5}} = \frac{\frac{1}{a^2} \times \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{x^4} \times \frac{1}{y^5}} = \frac{\frac{1}{a^2b^3}}{\frac{1}{x^4y^5}} = \frac{1}{a^2b^3} \times \frac{x^4y^5}{1} = \frac{x^4y^5}{a^2b^3}$$

De este modo nos queda:

$$\frac{a^{-2}b^{-3}}{x^{-4}y^{-5}} = \frac{x^4y^5}{a^2b^3} \text{ (1) y recíprocamente } \frac{x^4y^5}{a^2b^3} = \frac{a^{-2}b^3}{x^{-4}y^{-5}} \text{ (2)}$$

En la igualdad (1) vemos que los factores a^{-2} y b^{-2} que están en el numerador del primer miembro con exponentes negativos, pasan al denominador del segundo miembro con exponentes positivos, y los factores x^{-4} e y^{-5} que están en el denominador del primer miembro con exponentes negativos, pasan al numerador del segundo con exponentes positivos.

En la igualdad (2) vemos que los factores x^4 e y^5 que están en el numerador del primer miembro con exponentes positivos, pasan al denominador del segundo miembro con exponentes negativos, y los factores a^2 y b^3 que están con exponentes positivos en el denominador del primer miembro, pasan al numerador del segundo miembro con exponentes negativos.

TRANSFORMAR UNA EXPRESIÓN CON EXPONENTES NEGATIVOS EN UNA EXPRESIÓN EQUIVALENTE CON EXPONENTES POSITIVOS

Ejemplos

1) Expresar con exponentes positivos $x^{-1}y^{-2}y3ab^{-1}c^{-3}$

Según el número anterior, tenemos:

$$x^{-1}y^{-2} = \frac{1}{xy^2} \qquad 3ab^{-1}c^{-3} = \frac{3a}{bc^3}$$

2) Expresar con exponentes positivos

$$\frac{2}{a^{-2}b^{-3}} \text{ y } \frac{x}{2x^{-\frac{1}{2}}y^{-4}} \qquad \frac{2}{a^{-2}b^{-3}} = 2a^2b^3$$

$$\frac{x}{2x^{-\frac{1}{2}}y^{-4}} = \frac{xx^{\frac{1}{2}}y^4}{2} = \frac{x^{\frac{3}{2}}y^4}{2}$$

Aquí vemos que al pasar un factor del numerador al denominador, o viceversa, el coeficiente numérico no se pasa.

3) Expresar con exponentes positivos $\frac{2a^2b^{-5}c^{-7}}{5a^{-3}b^{-4}c^{-6}}$

$$\frac{2a^2b^{-5}c^{-7}}{5a^{-3}b^{-4}c^{-6}} = \frac{2a^2a^3b^4c^6}{5b^5c^7} = \frac{2a^5}{5bc}$$

4) Expresar con exponentes positivos $\frac{xy^{-\frac{1}{2}}z^{-3}}{4x^{-\frac{3}{4}}y^2z^{-\frac{2}{3}}}$

$$\frac{xy^{-\frac{1}{2}}z^{-3}}{4x^{-\frac{3}{4}}y^2z^{-\frac{2}{3}}} = \frac{xx^{\frac{3}{4}}z^{\frac{2}{3}}}{4y^2y^{\frac{1}{2}}z^3} = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{4y^{\frac{5}{2}}z^{\frac{7}{3}}}$$

EJERCICIOS

Expresa con exponentes positivos y simplifica:

1. a^2b^{-3} **R.** $\frac{a^2}{b^3}$

2. $5a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{4}}c^{-1}$ **R.** $\frac{5}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}}c}$

3. $\frac{c^2}{4b^{-\frac{1}{2}}x^3}$ **R.** $\frac{b^{\frac{1}{2}}c^2}{4x^3}$

4. $3x^{-5}$ **R.** $\frac{3}{x^5}$

5. $\frac{1}{2x^{-2}}$ **R.** $\frac{x^2}{2}$

6. $a^{-4}b^{-\frac{1}{2}}$ **R.** $\frac{1}{a^4b^{\frac{1}{2}}}$

7. $\frac{3}{x^{-1}y^{-5}}$ **R.** $3xy^5$

8. $\frac{2m^{-5}n^{-7}}{a^2m^3n^{-4}}$ **R.** $\frac{2}{a^2m^8n^3}$

9. $3y^{-2}y^{-\frac{1}{3}}$ **R.** $\frac{3}{x^2y^{\frac{1}{3}}}$

10. $\frac{2a^{-2}b^{-3}}{a^{-4}c^{-1}}$ **R.** $\frac{2a^2c}{b^3}$

11. $a^2b^{-1}c$ **R.** $\frac{a^2c}{b}$

EJERCICIOS

Pasa los factores literales del numerador al denominador:

1. $\frac{a^2}{b^2}$ **R.** $\frac{1}{a^{-2}b^2}$
2. $\frac{a^{-1}b^{-3}}{3}$ **R.** $\frac{1}{3ab^3}$
3. $\frac{m^{-3}}{5}$ **R.** $\frac{1}{5m^3}$
4. $a^{-\frac{2}{3}}b^3c^{-2}$ **R.** $\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}b^{-3}c^2}$
5. $\frac{3x^{-1}}{y^2}$ **R.** $\frac{3}{xy^2}$
6. $\frac{3c^{-\frac{2}{3}}}{7}$ **R.** $\frac{3}{7c^{\frac{2}{3}}}$
7. $\frac{3a^{-2}b^3}{c^4}$ **R.** $\frac{3}{a^2b^{-3}c^4}$
8. $\frac{4mn^2}{x^3}$ **R.** $\frac{4}{m^{-1}n^{-2}x^3}$

Pasa los factores literales del denominador al numerador:

1. $\frac{2}{a}$ **R.** $2a^{-1}$
2. $\frac{x^2y}{y^{-2}}$ **R.** x^2y^3
3. $\frac{3a^5}{7x^{-5}y^{-\frac{3}{4}}}$ **R.** $3a^5x^5y^{\frac{3}{4}}$
4. $\frac{3a}{b^2}$ **R.** $3ab^{-2}$

Expresa sin denominador:

1. $\frac{3a^2b^3}{a^{-1}x}$ **R.** $3a^3b^3x^{-1}$
2. $\frac{m^{-2}n^{-1}x^{-\frac{1}{2}}}{m^{-4}n^{-5}x^{-2}}$ **R.** $m^2n^4x^{\frac{3}{2}}$

EJERCICIOS SOBRE EXPRESIONES CON EXPONENTES CERO, NEGATIVOS O FRACCIONARIOS

Ejemplos

1) Expresar $\frac{a^{\frac{3}{4}}}{x^{-\frac{1}{2}}}$ con signo radical y exponentes positivos.

$$\frac{a^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{a^3}\sqrt{x}$$

2) Expresar $\frac{\sqrt[3]{a^{-2}}}{3\sqrt{x^{-5}}}$ con exponentes fraccionarios positivos.

$$\frac{\sqrt[3]{a^{-2}}}{3\sqrt{x^{-5}}} = \frac{a^{-\frac{2}{3}}}{3x^{-\frac{5}{2}}} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3a^{\frac{2}{3}}}$$

3) Hallar el valor de $125^{\frac{2}{3}}$

$$125^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{\left(5^3\right)^2} = 5^2 = 25$$

De $\sqrt[3]{\left(5^3\right)^2}$ pasamos a 5^2 porque el exponente 3 y la raíz cúbica se destruyen.

EJERCICIOS

Expresar con signo radical y exponentes positivos:

1. $x^{-\frac{1}{2}}$ **R.** $\frac{1}{\sqrt{x}}$
2. $2m^{-\frac{2}{5}}n^{\frac{3}{4}}$ **R.** $\frac{2\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[5]{m^2}}$
3. $\frac{3a^{-\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}$ **R.** $\frac{3}{a\sqrt{a}\sqrt[4]{x}}$
4. $\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3$ **R.** $\frac{1}{a\sqrt{a}}$
5. $\frac{1}{a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}$ **R.** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2}}$
6. $\frac{1}{4x^{\frac{1}{3}}}$ **R.** $\frac{1}{4\sqrt[3]{x}}$
7. $5a^{\frac{5}{7}}b^{-\frac{1}{3}}$ **R.** $\frac{5\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[3]{b}}$
8. $x^{-2}m^{-3}n^{-\frac{2}{5}}$ **R.** $\frac{1}{x^2m^3\sqrt[5]{n^2}}$

Expresar con exponentes positivos:

9. $\sqrt{a^{-3}}$ **R.** $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$
10. $\frac{3\sqrt[3]{m^2}}{5\sqrt[4]{n^{-3}}}$ **R.** $\frac{3m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{3}{4}}}{5}$
11. $\frac{1}{\sqrt{a^{-7}b^{-6}}}$ **R.** $a^{\frac{7}{2}}b^3$
12. $2\sqrt{x^{-3}y^{-4}}$ **R.** $\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}y^2}$
13. $a^{-\frac{3}{5}}\sqrt[4]{b^{-3}}$ **R.** $\frac{1}{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{3}{4}}}$

Encuentra el valor de:

14. $16^{\frac{3}{2}}$ **R.** 64
15. $8^{\frac{2}{3}}$ **R.** 4
16. $\frac{1}{9^{-3}}$ **R.** 729
17. $81^{\frac{3}{4}}$ **R.** 27
18. $8^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{3}{2}}$ **R.** 32
19. $9^{-\frac{5}{2}}$ **R.** $\frac{1}{243}$

VALOR NUMÉRICO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS CON EXPONENTES CERO, NEGATIVOS O FRACCIONARIOS

Ejemplos

1) Valor numérico de $a^{-2}b + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} + x^{\circ}$ para $a = 4$, $b = 16$, $x = 3$

Sustituyendo las letras por sus valores tendremos:

$$4^{-2}\bullet 16 + 4^{\frac{1}{2}}\bullet 16^{\frac{3}{4}} + 3^{\circ}$$

Ahora, el exponente negativo lo hacemos positivo, los exponentes fraccionarios los convertimos en raíces y teniendo presente que toda cantidad elevada a cero equivale a 1, tendremos:

$$\frac{1}{4^2}\bullet 16 + \sqrt{4}\bullet\sqrt[4]{16^3} + 1 = 1 + 2\bullet\sqrt[4]{\left(2^4\right)^3} + 1 =$$
$$= 1 + 2\bullet 2^3 + 1 = 1 + 16 + 1 = 18$$

2) Valor numérico de

$$\frac{3}{a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}} + x^{-\frac{3}{5}}y^0 - \frac{a^{-3}b^{\frac{1}{3}}}{2} + \frac{1}{b^0\sqrt[5]{x^4}}$$

para $a = 4$, $b = 8$, $x = 32$, $y = 7$

Sustituyendo, tendremos:

$$\frac{3}{4^{-\frac{1}{2}}\bullet 8^{\frac{2}{3}}} + 32^{-\frac{3}{5}}\bullet 7^0 - \frac{4^{-3}\bullet 8^{\frac{1}{3}}}{2} + \frac{1}{8^0\bullet\sqrt[5]{32^4}}$$

Ahora hacemos positivos los exponentes negativos:

$$\frac{3\bullet 4^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{2}{3}}} + \frac{7^0}{32^{\frac{3}{5}}}\quad\frac{8^{\frac{1}{3}}}{2\bullet 4^3} + \frac{1}{8^0\bullet\sqrt[5]{32^4}}$$

Los exponentes fraccionarios los convertimos en raíces, y recordando que toda cantidad elevada a cero equivale a 1, tendremos:

$$\frac{3\bullet\sqrt{4}}{\sqrt[3]{8^2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{32^3}} - \frac{\sqrt[3]{8}}{2\bullet 64} + \frac{1}{1\bullet\sqrt[5]{32^4}}$$
$$= \frac{3\bullet 2}{\sqrt[3]{\left(2^3\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{\left(2^5\right)^3}} - \frac{2}{2\bullet 64} + \frac{1}{\sqrt[5]{\left(2^5\right)^4}}$$
$$= \frac{6}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{64} + \frac{1}{2^4}$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} + \frac{1}{16} = 1\frac{43}{64}$$

EJERCICIOS

Encuentra el valor numérico de:

1. $a^{-2} + a^{-1}b^{\frac{1}{2}} + x^0$ para $a = 3, b = 4$ **R.** $1\frac{7}{9}$

2. $3x^{-\frac{1}{2}} + x^2y^{-3} + x^0y^{\frac{1}{3}}$ para $x = 4, y = 1$ **R.** $18\frac{1}{2}$

3. $2a^{-3}b + \frac{a^{-4}}{b^{-1}} + a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{4}}$ para $a = 4, b = 16$ **R.** $\frac{13}{16}$

4. $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{y^{-2}} + x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}} - x^0y^0 + \frac{x}{y^{\frac{4}{3}}}$ para $x = 16, y = 8$ **R.** $512\frac{1}{8}$

5. $\frac{x^0}{x^{-1}} + \frac{y^{-3}}{y^0} + 2x^0 + x^{\frac{3}{4}}y^{-2}$ para $x = 81, y = 3$ **R.** $86\frac{1}{27}$

6. $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{a^{-\frac{1}{4}}x^{-1}} + 3x^0$ para $a = 16, x = 8$ **R.** $27\frac{1}{8}$

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS CON EXPONENTES NEGATIVOS Y FRACCIONARIOS

La ley de los exponentes en la multiplicación, que nos dice que para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes, es general y se aplica igualmente cuando las cantidades que se multiplican tienen exponentes negativos o fraccionarios.

Ejemplos

1) $a_{-4} \times a = a_{-4+1} = a^{-3}$

2) $a_3 \times a_{-5} = a_{3+(-5)} = a_{3-5} = a^{-2}$

3) $a_{-1} \times a_{-2} = a_{-1-2} = a^{-3}$

4) $a_3 \times a_{-3} = a_{3-3} = a_0 = 1$

5) $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{5}{4}}$

6) $a^{-\frac{3}{4}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{4}}$

EJERCICIOS

Multiplica:

1. x^{2} por x^{-3} **R.** x^{-1}

2. $3m^{\frac{2}{5}}$ por $m^{-\frac{3}{5}}$ **R.** $3m^{-\frac{1}{5}}$

3. $x^{-3}y^{\frac{1}{2}}$ por $x^{-2}y^{-\frac{1}{2}}$ **R.** x^{-5}

4. a^{-2} por a^{-3} **R.** a^{-5}

5. $2a^{\frac{3}{4}}$ por $a^{-\frac{1}{2}}$ **R.** $2a^{\frac{1}{4}}$

6. $3a^{2}b^{\frac{1}{2}}$ por $2a^{-2}b^{-\frac{1}{2}}$ **R.** 6

7. x^{3} por x^{-3} **R.** 1

8. x^{-2} por $x^{-\frac{1}{3}}$ **R.** $x^{-\frac{7}{3}}$

9. $a^{3}b^{-1}$ por $a^{-2}b^{-2}$ **R.** ab^{-3}

10. $a^{\frac{1}{2}}$ por a **R.** $a^{\frac{3}{2}}$

11. $3n^{2}$ por $n^{-\frac{2}{3}}$ **R.** $3n^{\frac{4}{3}}$

12. $x^{\frac{1}{2}}$ por $x^{\frac{1}{4}}$ **R.** $x^{\frac{3}{4}}$

13. $4a^{-2}$ por $a^{-\frac{1}{2}}$ **R.** $4a^{-\frac{5}{2}}$

14. $a^{\frac{3}{4}}$ por $a^{\frac{1}{4}}$ **R.** a

15. a - 1b -2 por ab 2 **R.** 1

16. $a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}$ por $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}$ **R.** b

17. $m^{-\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}}$ por $m^{-\frac{1}{3}}n^{\frac{2}{3}}$ **R.** $m^{-1}n$

18. $2a^{-1}b^{\frac{3}{4}}$ por ab^{-2} **R.** $2b^{-\frac{5}{4}}$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS CON EXPONENTES NEGATIVOS Y FRACCIONARIOS

Ejemplos

1) Multiplicar $2x^{-1}+3x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$ por $x^{-1}-x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$

Los polinomios están en orden ascendente con relación a x , porque el exponente de x en el segundo término $-\frac{1}{2}$ es mayor que el exponente de x en el primer término - 1 y el tercer término y - 1 equivale a x 0y -1 y 0 es mayor que $-\frac{1}{2}$.

Tendremos:

$$2x^{-1}+3x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$$
$$x^{-1}-x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$$
$$2x^{-2}+3x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}y^{-1}$$
$$-2x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}-3x^{-1}y^{-1}-x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}$$
$$2x^{-1}y^{-1}+3x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}+y^{-2}$$
$$2x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}+y^{-2}$$

2) Multiplicar $ab^{-1}-a^{\frac{1}{3}}b+a^{\frac{2}{3}}$ por $a^{\frac{1}{3}}b^{-3}-b^{-2}-a^{-\frac{1}{3}}b^{-1}$

Colocando en orden descendente con relación a la *a* tendremos:

$$ab^{-1}+a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b$$
$$a^{\frac{1}{3}}b^{-3}-b^{-2}-a^{-\frac{1}{3}}b^{-1}$$
$$a^{\frac{4}{3}}b^{-4}+ab^{-3}-a^{\frac{2}{3}}b^{-2}$$
$$-ab^{-3}-a^{\frac{2}{3}}b^{-2}+a^{\frac{1}{3}}b^{-1}$$
$$-a^{\frac{2}{3}}b^{-2}-a^{\frac{1}{3}}b^{-1}+1$$
$$a^{\frac{4}{3}}b^{-4}-3a^{\frac{2}{3}}b^{-2}+1$$

El último 1 se obtiene porque el producto

$$\left(-a^{\frac{1}{3}}b\right)\times\left(-a^{-\frac{1}{3}}b^{-1}\right)=a^{0}b^{0}=1\times1=1$$

EJERCICIOS

Multiplica ordenando previamente:

1. $a^{-4}+2+3a^{-2}$ por $a^{-4}-a^{-2}+1$ **R.** $a^{-8}+2a^{-6}+a^{-2}+2$

2. $2a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}$ por $a^{-4}-a^{-2}+1$ **R.** $2a+a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{4}}-2$

3. $x^{2}-1+x^{-2}$ por $x^{2}+2-x^{-2}$ **R.** $x^{4}+x^{2}-2+3x^{-2}-x^{-4}$

4. $a^{\frac{2}{3}}-2+2a^{-\frac{2}{3}}$ por $3+a^{-\frac{2}{3}}-4a^{-\frac{4}{3}}$ **R.** $3a^{\frac{2}{3}}-5+10a^{-\frac{4}{3}}-8a^{-2}$

5. $x+x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}$ por $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-2$ **R.** $x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}+1$

6. $x^{\frac{3}{4}}+2x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{3}{4}}$ por $x^{\frac{1}{2}}-2+x^{-\frac{1}{2}}$ **R.** $x^{\frac{5}{4}}-4x^{\frac{1}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{3}{4}}$

7. $a^{2}b^{-1}+a+b$ por $a^{-2}b^{-2}+a^{-4}-a^{-3}b^{-1}$ **R.** $b^{-3}+a^{-2}b^{-1}+a^{-4}b$

8. $x^{-5}y^{-5}+x^{-1}y^{-1}+x^{-3}y^{-3}$ por $x^{-7}y^{-6}-x^{-5}y^{-4}+x^{-3}y^{-2}$

R. $x^{-12}y^{-11}+x^{-8}y^{-7}+x^{-4}y^{-3}$

9. $5a^{2}+4-3a-2a^{-1}$ por $3a-5a^{-1}+2$

R. $15a^{3}+a^{2}-19a+17-24a^{-1}+10a^{-2}$

10. $2x-3+x^{-1}+4x^{-2}$ *por* $x^{-1}-2x^{-2}+x^{3}$

R. $2-7x^{-1}+9x^{-2}-x^{-3}-7x^{-4}+4x^{-5}$

11. $x^{2}y^{-1}+5x^{3}y^{-3}+2x^{4}y^{-5}$ *por* $x^{-3}y^{3}-x^{-2}y+3x^{-1}y^{-1}$

R. $x^{-1}y^{2}+4+13x^{2}y^{-4}+6x^{3}y^{-6}$

12. $a^{\frac{3}{4}}b^{-3}+a^{\frac{1}{4}}b^{-2}-a^{-\frac{1}{4}}b^{-1}$ por $a^{\frac{1}{2}}b^{-1}-2+3a^{-\frac{1}{2}}b$

R. $a^{\frac{5}{4}}b^{-4}-a^{\frac{3}{4}}b^{-3}+5a^{-\frac{1}{4}}b^{-1}-3a^{-\frac{3}{4}}$

DIVISIÓN DE MONOMIOS CON EXPONENTES NEGATIVOS Y FRACCIONARIOS

La ley de los exponentes en la división, que nos dice que para dividir potencias de la misma base se resta el exponente del divisor del exponente del dividendo, se aplica igualmente cuando los exponentes de las cantidades que se dividen son negativos o fraccionarios.

Ejemplos

1) $a^{-1}\div a^{2}=a^{-1-2}=a^{-3}$

2) $a^{2}\div a^{-1}=a^{2-(-1)}=a^{2+1}=a^{3}$

3) $a^{-3}\div a^{-5}=a^{-3-(-5)}=a^{-3+5}=a^{2}$

4) $a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}=a^{-\frac{1}{4}}$

5) $a\div a^{-\frac{1}{3}}=a^{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=a^{1+\frac{1}{3}}=a^{-\frac{3}{4}}$

6) $a^{-\frac{1}{4}}\div a^{\frac{1}{2}}=a^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=a^{-\frac{3}{4}}$

EJERCICIOS

Divide:

1. $a^{\frac{2}{5}}$ entre $a^{-\frac{1}{5}}$ **R.** $a^{\frac{3}{5}}$

2. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ entre ab **R.** $a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}$

3. x^{-3} entre x^{2} **R.** x^{-5}

4. $m^{-\frac{3}{4}}$ entre $m^{\frac{1}{2}}$ **R.** $m^{-\frac{5}{4}}$

5. $a^{2}b^{-3}$ entre $a^{-1}b$ **R.** $a^{3}b^{-4}$

6. $m^{\frac{1}{2}}$ entre $m^{-\frac{1}{4}}$ **R.** $m^{\frac{3}{4}}$

7. a^{2} entre a^{-2} **R.** a^{4}

8. $a^{\frac{1}{3}}$ entre a **R.** $a^{-\frac{2}{3}}$

9. a^{2} entre a^{5} **R.** a^{-3}

10. $4x^{\frac{2}{5}}$ entre $2x^{-\frac{1}{5}}$ **R.** $2x^{\frac{3}{5}}$

11. x^{-3} entre x^{-7} **R.** x^{4}

12. a^{-3} entre $a^{-\frac{7}{4}}$ **R.** $a^{-\frac{5}{4}}$

13. $a^{\frac{1}{2}}$ entre a **R.** $a^{-\frac{1}{2}}$

14. $x^{-2}y^{-1}$ entre $x^{-3}y^{-2}$ **R.** $x\,y$

15. $x^{-4}y^{-5}$ entre $x^{2}y^{-1}$ **R.** $x^{-6}y^{-4}$

16. $x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$ entre $x^{-\frac{1}{2}}y^{-1}$ **R.** $y^{\frac{1}{3}}$

17. $m^{\frac{3}{4}}n^{-\frac{3}{4}}$ entre $m^{-\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{4}}$ **R.** $m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{3}{2}}$

18. $8x^{-2}y^{\frac{2}{5}}$ entre $4xy^{-\frac{1}{5}}$ **R.** $2x^{-3}y^{\frac{3}{5}}$

19. $a^{\frac{1}{3}}b$ entre $a^{-\frac{1}{4}}b^{-3}$ **R.** $a^{\frac{7}{12}}b^{4}$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS CON EXPONENTES NEGATIVOS Y FRACCIONARIOS

Ejemplos

1) Dividir $a^{-1}b^{-3} - 2ab^{-5} + a^{3}b^{-7}$ entre $a^{2}b^{-2} - 2a^{3}b^{-3} + a^{4}b^{-4}$

Tanto el dividendo como el divisor están en orden ascendente con relación a la a, y tendremos:

$$\begin{array}{l|l} a^{-1}b^{-3} \quad - 2ab^{-5} \quad + a^{3}b^{-7} & a^{2}b^{-2} - 2a^{3}b^{-3} + a^{4}b^{-4} \\ \hline - a^{-1}b^{-3} + 2b^{-4} - ab^{-5} & a^{-3}b^{-1} + 2a^{-2}b^{-2} + a^{-1}b^{-3} \\ \quad 2b^{-4} - 3ab^{-5} & \\ \quad - 2b^{-4} + 4ab^{-5} - 2a^{2}b^{-6} & \\ \qquad ab^{-5} - 2a^{2}b^{-6} + a^{3}b^{-7} & \\ \qquad - ab^{-5} + 2a^{2}b^{-6} - a^{3}b^{-7} & \end{array}$$

Al dividir $2b^{-4}$ entre $a^{2}b^{-2}$, como en el dividendo no hay a y en el divisor hay a^{2} debe tenerse presente que $2b^{-4}$ equivale a $2a^{0}b^{-4}$, y dividiendo esta cantidad entre $a^{2}b^{-2}$ tenemos:

$$2a^{0}b^{-4} \div a^{2}b^{-2} = 2a^{0-2}b^{-4+2} = 2a^{-2}b^{-2}$$

que es el segundo término del cociente.

2) Dividir $4x + 11 - x^{-\frac{1}{2}} + 7x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-1}$ entre $4x^{\frac{1}{2}} - 1 + x^{-\frac{1}{2}}$

Colocando en orden descendente con relación a la x tenemos:

$$\begin{array}{l|l} 4x + 7x^{\frac{1}{2}} + 11 - x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-1} & 4x^{\frac{1}{2}} - 1 + x^{-\frac{1}{2}} \\ \hline - 4x + x^{\frac{1}{2}} - 1 & x^{\frac{1}{2}} + 2 + 3x^{-\frac{1}{2}} \\ \quad 8x^{\frac{1}{2}} + 10 - x^{-\frac{1}{2}} & \\ \quad - 8x^{\frac{1}{2}} + 2 - 2x^{-\frac{1}{2}} & \\ \qquad 12 - 3x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-1} & \\ \qquad - 12 + 3x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-1} & \end{array}$$

Al efectuar la división de 12 entre $4x^{2}$ podemos considerar que 12 tiene x^{0} y tendremos:

$$12 \div 4x^{\frac{1}{2}} = 12x^{0} \div 4x^{\frac{1}{2}} = 3x^{0-\frac{1}{2}} = 3x^{-\frac{1}{2}}$$

O sea que si en el divisor hay una letra que no está en el dividendo, esa letra aparece en el cociente con su exponente y el signo cambiado.

EJERCICIOS

Divide ordenando previamente:

1. $m^{4} + m^{2} - 2 + 3m^{-2} - m^{-4}$ entre $m^{2} - 1 + m^{-2}$
R. $m^{2} + 2 - m^{-2}$

2. $2x - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{4}} + 3x^{\frac{1}{4}} - 2$ entre $x^{\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{4}} + 1$
R. $2x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{4}}$

3. $3m^{\frac{2}{3}} - 5 + 10m^{-\frac{4}{3}} - 8m^{-2}$ entre $3 + m^{-\frac{2}{3}} - 4m^{-\frac{4}{3}}$
R. $m^{\frac{2}{3}} - 2 + 2m^{-\frac{2}{3}}$

4. $a^{\frac{5}{4}} - 4a^{\frac{1}{4}} + 4a^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}}$ entre $a^{\frac{1}{2}} - 2 + a^{-\frac{1}{2}}$
R. $a^{\frac{3}{4}} + 2a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}}$

5. $4x^{-5} - x^{-3} - 7x^{-4} + 9x^{-2} - 7x^{-1} + 2$ entre $4x^{-2} + x^{-1} - 3 + 2x$
R. $x^{-3} - 2x^{-2} + x^{-1}$

6. $a^{-12}b^{-11} + a^{-8}b^{-7} + a^{-4}b^{-3}$ entre $a^{-7}b^{-6} - a^{-5}b^{-4} + a^{-3}b^{-2}$
R. $a^{-5}b^{-5} + a^{-3}b^{-3} + a^{-1}b^{-1}$

7. $m^{-4}n + m^{-2}n^{-1} + n^{-3}$ entre $m^{-4} + m^{-2}n^{-2} - m^{-3}n^{-1}$
R. $n + m + m^{2}n^{-1}$

8. $15a^{3} - 19a + a^{2} + 17 - 24a^{-1} + 10a^{-2}$ entre $3a + 2 - 5a^{-1}$
R. $5a^{2} - 3a + 4 - 2a^{-1}$

9. $m - 6m^{\frac{1}{5}} + m^{-\frac{3}{5}}$ entre $m^{\frac{3}{5}} + 2m^{\frac{1}{5}} - m^{-\frac{1}{5}}$
R. $m^{\frac{2}{5}} - 2 - m^{-\frac{2}{5}}$

10. $x^{-8} + x^{-2} + 2x^{-6} + 2$ entre $x^{-4} - x^{-2} + 1$
R. $x^{-4} + 3x^{-2} + 2$

POTENCIAS DE MONOMIOS CON EXPONENTES NEGATIVOS O FRACCIONARIOS

La regla establecida anteriormente para elevar un monomio a una potencia se aplica de la misma forma en el caso de que las letras del monomio estén afectadas por exponentes negativos o fraccionarios.

Ejemplos

1) $(a^{-2})^3 = a^{2\times 3} = a^{-6}$

2) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\times 2} = a^{\frac{2}{2}} = a$

3) $\left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^2 = a^{-\frac{3}{4}\times 2} = a^{-\frac{6}{4}} = a^{-\frac{3}{2}}$

4) $\left(2a^{-1}b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8a^{-1\times 3}b^{\frac{1}{3}\times 3} = 8a^{-3}b$

EJERCICIOS

Encuentra el valor de:

1. $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^3$ **R.** $x^{\frac{9}{4}}$

2. $\left(x^{-4}y^{\frac{1}{4}}\right)^2$ **R.** $x^{-8}y^{\frac{1}{2}}$

3. $\left(x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}\right)^6$ **R.** x^4y^{-3}

4. $\left(a^{-2}b^{-1}\right)^3$ **R.** $a^{-6}b^{-3}$

5. $\left(m^{\frac{3}{4}}\right)^2$ **R.** $m^{\frac{3}{2}}$

6. $\left(2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)^2$ **R.** $4ab^{\frac{2}{3}}$

7. $\left(3a^{\frac{2}{5}}b^{-3}\right)^5$ **R.** $243a^2b^{-15}$

8. $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2$ **R.** a^3

9. $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^3$ **R.** a^{-2}

10. $(a^{-1})^2$ **R.** a^{-2}

POTENCIAS DE POLINOMIOS CON EXPONENTES NEGATIVOS Y FRACCIONARIOS

Aplicaremos las reglas estudiadas para elevar un binomio a una potencia cualquiera y un polinomio al cuadrado o al cubo, para casos en que haya exponentes negativos y fraccionarios.

Ejemplos

1) Desarrollar $\left(3a^{-3} + b^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

$$\left(3a^{-3}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(3a^{-3}\right)^2 + 2\left(3a^{-3}\right)\left(b^{-\frac{1}{2}}\right) + \left(b^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 9a^{-6} + 6a^{-3}b^{-\frac{1}{2}} + b^{-1}$$

2) Desarrollar $\left(x^{\frac{2}{3}} - 4y^{-2}\right)^3$

$$\left(x^{\frac{2}{3}} - 4y^{-2}\right)^3 = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3 - 3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(4y^{-2}\right) + 3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)\left(4y^{-2}\right)^2 - \left(4y^{-2}\right)^3$$

$$= x^2 - 12x^{\frac{4}{3}}y^{-2} + 48x^{\frac{2}{3}}y^{-4} - 64y^{-6}$$

3) Desarrollar $\left(a^{-\frac{2}{3}} - \sqrt{b}\right)^5$

Al convertir la raíz en exponente fraccionario y aplicando la fórmula del binomio de Newton tendremos:

$$\left(a^{-\frac{2}{3}} - \sqrt{b}\right)^5 = \left(a^{-\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^5$$

$$= \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^5 - 5\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^4\left(b^{\frac{1}{2}}\right) + 10\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^3\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$-10\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^2\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3 + 5\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^4 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^5$$

$$= a^{-\frac{10}{3}} - 5a^{-\frac{8}{3}}b^{\frac{1}{2}} + 10a^{-2}b - 10a^{-\frac{4}{3}}b^{\frac{3}{2}} + 5a^{-\frac{2}{3}}b^2 - b^{\frac{5}{2}}$$

4) Elevar al cuadrado $x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}$

Aplicando la regla de la deducción para elevar un polinomio al cuadrado tenemos:

$$\left(x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^2 + \left(-x^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$+2\left(x^{\frac{3}{4}}\right)\left(-x^{\frac{1}{4}}\right) + 2\left(x^{\frac{3}{4}}\right)\left(x^{-\frac{1}{4}}\right) + 2\left(-x^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$= x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} - 2x + 2x^{\frac{1}{2}} - 2$$

$$= x^{\frac{3}{2}} - 2x + 3x^{\frac{1}{2}} - 2 + x^{-\frac{1}{2}}$$

EJERCICIOS

Desarrolla:

1. $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^2$

R. $a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$

2. $\left(\sqrt[3]{x^{2-}}3y^{-1}\right)^3$

R. $x^2-9x^{\frac{4}{3}}y^{-1}+27x^{\frac{2}{3}}y^{-2}-27y^{-3}$

3. $\left(x^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{1}{3}}\right)^2$

R. $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$

4. $\left(m^{\frac{2}{3}}+4n^{-\frac{3}{2}}\right)^3$

R. $m^2+12m^{\frac{4}{3}}n^{-\frac{3}{2}}+48m^{\frac{2}{3}}n^{-3}+64n^{-\frac{9}{2}}$

5. $(a^{-2}+3a^{-1}+2)^2$

R. $a^{-4}+64^{-3}+13a^{-2}+12a^{-1}+4$

6. $\left(m^{-\frac{1}{2}}+2m\right)^2$

R. $m^{-1}+4m^{\frac{1}{2}}+4m^2$

7. $\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+2x^{-\frac{1}{4}}\right)^2$

R. $x-2x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{4}}-4+4x^{-\frac{1}{2}}$

8. $(a^{-2}b^3-a^3b^{-2})^2$

R. $a^{-4}b^6-2ab+a^6b^{-4}$

9. $\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}\right)^3$

R. $x^{\frac{3}{2}}-3xy^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}-y$

10. $\left(a^{-\frac{1}{2}}+3+a^{\frac{1}{2}}\right)^2$

R. $a+6a^{\frac{1}{2}}+11+6a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}$

11. $\left(a^{-1}-3b^{-\frac{3}{4}}\right)^2$

R. $a^{-2}-6a^{-1}b^{-\frac{3}{4}}+9b^{-\frac{8}{3}}$

12. $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^4$

R. $a^2+4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}+6ab^{\frac{4}{3}}4a^{\frac{1}{2}}b^2+b^{\frac{8}{3}}$

13. $\left(a^{-2}+\sqrt{b}\right)^2$

R. $a^{-4}+2a^{-2}b^{\frac{1}{2}}+b$

RAÍCES DE POLINOMIOS CON EXPONENTES NEGATIVOS O FRACCIONARIOS

Ejemplo

Hallar la raíz cuadrada de $a-2a^{\frac{3}{4}}-4+4a^{-\frac{1}{2}}+4a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{2}}$

Ordenando el polinomio y aplicando la misma regla establecida para la raíz cuadrada de polinomios enteros tendremos:

$\sqrt{a-2a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}+4a^{\frac{1}{4}}-4+4a^{-\frac{1}{2}}}$ | $a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+2a^{\frac{1}{4}}$

$-a$

$\left(2a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}\right)\left(-a^{\frac{1}{4}}\right)=2a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}$

$-2a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}$

$2a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{2}}$

$\left(2a^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{4}}+2a^{-\frac{1}{4}}\right)2a^{-\frac{1}{4}}=4a^{\frac{1}{4}}-4+4a^{-\frac{1}{2}}$

$4a^{\frac{1}{4}}-4+4a^{-\frac{1}{2}}$

$-4a^{\frac{1}{4}}+4-4a^{-\frac{1}{2}}$

EJERCICIOS

Encuentra la raíz cuadrada de:

1. $x^{-4}+13x^{-2}+6x^{-3}+4+12x^{-1}$ **R.** $x^{-2}+3x^{-1}+2$

2. $a^2+4a^{\frac{7}{4}}-2a^{\frac{3}{2}}-12a^{\frac{5}{4}}+9a$ **R.** $a+2a^{\frac{3}{4}}-3a^{\frac{1}{2}}$

3. $m+11+6m^{-\frac{1}{2}}+6m^{\frac{1}{2}}+m^{-1}$ **R.** $m^{\frac{1}{2}}+3+m^{-\frac{1}{2}}$

4. $9a^{\frac{4}{3}}+25a^{\frac{2}{3}}-6a+16-8a^{\frac{1}{3}}$ **R.** $3a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+4$

5. $x^2-6x^{\frac{4}{3}}+15x^{\frac{2}{3}}-20+15x^{-\frac{2}{3}}-6x^{\frac{4}{3}}+x^{-2}$ **R.** $x^{\frac{2}{3}}-2+x^{-\frac{2}{3}}$

6. $a^{\frac{3}{2}}+3a^{\frac{5}{4}}-5a^{\frac{3}{4}}+3a^{\frac{1}{4}}-1$ **R.** $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}-1$

7. $a^{\frac{4}{5}}-8a^{\frac{3}{5}}+10a^{\frac{2}{5}}+24a^{\frac{1}{5}}+9$ **R.** $a^{\frac{2}{5}}-4a^{\frac{1}{5}}-3$

8. $mn^{-\frac{2}{3}}-4m^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{3}}+6-4m^{-\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{3}}+m^{-1}n^{\frac{2}{3}}$ **R.** $m^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{3}}-2+m^{-\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{3}}$

RAÍZ CUADRADA DE UN POLINOMIO CON TÉRMINOS FRACCIONARIOS USANDO LA FORMA DE EXPONENTES NEGATIVOS

Los exponentes negativos nos evitan tener que trabajar con fracciones algebraicas al extraer una raíz a polinomios con términos fraccionarios.

Ejemplo

Hallar la raíz cuadrada de $\frac{4a^2}{x^2}-\frac{8a}{x}+16-\frac{12x}{a}+\frac{9x^2}{a^2}$

Pasando los factores literales de los denominadores a los numeradores cambiándoles el signo a sus exponentes tendremos:

$$4a^2x^{-2} - 8ax^{-1} + 16 - 12a^{-1}x + 9a^{-2}x^2$$

Ahora extraemos la raíz cuadrada de este polinomio:

$$\sqrt{4a^2x^{-2}-8ax^{-1}+16-12a^{-1}x+9a^{-2}x^2} \qquad 2ax^{-1}-2+3a^{-1}x$$

$$-4a^2x^{-2}$$

$$(4ax^{-1}-2)(-2)=-8ax^{-1}+4$$

$$-8ax^{-1}+16$$

$$8ax^{-1}-\ 4$$

$$(4ax^{-1}-4+3a^{-1}x)3a^{-1}x$$

$$12-12a^{-1}x+9a^{-2}x^2 \qquad =12-12a^{-1}x+9a^{-2}x^2$$

$$-12+12a^{-1}x-9a^{-2}x^2$$

EJERCICIOS

Extrae la raíz cuadrada de los polinomios siguientes pasando los factores literales de los denominadores a los numeradores:

1. $\frac{a^2}{x^2}-\frac{2x}{3a}+2\frac{1}{9}-\frac{2a}{3x}+\frac{x^2}{a^2}$ **R.** $ax^{-1}-\frac{1}{3}+a^{-1}x$

2. $9m^4+30m^2+55+\frac{50}{m^2}+\frac{25}{m^4}$ **R.** $3m^2+5+5m^{-2}$

3. $x^2-4+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}$ **R.** $x-2x^{-1}+x^{-2}$

4. $a^4-10a+4+\frac{25}{a^2}-\frac{20}{a^3}+\frac{4}{a^4}$ **R.** $a^2-5a^{-1}+2a^{-2}$

5. $\frac{m^4}{4}-5m^2+28-\frac{30}{m^2}+\frac{9}{m^4}$ **R.** $\frac{m^2}{2}-5+3m^{-2}$

6. $\frac{a^4}{9}+\frac{2a^3}{3x}+\frac{a^2}{x^2}-\frac{2ax}{3}-2+\frac{x^2}{a^2}$ **R.** $\frac{a^2}{3}+ax^{-1}-a^{-1}x$



Agustin-Louis Cauchy, matemático francés. En Turín impartió la cátedra de matemáticas; fue uno de los precursores de la corriente rigorista en esta disciplina; comenzó la creación sistemática de la Teoría De Los Grupos, tan imprescindible en la matemática moderna; definió el concepto de las funciones.

CAPÍTULO XXXII

RADICALES

En general, el radical, es toda raíz indicada de una cantidad: si es exacta, tenemos una cantidad **racional**, y si no lo es, será **irracional**.

De este modo, $\sqrt{4a^2}$ es una cantidad racional y $\sqrt{3a}$ es irracional.

Las raíces indicadas inexactas o cantidades irracionales son los **radicales** propiamente dichos.

El índice de la raíz indica el **grado** de un radical: $\sqrt{x}$ es un radical de segundo grado, $\sqrt[3]{3a}$ es de tercer grado.

RADICALES SEMEJANTES

Los **radicales semejantes** son del mismo grado y tienen la misma cantidad subradical: $2\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$ y $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ son radicales **semejantes;** $2\sqrt{3}$ y $5\sqrt{2}$ no son semejantes.

Para **reducir** un radical se cambia su forma sin cambiar su valor.

EJERCICIOS

Simplificar:

1. $3\sqrt{48}$	**R.** $12\sqrt{3}$
2. $\sqrt[3]{16}$	**R.** $2\sqrt[3]{2}$
3. $2\sqrt[4]{243}$	**R.** $6\sqrt[4]{3}$
4. $\sqrt{50a^2b}$	**R.** $5a\sqrt{2b}$
5. $3\sqrt{81x^3y^4}$	**R.** $27xy^2\sqrt{x}$
6. $2\sqrt[3]{16x^2y^7}$	**R.** $4y^2\sqrt[3]{2x^2y}$
7. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{27m^2n^8}$	**R.** $2n^2\sqrt[3]{m^2n^2}$
8. $\sqrt[4]{80a^4b^5c^{12}}$	**R.** $2abc^3\sqrt[4]{5b}$
9. $\frac{1}{3a}\sqrt{27a^3m^7}$	**R.** $m^3\sqrt{3am}$
10. $\sqrt{9a+18b}$	**R.** $3\sqrt{a+2b}$
11. $\sqrt{\frac{1}{5}}$	**R.** $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
12. $3\sqrt{\frac{1}{6}}$	**R.** $\frac{1}{2}\sqrt{6}$
13. $2b^2\sqrt[3]{\frac{125}{4b^5}}$	**R.** $5\sqrt[3]{2b}$
14. $\sqrt{\frac{3}{8}}$	**R.** $\frac{1}{4}\sqrt{6}$
15. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$	**R.** $\frac{1}{6}\sqrt{6}$

SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

En esta operación se reduce el radical a su **más simple expresión:** cuando la cantidad subradical es entera y del menor grado posible.

Al simplificar radicales debe tenerse presente que para extraer una raíz a un producto se extrae dicha raíz a cada uno de sus factores, o sea, $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b} \bullet \sqrt[n]{c}$

Para la simplificación de radicales consideraremos dos casos:

Primer caso. La cantidad subradical contiene factores cuyo exponente es divisible por el índice.

Ejemplos

1) Simplificar $\sqrt{9^3}$

$$\sqrt{9a^3} = \sqrt{3^2 \bullet a^2 \bullet a} = \sqrt{3^2} \bullet \sqrt{a^2} \bullet \sqrt{a} = 3a\sqrt{a}$$

2) Simplificar $2\sqrt{75x^4y^5}$

$$2\sqrt{75x^4y^5} = 2\sqrt{3 \bullet 5^2 \bullet x^4 \bullet y^4 \bullet y} = 2\sqrt{5^2} \bullet \sqrt{x^4} \bullet \sqrt{y^4} \bullet \sqrt{3y}$$
$$= 2 \bullet 5 \bullet x^2 \bullet y^2 \bullet \sqrt{3y} = 10x^2y^2\sqrt{3y}$$

En la práctica las raíces no se indican, sino que una vez arreglados los factores de la cantidad subradical, aquellos cuyo exponente sea divisible por el índice se sacan del radical dividiendo su exponente por el índice.

3) Simplificar $\frac{1}{7}\sqrt{49x^3y^7}$

$$\frac{1}{7}\sqrt{49x^3y^7} = \frac{1}{7}\sqrt{7^2 \bullet x^2 \bullet x \bullet y^6 \bullet y} = \frac{1}{7} \times 7xy^3\sqrt{xy} = xy^3\sqrt{xy}$$

4) Simplificar $4\sqrt[3]{250a^3b^8}$

$$4\sqrt[3]{250a^3b^8} = 4\sqrt[3]{2 \bullet 5^3 \bullet a^3 \bullet b^6 \bullet b^2} = 4 \bullet 5ab^2\sqrt[3]{2b^2} = 20ab^2\sqrt[3]{2b^2}$$

5) Simplificar $\frac{3}{2}\sqrt[4]{32mn^8}$

$$\frac{3}{2}\sqrt[4]{32mn^8} = \frac{3}{2}\sqrt[4]{2^4 \bullet 2mn^8} = \frac{3}{2} \times 2n^2\sqrt[4]{2m} = 3n^2\sqrt[4]{2m}$$

6) Simplificar $\sqrt{3x^2 - 12x + 12}$

$$\sqrt{3x^2 12x + 12} = \sqrt{3(x^2 - 4x + 4)} = \sqrt{3(x-2)^2} = (x-2)\sqrt{3}$$

7) Simplificar $\sqrt{\frac{2}{3}}$

Cuando la cantidad subradical es una fracción y el denominador es irracional, se multiplican ambos términos de la fracción por la cantidad necesaria para que el denominador tenga raíz exacta. Así,

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \bullet 3}{3 \bullet 3}} = \sqrt{\frac{6}{3^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

8) Simplificar $2\sqrt{\frac{9a^2}{8x^5}}$

$$2\sqrt{\frac{9a^2}{8x^5}} = 2\sqrt{\frac{3^2 \bullet a^2}{2^3 \bullet x^5}} = 2\sqrt{\frac{3^2 \bullet a^2 \bullet 2 \bullet x}{2^4 \bullet x^6}} = \frac{2 \bullet 3a}{4x^3}\sqrt{2x} = \frac{3a}{2x^3}\sqrt{2x}$$

SEGUNDO CASO PARA SIMPLIFICAR UN RADICAL

Los factores de la cantidad subradical y el índice tienen un divisor común.

Ejemplos

1) Simplificar $\sqrt[4]{4a^2}$

$$\sqrt[4]{4a^2} = \sqrt[4]{2^2 \bullet a^2} = 2^{\frac{2}{4}} \bullet a^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \bullet a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2a}$$

Prácticamente se divide el índice y los exponentes de los factores por su divisor común 2.

2) Simplificar $\sqrt[6]{9a^2x^2}$

$$\sqrt[6]{9a^2x^2} = \sqrt[6]{3^2 \bullet a^2x^2} = 3^{\frac{2}{6}} \bullet a^{\frac{2}{6}} \bullet x^{\frac{2}{6}} = 3^{\frac{1}{3}} \bullet a^{\frac{1}{3}} \bullet x^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{3ax}$$

Aquí dividimos prácticamente el índice 6 y los exponentes de los factores entre 2.

3) Simplificar $\sqrt[15]{27x^3y^6}$

$$\sqrt[15]{27x^3y^6} = \sqrt[15]{3^3 \bullet x^3 \bullet y^6} = \sqrt[5]{3xy^2}$$

Aquí dividimos el índice 15 y los exponentes de los factores por 3.

EJERCICIOS

Simplificar:

1.	$\sqrt[30]{32x^{10}y^{15}}$	**R.** $xy\sqrt{2y}$
2.	$\sqrt[12]{64m^6n^{18}}$	**R.** $n\sqrt{2mn}$
3.	$\sqrt[6]{343a^9x^{12}}$	**R.** $ax^2\sqrt{7a}$
4.	$\sqrt[15]{m^{10}n^{15}x^{20}}$	**R.** $nx\sqrt[3]{m^2x}$
5.	$\sqrt[4]{9}$	**R.** $\sqrt{3}$
6.	$\sqrt[6]{4}$	**R.** $\sqrt[3]{2}$
7.	$\sqrt[9]{27}$	**R.** $\sqrt[3]{3}$
8.	$\sqrt[8]{16}$	**R.** $\sqrt{2}$
9.	$3\sqrt[12]{64}$	**R.** $3\sqrt{2}$
10.	$\sqrt[4]{25a^2b^4}$	**R.** $\sqrt{5ab}$
11.	$5\sqrt[6]{49a^2b^4}$	**R.** $5\sqrt[3]{7ab^2}$
12.	$\sqrt[8]{81x^4y^8}$	**R.** $y\sqrt{3x}$

INTRODUCCIÓN DE CANTIDADES BAJO EL SIGNO RADICAL

En esta operación se procede de manera inversa a la simplificación de radicales, de modo que para introducir el coeficiente de un radical bajo el signo radical **se eleva dicho coeficiente a la potencia que indique el índice.**

Ejemplos

1) Introducir el coeficiente de $2\sqrt{a}$ bajo el signo radical

$$2\sqrt{a} = \sqrt{2^2 \bullet a} = \sqrt{4a}$$

Si el coeficiente de un radical es 1, el radical es entero. Así, $\sqrt{4a}$ es un radical entero.

2) Hacer entero el radical $3a^2\sqrt[3]{a^2b}$

$$3a^2\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{\left(3a^2\right)^3 \bullet a^2b} = \sqrt[3]{27a^8b}$$

3) Hacer entero $(1-a)\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$

$$(1-a)\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} = \sqrt{\frac{(1-a)^2(1+a)}{1-a}} = \sqrt{(1-a)(1+a)} =$$

$$\sqrt{1-a^2}$$

EJERCICIOS

Convierte en enteros los siguientes radicales:

1.	$3\sqrt{5}$	**R.** $\sqrt{45}$
2.	$5a\sqrt{b}$	**R.** $\sqrt{25a^2b}$
3.	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	**R.** $\sqrt{\frac{1}{2}}$
4.	$3a\sqrt{2a^2}$	**R.** $\sqrt{18a^4}$
5.	$ab^2\sqrt[3]{a^2b}$	**R.** $\sqrt[3]{a^5b^7}$
6.	$4m\sqrt[3]{2m^2}$	**R.** $\sqrt[3]{128m^5}$
7.	$2a\sqrt[4]{8ab^3}$	**R.** $\sqrt[4]{128a^5b^3}$
8.	$(x+1)\sqrt{\frac{2x}{x+1}}$	**R.** $\sqrt{2x^2+2x}$
9.	$(a+b)\sqrt{\frac{a}{a+b}}$	**R.** $\sqrt{a^2+ab}$

REDUCCIÓN DE RADICALES AL ÍNDICE MÍNIMO COMÚN

Mediante esta operación se pueden convertir radicales de distinto índice en radicales equivalentes con el mismo índice, para lo cual se aplica la siguiente regla:

Se busca el m. c. m. de los índices, que será el índice común, y se eleva cada cantidad subradical a la potencia resultante de dividir el índice común entre el índice de su radical.

Ejemplos

1) Reducir al índice mínimo común $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{2}$

El m. c. m. de los índices 2, 3 y 4 es 12, que es el índice común. Tendremos:

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$
$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$$
$$\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}$$

Si dividimos el índice común 12 entre el índice de $\sqrt{3}$ que es 2, nos da como cociente 6 y elevamos la cantidad subradical 3 a la sexta potencia; dividimos 12 ÷ 3 = 4 y elevamos la cantidad subradical 5 a la cuarta potencia; dividimos 12 ÷ 4 = 3 y elevamos la cantidad subradical 2 al cubo.

Los radicales obtenidos son equivalentes a los radicales dados. Expresando los radicales con exponentes fraccionarios y reduciendo éstos al mínimo común denominador, tenemos:

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$
$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$$
$$\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}$$

2) Reducir al índice mínimo común $\sqrt{2a}$, $\sqrt[3]{3a^2b}$ y $\sqrt[6]{15a^3x^2}$

El m. c. m. de los índices 2, 3 y 6 es 6, que dividido entre cada índice nos da:

$$\sqrt{2a} = \sqrt[6]{(2a)^3} = \sqrt[6]{8a^3}$$
$$\sqrt[3]{3a^2b} = \sqrt[6]{(3a^2b)^2} = \sqrt[6]{9a^4b^2}$$
$$\sqrt[6]{15a^3x^2} = \sqrt[6]{15a^3x^2}$$

Lo anterior nos permite conocer las magnitudes relativas de varios radicales de distinto índice.

Ejemplo

Colocar $\sqrt[4]{7}, \sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{5}$ en orden decreciente de magnitudes.

Los reducimos al índice mínimo común y las magnitudes relativas de las cantidades subradicales nos dan las magnitudes relativas de los radicales.

$$\sqrt[4]{7} = \sqrt[12]{7^3} = \sqrt[12]{343}$$
$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$
$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$$

Por tanto, el orden decreciente de magnitudes es $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[4]{7}$

EJERCICIOS

Reduce al índice mínimo común:

1. $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[6]{7}$
R. $\sqrt[12]{64}, \sqrt[12]{81}, \sqrt[12]{125}, \sqrt[12]{49}$

2. $\sqrt{5x}, \sqrt[3]{4x^2y}, \sqrt[6]{7a^3b}$
R. $\sqrt[6]{125x^3}, \sqrt[6]{16x^4y^2}, \sqrt[6]{7a^3b}$

3. $\sqrt[4]{8a^2x^3}, \sqrt[6]{3a^5m^4}$
R. $\sqrt[12]{512a^6x^9}, \sqrt[12]{9a^{10}m^8}$

4. $\sqrt[3]{x^2}, \sqrt[6]{2y^3}, \sqrt[9]{5m^7}$
R. $\sqrt[18]{x^{12}}, \sqrt[18]{8y^9}, \sqrt[18]{25m^{14}}$

5. $\sqrt[4]{3a}, \sqrt[5]{2b^2}, \sqrt[10]{7x^3}$
R. $\sqrt[20]{243a^5}, \sqrt[20]{16b^8}, \sqrt[20]{49x^6}$

6. $2\sqrt[3]{a}, 3\sqrt{2b}, 4\sqrt[4]{5x^2}$
R. $2\sqrt[12]{a^4}, 3\sqrt[12]{64b^6}, 4\sqrt[12]{125x^6}$

7. $\sqrt{5}, \sqrt[3]{2}$
R. $\sqrt[6]{125}, \sqrt[6]{4}$

8. $\sqrt{2}, \sqrt[4]{3}$
R. $\sqrt[4]{4}, \sqrt[4]{3}$

9. $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{8}$
R. $\sqrt[12]{729}, \sqrt[12]{256}, \sqrt[12]{512}$

EJERCICIOS

Escribe en orden decreciente de magnitudes:

1. $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{32}$	**R.** $\sqrt[6]{32}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}$
2. $\sqrt[4]{3}, \sqrt[5]{4}, \sqrt[10]{15}$	**R.** $\sqrt[5]{4}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[10]{15}$
3. $\sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{3}, \sqrt[9]{9}$	**R.** $\sqrt[9]{9}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{3}$
4. $\sqrt{5}, \sqrt[3]{2}$	**R.** $\sqrt{5}, \sqrt[3]{2}$
5. $\sqrt[6]{15}, \sqrt[4]{7}$	**R.** $\sqrt[4]{7}, \sqrt[6]{15}$
6. $\sqrt{11}, \sqrt[3]{43}$	**R.** $\sqrt[3]{43}, \sqrt{11}$

REDUCCIÓN DE RADICALES SEMEJANTES

Para reducir los radicales semejantes (del mismo grado y que tienen igual cantidad subradical) se debe buscar la suma algebraica de los coeficientes y anotar el resultado como coeficiente de la parte radical común.

Ejemplos

1) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3+5)\sqrt{2} = (8\sqrt{2})$

2) $9\sqrt{3} - 11\sqrt{3} = (9-11)\sqrt{3} = -2(\sqrt{3})$

3) $4\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + \sqrt{2} = (4-7+1)\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

4) $\frac{2}{3}\sqrt{7} - \frac{3}{4}\sqrt{7} = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)\sqrt{7} = -\frac{1}{12}(\sqrt{7})$

EJERCICIOS

Reduce estos radicales:

1. $7\sqrt{2} - 15\sqrt{2}$	**R.** $-8\sqrt{2}$
2. $4\sqrt{3} - 20\sqrt{3} + 19\sqrt{3}$	**R.** $3\sqrt{3}$
3. $\frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$	**R.** $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
4. $\sqrt{5} - 22\sqrt{5} - 8\sqrt{5}$	**R.** $-29\sqrt{5}$
5. $\frac{3}{5}\sqrt{3} - \sqrt{3}$	**R.** $-\frac{2}{5}\sqrt{3}$

SUMA Y RESTA DE RADICALES

La regla dice que se simplifican los radicales dados; se reducen los radicales semejantes y a continuación se escriben los radicales no semejantes con su propio signo.

Ejemplos

1) Simplificar $2\sqrt{450}+9\sqrt{12}-7\sqrt{48}-3\sqrt{98}$

Tenemos:

$$2\sqrt{450}=2\sqrt{2\bullet 3^2\bullet 5^2}=30\sqrt{2}$$
$$9\sqrt{12}=9\sqrt{2^2\bullet 3}=18\sqrt{3}$$
$$7\sqrt{48}=7\sqrt{2^4\bullet 3}=28\sqrt{3}$$
$$3\sqrt{98}=3\sqrt{2\bullet 7^2}=21\sqrt{2}$$

Entonces:

$$2\sqrt{450}+9\sqrt{12}-7\sqrt{48}-3\sqrt{98}=$$
$$30\sqrt{2}+18\sqrt{3}-28\sqrt{3}-21\sqrt{2}=$$
$$(30-21)\sqrt{2}+(18-28)\sqrt{3}=9\sqrt{2}-10\sqrt{3}$$

2) Simplificar $\frac{1}{4}\sqrt{80}-\frac{1}{6}\sqrt{63}-\frac{1}{9}\sqrt{180}$

$$\frac{1}{4}\sqrt{80}=\frac{1}{4}\sqrt{2^4\bullet 5}=\frac{1}{4}\times 4\sqrt{5}=\sqrt{5}$$
$$\frac{1}{6}\sqrt{63}=\frac{1}{6}\sqrt{3^2\bullet 7}=\frac{1}{6}\times 3\sqrt{7}=\frac{1}{2}\sqrt{7}$$
$$\frac{1}{9}\sqrt{180}=\frac{1}{9}\sqrt{2^2\bullet 3^2\bullet 5}=\frac{1}{9}\times 6\sqrt{5}=\frac{2}{3}\sqrt{5}$$

Entonces:

$$\frac{1}{4}\sqrt{80}-\frac{1}{6}\sqrt{63}-\frac{1}{9}\sqrt{180}=\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{7}-\frac{2}{3}\sqrt{5}$$
$$=\left(1-\frac{2}{3}\right)\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{7}=\frac{1}{3}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{7}$$

3) Simplificar $\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{1}{12}}$

Racionalizamos los denominadores:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{3}{3^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{4\bullet 5}{5^2}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$
$$\sqrt{\frac{1}{12}}=\sqrt{\frac{1}{2^2\bullet 3}}=\sqrt{\frac{3}{2^2\bullet 3^2}}=\frac{1}{6}\sqrt{3}$$

Entonces:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{2}{5}\sqrt{5}+\frac{1}{6}\sqrt{3}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

4) Simplificar $2\sqrt{2ab^2}+\sqrt{18a^3}-(a+2b)\sqrt{2a}=$

$$2\sqrt{2ab^2}=2b\sqrt{2a}$$
$$\sqrt{18a^3}=3a\sqrt{2a}$$

Entonces:

$$2\sqrt{2ab^2}+\sqrt{18a^3}-(a+2b)\sqrt{2a}=$$
$$2b\sqrt{2a}+3a\sqrt{2a}-(a+2b)\sqrt{2a}$$
$$=(2b+3a-a-2b)\sqrt{2a}=2a\left(\sqrt{2a}\right)$$

Cabe aclarar que los radicales no semejantes no se pueden reducir y para sumarlos simplemente se forma una expresión algebraica que los contenga a todos sin alterarles los signos. Así, la suma de $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ *y* $3\sqrt{5}$ es $\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$

5) Simplificar $3\sqrt[3]{108}+\frac{1}{10}\sqrt[3]{625}+\frac{1}{7}\sqrt[3]{1715}-4\sqrt[3]{32}$

Tenemos:

$$3\sqrt[3]{108}=3\sqrt[3]{2^2\bullet 3^3}=9\sqrt[3]{4}$$
$$\frac{1}{10}\sqrt[3]{625}=\frac{1}{10}\sqrt[3]{5\bullet 5^3}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}$$
$$\frac{1}{7}\sqrt[3]{1715}=\frac{1}{7}\sqrt[3]{5\bullet 7^3}=\sqrt[3]{5}$$
$$4\sqrt[3]{32}=4\sqrt[3]{2^3\bullet 2^2}=8\sqrt[3]{4}$$

Entonces:

$$3\sqrt[3]{108}+\frac{1}{10}\sqrt[3]{625}+\frac{1}{7}\sqrt[3]{1715}-4\sqrt[3]{32}=$$
$$9\sqrt[3]{4}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5}-8\sqrt[3]{4}=$$
$$=\sqrt[3]{4}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{5}$$

EJERCICIOS

Simplificar:

1. $\sqrt{80}-2\sqrt{252}+3\sqrt{405}-3\sqrt{500}$ **R.** $\sqrt{5}-12\sqrt{7}$

2. $7\sqrt{450}-4\sqrt{320}+3\sqrt{80}-5\sqrt{800}$ **R.** $5\sqrt{2}-20\sqrt{5}$

3. $\sqrt{45}-\sqrt{27}-\sqrt{20}$ **R.** $\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

4. $\sqrt{175}+\sqrt{243}-\sqrt{63}-2\sqrt{75}$ **R.** $2\sqrt{7}-\sqrt{3}$

5. $\frac{1}{2}\sqrt{12}-\frac{1}{3}\sqrt{18}+\frac{3}{4}\sqrt{48}+\frac{1}{6}\sqrt{72}$ **R.** $4\sqrt{3}$

6. $\frac{3}{4}\sqrt{176}-\frac{2}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{8}\sqrt{320}+\frac{1}{5}\sqrt{275}$ **R.** $4\sqrt{11}-\sqrt{5}$

7. $\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{4}}$ **R.** $\frac{5}{6}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

8. $2\sqrt{700}-15\sqrt{\frac{1}{45}}+4\sqrt{\frac{5}{16}}-56\sqrt{\frac{1}{7}}$ **R.** $12\sqrt{7}$

9. $\sqrt{25ax^2}+\sqrt{49b}-\sqrt{9ax^2}$ **R.** $2x\sqrt{a}+7\sqrt{b}$

10. $2\sqrt{m^2n}-\sqrt{9m^2n}+\sqrt{16mn^2}-\sqrt{4mn^2}$ **R.** $2n\sqrt{m}-m\sqrt{n}$

11. $a\sqrt{320x}-7\sqrt{5a^2x}-(a-4b)\sqrt{5x}$ **R.** $4b\sqrt{5x}$

12. $\sqrt{9x-9}+\sqrt{4x-4}-5\sqrt{x-1}$ **R.** 0

13. $2\sqrt{a^4x+3ya^4y}-a^2\sqrt{9x+27y}+\sqrt{25a^4x+75a^4y}$ **R.** $4a^2\sqrt{x+3y}$

14. $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{16}$ **R.** $\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}$

15. $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{1029}-\sqrt[3]{625}$ **R.** $7\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{5}$

16. $2\sqrt[3]{250}-4\sqrt[3]{24}-6\sqrt[3]{160}+\sqrt[3]{2187}$ **R.** $\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{2}$

17. $5\sqrt[3]{48}-3\sqrt[3]{3645}-2\sqrt[3]{384}+4\sqrt[3]{1715}$ **R.** $2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{5}$

18. $\sqrt[3]{81}-3\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{686}+2\sqrt[3]{648}$ **R.** $7\sqrt[3]{2}$

19. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{24}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{375}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{128}$ **R.** $4\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{2}$

20. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2}{27}}$ **R.** $\frac{1}{6}\sqrt[3]{2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES

La regla para multiplicar radicales del mismo índice dice que se multiplican los coeficientes así como las cantidades subradicales entre sí, colocando este último producto bajo el signo radical común y entonces se simplifica el resultado.

Probaremos que:

$$a\sqrt[n]{m}\times b\sqrt[n]{x}=ab\sqrt[n]{mx}$$

En efecto:

$$a\sqrt[n]{m}\times b\sqrt[n]{x}=am^{\frac{1}{n}}\times bx^{\frac{1}{n}}=$$
$$abm^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}}=ab(mx)^{\frac{1}{n}}=ab\sqrt[n]{mx}$$

Ejemplos

1) Multiplicar $2\sqrt{15}$ por $3\sqrt{10}$

$$2\sqrt{15}\times 3\sqrt{10}=2\times 3\sqrt{15\times 10}=6\sqrt{150}$$
$$=6\sqrt{2\bullet 3\bullet 5^2}=30\sqrt{6}$$

2) Multiplicar $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ por $\frac{3}{4}\sqrt[3]{6}$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}\times\frac{3}{4}\sqrt[3]{6}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\sqrt[3]{24}=$$
$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2^3\bullet 3}=\sqrt[3]{3}$$

EJERCICIOS

Multiplicar:

1. $\frac{1}{2}\sqrt{14}\times\frac{2}{7}\sqrt{21}$ **R.** $\sqrt{6}$

2. $\sqrt[3]{12}\times\sqrt[3]{9}$ **R.** $3\sqrt[3]{4}$

3. $\sqrt{3}\times\sqrt{6}$ **R.** $3\sqrt{2}$

4. $5\sqrt{21}\times 2\sqrt{3}$ **R.** $30\sqrt{7}$

5. $5\sqrt{12}\times 3\sqrt{75}$ **R.** 450

6. $3\sqrt{6}\times\sqrt{14}\times 2\sqrt{35}$ **R.** $84\sqrt{15}$

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES COMPUESTOS

El producto de un radical compuesto por uno simple se obtiene como el producto de un polinomio por un monomio, y el producto de dos radicales compuestos se encuentra como el producto de dos polinomios.

Ejemplos

1) Multiplicar $3\sqrt{x}-2$ por $\sqrt{x}$

$$\left(3\sqrt{x}-2\right)\sqrt{x}=3\sqrt{x^2}-2\sqrt{x}=3x-2\sqrt{x}$$

2) Multiplicar $3\sqrt{2}-5\sqrt{3}$ por $4\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$\begin{array}{l} 3\sqrt{2}-\ 5\sqrt{3} \\ 4\sqrt{2}+\ \ \sqrt{3} \\ \hline 12\sqrt{2^2}-20\sqrt{6} \\ \quad +\ 3\sqrt{6}-5\sqrt{3^2} \\ \hline 24-17\sqrt{6}-15=9-17\sqrt{6} \end{array}$$

3) Multiplicar $\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}$ por $3\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$$\begin{array}{l} \sqrt{x+1}\quad +2\sqrt{x} \\ 3\sqrt{x+1}\quad -\ \sqrt{x} \\ \hline 3\sqrt{(x+1)^2}\quad +6\sqrt{x^2+x} \\ \qquad\qquad -\ \sqrt{x^2+x}-2\sqrt{x^2} \\ \hline 3x+3+5\sqrt{x^2+x}-2x=x+3+5\sqrt{x^2+x} \end{array}$$

EJERCICIOS

Multiplicar:

1. $\sqrt{a}+\sqrt{a+1}$ por $\sqrt{a}+2\sqrt{a+1}$ **R.**$3a+2+3\sqrt{a^2+a}$
2. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ por $\sqrt{2}$ **R.**$2-\sqrt{6}$
3. $7\sqrt{5}+5\sqrt{3}$ por $2\sqrt{3}$ **R.**$30+14\sqrt{15}$
4. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ por $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ **R.**$\sqrt{6}-4$
5. $\sqrt{5}+5\sqrt{3}$ por $2\sqrt{5}+3\sqrt{3}$ **R.**$55+13\sqrt{15}$
6. $3\sqrt{7}-2\sqrt{3}$ por $5\sqrt{3}+4\sqrt{7}$ **R.**$54+7\sqrt{21}$
7. $\sqrt{a}-2\sqrt{x}$ por $3\sqrt{a}+\sqrt{x}$ **R.**$3a-2x-5\sqrt{ax}$
8. $7\sqrt{5}-11\sqrt{7}$ por $5\sqrt{5}-8\sqrt{7}$ **R.**$791-111\sqrt{35}$
9. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ por $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ **R.**$\sqrt{10}-\sqrt{15}-1$
10. $\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{5}$ por $\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ **R.**$5\sqrt{15}-\sqrt{6}-21$

MULTIPLICACIÓN CON DISTINTO ÍNDICE

Según la regla, se reducen los radicales al índice mínimo común y se multiplican como radicales del mismo índice.

Ejemplo

Multiplicar $5\sqrt{2a}$ por $\sqrt[3]{4a^2b}$

Al reducir los radicales al índice mínimo común tendremos:

$$5\sqrt{2a}=5\sqrt[6]{(2a)^3}=5\sqrt[6]{8a^3}$$

$$\sqrt[3]{4a^2b}=\sqrt[6]{\left(4a^2b\right)^2}=\sqrt[6]{16a^4b^2}$$

Entonces $5\sqrt{2a}\times\sqrt[3]{4a^2b}=5\sqrt[6]{8a^3}\times\sqrt[6]{16a^4b^2}=5\sqrt[6]{128a^7b^2}$

$$=5\sqrt[6]{2^6\bullet 2\bullet a^6\bullet a\bullet b^2}=10a\sqrt[6]{2ab^2}$$

EJERCICIOS

Multiplicar:

1. $\sqrt{x}\times\sqrt[3]{2x^2}$ **R.**$x\sqrt[6]{4x}$
2. $3\sqrt{2ab}\times 4\sqrt[4]{8a^3}$ **R.**$24a\sqrt[4]{2ab^2}$
3. $\sqrt[3]{9x^2y}\times\sqrt[6]{81x^5}$ **R.**$3x\sqrt[6]{9x^3y^2}$
4. $\sqrt[3]{a^2b^2}\times 2\sqrt[4]{3a^3b}$ **R.**$2a\sqrt[12]{27a^5b^{11}}$
5. $\sqrt[4]{25x^2y^3}\times\sqrt[6]{125x^2}$ **R.**$5\sqrt[12]{x^{10}y^9}$
6. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4m^2}\times\frac{3}{4}\sqrt[5]{16m^4n}$ **R.**$m\sqrt[15]{128m^7n^3}$
7. $\sqrt{\frac{1}{2x}}\times\sqrt[3]{x^2}$ **R.**$\frac{1}{2}\sqrt[6]{8x}$

DIVISIÓN DE RADICALES

La regla para dividir radicales del mismo índice dice que se dividen los coeficientes así como las cantidades subradicales entre sí, colocando este último, cociente bajo el signo radical común y entonces se simplifica el resultado.

Probaremos que $a\sqrt[n]{m}\div b\sqrt[n]{x}=\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{m}{x}}$

El cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo:

$$\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{m}{x}}\times b\sqrt[n]{x}=\frac{ab}{b}\sqrt[n]{\frac{mx}{x}}=a\sqrt[n]{m}$$

Ejemplo

Dividir $2\sqrt[3]{81x^7}$ entre $3\sqrt[3]{3x^2}$

$$2\sqrt[3]{81x^7}\div 3\sqrt[3]{3x^2}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{81x^7}{3x^2}}=$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{27x^5}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3^3\bullet x^3\bullet x^2}=2x\sqrt[3]{x^2}$$

EJERCICIOS

Dividir:

1. $4\sqrt{6} \div 2\sqrt{3}$ — **R.** $2\sqrt{2}$
2. $2\sqrt{3a} \div 10\sqrt{a}$ — **R.** $\frac{1}{5}\sqrt{3}$
3. $\frac{1}{2}\sqrt{3xy} \div \frac{3}{4}\sqrt{x}$ — **R.** $\frac{2}{3}\sqrt{3y}$
4. $\sqrt{75x^2y^3} \div 5\sqrt{3xy}$ — **R.** $y\sqrt{x}$
5. $3\sqrt[3]{16a^5} \div 4\sqrt[3]{2a^2}$ — **R.** $\frac{3a}{2}$
6. $\frac{5}{6}\sqrt{\frac{1}{2}} \div \frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ — **R.** $\frac{1}{8}\sqrt{3}$

DIVISIÓN DE RADICALES DE DISTINTO ÍNDICE

La regla indica que se reducen los radicales al índice mínimo común y se dividen como radicales del mismo índice.

Ejemplo

Dividir $\sqrt[3]{4a^2}$ entre $\sqrt[4]{2a}$

$$\sqrt[3]{4a^2} = \sqrt[12]{\left(4a^2\right)^4} = \sqrt[12]{256a^8}$$
$$\sqrt[4]{2a} = \sqrt[12]{(2a)^3} = \sqrt[12]{8a^3}$$

Entonces: $\sqrt[3]{4a^2} \div \sqrt[4]{2a} =$

$$\sqrt[12]{256a^8} \div \sqrt[12]{8a^3} = \sqrt[12]{\frac{256a^8}{8a^3}} = \sqrt[12]{32a^5}$$

EJERCICIOS

Dividir:

1. $\frac{1}{2}\sqrt{2x} \div \frac{1}{4}\sqrt[6]{16x^4}$ — **R.** $\frac{1}{x}\sqrt[6]{32x^5}$
2. $\sqrt[3]{2} \div \sqrt{2}$ — **R.** $\frac{1}{2}\sqrt[6]{32}$
3. $\sqrt{9x} \div \sqrt[3]{3x^2}$ — **R.** $\frac{1}{x}\sqrt[6]{81x^5}$
4. $\sqrt[3]{8a^3b} \div \sqrt[4]{4a^2}$ — **R.** $\sqrt[6]{8a^3b^2}$

POTENCIACIÓN DE RADICALES

Aquí la regla indica que para elevar un radical a una potencia se eleva a dicha potencia el coeficiente y la cantidad subradical, y luego se simplifica el resultado.

Probaremos que $\left(a\sqrt[n]{b}\right)^m = a^m\sqrt[n]{b^m}$

En efecto:

$$\left(a\sqrt[n]{b}\right)^m = \left(ab^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^m b^{\frac{m}{n}} = a^m\sqrt[n]{b^m}$$

Ejemplos

1) Elevar $5\sqrt{2}$ y $4\sqrt{3}$ al cuadrado

$$\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 5^5 \bullet \sqrt{2^2} = 25 \bullet 2 = 50$$
$$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 4^2 \bullet \sqrt{3^2} = 16 \bullet 3 = 48$$

Aquí observamos que la raíz cuadrada y el exponente 2 se destruyen.

2) Elevar $\sqrt[5]{4x^2}$ al cubo

$$\left(\sqrt[5]{4x^2}\right)^3 = \sqrt[5]{\left(4x^2\right)^3} = \sqrt[5]{64x^6} =$$
$$\sqrt[5]{2 \bullet 2^5 \bullet x \bullet x^5} = 2x\sqrt[5]{2x}$$

3) Elevar al cuadrado $\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$

Se desarrolla igual que el cuadrado de un binomio:

$$\left(\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2} + \left(3\sqrt{2}\right)^2 =$$
$$= 5 - 6\sqrt{10} + 18 = 23 - 6\sqrt{10}$$

EJERCICIOS

Desarrollar:

1. $\left(4a\sqrt{2x}\right)^2$ — **R.** $32a^2x$
2. $\left(2\sqrt{x+1}\right)^2$ — **R.** $4x + 4$
3. $\left(3\sqrt{x-a}\right)^2$ — **R.** $9x - 9a$
4. $\left(4\sqrt[6]{9a^3b^4}\right)^3$ — **R.** $192ab^2\sqrt{a}$
5. $\left(4\sqrt{2}\right)^2$ — **R.** 32
6. $\left(2\sqrt{3}\right)^2$ — **R.** 12
7. $\left(5\sqrt{7}\right)^2$ — **R.** 175
8. $\left(2\sqrt[3]{4}\right)^2$ — **R.** $8\sqrt[3]{2}$

RADICACIÓN DE RADICALES

Según la regla, para extraer una raíz a un radical se multiplica el índice del radical por el índice de la raíz y luego se simplifica el resultado.

Probaremos que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

En efecto

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

Ejemplos

1) Hallar la raíz cuadrada de $\sqrt[3]{4a^2}$

$$\sqrt{\sqrt[3]{4a^2}} = \sqrt[6]{4a^2} = \sqrt[6]{2^2 \bullet a^2} = \sqrt[3]{2a}$$

2) Hallar la raíz cúbica de $5\sqrt{5}$

Dado que el coeficiente 5 no tiene raíz cúbica exacta, lo introducimos bajo el signo de la raíz cuadrada y tendremos:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^2 \bullet 5}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$$

9. $\left(3\sqrt[3]{2a^2b}\right)^4$ — **R.** $162a^2b\sqrt[3]{2a^2b}$
10. $\left(\sqrt[4]{8x^3}\right)^2$ — **R.** $2x\sqrt{2x}$
11. $\left(\sqrt[5]{81ab^3}\right)^3$ — **R.** $9b\sqrt[5]{9a^3b^4}$
12. $\left(\sqrt[6]{18}\right)^3$ — **R.** $3\sqrt{2}$

Elevar al cuadrado:

13. $5\sqrt{7} - 6$ — **R.** $211 - 60\sqrt{7}$
14. $\sqrt{x} + \sqrt{x-1}$ — **R.** $2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x}$
15. $\sqrt{x+1} - 4\sqrt{x}$ — **R.** $17x + 1 - 8\sqrt{x^2 + x}$
16. $\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$ — **R.** $2a - 2\sqrt{a^2 - 1}$
17. $2\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}$ — **R.** $10x - 3 + 4\sqrt{4x^2 - 1}$
18. $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ — **R.** $5 - 2\sqrt{6}$
19. $4\sqrt{2} + 3$ — **R.** $35 + 8\sqrt{6}$
20. $\sqrt{5} - \sqrt{7}$ — **R.** $12 - 2\sqrt{35}$

EJERCICIOS

Simplificar:

1. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}}$ R. $\sqrt[4]{3a}$
2. $\sqrt{3\sqrt[5]{3}}$ R. $\sqrt[5]{27}$
3. $\sqrt[4]{\sqrt{a^4b^6}}$ R. $\sqrt[4]{a^2b^3}$
4. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ R. $\sqrt[3]{x^2}$
5. $\sqrt{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$ R. $\sqrt[3]{a+b}$
6. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$ R. $\sqrt[3]{a}$
7. $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ R. $\sqrt{2}$
8. $\sqrt[4]{\sqrt{81}}$ R. $\sqrt{3}$
9. $\sqrt{\sqrt{3a}}$ R. $\sqrt[4]{3a}$
10. $\sqrt{\sqrt[3]{4a^2}}$ R. $\sqrt[3]{2a}$
11. $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ R. $\sqrt{2}$
12. $\sqrt{\sqrt[4]{25a^2}}$ R. $\sqrt[4]{5a}$

RACIONALIZACIÓN

Para racionalizar el denominador de una fracción hay que convertir una fracción cuyo denominador sea irracional en una fracción equivalente con denominador racional.

Al racionalizar el denominador irracional de una fracción, desaparece todo signo radical del denominador. Veamos dos casos:

Primer caso

Racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es monomio.

La regla dice que se multiplican los dos términos de la fracción por el radical del mismo índice que el denominador, de modo que multiplicado por éste dé como producto una cantidad racional.

Ejemplos

1) Racionalizar el denominador de $\frac{3}{\sqrt{2x}}$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por $\sqrt{2x}$ y tenemos:

$$\frac{3}{\sqrt{2x}}=\frac{3\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\bullet\sqrt{2x}}=\frac{3\sqrt{2x}}{\sqrt{2^2\bullet x^2}}=\frac{3\sqrt{2x}}{2x}=\frac{3}{2x}\sqrt{2x}$$

2) Racionalizar el denominador de $\frac{2}{\sqrt[3]{9a}}$.

El denominador $\sqrt[3]{9a}=\sqrt[3]{3^2\bullet a}$. Para que en el denominador quede una raíz exacta hay que multiplicar $\sqrt[3]{3^2\bullet a}$ por $\sqrt[3]{3a^2}$ y para que la fracción no varíe se multiplica también el numerador por $\sqrt[3]{3a^2}$.Tendremos:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9a}}=\frac{2\sqrt[3]{3a^2}}{\sqrt[3]{3^2a}\bullet\sqrt[3]{3a^2}}=\frac{2\sqrt[3]{3a^2}}{\sqrt[3]{3^3\bullet a^3}}=\frac{2\sqrt[3]{3a^2}}{3a}=\frac{2}{3a}\sqrt[3]{3a^2}$$

3) Racionalizar el denominador de $\frac{5}{3\sqrt[4]{2x^2}}$

Se multiplican ambos términos por $\sqrt[4]{2^3\bullet x^2}$, porque esta cantidad multiplicada por $\sqrt[4]{2x^2}$, da una raíz exacta, y tenemos:

$$\frac{5}{3\sqrt[4]{2x^2}}=\frac{5\sqrt[4]{2^3\bullet x^2}}{3\sqrt[4]{2x^2}\bullet\sqrt[4]{2^3x^2}}=\frac{5\sqrt[4]{8x^2}}{3\sqrt[4]{2^4\bullet x^4}}=\frac{5\sqrt[4]{8x^2}}{3\bullet 2\bullet x}=\frac{5}{6x}\sqrt[4]{8x^2}$$

EJERCICIOS

Racionalizar el denominador de:

1. $\frac{1}{\sqrt[5]{8a^4}}$ R. $\frac{1}{2a}\sqrt[5]{4a}$
2. $\frac{5n^2}{3\sqrt{mn}}$ R. $\frac{5n}{3m}\sqrt{mn}$
3. $\frac{1}{5a\sqrt[4]{25x^3}}$ R. $\frac{1}{25ax}\sqrt[4]{25x}$
4. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ R. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
5. $\frac{5}{\sqrt{2}}$ R. $\frac{5}{2}\sqrt{2}$
6. $\frac{3}{4\sqrt{5}}$ R. $\frac{3}{20}\sqrt{5}$
7. $\frac{2a}{\sqrt{2ax}}$ R. $\frac{1}{x}\sqrt{2ax}$
8. $\frac{5}{\sqrt[3]{4a^2}}$ R. $\frac{5}{2a}\sqrt[3]{2a}$
9. $\frac{1}{\sqrt[3]{9x}}$ R. $\frac{1}{3x}\sqrt[3]{3x^2}$
10. $\frac{3}{\sqrt[4]{9a}}$ R. $\frac{1}{a}\sqrt[4]{9a^3}$
11. $\frac{6}{5\sqrt[3]{3x}}$ R. $\frac{2}{5x}\sqrt[3]{9x^2}$
12. $\frac{x}{\sqrt[4]{27x^2}}$ R. $\frac{1}{3}\sqrt[4]{3x^2}$

EXPRESIONES CONJUGADAS

Dos expresiones que contienen radicales de segundo grado, como $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ y $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ o $a+\sqrt{b}$ y $a-\sqrt{b}$ que sólo difieren en el signo que une sus términos, son **cojugadas**.

Así, la expresión conjugada de $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ es $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$; la de $4-3\sqrt{5}$ es $4+3\sqrt{5}$

El producto de dos expresiones conjugadas es racional. Así,

$$\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=18-5=13$$

Segundo caso

Racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es un binomio que contiene radicales de segundo grado.

Según la regla, se multiplican ambos términos de la fracción por la conjugada del denominador y se simplifica el resultado.

Ejemplos

1) Racionalizar el denominador de $\dfrac{4-\sqrt{2}}{2+5\sqrt{2}}$

Al multiplicar ambos términos de la fracción por $2-5\sqrt{2}$ tenemos:

$$\frac{4-\sqrt{2}}{2+5\sqrt{2}}=\frac{\left(4-\sqrt{2}\right)\left(2-5\sqrt{2}\right)}{\left(2+5\sqrt{2}\right)\left(2-5\sqrt{2}\right)}=\frac{8-22\sqrt{2}+10}{2^2-\left(5\sqrt{2}\right)^2}=\frac{18-22\sqrt{2}}{4-50}$$

$$=\frac{18-22\sqrt{2}}{-46}=\left(\text{simplificación}\right)=\frac{9-11\sqrt{2}}{-23}=\frac{11\sqrt{2}-9}{23}$$

Como el denominador – 23 era negativo, le cambiamos el signo al numerador y al denominador de la fracción. También se puede cambiar el signo del denominador y de la fracción para quedar

$$-\frac{9-11\sqrt{2}}{23}$$

2) Racionalizar el denominador de $\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{4\sqrt{5}-3\sqrt{7}}$

Multiplicamos ambos términos por la conjugada del denominador y tenemos:

$$\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{4\sqrt{5}-3\sqrt{7}}=\frac{\left(\sqrt{5}+2\sqrt{7}\right)\left(4\sqrt{5}+3\sqrt{7}\right)}{\left(4\sqrt{5}-3\sqrt{7}\right)\left(4\sqrt{5}+3\sqrt{7}\right)}=\frac{(20+11)\sqrt{35}+42}{\left(4\sqrt{5}\right)^2-\left(3\sqrt{7}\right)^2}$$

$$=\frac{62+11\sqrt{35}}{80-63}=\frac{62+11\sqrt{35}}{17}$$

Para racionalizar el denominador de una expresión que contiene tres radicales de segundo grado hay que verificar dos operaciones, tal como se indica a continuación:

Ejemplo

Racionalizar el denominador de $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}}$

Consideremos el denominador como un binomio $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)-\sqrt{6}$. Se multiplican los dos términos de la fracción por la conjugada de esta expresión que es $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{6}$ y tendremos:

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{30}-3}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{30}-3}{1+2\sqrt{10}}$$

(multiplicamos ambos términos nuevamente por la conjugada del denominador)

$$=\frac{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{30}-3\right)\left(1-2\sqrt{10}\right)}{\left(1+2\sqrt{10}\right)\left(1-2\sqrt{10}\right)}=\frac{22\sqrt{3}-5\sqrt{30}-3+6\sqrt{10}}{1-40}$$

$$=\frac{22\sqrt{3}-5\sqrt{30}-3+6\sqrt{10}}{-39}=\frac{3-6\sqrt{10}+5\sqrt{30}-22\sqrt{3}}{39}$$

EJERCICIOS

Racionaliza el denominador de:

1.	$\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}$	**R.** $2\sqrt{a^2+a-2a-1}$
2.	$\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$	**R.** $\dfrac{x+4+2\sqrt{2x+4}}{x}$
3.	$\dfrac{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}+\sqrt{a}}$	**R.** $\dfrac{a+2-\sqrt{a^2+4a}}{2}$
4.	$\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$	**R.** $\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$
5.	$\dfrac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$	**R.** $4\sqrt{2-5}$
6.	$\dfrac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$	**R.** $2+\sqrt{3}$
7.	$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$	**R.** $\dfrac{2\sqrt{10}-7}{3}$
8.	$\dfrac{\sqrt{7}+2\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$	**R.** $\dfrac{17+3\sqrt{35}}{2}$
9.	$\dfrac{\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$	**R.** $\dfrac{19-7\sqrt{10}}{3}$
10.	$\dfrac{19}{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}}$	**R.** $\dfrac{95\sqrt{2}+76\sqrt{3}}{2}$
11.	$\dfrac{3\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-6\sqrt{3}}$	**R.** $-\dfrac{9\sqrt{6}+21}{5}$

EJERCICIOS

Racionaliza el denominador de:

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **R.** $\dfrac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{4}$

2. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ **R.** $\dfrac{14-12\sqrt{2}-2\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{23}$

3. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ **R.** $\dfrac{2\sqrt{3}+8\sqrt{5}-5\sqrt{15}-1}{22}$

4. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ **R.** $\dfrac{3+\sqrt{15}-\sqrt{6}}{6}$

5. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **R.** $\dfrac{24\sqrt{2}-4\sqrt{3}+10\sqrt{6}-5}{23}$

6. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}}$ **R.** $\dfrac{5\sqrt{2}-14\sqrt{5}-6\sqrt{10}-9}{31}$

7. $\dfrac{4\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{7}}$ **R.** $\dfrac{6\sqrt{21}-29}{17}$

8. $\dfrac{5\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$ **R.** $\dfrac{-14+9\sqrt{6}}{5}$

9. $\dfrac{\sqrt{7}+3\sqrt{11}}{5\sqrt{7}+4\sqrt{11}}$ **R.** $97-11\sqrt{77}$

10. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{7+2\sqrt{10}}$ **R.** $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

11. $\dfrac{9\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6-\sqrt{6}}$ **R.** $\dfrac{16\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{10}$

DIVISIÓN DE RADICALES CUANDO EL DIVISOR ES COMPUESTO

Cuando el divisor es compuesto, la división de radicales se efectúa expresando el cociente en forma de fracción y **racionalizando el denominador** de esta fracción.

Ejemplo

Dividir $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ entre $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\div\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\frac{11+3\sqrt{15}}{7}$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON RADICALES QUE SE REDUCEN A PRIMER GRADO

A continuación resolveremos ecuaciones donde la incógnita aparece bajo el signo radical.

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $\sqrt{4x^2-15}-2x=-1$

Aislamos el radical: $\sqrt{4x^2-15}=2x-1$

Elevamos al cuadrado ambos miembros para eliminar el radical:

$$\sqrt{\left(4x^2-15\right)^2}=(2x-1)^2 \text{ o sea } 4x^2-15=4x^2-4x+1$$

Suprimimos $4x^2$ en ambos miembros:

$-15=-4x+1$

$4x=16$

$x=4$

2) Resolver la ecuación $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$

Aislamos un radical: $\sqrt{x+4}=5-\sqrt{x-1}$

Elevamos al cuadrado: $\sqrt{(x+4)^2}=\left(5-\sqrt{x-1}\right)^2$

o sea $x+4=5^2-2\times5\sqrt{x-1}+\sqrt{(x-1)^2}$

Efectuamos: $x+4=25-10\sqrt{x-1}+x-1$

Aislamos el radical: $x+4-25-x+1=-10\sqrt{x-1}$

Reducimos: $-20=-10\sqrt{x-1}=20=10\sqrt{x-1}$

Dividimos por 10: $2=\sqrt{x-1}$

Elevamos al cuadrado: $4=x-1$

$x=5$

3) Resolver la ecuación $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}=0$

Aislamos un radical: $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+2}$

Elevamos al cuadrado:

$$\sqrt{(x+7)^2}+2\left(\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{x-1}\right)+\sqrt{(x-1)^2}=4(x+2)$$

Efectuamos: $x+7+2\sqrt{x^2+6x-7}+x-1=4x+8$

Aislamos el radical: $2\sqrt{x^2+6x-7}=4x+8-x-7-x+1$

Reducimos: $2\sqrt{x^2+6x-7}=2x+2$

Dividimos por 2: $\sqrt{x^2+6x-7}=x+1$

Elevamos al cuadrado: $x^2+6x-7=(x+1)^2$

o sea: $x^2+6x-7=x^2+2x+1$

$6x-2x=7+1$

$4x=8$

$x=2$

EJERCICIOS

Divide:

1. $2\sqrt{3}-\sqrt{7}$ entre $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ **R.** $\frac{3\sqrt{21}-13}{4}$
2. $\sqrt{6}+2\sqrt{5}$ entre $2\sqrt{6}-\sqrt{5}$ **R.** $\frac{22+5\sqrt{30}}{19}$
3. $5\sqrt{2}+3\sqrt{3}$ entre $3\sqrt{2}-4\sqrt{3}$ **R.** $-\frac{66+29\sqrt{6}}{30}$
4. $\sqrt{7}-2\sqrt{11}$ entre $2\sqrt{7}+\sqrt{11}$ **R.** $\frac{36-5\sqrt{77}}{17}$
5. $\sqrt{2}$ entre $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **R.** $\sqrt{6}-2$
6. $\sqrt{3}$ entre $\sqrt{3}-2\sqrt{5}$ **R.** $-\frac{3+2\sqrt{15}}{17}$
7. $2+\sqrt{5}$ entre $1-\sqrt{5}$ **R.** $-\frac{7+3\sqrt{5}}{4}$
8. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ entre $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ **R.** $-\frac{7+2\sqrt{10}}{3}$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{8x+9}-\sqrt{18x+34}+\sqrt{2x+7}=0$ **R.** 9
2. $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}=\sqrt{4x-23}$ **R.** 6
3. $\sqrt{x+6}-\sqrt{9x+70}=-2\sqrt{x+9}$ **R.** –5
4. $\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}=\sqrt{4x-2a}$ **R.** a
5. $\sqrt{x-4ab}=-2b+\sqrt{x}$ **R.** $(a+b)^2$
6. $\sqrt{x+4a}-\sqrt{x+2a-1}=1$ **R.** $(a-1)^2$
7. $\sqrt{x-8}=2$ **R.** 12
8. $5-\sqrt{3x+1}=0$ **R.** 8
9. $7+\sqrt[3]{5x-2}=9$ **R.** 2
10. $\sqrt{9x^2-5}-3x=-1$ **R.** 1
11. $\sqrt{x^2-2x+1}=9-x$ **R.** 5
12. $15-\sqrt[3]{7x-1}=12$ **R.** 4
13. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=7$ **R.** 9
14. $\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x-14}=9$ **R.** 10

ECUACIONES CON RADICALES EN LOS DENOMINADORES

Ejemplo

Resolver la ecuación $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=\frac{2}{\sqrt{x-1}}$

Suprimimos denominadores:

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}-\sqrt{(x-1)^2}=2$$

Efectuamos: $\sqrt{x^2+3x-4}-(x-1)=2$

$$\sqrt{x^2+3x-4}-x+1=2$$

$$\sqrt{x^2+3x-4}=x+1$$

Elevamos al cuadrado: $x^2+3x-4=x^2+2x+1$

$$3x-2x=4+1$$

$$x=5$$

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $2\sqrt{x+6}-\sqrt{4x-3}=\frac{9}{\sqrt{4x-3}}$ **R.** 3
2. $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=\frac{2\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-1}$ **R.** 9
3. $\sqrt{x+14}-\sqrt{x-7}=\frac{6}{\sqrt{x-7}}$ **R.** 11
4. $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=\frac{10}{\sqrt{x}}$ **R.** 4
5. $\sqrt{4x-11}+2\sqrt{x}=\frac{55}{\sqrt{4x-11}}$ **R.** 9
6. $\sqrt{x}-\sqrt{x-7}=\frac{4}{\sqrt{x}}$ **R.** 16
7. $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+4}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+13}$ **R.** 25
8. $\frac{6}{\sqrt{x+8}}=\sqrt{x+8}-\sqrt{x}$ **R.** 1
9. $\sqrt{x-3}+\frac{8}{\sqrt{x+9}}=\sqrt{x+9}$ **R.** 7
10. $\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}+11}{2\sqrt{x}-1}$ **R.** 9



Nicolas Lobatchewski, matemático ruso, estudió en la Universidad de Kazán, combate la idea de Kant sobre el espacio, estableciendo la relatividad de esta noción. Asimismo, combate la Geometría de Euclides, puede considerársele el precursor de la teoría de la relatividad y de las geometrías no euclidianas.

CAPÍTULO XXXIII

CANTIDADES IMAGINARIAS

Estas cantidades son las raíces indicadas **pares** de cantidades **negativas.**

Así, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{-8}$ son cantidades imaginarias.

Por el contrario, las **cantidades reales** son todas aquellas cantidades, racionales o irracionales, que no son imaginarias.

A la cantidad imaginaria $\sqrt{-1}$ se le conoce como **unidad imaginaria** y ésta se representa por la letra *i*. Por tanto, $i = \sqrt{-1}$

En Electricidad, $\sqrt{-1}$ se representa por j .

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Ahora buscaremos las potencias de la unidad imaginaria en este caso de $\sqrt{-1}$

$\left(\sqrt{-1}\right)^1 = \sqrt{-1}$ $\quad i = \sqrt{-1}$

$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ $\quad i^2 = -1$

$\left(\sqrt{-1}\right)^3 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \times \sqrt{-1} = (-1) \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$ $\quad i^3 = -\sqrt{-1}$

$\left(\sqrt{-1}\right)^4 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \times \left(\sqrt{-1}\right)^2 = (-1) \times (-1) = 1$ $\quad i^4 = 1$

$\left(\sqrt{-1}\right)^5 = \left(\sqrt{-1}\right)^4 \times \sqrt{-1} = 1 \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ $\quad i^5 = \sqrt{-1}$

$\left(\sqrt{-1}\right)^6 = \left(\sqrt{-1}\right)^4 \times \left(\sqrt{-1}\right)^2 = 1 \times (-1) = -1$, etc. $\quad i^6 = -1$ etc.

Aquí notamos que las cuatro primeras potencias de $\sqrt{-1}$ son $\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, 1$, y este orden continúa en las potencias sucesivas.

Toda expresión de la forma $\sqrt[n]{-a}$ donde n es par y $-a$ es una cantidad real negativa, es una **imaginaria pura**, como $\sqrt{-2}, \sqrt{-5}$.

Toda raíz imaginaria puede reducirse a la forma de una cantidad real multiplicada por la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$

En efecto:

$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2 \times (-1)} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{-1} = b\sqrt{-1} = bi$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \times (-1)} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} = 2i$

$\sqrt{-3} = \sqrt{3 \times (-1)} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3} \bullet \sqrt{-1} = i\sqrt{3}$

$\sqrt{-8} = \sqrt{8 \times (-1)} = \sqrt{8} \times \sqrt{-1} = \sqrt{2^2 \bullet 2} \times \sqrt{-1} = 2\sqrt{2} \bullet \sqrt{-1} = 2\sqrt{2i}$

EJERCICIOS

Reduce a la forma de una cantidad real multiplicada por $\sqrt{-1}$ o i:

1. $\sqrt{-4m^4}$ **R.** $2m^2 i$
2. $\sqrt{-\frac{1}{16}}$ **R.** $\frac{1}{4} i$
3. $\sqrt{-a^2 - b^2}$ **R.** $i\sqrt{a^2 + b^2}$
4. $\sqrt{-a^2}$ **R.** $a\ i$
5. $\sqrt{-2}$ **R.** $i\sqrt{2}$
6. $2\sqrt{-9}$ **R.** $6\ i$
7. $\sqrt{-81}$ **R.** $9\ i$
8. $\sqrt{-6}$ **R.** $i\sqrt{6}$
9. $3\sqrt{-b^4}$ **R.** $3b^2 i$
10. $\sqrt{-12}$ **R.** $i^2\sqrt{3}$
11. $\sqrt{-7}$ **R.** $i\sqrt{7}$
12. $\sqrt{-27}$ **R.** $3\sqrt{3i}$

SUMA Y RESTA DE IMAGINARIAS PURAS

Se reducen a la forma de una cantidad real multiplicada por $\sqrt{-1}$ y se reducen como radicales semejantes.

Ejemplos

1) Simplifica $\sqrt{-4} + \sqrt{-9}$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \times (-1)} = 2\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \times (-1)} = 3\sqrt{-1}$$

Entonces:

$$\sqrt{-4} + \sqrt{-9} = 2\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1} = (2+3)\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1} = 5i$$

2) Simplificar $2\sqrt{-36} - \sqrt{-25} + \sqrt{-12}$

$$2\sqrt{-36} = 2 \bullet 6\sqrt{-1} = 12\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-25} = 5\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-12} = \sqrt{-12} \bullet \sqrt{-1} = 2\sqrt{3} \bullet \sqrt{-1}$$

Entonces

$$2\sqrt{-36} - \sqrt{-25} + \sqrt{-12} = 12\sqrt{-1} - 5\sqrt{-1} + 2\sqrt{3}\sqrt{-1}$$
$$= \left(12 - 5 + 2\sqrt{3}\right)\sqrt{-1} = \left(7 + 2\sqrt{3}\right)\sqrt{-1} = \left(7 + 2\sqrt{3}\right)i$$

EJERCICIOS

Simplifica:

1. $2\sqrt{-a^2} + \sqrt{-a^4} + \sqrt{-a^6}$
   R. $\left(2a + a^2 + a^3\right)\ i$
2. $\sqrt{-18} + \sqrt{-8} + 2\sqrt{-50}$
   R. $15\sqrt{2i}$
3. $3\sqrt{-20} - 2\sqrt{-45} + 3\sqrt{-125}$
   R. $15\sqrt{5i}$
4. $\sqrt{-a^4} + 4\sqrt{-9a^4} - 3\sqrt{-4a^4}$
   R. $7a^2 i$
5. $\sqrt{-4} + \sqrt{-16}$
   R. $6\ i$
6. $\sqrt{-25} + \sqrt{-81} - \sqrt{-49}$
   R. $7\ i$
7. $2\sqrt{-9} + 3\sqrt{-100}$
   R. $36\ i$

MULTIPLICACIÓN DE IMAGINARIAS PURAS

Se reducen las imaginarias a la forma típica $a\sqrt{-1}$ y se procede como se indica a continuación, teniendo muy presentes las **potencias** de la unidad imaginaria.

Ejemplos

1) Multiplicar $\sqrt{-4}$ por $\sqrt{-9}$

$$\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}=2\sqrt{-1}\times3\sqrt{-1}=2\bullet3\left(\sqrt{-1}\right)^2=6\times(-1)=-6$$

2) Multiplicar $\sqrt{-5}$ por $\sqrt{-2}$

$$\sqrt{-5}\times\sqrt{-2}=\sqrt{5}\bullet\sqrt{-1}\times\sqrt{2}\bullet\sqrt{-1}$$

$$=\sqrt{10}\left(\sqrt{-1}\right)^2=\sqrt{10}\times(-1)=-\sqrt{10}$$

3) Multiplica $\sqrt{-9}+5\sqrt{-2}$ por $\sqrt{-4}-2\sqrt{-2}$

Se reduce a la forma $a\sqrt{-1}$ cada imaginaria y se multiplican como radicales compuestos, teniendo muy presente que $\left(\sqrt{-1}\right)^2=1$:

$$\begin{array}{l} 3\sqrt{-1}\quad+5\sqrt{2}\bullet\sqrt{-1} \\ 2\sqrt{-1}\quad-2\sqrt{2}\bullet\sqrt{-1} \\ \hline 6\left(\sqrt{-1}\right)^2+10\sqrt{2}\left(\sqrt{-1}\right)^2 \\ -\ 6\sqrt{2}\left(\sqrt{-1}\right)^2-20\left(\sqrt{-1}\right)^2 \end{array}$$

$$6(-1)+4\sqrt{2}(-1)-20(-1)=-6-4\sqrt{2}+20=14-4\sqrt{2}$$

EJERCICIOS

Multiplica:

1.	$\sqrt{-16}\times\sqrt{-25}$	**R.** $-\ 20$
2.	$\sqrt{-81}\times\sqrt{-49}$	**R.** $-\ 63$
3.	$5\sqrt{-36}\times4\sqrt{-64}$	**R.** $-\ 960$
4.	$\sqrt{-3}\times\sqrt{-2}$	**R.** $-\sqrt{6}$
5.	$2\sqrt{-5}\times3\sqrt{-7}$	**R.** $-6\sqrt{35}$
6.	$\sqrt{-3}\times\sqrt{-75}$	**R.** $-\ 15$
7.	$2\sqrt{-7}\times3\sqrt{-28}$	**R.** $-\ 84$
8.	$\sqrt{-49}\times\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}$	**R.** $-\ 42\,i$
9.	$\sqrt{-2}\times3\sqrt{-5}\times\sqrt{-10}$	**R.** $-\ 30\,i$

DIVISIÓN DE IMAGINARIAS PURAS

Se reducen las imaginarias a la forma $a\sqrt{-1}$ y se expresa el cociente como una fracción, la cual se simplifica.

Ejemplo

1) Dividir $\sqrt{-84}$ entre $\sqrt{-7}$

$$\frac{\sqrt{-84}}{\sqrt{-7}}=\frac{\sqrt{84}\bullet\sqrt{-1}}{\sqrt{7}\bullet\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{84}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{84}{7}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$\sqrt{-1}$ se cancela en el numerador y el denominador, igual que una cantidad real.

EJERCICIOS

Divide:

1.	$2\sqrt{-18}\div\sqrt{-6}$	**R.** $2\sqrt{3}$
2.	$\sqrt{-315}\div\sqrt{-7}$	**R.** $3\sqrt{5}$
3.	$\sqrt[4]{-27}\div\sqrt[4]{-3}$	**R.** $\sqrt{3}$
4.	$\sqrt[4]{-300}\div\sqrt[4]{-12}$	**R.** $\sqrt{5}$
5.	$\sqrt{-16}\div\sqrt{-4}$	**R.** 2
6.	$\sqrt{-10}\div\sqrt{-2}$	**R.** $\sqrt{5}$
7.	$\sqrt{-18}\div\sqrt{-3}$	**R.** $3\sqrt{3}$
8.	$\sqrt{-90}\div\sqrt{-5}$	**R.** $3\sqrt{2}$
9.	$\sqrt{-150}\div\sqrt{-3}$	**R.** $5\sqrt{2}$
10.	$10\sqrt{-36}\div5\sqrt{-4}$	**R.** 6

CANTIDADES COMPLEJAS

Son aquellas expresiones que constan de una parte real y una parte imaginaria.

Con los números complejos podemos definir todas las operaciones aritméticas y algebraicas; podemos explicar la extracción de raíces de índice par de los números negativos; la logaritmación de números negativos; las soluciones de una ecuación de *n* grados.

Las cantidades complejas son de la forma $a+b\sqrt{-1}$, o sea $a+bi$, donde *a y b* son cantidades reales cualesquiera; por ejemplo:

$$2+3\sqrt{-1}\ \text{ ó }\ 2+3i\ \text{ y }\ 5-6\sqrt{-1}\ \text{ ó }\ 5-6i$$

CANTIDADES COMPLEJAS CONJUGADAS

Por otra parte, las cantidades complejas conjugadas son dos cantidades complejas que difieren solamente en el signo de la parte imaginaria, por ejemplo:

$a+b\sqrt{-1}$ y $a-b\sqrt{-1}$

Asimismo, la conjugada de $5-2\sqrt{-1}$ es $5+2\sqrt{-1}$

SUMA DE CANTIDADES COMPLEJAS

Se suman las partes reales entre sí y las partes imaginarias entre sí.

Ejemplos

1) Sumar $2+5\sqrt{-1}$ y $3-2\sqrt{-1}$

$$\left(2+5\sqrt{-1}\right)+\left(3-2\sqrt{-1}\right)=$$
$$=2+3+5\sqrt{-1}-2\sqrt{-1}$$
$$=(2+3)+(5-2)\sqrt{-1}=$$
$$=5+3\sqrt{-1}=5+3i$$

2) Suma

$5-6\sqrt{-1},-3+\sqrt{-1},4-8\sqrt{-1}$

$$\begin{array}{l} 5-6\sqrt{-1} \\ -3+\quad\sqrt{-1} \\ 4-8\sqrt{-1} \\ 6-13\sqrt{-1}=6-13i \end{array}$$

EJERCICIOS

Suma:

1. $3-2i, 5-8i, -10+13i$
R. $-2+3i$

2. $1-i, 4+3i, \sqrt{2}+5i$
R. $\left(5+\sqrt{2}\right)+7i$

3. $2+\sqrt{-2}, 4-\sqrt{-3}$
R. $6+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\ i$

4. $7+\sqrt{-5}, \sqrt{2}-\sqrt{-9}, -4+\sqrt{-16}$
R. $\left(3+\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{5}\right)\ i$

5. $2+3\sqrt{-1}, 5-2\sqrt{-1}$
R. $7+i$

6. $-4-5\sqrt{-1}, -2+8\sqrt{-1}$
R. $-6+3i$

SUMA DE CANTIDADES COMPLEJAS CONJUGADAS

La suma de dos cantidades complejas conjugadas es una cantidad real.

En efecto:

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)+\left(a-b\sqrt{-1}\right)=$$
$$(a+a)+(b-b)\sqrt{-1}=2a$$

Ejemplo

Sumar $5+3\sqrt{-1}$ y $5-3\sqrt{-1}$

$$\left(5+3\sqrt{-1}\right)+\left(5-3\sqrt{-1}\right)=2\times 5=10$$

EJERCICIOS

Suma:

1. $-7-5\sqrt{-1}, -7+5\sqrt{-1}$ **R.** - 14

2. $8-3\sqrt{-2}, 8+3\sqrt{-2}$ **R.** 16

3. $\sqrt{2}+i\sqrt{3}, \sqrt{2}-i\sqrt{3}$ **R.** $2\sqrt{2}$

4. $7-2\sqrt{-1}, 7+2\sqrt{-1}$ **R.** 14

5. $-5-3\sqrt{-1}, -5+3\sqrt{-1}$ **R.** - 10

6. $9+i\sqrt{3}, 9-i\sqrt{3}$ **R.** 18

RESTA DE CANTIDADES COMPLEJAS CONJUGADAS

Se restan las partes reales entre sí y las partes imaginarias entre sí.

Ejemplos

1) De $5+7\sqrt{-1}$ restar $4+2\sqrt{-1}$

$$\left(5+7\sqrt{-1}\right)-\left(4+2\sqrt{-1}\right)=$$
$$5+7\sqrt{-1}-4-2\sqrt{-1}$$
$$=(5-4)+(7-2)\sqrt{-1}=$$
$$=1+5\sqrt{-1}=1+5i$$

2) Restar $-3-7\sqrt{-1}$ de $8-11\sqrt{-1}$

Escribimos el sustraendo con los signos cambiados debajo del minuendo y tenemos:

$$\begin{array}{l} 8-11\sqrt{-1} \\ 3+\quad 7\sqrt{-1} \\ 11-\quad 4\sqrt{-1}=11-4i \end{array}$$

EJERCICIOS

Efectúa estas operaciones:

1. De $4+\sqrt{-5}$ restar $2+\sqrt{-3}$
R. $2+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\ i$

2. Restar $\sqrt{3}+6\sqrt{-1}$ de $\sqrt{2}-5\sqrt{-1}$
R. $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)-11i$

3. Restar $-7+\sqrt{-3}$ de $8-\sqrt{-7}$
R. $15-\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\ i$

4. De $3-2\sqrt{-1}$ restar $5+3\sqrt{-1}$
R. $-2-5i$

5. De $8+4\sqrt{-1}$ restar $3-10\sqrt{-1}$
R. $5+14i$

6. De $-1-\sqrt{-1}$ restar $-7-8\sqrt{-1}$
R. $6+7i$

7. Restar $5-3\sqrt{-1}$ de $4-7\sqrt{-1}$
R. $-1-4i$

8. Restar $8-7\sqrt{-1}$ de $15-4\sqrt{-1}$
R. $7+3i$

9. Restar $3-50\sqrt{-1}$ de $11+80\sqrt{-1}$
R. $8+130i$

10. De $5-\sqrt{-25}$ restar $3+6i$
R. $2-11i$

DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES COMPLEJAS CONJUGADAS

La **diferencia** de dos cantidades complejas conjugadas es una **imaginaria pura.**

En efecto:

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)-\left(a-b\sqrt{-1}\right)=$$
$$a+b\sqrt{-1}-a+b\sqrt{-1}$$
$$=(a-a)+(b+b)\sqrt{-1}=$$
$$=2b\sqrt{-1}=2bi$$

Ejemplo

$$\left(5+3\sqrt{-1}\right)-\left(5-3\sqrt{-1}\right)=$$
$$(5-5)+(3+3)\sqrt{-1}$$
$$=6\sqrt{-1}=6i$$

EJERCICIOS

1. Restar $-5-\sqrt{-2}$ de $-5+\sqrt{-2}$
R. $2\sqrt{2}i$

2. Restar $\sqrt{2}-\sqrt{-3}$ de $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$
R. $2\sqrt{3}i$

3. Restar $-\sqrt{5}+4\sqrt{-2}$ de $-\sqrt{5}-4\sqrt{-2}$
R. $-8\sqrt{2}i$

4. De $2-\sqrt{-1}$ restar $2+\sqrt{-1}$
R. $-2i$

5. De $7+3\sqrt{-1}$ restar $7-3\sqrt{-1}$
R. $6i$

MULTIPLICACIÓN DE CANTIDADES COMPLEJAS CONJUGADAS

Las cantidades complejas se multiplican como expresiones compuestas, pero teniendo presente que $\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$

Ejemplo

1) Multiplica $3+5\sqrt{-1}$ por $4-3\sqrt{-1}$

$$\begin{array}{l} 3+\ \ 5\sqrt{-1} \\ 4-\ \ 3\sqrt{-1} \\ \hline 12+20\sqrt{-1} \\ \quad -9\sqrt{-1}-15\left(\sqrt{-1}\right)^2 \\ \hline 12+11\sqrt{-1}-15(-1)= \\ 12+11\sqrt{-1}+15=27+11\sqrt{-1} \end{array}$$

EJERCICIOS

Multiplica:

1. $4+\sqrt{-3}$ por $5-\sqrt{-2}$
R. $\left(20+\sqrt{6}\right)+\left(5\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right)i$

2. $\sqrt{2}+\sqrt{-5}$ por $\sqrt{3}+\sqrt{-2}$
R. $\left(\sqrt{6}-\sqrt{10}\right)+\left(2+\sqrt{15}\right)i$

3. $\sqrt{5}+\sqrt{-3}$ por $\sqrt{5}+2\sqrt{-3}$
R. $-1+3\sqrt{15}i$

4. $3-4\sqrt{-1}$ por $5-3\sqrt{-1}$
R. $3-29i$

5. $4+7\sqrt{-1}$ por $-3-2\sqrt{-1}$
R. $2-29i$

PRODUCTO DE CANTIDADES COMPLEJAS CONJUGADAS

El producto de dos cantidades complejas conjugadas es una cantidad real. Dado que el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades es igual a la diferencia de sus cuadrados, tenemos:

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)\left(a-b\sqrt{-1}\right)=a^2-\left(b\sqrt{-1}\right)^2=a^2-\left(b^2\left(\sqrt{-1}\right)^2\right)$$
$$=a^2-\left(b^2(-1)\right)=a^2-\left(-b^2\right)=a^2+b^2$$

Ejemplos

$$\left(8-3\sqrt{-1}\right)\left(8+3\sqrt{-1}\right)=8^2-\left(3\sqrt{-1}\right)^2=64+9=73$$

$$\left(\sqrt{3}+5\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{3}-5\sqrt{-1}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(5\sqrt{-1^2}\right)=3+25=28$$

DIVISIÓN DE CANTIDADES COMPLEJAS CONJUGADAS

Para dividir expresiones complejas, se expresa el cociente en forma de fracción y se racionaliza el denominador multiplicando ambos términos de la fracción por la conjugada del denominador.

Ejemplo

Dividir $5+2\sqrt{-1}$ entre $4-3\sqrt{-1}$

$$\frac{5+2\sqrt{-1}}{4-3\sqrt{-1}}=\frac{\left(5+2\sqrt{-1}\right)\left(4+3\sqrt{-1}\right)}{\left(4-3\sqrt{-1}\right)\left(4+3\sqrt{-1}\right)}=\frac{20+23\sqrt{-1}-6}{4^2-\left(3\sqrt{-1}\right)^2}$$

$$=\frac{14+23\sqrt{-1}}{16+9}=\frac{14+23\sqrt{-1}}{25}=\frac{14+23i}{25}$$

EJERCICIOS

Multiplica:

1. $2\sqrt{3}+4i$ por $2\sqrt{3}-4i$ **R.** 28

2. $5-\sqrt{-2}$ por $5+\sqrt{-2}$ **R.** 27

3. $-9-\sqrt{-5}$ por $-9+\sqrt{-5}$ **R.** 86

4. $1-i$ por $1+i$ **R.** 2

5. $3+2\sqrt{-1}$ por $3-2\sqrt{-1}$ **R.** 13

6. $\sqrt{2}-5i$ por $\sqrt{2}+5i$ **R.** 27

Divide:

1. $\left(5-3\sqrt{-1}\right)\div\left(3+4\sqrt{-1}\right)$
R. $\frac{3-29i}{25}$

2. $(8-5i)\div(7+6i)$
R. $\frac{26-83i}{85}$

3. $\left(4+\sqrt{-3}\right)\div\left(5-4\sqrt{-3}\right)$
R. $\frac{8+21\sqrt{3}i}{73}$

4. $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{-5}\right)\div\left(4\sqrt{2}-\sqrt{-5}\right)$
R. $\frac{-2+9\sqrt{10}i}{37}$

5. $\left(1+\sqrt{-1}\right)\div\left(1-\sqrt{-1}\right)$
R. i

6. $\left(3+\sqrt{-1}\right)\div\left(3-\sqrt{-1}\right)$
R. $\frac{4+3i}{5}$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS IMAGINARIAS PURAS

Para representar gráficamente las cantidades imaginarias se traza un sistema de ejes coordenados rectangulares *XOX* ' e *YOY* ' (figura 70), y luego de tomar como unidad una medida escogida arbitrariamente, se sigue este procedimiento:

Las cantidades **reales positivas** se representan sobre el semieje positivo *OX* , llevando de *O* hacia *X* la unidad escogida tantas veces como unidades tenga la cantidad real positiva representada. En la figura aparecen sobre *OX* las cantidades reales y positivas 1, 2, 3, 4.

Las cantidades **reales negativas** se representan sobre el semieje negativo *OX* ', llevando de *O* hacia *X* ' la unidad escogida tantas veces como unidades tenga la cantidad real negativa representada. En la figura aparecen sobre *OX* ' las cantidades reales negativas - 1, - 2, - 3, - 4.

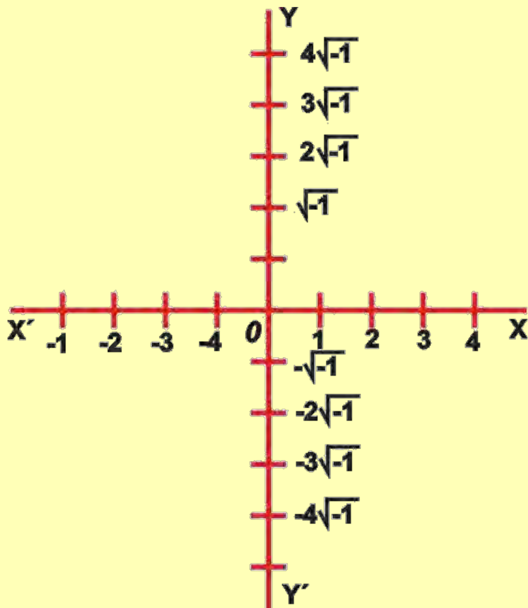


Figura 70

Las **imaginarias puras positivas** se representan sobre el semieje positivo *OY*, llevando de *O* hacia *Y* la unidad elegida tantas veces como unidades tenga el **coeficiente real** de la imaginaria pura representada. En la figura aparecen sobre *OY* las imaginarias puras

positivas $\sqrt{-1}$, $2\sqrt{-1}$, $3\sqrt{-1}$, $4\sqrt{-1}$

Las **imaginarias puras negativas** se representan sobre el semieje negativo *OY* ', llevando la unidad elegida de *O* hacia *Y* ' tantas veces como unidades tenga el **coeficiente real** de la imaginaria pura.

En la figura aparecen sobre *OY* ' las imaginarias

puras negativas $-\sqrt{-1}$, $-2\sqrt{-1}$, $-3\sqrt{-1}$, $-4\sqrt{-1}$

El origen *O* representa el cero.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS CANTIDADES COMPLEJAS

Aquí representaremos gráficamente la cantidad compleja $5 + 3\sqrt{-1}$

Dado que consta de una parte real 5 y de una parte imaginaria $3\sqrt{-1}$, el procedimiento consiste en representar ambas y luego hallar su suma geométrica (Figura 71).

La parte real 5 está representada en la figura por *OA* y la parte imaginaria $3\sqrt{-1}$ por *OB* . En *A* se levanta una línea *AC* igual y paralela a *OB* . Si unimos el origen con el punto *C* obtenemos el **vector** *OC* , que es la **suma geométrica** de $OA = 5$ y $AC = 3\sqrt{-1}$

El vector OC representa la cantidad compleja $5 + 3\sqrt{-1}$

El punto C es el afijo de la expresión $5 + 3\sqrt{-1}$

El vector *OC* representa en magnitud el módulo o valor de la expresión compleja.

El ángulo *COA* que forma el vector *OC* con el semieje *OX* se llama argumento o amplitud.

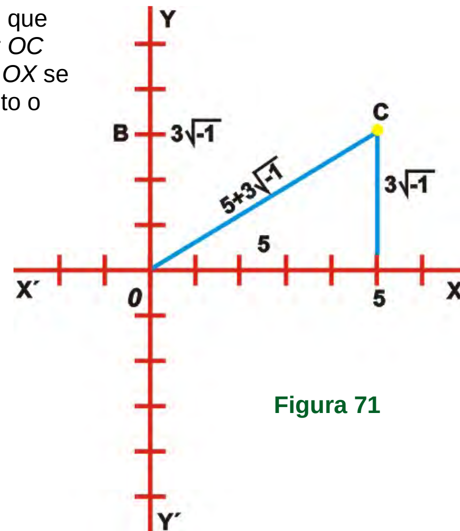


Figura 71

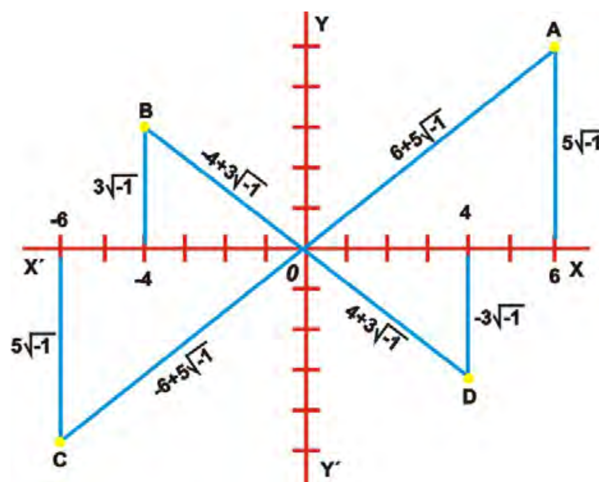


Figura 72

En la figura 72 aparece representada en el primer cuadrante la expresión $6+5\sqrt{-1}$ cuyo afijo es el punto *A* ; en el segundo cuadrante está representada, $-4+3\sqrt{-1}$ cuyo afijo es el punto *B* ; en el tercer cuadrante está $-6-5\sqrt{-1}$, cuyo afijo es el punto *C* ; en el cuarto cuadrante $4-3\sqrt{-1}$ con su afijo en *D*.

PLANO GAUSSIANO Y UNIDADES GAUSSIANAS

Lo que hemos visto hasta aquí podemos resumirlo en los siguientes puntos:

1) Las **cantidades reales** se representan sobre el eje de las x; sobre OX si son positivas, sobre OX' si son negativas.

2) Las **imaginarias puras** se representan sobre el eje de las y; sobre OY si son positivas, sobre OY' si son negativas.

3) En el resto del **plano** que determinan los ejes se representan las **cantidades complejas**; cada expresión compleja tiene su afijo y cada punto del plano determina una expresión compleja.

Este plano recibe el nombre de **Plano Gaussiano** en honor del célebre matemático alemán **Carlos Federico Gauss**, quien impulsó en Europa este método de representación gráfica de las cantidades imaginarias y complejas. Por análoga razón, las unidades tomadas sobre los ejes de este plano se llaman **unidades gaussianas.**

EJERCICIOS

Representa gráficamente:

1. $-5\frac{3}{4}+6\sqrt{-1}$

2. $-1\frac{1}{2}-2\sqrt{-1}$

3. $-10+10i$

4. $2+2\sqrt{-1}$

5. $-2+3\sqrt{-1}$

6. $-4-5\sqrt{-1}$

7. $7-3\sqrt{-1}$

8. $1+i$

9. $-1-5i$

10. $3-6i$

11. $-5+4i$

12. $4\frac{1}{2}-7\sqrt{-1}$



Niels Henrik Abel, matemático noruego; junto con Jacobi ganó el Gran Premio de Matemáticas del Instituto de Francia, por su trabajo sobre las funciones elípticas; es considerado uno de los más grandes algebristas del siglo XIX; demostró el teorema general del binomio, igualmente demostró la imposibilidad de la resolución de las ecuaciones de quinto grado.

CAPÍTULO XXXIV

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Una **ecuación de segundo grado** es aquella en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2, por ejemplo: $4x^2 + 7x + 6 = 0$

Las **ecuaciones completas** de segundo grado son ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, que tienen un término en x^2, un término en x y un término independiente de x como:

$$2x^2 + 7x - 15 = 0 \text{ y } x^2 - 8x = -15 \text{ ó } x^2 - 8x + 15 = 0$$

Las **ecuaciones incompletas** de segundo grado son ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$ que carecen del término en x, o de la forma $ax^2 + bx = 0$ que carecen del término independiente, por ejemplo: $x^2 - 16 = 0$ y $3x^2 + 5x = 0$

RAÍCES DE UNA ECUACIÓN

Las **raíces** de una ecuación de segundo grado son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación.

Toda ecuación de segundo grado tiene **dos raíces**: las raíces de la ecuación
$x^2 - 2x - 3 = 0$son $x^1 = 3$ y$x^2 = -1$
y ambos valores la satisfacen.

Para resolver una ecuación de segundo grado se buscan las raíces de la ecuación.

ECUACIONES COMPLETAS

Método para completar el cuadrado y resolver la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$

Para comprender fácilmente este método, consideremos primero la ecuación del tipo

$$x^2 + bx + c = 0$$

La podemos escribir del siguiente modo:

$$x^2 + bx = -c$$

Si observamos el primer miembro veremos que al binomio $x^2 + bx$ le falta un término para ser un trinomio cuadrado perfecto. Tal término es el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, o lo que es lo mismo $\frac{b^2}{4}$.

En efecto, así formamos un trinomio cuyo primer término es el cuadrado de x; su segundo término es el doble producto de x por $\frac{b}{2}$ y el tercero es el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, o sea $\frac{b^2}{4}$. Para que no se altere la ecuación agregamos al segundo miembro la misma cantidad que al primero.

De esta forma tendremos:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b^2}{4}\right) = \left(\frac{b^2}{4}\right) - c$$

En el primer miembro de esta ecuación tenemos un trinomio cuadrado perfecto

Factoramos:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c$$

Extraemos la raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

$$x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

En el caso de que el coeficiente de x^2 sea mayor que 1, el procedimiento es esencialmente el mismo, sólo que como primer paso dividimos los tres términos de la ecuación entre a, coeficiente de x^2. Veamos un ejemplo numérico.

Ejemplo

Siendo la ecuación $4x^2 + 3x - 22 = 0$

Transponemos el término independiente: $x^2 + 3x - 22$

Dividimos por el coeficiente del primer término:

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{22}{4}$$

agregamos el cuadrado de la mitad de $\frac{3}{4}$:

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{22}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

Factoramos el primer miembro:

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{22}{4} + \frac{9}{64}$$

Extraemos la raíz cuadrada en los dos miembros:

$$\sqrt{\left(x + \frac{3}{8}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{22}{4} + \frac{9}{64}}$$

Resolviendo:

$$x + \frac{3}{8} = \pm\sqrt{\frac{361}{64}}$$

$$x + \frac{3}{8} = \pm\sqrt{\frac{361}{64}}$$

$$x = -\frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{361}{64}}$$

$$x = -\frac{3}{8} \pm \frac{19}{8}$$

$$x_1 = -\frac{3}{8} + \frac{19}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

$$x_2 = -\frac{3}{8} - \frac{19}{8} = \frac{22}{8} = -2\frac{3}{4}$$

R $x_1 = 2 \quad x_2 = -2\frac{3}{4}$

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA PARA RESOLVER LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO $ax^2 + bx + c = 0$

La ecuación es $ax^2 + bx + c = 0$

Multiplicamos por $4a$:
$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Sumamos b^2 a los dos miembros:
$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$

Pasamos $4ac$ al segundo miembro:
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Descomponemos el primer miembro, que es un trinomio cuadrado perfecto:
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extraemos la raíz cuadrada en los dos miembros:
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Transponemos b:
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

despejamos$x$: $x = -b \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$

y esta fórmula nos da las **dos raíces** de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ (porque de es-ta fórmula salen dos valores de x según se tome $\sqrt{b^2 - 4ac}$ con signo + ó -) en función de a, coeficiente del término en x^2 en la ecuación, b coeficiente del término en x y c el término independiente.

Vemos que en la fórmula aparece el **coeficiente** del segundo término de la ecuación b con signo distinto al que tiene en la ecuación.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES COMPLETAS DE SEGUNDO GRADO SIN DENOMINADORES, APLICANDO LA FÓRMULA GENERAL

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $3x^2 - 7x + 2 = 0$

Aplicamos la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Aquí $a = 3$, $b = -7$, $c = 2$; luego, sustituyendo y sin olvidar que al sustituir b se pone con signo cambiado, tendremos:

$$x = \frac{7^2 - 4(3)(2)}{2(3)} = \frac{7 \pm \sqrt{49} - 24}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

Entonces:

$$x_1 = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2 \quad x_1 = 7 \qquad x_1 = 2$$

R.

$$x_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{1}{3}$$

2 y $\frac{1}{3}$ son las raíces de la ecuación y ambas anulan la ecuación.

Sustituyendo x por 2 en la ecuación dada $3x^2 - 7x + 2 = 0$ tenemos:

$$3(2^2) - 7(2) + 2 = 12 - 14 + 2 = 0$$

Sustituyendo x por $\frac{1}{3}$:

$$3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 2 = 0$$

2) Resolver la ecuación $6x - x^2 - 9 = 0$

Ordenamos y cambiamos signos: $x^2 - 6x + 9 = 0$

Aplicamos la fórmula sin olvidar que a, coeficiente de x^2 es 1:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36} - 4(1)(9)}{2\ (1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Entonces x tiene un solo valor 3; las dos raíces son iguales:

$$x_1 = x_2 = 3$$

3) Resuelve la ecuación $(x + 4)^2 = 2x\ (5x - 1) - 7(x - 2)$

La fórmula se lleva a la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Efectuamos: $x^2 + 8x + 16 = 10x^2 - 2x - 7x + 14$

Transponemos: $x^2 + 8x + 16 - 10x^2 + 2x + 7x - 14 = 0$

Reducimos: $-\ 9x^2 + 17x + 2 = 0$

Cambiamos signos: $9x^2 - 17x - 2 = 0$

Aplicando la fórmula:

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4(9)(-2)}}{2(9)} = \frac{17 \pm \sqrt{289 + 72}}{18} =$$

$$\frac{17 \pm \sqrt{361}}{18} = \frac{17 \pm 19}{18}$$

Entonces:

$$x^1 = \frac{17+19}{18} = \frac{36}{18} = 2 \qquad x_1 = 2$$

R.

$$x_2 = \frac{17-19}{18} = \frac{-2}{18} = -\frac{1}{9} \qquad x_2 = -\frac{1}{9}$$

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones por la fórmula general:

1. $5x^2 - 7x - 90 = 0$ — **R.** $5, -3\frac{3}{5}$

2. $6x^2 = x + 222$ — **R.** $-6, 6\frac{1}{6}$

3. $x + 11 = 10x^2$ — **R.** $-1, 1\frac{1}{10}$

4. $49x^2 - 70x + 25 = 0$ — **R.** $\frac{5}{7}$

5. $12x - 7x^2 + 64 = 0$ — **R.** $4, -2\frac{2}{7}$

6. x 2 = - 15x - 56 — **R.** $-7, -8$

7. $32X^2 + 18X - 17 = 0$ — **R.** $\frac{1}{2}, -1\frac{1}{16}$

8. $176x = 121 + 64x^2$ — **R.** $1\frac{3}{8}$

9. $8x + 5 = 36x^2$ — **R.** $\frac{1}{2}, -\frac{5}{18}$

10. $27x^2 + 12x - 7 = 0$ — **R.** $\frac{1}{3}, -\frac{7}{9}$

11. $15x = 25x^2 + 2$ — **R.** $\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}$

12. $8X^2 - 2X - 3 = 0$ — **R.** $\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$

13. $X^2 = 16X - 63$ — **R.** 7,9

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones llevándolas a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y aplicando la fórmula general:

1. $(5x - 2)^2 - (3x + 1)^2 - x^2 - 60 = 0$ **R.** $3, -1\frac{4}{15}$

2. $(x + 4)^3 - (x - 3)^3 = 343$ **R.** 3,-4

3. $(x + 2)^3 - (x - 1)^3 = x(3x + 4) + 8$ **R.** $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

4. $(5x - 4)^2 - (3x + 5)(2x - 1) = 20x(x - 2) + 27$ **R.** –1,-6

5. $x(x + 3) = 5x + 3$ **R.** 3,-1

6. $3(3x - 2) = (x + 4)(4 - x)$ **R.** 2,-11

7. $9x + 1 = 3(x^2 - 5) - (x - 3)(x + 2)$ **R.** –1,5

8. $(2x - 3)^2 - (x + 5)^2 = -23$ **R.** $7, \frac{1}{3}$

9. $25(x + 2)^2 = (x - 7)^2 - 81$ **R.** $-2, -2\frac{3}{4}$

10. $3x(x - 2) - (x - 6) = 23(x - 3)$ **R.** 5

11. $7(x - 3) - 5(x^2 - 1) = x^2 - 5(x + 2)$ **R.** 1

12. $(x - 5)^2 - (x - 6)^2 = (2x - 3)^2 - 118$ **R.** $7, -3\frac{1}{2}$

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando la fórmula particular:

1. $5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = -8$ **R.** –1,-8

2. $x^2 - (7x + 6) = x + 59$ **R.** 13,-5

3. $(x - 1)^2 + 11x + 199 = 3x^2 - (x - 2)^2$ **R.** 17,-12

4. $(x - 2)(x + 2) - 7(x - 1) = 21$ **R.** 9,-2

5. $2x^2 - (x - 2)(x + 5) = 7(x + 3)$ **R.** 11,-1

6. $x^2 - 3x + 2 = 0$ **R.** 1,2

7. $x^2 - 2x - 15 = 0$ **R.** 5,-3

8. $x^2 = 19x - 88$ **R.** 8,11

9. $x^2 + 4x = 285$ **R.** 15,-19

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA PARTICULAR PARA RESOLVER ECUACIONES DE LA FORMA $x^2 + mx + n = 0$

Estas ecuaciones, como $x^2 + 5x + 6 = 0$, se caracterizan porque el coeficiente del término en x^2 es 1, y pueden resolverse por la fórmula general con sólo suponer en ésta que $a = 1$, pero existe además una fórmula particular que vamos a deducir.

La ecuación es $x^2 + mx + n = 0$

Transponemos n: $x^2 + mx = -n$

Sumamos $\frac{m^2}{4}$ a los dos miembros:

$$x^2 + mx + \frac{m^2}{4} = \frac{m^2}{4} - n$$

Descomponemos el primer miembro, que es un trinomio cuadrado perfecto:

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} - n$$

Extraemos la raíz cuadrada en los dos miembros:

$$x + \frac{m}{2} = \pm\sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$$

Transponemos $\frac{m}{2}$: $x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$

Notamos que m y n aparecen en la fórmula con **signos distintos** a los que tienen en la ecuación

Ejemplo

Resolver $3x^2 - 2x(x - 4) = x - 12$ por la fórmula particular.

Simplificando la ecuación: $3x^2 - 2x^2 + 8x = x - 12$
$x^2 + 7x + 12 = 0$

Aquí $m = 7$, $n = 12$; luego, aplicando la fórmula particular:

$$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$x_1 = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$x_2 = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$

R. $X_1 = -3$
$X_2 = -4$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON DENOMINADORES

Ejemplo

Resolver la ecuación

$$\frac{1}{3X} = \frac{7}{5X^2} - \frac{11}{60}$$

Hay que quitar denominadores. El m. c. m. de $3x$, $5x^2$ y 60 es $60x^2$. Tendremos:

$$20x = 84 - 11x^2$$

Transponiendo:

$$11x^2 + 20x - 84 = 0$$

Aplicando la fórmula se obtiene

$$x^1 = 2,\ x_2 = -3\frac{9}{11}$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

Al descomponer en factores el primer miembro de una ecuación de la forma $x^2 + mx + n = 0$ ó $ax^2 + bx + c = 0$ se obtiene un método muy rápido para resolver la ecuación.

Ejemplo

Resolver $x^2 + 5x - 24 = 0$ por descomposición en factores.

Factorando el trinomio tenemos:

$$(x + 8)(x - 3) = 0$$

Para que el producto $(x + 8)(x - 3)$ sea cero es necesario que por lo menos uno de estos factores sea cero, es decir, la ecuación se satisface para $x + 8 = 0$ y $x - 3 = 0$

Así, podemos suponer que cualquiera de los factores es cero.

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{5}{x^2-1} - \frac{6}{x+1} = 3\frac{5}{8}$ **R.** $-3, -1\frac{10}{29}$

2. $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{2x+9}{x+3}$ **R.** $3, -\frac{1}{2}$

3. $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x+1}$ **R.** $3+\sqrt{13}, 3-\sqrt{13}$

4. $\frac{x^2}{5} - \frac{x}{2} = \frac{3}{10}$ **R.** $3, -1\frac{2}{3}$

5. $4x - \frac{13}{x} = \frac{3}{2}$ **R.** $2, -1\frac{5}{8}$

6. $\frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} = 3(x-5)$ **R.** $6, 15$

7. $\frac{1}{4}(x-4) + \frac{2}{5}(x-5) = \frac{1}{5}(x^2-53)$ **R.** $8, -4\frac{3}{4}$

8. $\frac{5}{x} - \frac{1}{x+2} = 1$ **R.** $1+\sqrt{11}, 1-\sqrt{11}$

9. $\frac{15}{x} - \frac{11x+5}{x^2} = -1$ **R.** $1, -5$

10. $\frac{8x}{3x+5} + \frac{5x-1}{x+1} = 3$ **R.** $1, -1\frac{3}{7}$

11. $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{6}$ **R.** $4, -1$

12. $1 - \frac{2x-3}{x+5} = \frac{x-2}{10}$ **R.** $5, -18$

13. $\frac{x-13}{x} = 5 - \frac{10(5x+3)}{x^2}$ **R.** $10 - \frac{3}{4}$

Si $x + 8 = 0$, se tiene que $x = -8$
y si $x - 3 = 0$, se tiene que $x = 3$

Lo anterior nos dice que x puede tener los valores - 8 ó 3. Por tanto, - 8 y 3 son las raíces de la ecuación dada.

R $x_1 = -8$
$x_2 = 3$

Para resolver una ecuación de segundo grado por descomposición en factores:

A) Se simplifica la ecuación y se pone en la forma $x^2 + mx + n = 0$ ó $ax^2 + bx + c = 0$

B) Se factoriza el trinomio del primer miembro de la ecuación.

C) Se igualan a cero cada uno de los factores y se resuelven las ecuaciones simples que se obtienen de este modo.

EJERCICIOS

Resuelve por descomposición en factores:

1. $2X^2+7X-4=0$ **R.** $-4,\frac{1}{2}$

2. $6x^2 = 10 - 11x$ **R.** $\frac{2}{3},-2\frac{1}{2}$

3. $20x^2 - 27x = 14$ **R.** $1\frac{3}{4},-\frac{2}{5}$

4. $7x = 15 - 30x^2$ **R.** $\frac{3}{5},-\frac{5}{6}$

5. $60 = 8x^2 + 157x8$ **R.** $-20,\frac{3}{8}$

6. $x(x-1)-5(x-2)=2$ **R.** $2,4$

7. $(x-2)^2-(2x+3)^2=-80$ **R.** $3,-8\frac{1}{3}$

8. $\frac{6}{x^2}-\frac{9}{x}=-\frac{3}{4}$ **R.** $6\frac{3}{4}$

9. $\frac{x+2}{x}+x=\frac{74}{x}$ **R.** $8,-9$

10. $(x+2)^2-\frac{2x-5}{3}=3$ **R.** $-2,-1\frac{1}{3}$

11. $\frac{x}{x-2}+x=\frac{3x+15}{4}$ **R.** $3,10$

12. $x^2 - x - 6 = 0$ **R.** $3,-2$

13. $x^2 + 7x = 18$ **R.** $2,-9$

14. $8x - 65 = -x^2$ **R.** 5,-13

15. $x^2 = 108 - 3x$ **R.** 9,-12

ECUACIONES LITERALES DE SEGUNDO GRADO

Estas se resuelven igual que las numéricas: por la fórmula general o por descomposición en factores. En muchas ecuaciones literales la resolución por factores es muy rápida, mientras que por la fórmula resulta mucho más laboriosa.

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $\frac{3a}{x}-\frac{2x}{a}=1$

Quitando denominadores: $3a^2 - 2x^2 = ax$

$2x^2 + ax - 3a^2 = 0$

Aplicando la fórmula. Aquí $a = 2$, $b = a$, $c = -3a^2$, luego:

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4(2)(-3a^2)}}{4}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+24a^2}}{4}=\frac{-a\pm\sqrt{25a^2}}{4}=\frac{-a\pm 5a}{4}$$

$$x_1=\frac{-a+5a}{4}=\frac{4a}{4}=a$$

$$x_2=\frac{-a-5a}{4}=-\frac{6a}{4}=-\frac{3}{2}a$$

R. $X_1=a$, $x_2=a$

2) Resolver la ecuación $2x^2 - 4ax + bx = 2ab$

Utilizar la fórmula en este caso es bastante laborioso, sin embargo, por descomposición en factores resulta muy rápida.

Para resolver por factores se pasan todas las cantidades al primer miembro de modo que quede cero en el segundo. Así, en este caso, transponiendo $2ab$ tenemos:

$$2x^2 - 4ax + bx - 2ab = 0$$

Descomponiendo el primer miembro (factor común por agrupación) tenemos:

$$2x(x - 2a) + b(x - 2a) = 0$$

o sea $(x - 2a)(2x + b) = 0$

Igualando a cero cada factor tenemos:

Si $x - 2a = 0$, $x = 2a$ $x_1 = 2a$

$2x + b = 0$, $x = -\frac{b}{2}$ $x_2=-\frac{b}{2}$

R.

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $a^2x^2 + abx - 2b^2 = 0$ **R.** $\frac{b}{a},-\frac{2b}{a}$

2. $89bx = 42x^2 + 22b^2$ **R.** $\frac{2b}{7},\frac{11b}{6}$

3. x 2 + ax = 20a 2 **R.** $4a,-5a$

4. $2x^2 = abx + 3a^2b^2$ **R.** $\frac{3ab}{2},-ab$

5. $b^2x^2 + 2abx = 3a^2$ **R.** $\frac{a}{b},-\frac{3a}{b}$

6. $x^2 + ax - bx = ab$ **R.** $-a,b$

7. $x^2 - 2ax = 6ab - 3bx$ **R.** $2a,-3b$

8. $3(2x^2 - mx) + 4nx - 2mn = 0$ **R.** $\frac{m}{2},-\frac{2n}{3}$

9. $x^2 - a^2 - bx - ab = 0$ **R.** $-a,-a+b$

10. $abx^2 - x(b - 2a) = 2$ **R.** $\frac{1}{a},-\frac{2}{b}$

ECUACIONES INCOMPLETAS DE SEGUNDO GRADO

Estas son de la forma $ax^2 + c = 0$, que carecen del término en x, o de la forma $ax^2 + bx = 0$, que carecen del término independiente.

ECUACIONES INCOMPLETAS DE LA FORMA $ax^2 + c = 0$

Si en la ecuación $ax^2 + c = 0$ pasamos c al segundo miembro tenemos:

$$ax^2 = -c \therefore x^2 = -\frac{c}{a} \therefore x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Si a y c tienen el mismo signo, las raíces son imaginarias por ser la raíz cuadrada de una cantidad negativa; si tienen signo distinto, las raíces son reales.

Podemos llegar a este mismo resultado aplicando la fórmula general a la ecuación $ax^2 + c = 0$, teniendo presente que b = 0, ya que el término bx es nulo.

$$x = \frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a} = \pm\sqrt{\frac{-4ac}{4a^2}} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $x^2 + 1 = \frac{7x^2}{9} + 3$

Suprimimos denominadores: $9x^2 + 9 = 7x^2 + 27$

Transponemos: $9x^2 - 7x^2 = 27 - 9$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

Extraemos la raíz cuadrada: $x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm\sqrt{3}$

Las dos raíces + 3 y - 3 son reales y racionales.

2) Resolver la ecuación $x^2 + 5 = 7$

Transponiendo y reduciendo: $x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

Las dos raíces $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son reales e irracionales.

3) Resolver la ecuación $5x^2 + 12 = 3x^2 - 20$

Transponemos: $5x^2 - 3x^2 = -20 - 12$

$2x^2 = -32$

$x^2 = -16$

Extraemos la raíz cuadrada: $x = \pm\sqrt{16}$

$x = \pm 4 \bullet = \pm 4$

Las dos raíces son imaginarias.

ECUACIONES INCOMPLETAS DE LA FORMA $ax^2 + bx = 0$

Resolveremos la ecuación $ax^2 + bx = 0$ por descomposición, con lo que tenemos: $x(ax + b) = 0$

Igualando a cero ambos factores: $x = 0$

$$ax + b = 0 \therefore x = -\frac{b}{a}$$

Vemos que en estas ecuaciones siempre **una raíz es cero** y la otra el coeficiente del término en x con signo cambiado partido por el coeficiente del término en x^2.

El mismo resultado se obtiene aplicando la fórmula general a esta ecuación, sin olvidar que $c = 0$. Se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} = \frac{-b \pm b}{2a}$$

y de aquí $$x_1 = \frac{-b + b}{2a} = -\frac{0}{2a} = 0$$

$$x_2 = \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $5x^2 = -3x$

Transponemos: $5x^2 + 3x = 0$

Descomponemos: $x(5x + 3) = 0$

Igualamos a cero: $x = 0$

$$5x + 3 = 0 \therefore x = -\frac{3}{5}$$

Las raíces son 0 y $-\frac{3}{5}$

2) Resolver la ecuación $3x - 1 = \frac{5x + 2}{x - 2}$

Quitamos denominadores: $(3x - 1)(x - 2) = 5x + 2$

$3x^2 - 7x + 2 = 5x + 2$

Transponemos y reducimos: $x^2 - 12x = 0$

Descomponemos: $3x(x - 4) = 0$

$3x = 0 \therefore x = \frac{0}{3}$

$x - 4 = 0 \therefore x = 4$

Las raíces son 0 y 4.

EJERCICIOS

Resuelve estas ecuaciones:

1. 5x 2 -9 = 46 **R.** $\pm\sqrt{11}$

2. 7x 2 + 14 = 0 **R.** $\pm i\sqrt{2}$

3. 9x 2 -a 2 = 0 **R.** $\pm\frac{a}{3}$

4. (x + 5)(x -5) = -7 **R.** $\pm 3\sqrt{2}$

5. (2x -3)(2x + 3) -135 = 0 **R.** ± 6

6. 3(x + 2)(x -2) = (x -4)2 + 8x **R.** $\pm\sqrt{14}$

7. $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$ **R.** $\pm\frac{2}{3}$

8. (2x -1)(x + 2) -(x + 4)(x -1) + 5 = 0 **R.** $i\sqrt{7}$

9. $\frac{5}{2x^2}-\frac{1}{6x^2}=\frac{7}{12}$ **R.** ± 2

10. $\frac{2x-3}{x-3}=\frac{x-2}{x-1}$ **R.** $\pm\sqrt{3}$

11. $\frac{x^2}{3}-\frac{x-9}{6}=\frac{3}{2}$ **R.** $0,\frac{1}{2}$

12. (4x -1)(2x + 3) = (x + 3)(x -1) **R.** $0,-1\frac{1}{7}$

13. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+4}{x-2}=1$ **R.** $0,-1$

14. x 2 = 5x **R.** 0,5

15. 4x 2 = -32x **R.** $0,-8$

16. x 2 -3x = 3x 2 -4x **R.** $0,\frac{1}{2}$

17. 5x 2 + 4 = 2(x + 2) **R.** $0,\frac{2}{5}$

18. (x -3)2 -(2x + 5)2 = -16 **R.** $0,-\frac{2}{3}$

19. 3x 2 = 48 **R.** ± 4

20. 2x -3 - $\frac{x^2+1}{x-2}=-7$ **R.** ± 3

ECUACIONES CON RADICALES QUE SE REDUCEN A SEGUNDO GRADO

Estas ecuaciones, como sabemos se resuelven destruyendo los radicales mediante la elevación de los dos miembros a la potencia que indique el índice del radical.

Si la ecuación resultante es de segundo grado, al resolverla obtendremos las dos raíces de la ecuación, pero es necesario hacer la **verificación con ambas raíces en la ecuación dada** (comprobar si ambas la satisfacen) porque cuando los dos miembros se elevan a una misma potencia, generalmente se introducen nuevas soluciones que no satisfacen la ecuación dada, conocidas como soluciones extrañas o inadmisibles.

Por tanto, en cada caso es necesario hacer la verificación considerando sólo el valor positivo del radical para aceptar las soluciones que satisfacen la ecuación dada y rechazar las soluciones extrañas.

Ejemplo

Resolver la ecuación $\sqrt{4x}-3-\sqrt{x-2}=\sqrt{3x}-5$

Elevando al cuadrado:

$$\sqrt{(4x-3)^2}-2\sqrt{4x}-3\sqrt{x-2}+\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{(3x-5)^2}$$

o sea 4x -3 -2$\sqrt{4x^2-11x+11x+6}+x-2=3x-5$

Aislamos el radical:

-2 $\sqrt{4x^2-11x+6}=3x-5-4x+3-x+2$

Reducimos: -2 $\sqrt{4x^2-11x+6}=-2x$

Dividimos por -2: $\sqrt{4x^2-11x+6}=x$

Elevamos al cuadrado: $4x^2-11x+6=x^2$

Transponemos y reducimos: $3x^2-11x+6=0$

Descomponemos: $(x-3)(3x-2)=0$

Igualamos a cero: x -3 = 0 $\therefore x=3$

3x -2 = 0 $\therefore x=\frac{2}{3}$

Al hacer la verificación vemos que el valor x = 3 satisface la ecuación dada, pero no así el valor

x = $\frac{2}{3}$.Entonces, x = $\frac{2}{3}$ es una solución extraña, misma que se rechaza

.

La solución correcta de la ecuación es x = 3.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Toda ecuación de segundo grado con una sola incógnita en x representa una **parábola** cuyo eje es paralelo al eje de las ordenadas**.**

Ejemplos

1) Representar y resolver gráficamente la ecuación $x^2 - 5x + 4 = 0$

El primer miembro de esta ecuación es una función de segundo grado de x . Haciendo la función igual a y tenemos:

$$y = x^2 \quad 5x + 4$$

A cada valor de x corresponde un valor de la función, por lo que asignaremos valores a x . (Fig. 73).

Para	$x = 0,$	$y = 4$
	$x = 1,$	$y = 0$
	$x = 2,$	$y = -2$
	$x = -2\frac{1}{2}$,	$y = -2\frac{1}{4}$
	$x = 3,$	$y = -2$
	$x = 4,$	$y = 0$
	$x = 5,$	$y = 4$
	$x = 6,$	$y = 10$
	$x = -1,$	$y = 10$, etc.

Si representamos estos valores de y correspondientes a los que dimos a x , obtendremos la serie de puntos que aparecen señalados en el gráfico.

Uniendo estos puntos por una curva suave se obtiene la parábola ***ABC*** , que es la representación gráfica del primer miembro de la ecuación dada.

El punto inferior de la curva, en este caso, corresponde al valor $x = 2\frac{1}{2}$

El punto inferior de la curva (o el superior, según se verá después) se obtiene cuando a x se le da un valor igual

$a - \dfrac{b}{2a}$ En esta ecuación b = - 5 y

a = 1, y por tanto $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{5}{2} = 2\dfrac{1}{2}$

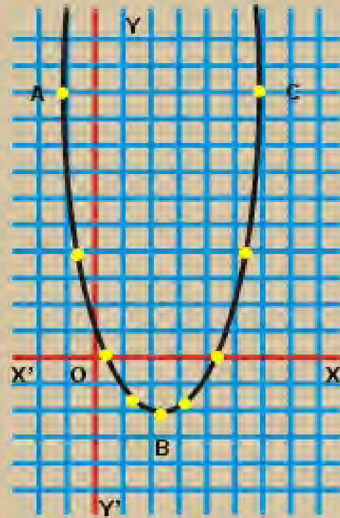


Figura 73

Las abscisas de los puntos donde la curva corta al eje de las x son las raíces de la ecuación. En este caso la curva corta al eje de las x en dos puntos cuyas abscisas son 1 y 4 y éstas son las raíces de la ecuación $x^2 - 5x + 4 = 0$. En la tabla de valores anterior para $x = 1$ y $x = 4$, $y = 0$, las raíces anulan la ecuación.

Cuando ambas raíces son reales y desiguales la curva corta al eje de las x en dos puntos distintos.

Por tanto, para resolver gráficamente una ecuación de segundo grado en x basta hallar los puntos donde la curva corta al eje de las x .

2) Representar y resolver gráficamente la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$

Tendremos:

$$y = x^2 - 6x + 9$$

Asignamos valores a x (Fig. 74).

Para	$x = 0,$	$y = 9$
	$x = 1,$	$y = 4$
	$x = 2,$	$y = 1$
	$x = 3$	$y = 0$
	$x = 4,$	$y = 1$
	$x = 5,$	$y = 4$
	$x = 6,$	$y = 9$, etc.

Representando estos puntos y uniéndolos resulta la parábola ABC , que es tangente al eje de las x .

Esta curva es la representación gráfica del primer miembro de la ecuación

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

La curva toca al eje de las x en un solo punto B cuya abscisa es 3, luego las dos raíces de la ecuación son iguales y valen 3. Obsérvese que en la tabla de valores $x = 3$ anula la función.

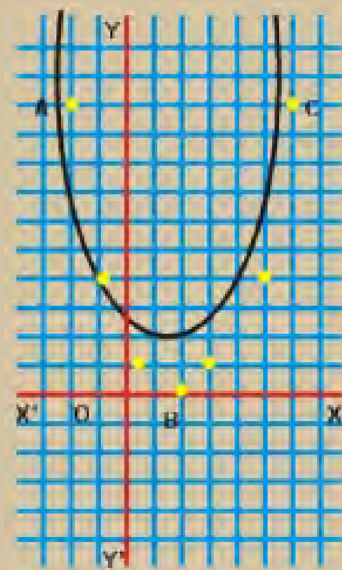


Figura 74

Si al aplicar la fórmula a una ecuación de segundo grado la cantidad subradical de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es negativa, ambas raíces son imaginarias.

La parábola que representa una ecuación de segundo grado cuyas raíces son imaginarias no corta al eje de las x .

EJERCICIOS

Resuelve las ecuaciones siguientes haciendo la verificación con ambas raíces:

1. $x + \sqrt{4x}+1 = 5$ **R.** 2

2. $2x - \sqrt{x-1} = 3x - 7$ **R.** 5

3. $\sqrt{5x}-1+\sqrt{x+3} = 4$ **R.** 1

4. $2\sqrt{x}-\sqrt{x+5} = 1$ **R.** 4

5. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3} = 3$ **R.** 1

6. $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+1}-2\sqrt{x} = 0$ **R.** 4

7. $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-x} = \sqrt{2x}$ **R.** 2

8. $\sqrt{3x}+1+\sqrt{5x} = \sqrt{16x+1}$ **R.** 0,5

9. $\sqrt{2x+\sqrt{4x-3}} = 3$ **R.** 3

10. $\sqrt{x+3}+\dfrac{6}{\sqrt{x+3}} = 5$ **R.** 1,6

11. $\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}} = 5$ **R.** 1,16

12. $2\sqrt{x} = \sqrt{x+7}+\dfrac{8}{\sqrt{x+7}}$ **R.** 9

13. $\sqrt{x+\sqrt{x+8}} = 2\sqrt{x}$ **R.** 1

14. $\sqrt{6-x}+\sqrt{x+7}-\sqrt{12x+1} = 0$ **R.** 2

EJERCICIOS

Representa gráficamente las funciones:

1. $x^2 - 2x - 8$

2. $x^2 - 9$

3. $x^2 - 8x + 16$

4. $x^2 + 4x + 4$

5. $2x^2 - 9x + 7$

6. $3x^2 - 4x - 7$

7. $x^2 + 3x - 4$

8. $x^2 + 3x + 2$

9. $x^2 - 5x + 6$

10. $x^2 + 2x - 8$

Resuelve gráficamente las ecuaciones:

1. $x^2 - 4 = 0$ **R.** 2,-2

2. $x^2 = 3x + 10$ **R.** -2,5

3. $x^2 - 4x = -4$ **R.** 2

4. 2x 2 - 9x + 10 = 0 **R.** $2,2\frac{1}{2}$

5. 2x 2 - 5x - 7 = 0 **R.** $-1,3\frac{1}{2}$

6. $x^2 - 4x + 3 = 0$ **R.** 1,3

7. $x^2 - 6x + 8 = 0$ **R.** 2,4

8. $x^2 - 2x - 3 = 0$ **R.** -1,3

9. $x^2 + 4x + 3 = 0$ **R.** -1,-3

10. $x^2 = 6 - x$ **R.** 2,-3

11. $x^2 = 2x - 1$ **R.** -1

12. $x^2 + 8x + 16 = 0$ **R.** –4



Karl Gustav Jacobi, matemático alemán, fue el primero en aplicar las funciones elípticas a la teoría de los números; su trabajo con ecuaciones diferenciales da origen a una nueva etapa en la Dinámica. Es famosa en este campo la ecuación Hamilton-Jacobi. Desarrolló un método más sencillo para resolver las determinantes.

CAPÍTULO XXXV

PROBLEMAS RESUELTOS POR ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Si el planteamiento de cualquier problema da origen a una ecuación de segundo grado, al resolver esta ecuación se obtienen dos valores para la incógnita, y sólo se aceptan como soluciones los valores de la incógnita que **satisfagan las condiciones del problema;** los que no cumplan con dichos valores se rechazan**.**

PROBLEMA 1

Roberto es dos años mayor que Sergio y la suma de los cuadrados de ambas edades es de 130 años. Hallar ambas edades.

Siendo: x = la edad de Roberto

Entonces: $x - 2$ = la edad de Sergio

Según las condiciones: $x^2 + (x - 2)^2 = 130$

Simplificando, se obtiene: $x^2 - 2x - 63 = 0$

Resolviendo: $(x - 9)(x + 7) = 0$

$x - 9 = 0 \therefore x = 9$

$x + 7 = 0 \therefore x = -7$

Se rechaza la solución $x = -7$ porque la edad de Roberto no puede ser - 7 años y se acepta $x = 9$.

Entonces Roberto tiene 9 años y Sergio $x - 2 = 7$ años.

PROBLEMA 2

Un granjero compró cierto número de costales de arroz por \$240. Si hubiera comprado 3 costales más por el mismo dinero, cada costal le habría costado \$4 menos. ¿Cuántos costales compró y a qué precio?

Siendo x = el número de costales que compró

Si compró x costales por \$240, cada $\frac{240}{x}$ más, x + 3, por el mismo dinero, \$240, cada uno saldría a \$ $\frac{240}{x+3}$ pero según las condiciones el precio de cada costal $\frac{240}{x3}$ sería \$4 menor que cada uno de los anteriores, $\frac{240}{x}$; por tanto tenemos la ecuación:

$$\frac{240}{x} = \frac{240}{x+3} + 4$$

al resolverla obtenemos $x = 12$ y $x = 15$

Se rechaza la solución $x = -15$ y se acepta $x = 12$; por tanto, el granjero compró 12 costales de arroz y cada uno le costó:

$$\frac{240}{x} = \frac{240}{12} = \$20$$

PROBLEMA 3

La longitud de un terreno rectangular duplica su ancho. Si la longitud se aumenta en 40 m y el ancho en 6 m, el área se duplica.

Hallar las dimensiones del terreno.

Siendo x = el ancho del terreno

Entonces $2x$ = la longitud del terreno

El área del terreno es $x \times 2x = 2x^2$

Si aumentamos la longitud en 40 m, ésta sería $(2x + 40)$ m, y aumentando el ancho en 6 m sería $(x + 6)$ m. El área sería ahora $(2x + 40)(x + 6) = 2x^2 + 52x + 240$ m^2, pero según las condiciones, esta nueva área sería el doble que la anterior $2x^2$; luego, tenemos la ecuación:

$$2x^2 + 52x + 240 = 4x^2$$

Transponemos y reducimos:

$$-2x^2 + 52x + 240 = 0$$

Cambiamos signos y dividimos por 2:

$$x^2 - 26x - 120 = 0$$

Al resolver esta ecuación se halla

$$x = 30 \text{ y } x = -4.$$

Aceptando la solución $x = 30$, el ancho del terreno es 30 m y la longitud $2x = 60$ m.

PROBLEMA 4

Un granjero vende una gallina en \$24, perdiendo un porcentaje sobre el costo igual al número de dólares que le costó la gallina. ¿Cuánto le había costado?

Siendo x = el número de dólares que costó la gallina

Entonces x = % de ganancia sobre el costo

La pérdida es el x % de \$$x$. En Aritmética, para hallar el 6% de \$6 procedemos así:

$\frac{6x6}{100} = \frac{36}{100}$; luego, el x % de \$$x$ será

$$\frac{x \times x}{100} = \frac{x \times x^2}{100}$$

Entonces, como la pérdida $\frac{x^2}{100}$ es la diferencia entre el costo x y el precio de venta \$24, se tiene la ecuación:

$$\frac{x^2}{100} = x - 24$$

Al resolver encontramos que $x = 40$ y $x = 60$.

Ambas soluciones satisfacen las condiciones del problema; por tanto, la gallina habría costado \$40 ó \$60.

EJERCICIOS

1. Un número es el triple de otro y la diferencia de sus cuadrados es 1800. Hallar los números. **R.** 45 y 15

2. El cuadrado de un número disminuido en 9 equivale a 8 veces el exceso del número sobre 2. Hallar el número.
R. 7

3. Hallar dos números consecutivos tales que el cuadrado del mayor exceda en 57 al triple del menor.
R. 8 y 9

4. Una estudiante compró cierto número de libros por \$180. Si hubiera comprado 6 libros menos por el mismo dinero, cada uno le habría costado \$1 más. ¿Cuántos libros compró y cuánto le costó cada uno?
R. 36 libros,\$ 5

5. La suma de dos números es 9 y la suma de sus cuadrados 53. Hallar los números.
R. 7 y 2

6. Un número positivo es $\frac{3}{5}$ de otro y su producto es 2160. Hallar los números.
R. 60 y 36

7. *A* tiene 3 años más que *B* y el cuadrado de la edad de *A* aumentado en el cuadrado de la edad de *B* equivale a 317 años. Hallar ambas edades.
R. *A*, 14; *B* 11 años.

8. Un batallón de 180 hombres está dispuesto en filas. El número de soldados de cada fila es 8 más que el número de filas que hay. ¿Cuántas filas hay y cuántos soldados en cada una?
R. 10 filas de 18 hombres

9. Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 240 km. Si la velocidad hubiera sido 20 km por hora más que la que llevaba hubiera tardado 2 horas menos en recorrer dicha distancia. ¿En qué tiempo recorrió los 240 km?
R. 6 horas

10. Hallar tres números consecutivos tales que el cociente del mayor entre el menor equivalga a los $\frac{3}{10}$ del número intermedio. **R.** 4,5,6.

EL PROBLEMA DE LAS LUCES

Consiste en hallar el punto de la línea que une dos focos luminosos y está igualmente iluminado por ambos focos.

Consideremos dos focos luminosos *A* y *B* (figura 75). Siendo *I* la intensidad luminosa del foco *A* e *I* ' la intensidad del foco *B*. (Intensidad o potencia luminosa de un foco es una magnitud que se mide por la cantidad de luz que arroja normalmente sobre la unidad de superficie colocada a la unidad de distancia).

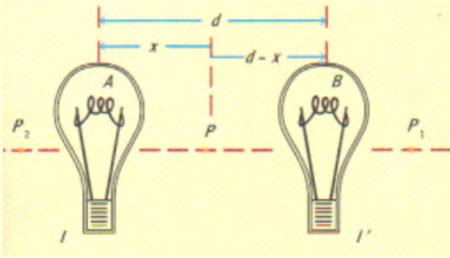


Figura 75

Aquí se trata de hallar el punto de la línea ***AB*** que une ambos focos y está igualmente iluminado por ambos.

Supongamos que el punto iluminado igualmente es *P* . Siendo *d* la distancia entre ambos focos y *x* la distancia del foco *A* al punto igualmente iluminado, la distancia del foco *B* a dicho punto será *d* - *x* .

Existe un principio en Física que dice: **La iluminación que produce un foco luminoso sobre un punto en la dirección del rayo es directamente proporcional a la intensidad del foco e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del foco. al punto.** Entonces, la iluminación que produce el foco *A* sobre el punto *P* , según el principio anterior, será $\frac{I}{x^2}$ y la iluminación que produce el foco *B* sobre el punto *P* será $\frac{I'}{(d-x)^2}$ y estas iluminaciones son **iguales** por ser *P* el punto igualmente iluminado, tendremos la ecuación:

$$\frac{I}{x^2} = \frac{I'}{(d-x)^2}, \text{ o sea } \qquad \frac{I}{I'} = \frac{x^2}{(d-x)^2}$$

Esta es una ecuación de segundo grado que puede ponerse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y resolverse aplicando la fórmula general, pero este procedimiento resulta muy laborioso. Es más fácil extraer la raíz cuadrada a los dos miembros de esta igualdad, con lo que se tiene:

$\frac{\sqrt{I}}{\sqrt{I'}} = \frac{x}{d-x}$ y esto es una ecuación de primer grado, que al resolverla nos da:

$$(d - x)\sqrt{I} = x\sqrt{I'}$$

$$d\sqrt{I} - x\sqrt{I} = x\sqrt{I'}$$

Transponiendo: $$-x\sqrt{I} - x\sqrt{I'} = -d\sqrt{I}$$

o sea: $$x\sqrt{I} + \sqrt{I'} = d\sqrt{I}$$

$$x\left(\sqrt{I} + \sqrt{I'}\right) = d\sqrt{I}$$

$$x = \frac{d\sqrt{I}}{\sqrt{I} + \sqrt{I'}}.$$

y considerando el doble signo de $\sqrt{I'}$ finalmente tenemos:

$$x = \frac{d\sqrt{I}}{\sqrt{I} + \sqrt{I'}} \quad \text{ò} \quad x = \frac{d\sqrt{I}}{\sqrt{I} - \sqrt{I'}}$$

Esta fórmula da la **distancia del foco *A* al punto igualmente iluminado** en función de la distancia entre los dos focos y de las intensidades luminosas de los focos, cantidades todas conocidas, con lo cual dicho punto queda determinado.

Discusión

Observando la figura anterior, consideraremos tres casos:

1) $I > I'$. Siendo $I > I'$ $\sqrt{I} > \sqrt{I'}$; luego, $\sqrt{I} + \sqrt{I'}$ mayor que $\sqrt{I}$ pero menor que $2\sqrt{I}$; por tanto, $\frac{\sqrt{I}}{\sqrt{I} + \sqrt{I'}}$ es menor que 1 y mayor que $\frac{1}{2}$; luego, el primer valor de *x*, que es $\frac{d\sqrt{I}}{\sqrt{I} + \sqrt{I'}} = d \left(\frac{\sqrt{I},}{\sqrt{I} + \sqrt{I'}}\right)$,es igual a *d* multiplicada por una cantidad positiva, menor que 1 y mayor que $\frac{1}{2}$; luego, x es menor que d y mayor que $\frac{d}{2}$, esto significa que el punto igualmente iluminado está a la derecha de *A*, entre *A* y *B*, más cerca de *B* que de *A*, como está el punto *P*. Es evidente que el punto igualmente iluminado tiene que estar más cerca de la luz más débil.

En el segundo valor de x , siendo $\sqrt{I} > \sqrt{I'}$ el denominador, $\sqrt{I} - \sqrt{I'}$ es positivo, pero menor que $\sqrt{I}$; luego, $\frac{\sqrt{I}}{\sqrt{I} - \sqrt{I'}}$ es una cantidad positiva y mayor que 1; luego, *x* es igual a *d* multiplicada por una cantidad positiva mayor que 1; luego, *x* será positiva y mayor que *d*, lo que significa que hay otro punto igualmente iluminado que está situado a la derecha de *B*, como el punto P_1.

$I = I'$. En este caso $\sqrt{I} = \sqrt{I'}$; luego, $\sqrt{I} + \sqrt{I'} = 2\sqrt{I}$ y el primer valor de *x* se convierte en $x = \frac{d\sqrt{I}}{2\sqrt{I}} = \frac{d}{2}$,esto

significa que el punto igualmente iluminado será el punto medio de la línea *AB*.

El segundo valor de *x*, siendo $\sqrt{I} = \sqrt{I'}$, se convierte

en $x = \dfrac{d\sqrt{I}}{0}$ esto significa que el otro punto igualmente iluminado está a una distancia infinita del foco *A*, es decir que no existe.

Entonces, siendo *I* = *I'* sólo hay una solución.

3) I < I'. En este caso $\sqrt{I} < \sqrt{I'}$ o sea $\sqrt{I'} > \sqrt{I}$;

luego, $\sqrt{I} +$ será mayor que $2\sqrt{I}$, y $\dfrac{\sqrt{I}}{\sqrt{I}+\sqrt{I'}}$ será

menor que $\dfrac{1}{2}$; luego, *x* será igual a *d* multiplicada por

una cantidad menor que $\dfrac{1}{2}$, o sea que *x* es positiva y

menor que $\dfrac{d}{2}$, esto significa que el punto igualmente

iluminado está a la derecha de *A*, más cerca de *A* que de *B*, como es lógico que suceda por ser el foco *A* más débil que el *B* en este caso.

En el segundo valor de x, siendo $\sqrt{I} < \sqrt{I'}$ el denominador,

$\sqrt{I} - \sqrt{I'}$ es negativo; luego, $\dfrac{\sqrt{I}}{\sqrt{I}-\sqrt{I'}}$ es una cantidad

negativa y *x* es igual a *d* multiplicada por una cantidad negativa; luego, *x* es negativa, esto significa que hay otro punto igualmente iluminado y situado a la izquierda de *A* como el punto P_2.

Ejemplos

1) Hay un foco luminoso *A* de 100 bujías y otro *B* de 25 bujías, situado 3 m a la derecha de *A*. Hallar el punto de la línea *AB* igualmente iluminado por ambos.

Aquí, *d* = 3, *I* = 100, *I* ' = 25. El primer valor de *x* será:

$$x = \frac{d\sqrt{I}}{\sqrt{I}+\sqrt{I'}} = \frac{3x\sqrt{100}}{\sqrt{100}+\sqrt{25}} = \frac{3\times 10}{10+5} = \frac{30}{15} = 2 \text{ m}$$

por tanto hay un punto en la línea *AB* igualmente iluminado situado 2 m a la derecha de *A*. El segundo valor será:

$$x = \frac{d\sqrt{I}}{\sqrt{I}-\sqrt{I'}} = \frac{3\times\sqrt{100}}{100-\sqrt{25}} = \frac{3\times 10}{10-5} = \frac{30}{5} = 6 \text{ m}$$

por tanto hay otro punto igualmente iluminado en la línea *AB* situado 6 m a la derecha de *A*.

2) Hay dos focos luminosos, *A* de 36 bujías y *B* de 100 bujías, y *B* está 4 m a la derecha de *A*. Hallar el punto igualmente iluminado de la recta *AB*.

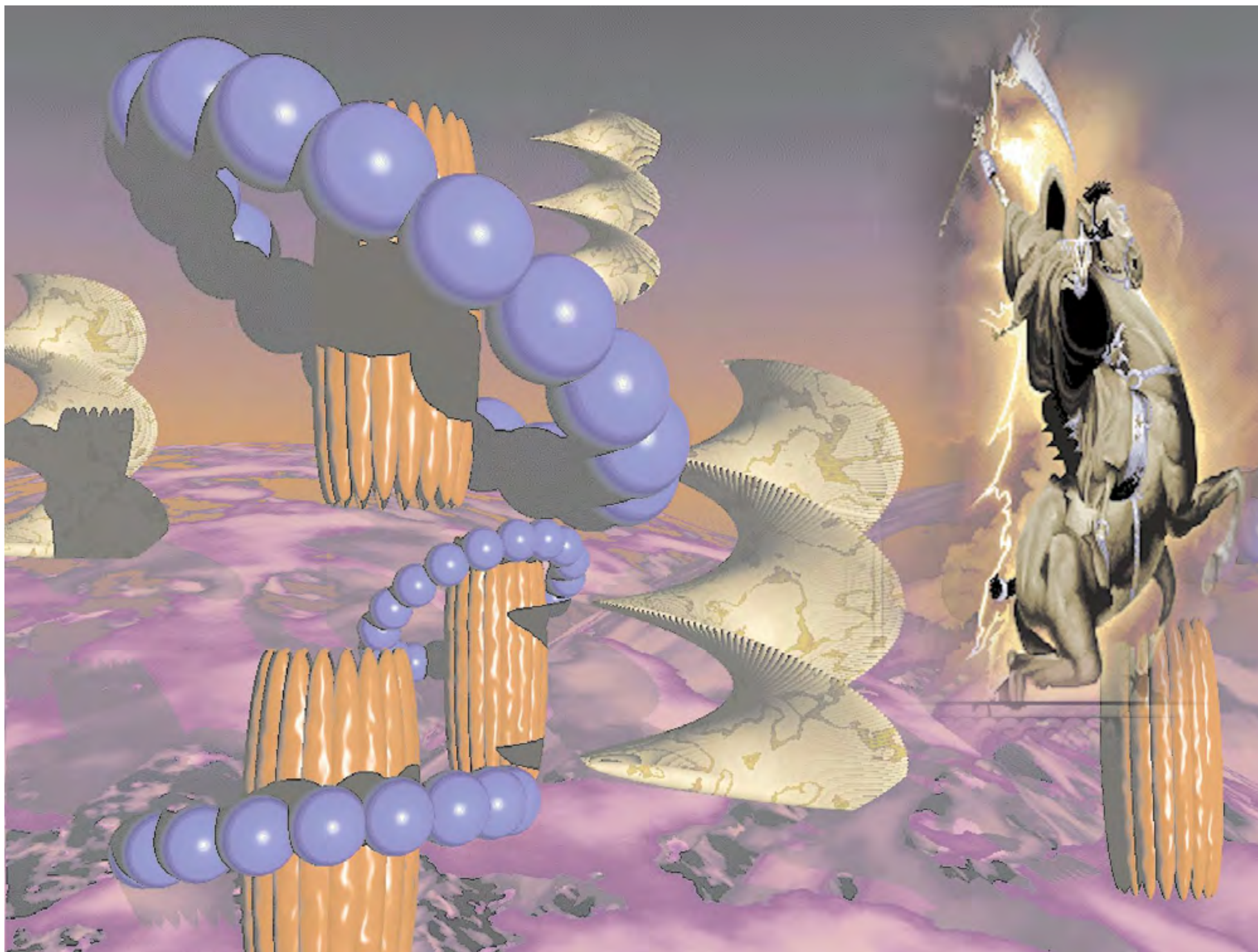
Aquí *d* = 4, *I* = 36, *I'* = 100. El primer valor de *x* será:

$$x = \frac{d\sqrt{I}}{\sqrt{I}-\sqrt{I'}} = \frac{4\times\sqrt{36}}{\sqrt{36}+100} = \frac{4\times 6}{6+10} = \frac{24}{16} = 1.50 \text{ m}$$

por tanto hay un punto de la línea *AB* igualmente iluminado, situado 1.50 m a la derecha de *A*. El segundo valor de *x* será:

$$x = \frac{d\sqrt{I}}{\sqrt{I}-\sqrt{I'}} = \frac{4\times 6}{6-10} = \frac{4\times 6}{-4} = \frac{24}{-4} = -\ 6 \text{ m}$$

por tanto hay otro punto de la línea *AB* igualmente iluminado, situado 6 m a la izquierda de *A*.



Evariste Galois, matemático francés, dejó la demostración del teorema que lleva su nombre sobre la resolución de las ecuaciones de primer grado. Muere en un duelo, a los 21 años de edad, a pesar de su corta vida Galois dejó una profunda huella en la historia de las matemáticas.

CAPÍTULO XXXVI

TEORÍA DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y ESTUDIO DEL TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO

El trinomio de segundo grado puede descomponerse en los tres factores siguientes:

- el coeficiente de x^2;
- x menos una de las raíces de la ecuación correspondiente; y,
- x menos la otra raíz de la ecuación.

Al efectuar la descomposición factorial del trinomio de segundo grado pueden presentarse los tres siguientes casos: que el discriminante sea positivo, en este caso las raíces son reales y distintas; que el discriminante sea nulo, en este caso las raíces son reales e iguales; y, que el discriminante sea negativo, en este caso las raíces son imaginarias y para cualquier valor de x el trinomio tendrá el mismo signo que a.

CARÁCTER DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

La ecuación general de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tiene dos raíces y sólo dos, cuyos valores son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El **carácter** de estas raíces depende del valor del binomio $b^2 - 4ac$ que está bajo el signo radical; por esa razón $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación general de segundo grado.

Consideraremos tres casos:

1) $b^2 - 4ac$ es una cantidad positiva. En este caso las raíces son **reales** y **desiguales.**

Si $b^2 - 4ac$ es **cuadrado perfecto,** las raíces son **racionales,** y si no lo es, son **irracionales.**

2) $b^2 - 4ac$ es cero. En este caso las **raíces** son **reales** e **iguales.** Su valor es $-\frac{b}{2a}$

3) $b^2 - 4ac$ es una cantidad negativa. En este caso las **raíces** son **imaginarias** y **desiguales.**

Ejemplos

1) Determina el carácter de las raíces de:

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

Hallemos el valor de $b^2 - 4ac$. Aquí $a = 3$, $b = -7$, $c = 2$, luego

$$b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(3)(2) = 49 - 24 = 25$$

Como $b^2 - 4ac = 25$ es positiva, las raíces son reales y desiguales, y como 25 es cuadrado perfecto, ambas raíces son racionales.

2) Determina el carácter de las raíces de:

$$3x^2 + 2x - 6 = 0$$

Aquí $a = 3$, $b = 2$, $c = -6$, luego

$$b^2 - 4ac = 2^2 - 4(3)(-6) = 4 + 72 = 76$$

Como $b^2 - 4ac = 76$ es positiva, las raíces son reales y desiguales, y como 76 no es cuadrado perfecto, las raíces son irracionales.

3) Determina el carácter de las raíces de:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$$

Como $b^2 - 4ac = 0$, las raíces son reales e iguales.

4) Determinar el carácter de las raíces de:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8$$

Como $b^2 - 4ac = -8$ es negativa, las raíces son imaginarias.

EJERCICIOS

Determina el carácter de las raíces en las ecuaciones siguientes, pero sin resolverlas:

1. $4x^2 - 5x + 3 = 0$. **R.** Imaginarias

2. $x^2 + x - 1 = 0$. **R.** Reales y desiguales, irracionales

3. $5x^2 - 7x + 8 = 0$. **R.** Imaginarias

4. $x^2 - 10x - 11 = 0$. **R.** Reales y desiguales, racionales.

5. $3x^2 + 5x - 2 = 0$. **R.** Reales y desiguales, racionales.

6. $2x^2 - 4x + 1 = 0$. **R.** Reales y desiguales, irracionales.

7. $4x^2 - 4x + 1 = 0$. **R.** Reales e iguales.

8. $3x^2 - 2x + 5 = 0$. **R.** Imaginarias.

9. $x^2 - 10x + 25 = 0$. **R.** Reales e iguales.

10. $x^2 - 5x - 5 = 0$. **R.** Reales y desiguales, irracionales.

11. $2x^2 - 9x + 7 = 0$. **R.** Reales y desiguales, racionales.

12. $36x^2 + 12x + 1 = 0$. **R.** Reales e iguales.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES EN LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

La ecuación general de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$ y sus raíces

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad y \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Estas raíces tienen dos propiedades:

1) Suma de las raíces.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}, \text{ o sea } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

por tanto, la suma de las raíces es igual al coeficiente del segundo término de la ecuación con el signo cambiado partido por el coeficiente del primer término.

2) Producto de las raíces.

$$x_1x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \text{ o sea } x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

por tanto, el producto de las raíces es igual al tercer término de la ecuación con su propio signo partido por el coeficiente del primero.

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se escribe $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, dividiendo todos sus términos por a. Entonces, como

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} \quad y \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

podemos decir en toda ecuación de la **forma** $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ó $x^2 + mx + n = 0$, es decir, en toda ecuación de segundo grado en que el coeficiente del primer término es 1, la **suma de las raíces** es igual al coeficiente del segundo término con el signo cambiado y el producto de las raíces es igual al tercer término con su propio signo.

Ejemplos

1) Indicar si 2 y - 5 son las raíces de la siguiente ecuación:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Si 2 y - 5 fueran las raíces, su suma tendría que ser igual al coeficiente del segundo término 3 con el signo cambiado, - 3 y su producto sería el tercer término - 10 con su propio signo. Veamos si cumplen estas condiciones:

Suma: 2 + (- 5) = 2 - 5 = - 3, coeficiente de x con el signo cambiado.

Producto: 2 × (- 5) = - 10, tercer término con su propio signo.

Luego, 2 y - 5 son las raíces de la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$

2) Indicar si - 3 y - $\frac{1}{2}$ son las raíces de la ecuación

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

Pongamos la ecuación en la forma $x^2 + mx + n = 0$ dividiendo por 2, con lo que nos quedará:

$$x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

Suma: $(-3) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -3 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$

coeficiente de x con el signo cambiado.

Producto: $(-3)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$, tercer término con su propio signo.

Luego, - 3 y - $\frac{1}{2}$ son las raíces de la ecuación

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

3) Indicar si 1 y - $\frac{2}{3}$ son las raíces de la ecuación

$$3x^2 + x - 2 = 0$$

Dividiendo por 3 se tiene $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

Suma: $1 + \left(-\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

La suma da el coeficiente del segundo término con su propio signo y no con el signo cambiado, luego 1 y - $\frac{2}{3}$ no son las raíces de la ecuación dada.

EJERCICIOS

Determina por las propiedades de las raíces, si:

1. 4 y - 7 son raíces de $x^2 + 3x - 28 = 0$ **R.** Sí

2. $\frac{1}{2}$ y - $\frac{2}{3}$ son las raíces de $6x^2 + x - 2 = 0$ **R.** Sí

3. $\frac{1}{2}$ y - $\frac{3}{4}$ son las raíces de $8x^2 - 2x - 3 = 0$ **R.** No

4. 2 y - 3 son las raíces de $x^2 + x - 6 = 0$ **R.** Sí

5. 1 y 5 son las raíces de $x^2 - 4x - 5 = 0$ **R.** No

6. 1 y - 1 son las raíces de $2x^2 - x - 1 = 0$ **R.** Sí

7. - 3 y $\frac{1}{3}$ son las raíces de $3x^2 + 8x - 3 = 0$ **R.** Sí

8. 2 y - $\frac{1}{5}$ son las raíces de $5x^2 - 11x + 2 = 0$ **R.** No

9. - 4 y - $\frac{1}{4}$ son las raíces de $4x^2 + 17x + 4 = 0$ **R.** Sí

10. - 5 y - $\frac{1}{5}$ son las raíces de $5x^2 + 24x - 5 = 0$ **R.** No

EJERCICIOS

Determina la ecuación

cuyas raíces son:

1. – 10 y 11
R $x^2 - x - 110 = 0$

2. 1 y $\frac{1}{2}$
R $2x^2 - 3x + 1 = 0$

3. - 2 y - $\frac{3}{2}$
R. $2x^2 + 7x + 6 = 0$

4. - 5 y $\frac{2}{7}$
R. $7x^2 + 33x - 10 = 0$

5. 18 y - 52
R. $x^2 + 34x - 936 = 0$

6. - 15 y - 11
R. $x^2 + 26x + 165 = 0$

7. 0 y 2
R. $x^2 - 2x = 0$

8. 0 y - $\frac{1}{3}$
R. $3x^2 + x = 0$

9. 5 y – 5
R. $x^2 - 25 = 0$

10. $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$
R. $4x^2 - 1 = 0$

11. 7 y 7
R. $x^2 - 14x + 49 = 0$

12. 2a y - a
R. $x^2 - ax - 2a^2 = 0$

13. b y a - b
R $x^2 - ax + ab - b^2$

14. $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$
R. $x^2 - 2x - 1 = 0$

15. $2 + \sqrt{5}$ y $2 - \sqrt{5}$
R. $x^2 - 4x - 1 = 0$

16. $3 + \sqrt{-1}$ y $3 - \sqrt{-1}$
R. $x^2\ 6x + 10 = 0$

17. 3 y 4
R. $x^2 - 7x + 12 = 0$

18. - 1 y 3
R. $x^2 - 2x - 3 = 0$

DADAS LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO, DETERMINAR LA ECUACIÓN

Ejemplos

1) Las raíces de una ecuación de segundo grado son 3 y - 5. Determinar la ecuación.

Hallemos la suma y el producto de las raíces.

Suma: $3 + (-5) = 3 - 5 = -2$

Producto: $3 \times (-5) = -15$

Sabemos que la suma de las raíces de toda ecuación de la forma $x^2 + mx + n = 0$ es igual al coeficiente del segundo término con el signo cambiado y el producto es igual al tercer término con su propio signo.

Aquí, la suma de las raíces es -2, luego el coeficiente del segundo término de la ecuación será 2; el producto de las raíces es - 15, luego - 15 será el tercer término de la ecuación.

Por tanto, la ecuación será:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

2) Las raíces de una ecuación son 2 y - $\frac{3}{4}$ Determinar la ecuación.

Suma de las raíces: $2 + \left(-\frac{3}{4}\right) = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

Producto de las raíces: $2 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

La suma con el signo cambiado se pone como coeficiente del segundo término de la ecuación, y el producto con su propio signo se pone como tercer término, por tanto la ecuación será:

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{3}{2} = 0 \text{ o sea } 4x^2 - 5x - 6 = 0$$

3) Hallar la ecuación cuyas raíces son - 4 y - $\frac{3}{5}$

Suma: $(-4) + \left(-\frac{3}{4}\right) = -4 - \frac{3}{5} = -\frac{23}{5}$

Producto: $(-4) \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{5}$

La ecuación será:

$$x^2 + \frac{23}{5}x + \frac{12}{5} = 0 \text{ o sea } 5x^2 + 23x + 12 = 0$$

DADA LA SUMA Y EL PRODUCTO DE DOS NÚMEROS, HALLAR LOS NÚMEROS

Ejemplos

1) La suma de dos números es 4 y su producto - 396

Hallar los números.

Por las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado, si la suma de los dos números que se buscan es 4 y su producto - 396, los dos números son las raíces de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + mx + n = 0$ en la cual el coeficiente del segundo término es - 4 (la suma con el signo cambiado) y el tercer término - 396 (el producto con su propio signo), por tanto la ecuación es:

$$x^2 - 4x - 396 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son los números que buscamos. Resolviendo esta ecuación:

$(x - 22)(x + 18) = 0$

$x - 22 = 0 \therefore x = 22$

$x + 18 = 0 \therefore x = -18$

$x_1 = 22 \qquad x_2 = -18$

Por tanto, los números buscados son:

$$22 \quad y \quad -18$$

2) La suma de dos números es $-\frac{35}{4}$ y su producto 6. Hallar los números.

Los dos números que buscamos son las raíces de una ecuación de segundo grado cuyo primer término es x^2, en la cual el coeficiente del segundo término es $\frac{35}{4}$ (la suma con el signo cambiado) y cuyo 3er. término es 6 (el producto con su propio signo), luego la ecuación es

$$x^2 + \frac{35}{4}x + 6 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son los números que buscamos. Resolviendo la ecuación:

$$4x^2 + 35x + 24 = 0$$

$$x = \frac{-35 \pm \sqrt{35^2 - 4(4)(24)}}{8}$$

$$= \frac{-35 \pm \sqrt{1225 - 384}}{8}$$

$$= \frac{-35 \pm \sqrt{841}}{8} = \frac{-35 \pm 29}{8}$$

$$x_1 = \frac{-35 + 29}{8} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-35 - 29}{8} = \frac{-64}{8} = -8$$

Por tanto, los números buscados son - 8 y - $\frac{3}{4}$.

EJERCICIOS

Encuentra dos números sabiendo que:

1. La suma es - 33 y el producto 260

R. -13 y –20

2. La suma es - 1 y el producto 306

R. 17 y –18

3. La suma es - 49 y el producto 294

R. -7 y –42

4. La suma es 6 y el producto - 247

R. -13 y 19

5. La suma es $\frac{3}{2}$ y el producto - 1

R. 2 y - $\frac{1}{2}$

6. La suma es - $\frac{22}{3}$ y el producto 8

R. -6 y - $\frac{4}{3}$

7. La suma es $\frac{1}{4}$ y el producto - $\frac{3}{8}$

R. $\frac{3}{4}$ y - $\frac{1}{2}$

8. La suma es -13 $\frac{4}{7}$ y el producto - 6

R. 14 y $\frac{3}{7}$

9. La suma es - 3 $\frac{1}{3}$ y el producto 1

R. -3 y - $\frac{1}{3}$

10. La suma es $\frac{31}{40}$ y el producto $\frac{3}{20}$

R. $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{8}$

11. La suma es - $\frac{1}{6}$ y el producto - $\frac{5}{9}$

R. $\frac{2}{3}$ y - $\frac{5}{6}$

12. La suma es $\frac{7}{20}$ y el producto - $\frac{3}{10}$

R. $\frac{3}{4}$ y - $\frac{2}{5}$

13. La suma es 4 $\frac{1}{5}$ y el producto -4

R. 5 y - $\frac{4}{5}$

14. La suma es $\frac{59}{72}$ y el producto $\frac{1}{6}$

R. $\frac{3}{8}$ y $\frac{4}{9}$

15. La suma es 2 y el producto -4

R. $1 + \sqrt{5}$ y $1 - \sqrt{5}$

16. La suma es 1 y el producto - $\frac{11}{4}$

R. $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ y $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$

ESTUDIO DEL TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO $AX^2 + BX + C$

Descomposición en factores del trinomio de segundo grado

El trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ puede escribir-se así:

$$ax^2 + bx + c = a\left(X^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \quad (1)$$

Al igualar a cero el trinomio del segundo miembro tenemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{ò} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

que es la ecuación general de segundo grado.

Sabemos que las raíces x_1 y x_2 de esta ecuación tienen las dos propiedades siguientes:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \therefore \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Ahora, si en el trinomio $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ c en lugar de $\frac{b}{a}$ ponemos su igual $-(x_1 + x_2)$ y en lugar de $\frac{c}{a}$ ponemos su igual x_1x_2 tenemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

$$\text{(multiplicando)} = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2$$

$$\text{(factorando por agrupación)} = x(x - x_1) - x_2(x - x_1)$$

$$= (x - x_1)(x - x_2)$$

Luego, queda $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$

Al sustituir el valor de este trinomio en (1) tenemos:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

lo cual nos indica que el trinomio de segundo grado se descompone en 3 factores: 1) El coeficiente de x^2, que es a. 2) x menos una de las raíces de la ecuación que se obtiene igualando el trinomio a cero. 3) x menos la otra raíz.

EJERCICIOS

Descomponer en factores, hallando las raíces:

1. $72x^2 - 55x - 7$ **R.** (8x-7)(9x+1)

2. $6 + 31x - 30x^2$ **R.** (6x+1)(6 - 5x)

3. $10x^2 + 207x - 63$ **R.** (10x -3)(x + 21)

4. $100 - 15x - x^2$ **R.** (20 + x)(5 - x)

5. $18x^2 + 31x - 49$ **R.** (x – 1)(18 x + 49)

6. $6x^2 - ax - 2a^2$ **R.** (3x – 2a)(2 x + a)

7. $5x^2 + 22xy - 15y^2$ **R.** (5x – 3y)(x + 5y)

8. $15x^2 - 32mx - 7m^2$ **R.** (3x – 7m)(5x + m)

9. $x^2 - 16x + 63$ **R.** (x – 7)(x – 9)

10. $x^2 + 24x + 143$ **R.** (x + 11)(x + 13)

11. $x^2 - 26x - 155$ **R.** (x – 31)(x + 5)

12. $2x^2 + x - 6$ **R.** (2x – 3)(x + 2)

13. $12x^2 + 5x - 2$ **R.** (4x – 1)(3x + 2)

14. $5x^2 + 41x + 8$ **R.** (5x + 1)(x + 8)

15. $6x^2 + 7x - 10$ **R.** (6x – 5)(x + 2)

16. $12x^2 - 25x + 12$ **R.** (4x – 3)(3x – 4)

17. $8x^2 + 50x + 63$ **R.** (4x + 7)(2x + 9)

18. $27x^2 + 30x + 7$ **R.** (9x + 7)(3x + 1)

19. $30x^2 - 61x + 30$ **R.** (6x – 5)(5x – 6)

20. $11x^2 - 153x - 180$ **R.** (11x + 12)(x – 15)

21. $6 - x - x^2$ **R.** (3 + x)(2 – x)

22. $5 - 9x - 2x^2$ **R.** (5 + x)(1 – 2x)

23. $15 + 4x - 4x^2$ **R.** (3 + 2x)(5 – 2x)

24. $4 + 13x - 12x^2$ **R.** (1 + 4x)(4 – 3x)

DESCOMPONER UN TRINOMIO EN FACTORES HALLANDO LAS RAÍCES

Visto lo anterior, para descomponer un trinomio de segundo grado en factores hallando las raíces, se procede de la siguiente forma:

1) Se iguala el trinomio a cero y se encuentran las dos raíces de esta ecuación.

2) Se descompone el trinomio en 3 factores: el coeficiente de x^2, x menos una de las raíces y x menos la otra raíz.

Ejemplos

1) Descomponer en factores $6x^2 + 5x - 4$

Igualando el trinomio a cero, tenemos:

$$6x^2 + 5x - 4 = 0$$

Buscamos las raíces de esta ecuación:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(6)(-4)}}{} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{12} =$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{-5 \pm 11}{12}$$

$$x_1 = \frac{-5+11}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5-11}{12} = \frac{-16}{12} = -\frac{3}{4}$$

Entonces, el trinomio se descompone:

$$6x^2 + 5x - 4 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left[x - \left(-\frac{4}{3}\right)\right]$$

$$= 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right)$$

$$= 6\left(\frac{2x-1}{2}\right)\left(\frac{3x+4}{3}\right) = \frac{6(2x-1)(3x+4)}{6}$$

$$= (2x-1)(3x+4)$$

2) Descomponer en factores $24x^2 + 26x + 5$

Al igualar a cero el trinomio, tenemos:

$$24x^2 + 26x + 5 = 0$$

Resolviendo esta ecuación:

$$x = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4(24)5}}{48} = \frac{-26 \pm \sqrt{196}}{48}$$

$$= \frac{-26+14}{48}$$

$$x_1 = \frac{-26+14}{48} = \frac{-12}{48} = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-26-14}{48} = \frac{-40}{48} = -\frac{5}{6}$$

Entonces:

$$24x^2 + 26x + 5 = 24\left[x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right]\left[x - \left(-\frac{5}{6}\right)\right] =$$

$$24\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{5}{6}\right)$$

$$= \frac{24(4x+1)(6x+5)}{24} = (4x+1)(6x+5)$$

3) Descomponer en factores $4 + 7x - 15x^2$

Ordenamos de forma descendente con relación a x y lo igualamos a cero:

$$-15x^2 + 7x + 4 = 0$$

$$15x^2 - 7x - 4 = 0$$

Resolviendo:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4(15)(-4)}}{30} = \frac{7 \pm \sqrt{289}}{30} = \frac{7 \pm 17}{30}$$

$$x_1 = \frac{7+17}{30} = \frac{24}{30} = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{7-17}{30} = \frac{-10}{30} = -\frac{1}{3}$$

Entonces:

$$4 + 7x - 15x\ 2 = -15\left(x - \frac{4}{5}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{-15(5x-4)(3x+1)}{15}$$

$$= -(5x-4)(3x+1) = (4-5x)(1+3x)$$

VARIACIONES DEL TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO

El trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ es función de segundo grado de x. Si designamos como y el valor de la función tendremos:

$$y = ax^2 + bx + c$$

A cada valor de x corresponde un valor de la función o del trinomio.

Así, en el trinomio $y = x^2 + 2x - 3$ tenemos:

Para $x = 0 \quad y = -3$

$x = 1 \quad y = 0$

$x = 2 \quad y = 5$

. . . .

$x = -1 \quad y = -4$

$x = -1 \quad y = -3$ etc.

donde vemos que a cada valor de x corresponde un valor de y, o sea del trinomio.

A continuación estudiaremos las variaciones del signo del trinomio y del valor del trinomio que corresponden a las variaciones del valor de x.

VARIACIONES DEL SIGNO DEL TRINOMIO

Sabemos que el trinomio de segundo grado se descompone de este modo:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (1)$$

Consideraremos tres casos:

1) $b^2 - 4ac$ positivo. Las **raíces** del trinomio son **reales y desiguales**. En este caso:

a) El trinomio tiene el mismo signo de a para todos los valores de x mayores o menores que ambas raíces.

Si x es mayor que x_1 y x_2, los dos binomios de (1) son positivos; luego, su producto es positivo, y si x es menor que x_1 y x_2, ambos binomios son negativos; luego, su producto es positivo.

Entonces, el signo de $a(x - x_1)(x - x_2)$ será igual al de a, y como este producto es igual al trinomio, éste tiene el mismo signo que a.

b) El trinomio tiene signo contrario al de a para todos los valores de x comprendidos entre ambas raíces.

Si x es mayor que una de las raíces y menor que la otra, uno de los binomios de (1) es positivo y el otro negativo; luego, su producto es negativo, y al multiplicar a por una cantidad negativa su signo cambiará.

Por ello, el trinomio tiene signo contrario al de a.

2) $b^2 - 4ac = 0$. Las raíces del trinomio son iguales.

En este caso: El trinomio tiene el mismo signo que a para todo valor de x distinto de la raíz.

Como $x_1 = x_2$, para cualquier valor de x distinto de esta raíz, ambos binomios de (1) serán positivos o negativos y su producto será positivo; luego, el signo que resulte de multiplicar a por este producto será siempre igual al signo de a.

Por tanto, el trinomio tendrá igual signo que a.

3) $b^2 - 4ac$ negativo. Las raíces del trinomio son imaginarias.

En este caso: para cualquier valor de x el trinomio tiene el mismo signo que a.

Si $b^2 - 4ac$ es negativo, $4ac - b^2$ es positivo.

Entonces, en $y = ax^2 + bx + c$, multiplicando y dividiendo el segundo miembro por $4a$, tenemos:

$$y = \frac{4a^2x^2 + 4abx + 4ac}{4a}$$

Sumando y restando b^2 al numerador del segundo miembro:

$$y = \frac{4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac - b^2}{4a}$$

Descomponiendo el trinomio cuadrado perfecto $4a^2x^2 + 4abx + b^2$ tenemos:

$$y = \frac{(2ax + b)^2 + 4ac - b^2}{4a} \qquad (2)$$

El numerador de esta fracción siempre es positivo porque $(2ax + b)^2$ siempre es positivo (todo cuadrado es positivo) y $4ac - b^2$ también es positivo por ser $b^2 - 4ac$ negativo.

Luego, el signo de esta fracción será igual al del denominador $4a$ y este signo es igual al de a, y como y, o sea el trinomio, es igual a esta fracción, el signo del trinomio será igual al de a para cualquier valor de x.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DEL TRINOMIO

Para calcular el valor máximo o mínimo del trinomio usaremos la expresión (2):

$$y = \frac{(2ax+b)^2 + 4ac - b^2}{4a}$$

a) Cuando a es positiva. En la fracción del segundo miembro, que es el valor de y, o sea del trinomio, el denominador $4a$ es positivo y tiene un valor fijo (porque lo que varía es x , y $4a$ no contiene x); luego, el valor de esta fracción depende del valor del numerador.

En el numerador, $4ac - b^2$ tiene un valor fijo porque no contiene x ; luego, el valor del numerador depende del de $(2ax + b)^2$.

El valor de esta expresión es el que varía porque con-tiene a la x . Ahora bien, el **menor valor** que puede tener $(2ax + b)^2$ es cero, y esta expresión vale cero cuando $x = -\frac{b}{2a}$, porque entonces se tiene:

$$2ax + b = 2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b = -b + b = 0$$

y la expresión se convierte en $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$

Luego, si y , o sea el trinomio, es igual a la fracción del segundo miembro y esta fracción, cuando a es positiva, tiene un valor mínimo para $x = -\frac{b}{2a}$, cuando a es
positiva, el trinomio tiene un **valor mínimo para:**

$$x = -\frac{b}{2a}, \text{ es } \frac{4ac - b^2}{4a}$$

b) Cuando a es negativa. El denominador $4a$ es negativo y al dividir el numerador por $4a$ **cambiará su signo;** luego, la fracción tiene su mayor valor cuando $(2ax + b)^2 = 0$, lo que ocurre cuando $x = -\frac{b}{2a}$ y como y es igual a esta fracción, y , o sea el trinomio, tendrá un valor máximo para $x = -\frac{b}{2a}$ cuando a es negativo, cuyo máximo vale $\frac{4ac - b^2}{4a}$

En resumen: si a es **positiva**, el trinomio tiene un valor mínimo, y si a es **negativa**, tendrá un valor **máximo.**

El máximo o mínimo corresponde al valor de $x = -\frac{b}{2a}$

y vale $\frac{4ac - b^2}{4a}$

Ejemplos

1) Siendo el trinomio $y = x^2 - 2x + 3$

Como $a = +1$, positiva, el trinomio tiene un valor mínimo para

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \text{ y este mínimo vale}$$

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times 3 - 4}{4} = 2$$

Para
$x = -2,\ y = 11$
$x = -1,\ y = 6$
$x = 0,\ y = 3$
$x = 1,\ y = 2$
$x = 2,\ y = 3$
$x = 3,\ y = 6$

2) Siendo el trinomio $y = -x^2 + 4x - 1$. Como $a = -1$, el trinomio tiene un valor máximo para

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2 \text{ y este máximo vale}$$

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-1) - 16}{-4}$$

$$= \frac{4 - 16}{-4} = -\frac{-12}{-4} = 3$$

Para
$x = -1,\ y = -6$
$x = 0,\ y = -1$
$x = 1,\ y = 2$
$x = 2,\ y = 3$
$x = 3,\ y = 2$
$x = 4,\ y = -1$
$x = 5,\ y = -6$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS VARIACIONES DEL TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO

Ejemplos

1) Representar gráficamente las variaciones de $x^2 - 6x + 5$

Por ser $b^2 - 4ac = 36 - 20 = 16$, positiva, las raíces son reales y desiguales.

Representamos el trinomio como vimos en el caso de las ecuaciones de segundo grado, haciendo:

$y = x^2 - 6x + 5$

En la figura 76 vemos que:

Para:

$x = -1, \quad y = 12$
$x = 0, \quad y = 5$
$x = 1, \quad y = 0$
$x = 2, \quad y = -3$
$x = 3, \quad y = -4$ (mínimo)
$x = 4, \quad y = -3$
$x = 5, \quad y = 0$
$x = 6, \quad y = 5$
$x = 7, \quad y = 12$

Representando cada uno de estos puntos y uniéndolos por medio de una curva tenemos la parábola de la figura 76, donde se verifica todo lo que hemos dicho acerca de las variaciones del trinomio.

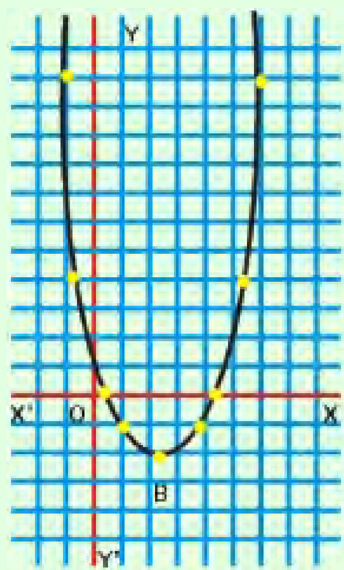


Figura 76

En dicha figura vemos que:

1) La curva corta el eje de las x en dos puntos cuyas abscisas son 1 y 5 (raíces del trinomio). El trinomio, o sea el valor de la ordenada, se anula para $x = 1$ y $x = 5$.

2) El trinomio (la ordenada) es positivo para todo valor de x mayor que 5 y menor que 1, porque sabemos que cuando las raíces son reales y desiguales, el trinomio tiene el mismo signo que a (el coeficiente de x^2 es + 1) para todos los valores de x mayores o menores que ambas raíces.

3) El trinomio es negativo para todo valor de x mayor que 1 y menor que 5, porque sabemos que el trinomio tiene signo contrario al de a para todo valor de x comprendido entre ambas raíces.

4) El valor mínimo del trinomio (de la ordenada) corresponde al valor de $x = 3$, que es el valor de $x = -\frac{b}{2a}$, y este mínimo vale -4, que es el valor de $\frac{4ac - b^2}{4a}$

5) Para todos los valores de x equidistantes de $x = 3$, es decir para $x = 2$ y $x = 4$, para $x = 1$ y $x = 5$, $x = 0$ y $x = 6$, etc., el trinomio (la ordenada) tiene valores iguales.

2) Representar gráficamente las variaciones de $x^2 - 4x + 4$

Tenemos:

$y = x^2 - 4x + 4$

Por ser $b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$, las raíces son reales e iguales.

En la figura 77, tenemos que para:

$x = -1, \quad y = 9$

$x = 0, \quad y = 4$

$x = 1, \quad y = 1$

$x = 2, \quad y = 0$ (mínimo)

$x = 3, \quad y = 1$

$x = 4, \quad y = 4$

$x = 5, \quad y = 9$

Representando estos puntos y uniéndolos obtenemos la parábola de la fig. 77.

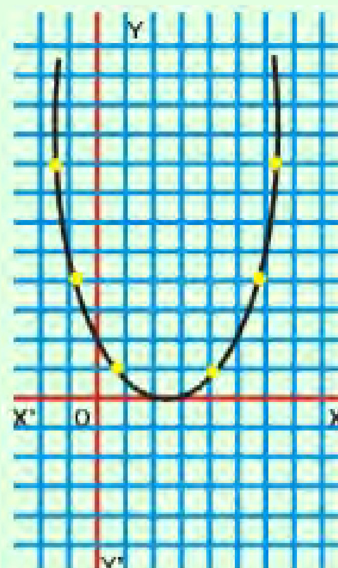


Figura 77

En dicha figura observamos:

1) La curva es tangente al eje de las x y lo toca en el punto cuya abscisa es 2, que es el valor de las raíces del trinomio: $x_1 = x_2 = 2$. Vemos que el trinomio (la ordenada) se anula para $x = 2$

2) El trinomio es positivo para todo valor de x distinto de $x = 2$, porque sabemos que cuando las raíces son iguales el trinomio tiene el mismo signo de a (el coeficiente de x^2 es + 1) para todo valor de x distinto de la raíz.

3) El mínimo del trinomio (de la ordenada) se obtiene para $x = 2$, que es el valor de $x = -\frac{b}{2a}$ y este mínimo vale 0, que es el valor de $\frac{4ac - b^2}{4a}$

4) Para todos los valores de x equidistantes de $x = 2$, como $x = 1$ y $x = 3$, $x = 0$ y $x = 4$, etc., el trinomio tiene valores iguales.

3) Representar gráficamente las variaciones de $y = x^2 - 2x + 3$

Como $b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8$, negativa, las raíces son imaginarias

En la figura 78 tenemos que para:

$x = -2,\quad y = 11$
$x = -1,\quad y = 6$
$x = 0,\quad y = 3$
$x = 1,\quad y = 2$ (mínimo)
$x = 2,\quad y = 3$
$x = 3,\quad y = 6$
$x = 4,\quad y = 11$

Representando estos puntos y uniéndolos tenemos la parábola de la fig. 78.

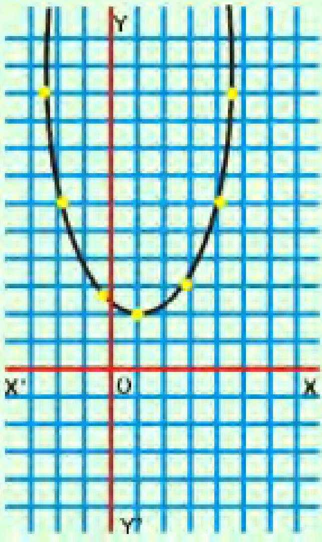


Figura 78

En dicha figura observamos que:

1) La curva no toca el eje de las x porque las raíces son imaginarias

2) El trinomio (la ordenada) es positivo para todo valor de x, porque sabemos que cuando las raíces son imaginarias el trinomio tiene el mismo signo que a (coeficiente de x^2) para todo valor de x, y aquí $a = +1$

3) El mínimo del trinomio es $y = 2$, que es el valor de

$\frac{4ac - b^2}{4a}$ y este mínimo corresponde al valor $x = 1$, que es el valor de $x = -\frac{b}{2a}$.

4) Para todos los valores de x equidistantes de $x = 1$, como $x = 0$ y $x = 2$, $x = -1$ y $x = 3$ el trinomio tiene valores iguales.

4) Representar gráficamente las variaciones de $y = -x^2 + 2x + 8$

Aquí $b^2 - 4ac = 4 - 4(-1)8 = 4 + 32 = 36$, positiva, luego las raíces son reales y desiguales, pero como $a = -1$, negativa, la parábola estará invertida.

En la figura 79, para:

$x = -3,\quad y = -7$
$x = -2,\quad y = 0$
$x = -1,\quad y = 5$
$x = 0,\quad y = 8$
$x = 1,\quad y = 9$ (máximo)
$x = 2,\quad y = 8$
$x = 3,\quad y = 5$
$x = 4,\quad y = 0$
$x = 5,\quad y = -7$

Representando estos puntos y uniéndolos tenemos la parábola invertida de la figura 79.

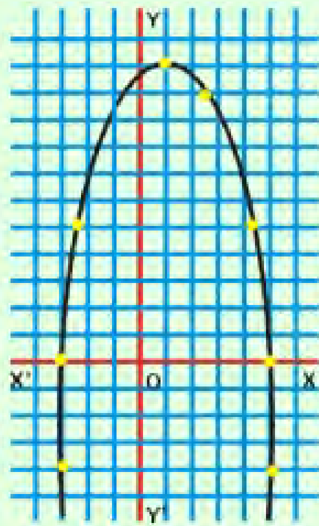


Figura 79

En esta figura vemos que:

1) La curva corta el eje de las x en dos puntos cuyas abscisas son -2 y 4, que son las raíces del trinomio.

2) Para $x = 1$, que es el valor de $x = -\frac{b}{2a}$, el trinomio (la ordena da) tiene un valor máximo $y = 9$, que es el valor $\frac{4ac - b^2}{4a}$ En efecto, sabemos que cuando a es negativa el trinomio tiene un máximo.

EJERCICIOS

Representa los siguientes trinomios y estudia sus variaciones:

1. $x^2 + 4x + 2$

2. $-x^2 - 4x + 5$

3. $x^2 - 6x + 3$

4. $2x^2 + x - 6$

5. $-x^2 + 2x + 15$

6. $2x^2 - x - 15$

7. $-3x^2 + 7x + 20$

8. $x^2 - 3x + 2$

9. $x^2 + 3x + 2$

10. $x^2 + 3x - 10$

11. $x^2 + x - 12$

12. $x^2 - 2x + 1$



Karl Wilhelm Theodor Weierstrass, es considerado como el verdadero padre del Análisis Moderno. Abordó el problema de los números irracionales, posteriormente se dedicó al estudio de las funciones de variables complejas y de variables reales.

CAPÍTULO XXXVII

ECUACIONES BINOMIAS Y TRINOMIAS

Una **ecuación binomia** es la que consta de dos términos, uno de los cuales es independiente de la incógnita.

Ecuación de la forma $x^m = A$ que mediante la transformación $X = x\sqrt{|A|}$ se convierte en $X^m = \pm 1$, que tiene como solución las m raíces enésimas de ± 1. Si $X^m = 1$

$x = \cos \frac{2\pi K}{m} + 1 \text{ sen } \frac{2\pi K}{m}$ $k = 0, 1, 2 \ldots, m - 1$; mientras que si $x^m = -1$

$$x = \cos \frac{\pi(2K+1)}{m} + 1 \text{ sen} \frac{\pi(2K+1)}{m} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots, m - 1$$

ECUACIONES BINOMIAS SENCILLAS

Consideremos algunas ecuaciones binomias sencillas que se resuelven fácilmente por descomposición en factores.

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $x^4 - 16 = 0$

Al descomponer $x^4 - 16$ tenemos:

$$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$$

Igualando a cero cada uno de estos factores:

$$x^2 - 4 = 0 \;\therefore\; x^2 = 4 \;\therefore\; x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x^2 + 4 = 0 \;\therefore\; x^2 = -4 \;\therefore\; x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$$

Esta ecuación tiene 4 raíces: 2, – 2, $2i$ y – $2i$, de las cuales dos son reales y dos imaginarias.

2) Resolver la ecuación $x^3 - 27 = 0$

Descomponemos $x^3 - 27$ y tenemos:

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 0$$

Al igualar a cero cada uno de estos factores tenemos:

$$x - 3 = 0 \;\therefore\; x = 3$$

$$x^2 + 3x + 9 = 0$$

Resolvamos la ecuación $x^2 + 3x + 9 = 0$ por la fórmula:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(9)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{27}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

La ecuación tiene tres raíces: una real que es 3, y dos imaginarias:

$$= \frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{2} \text{ y } \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{2}$$

NÚMERO DE RAÍCES DE UNA ECUACIÓN

El **grado** de una ecuación indica su número de raíces. De este modo, una ecuación de segundo grado tiene 2 raíces; una de tercer grado tiene 3 raíces; una de cuarto grado tiene 4 raíces, etcétera.

RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD

La unidad tiene tres raíces cúbicas, una real y dos imaginarias.

En efecto: Siendo x la raíz cúbica de la unidad, esta raíz elevada al cubo tiene que darnos 1, con lo que tenemos la ecuación binomia:

$$x^3 = 1$$

o sea, $$x^3 - 1 = 0$$

Resolvamos esta ecuación descomponiendo $x^3 - 1$. Tendremos:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

Al igualar a cero estos factores tenemos:

$$x - 1 = 0 \;\therefore\; x = 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Resolvemos esta ecuación por la fórmula:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} =$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Entonces, las raíces cúbicas de la unidad son tres: una real (1) y dos imaginarias

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ y } \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Estas dos raíces imaginarias tienen la propiedad de que al elevar una de ellas al cuadrado, se obtiene la otra. Entonces, siendo 1 la raíz real y designando una de las imaginarias por $\propto$, la otra raíz imaginaria será $\propto^2$.

Otra propiedad de estas raíces es que la suma de las tres es igual a cero. Así, $1 + \propto + \propto^2 = 0$

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. Encuentra las raíces cúbicas de 8 **R.** $2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}$

2. Encuentra las raíces cuartas de 64 **R.** $2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2i}, -2\sqrt{2i}$

3. x 4 - 1 = 0 **R.** 1,-1,i,-I

4. $x^3 + 1 = 0$ **R.** $-1, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

5. x 4 = 81 **R.** 3, - 3, 3i, -3i

6. x 4 - 256 = 0 **R.** 4, - 4, 4i, - 4i

7. x 3 + 8 = 0 **R.** -2, 1 + i$\sqrt{3}$,$1 - i\sqrt{3}$

8. x 4 - 625 = 0 **R.** 5, - 5, 5i, - 5i

9. x 3 + 64 = 0 **R.** -4,2 + $2\sqrt{3i}, 2 - 2\sqrt{3i}$

ECUACIONES TRINOMIAS

Las **ecuaciones trinomias** son las que constan de tres términos de la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, donde vemos que, des-pués de ordenar la ecuación en forma descendente con relación a x, en el primer término la x tiene un exponente del **doble** que en el segundo, y el tercer término es independiente de x.

Son ecuaciones trinomias:

$x^4 + 9x^2 + 20 = 0$, $x^6 + 6x^3 - 7 = 0$, $2x^8 + 9x^4 - 5 = 0$, etc.

Las ecuaciones trinomias donde el primer término tiene x^4 y el segundo x^2 se llaman **ecuaciones bicuadradas**.

ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR AL SEGUNDO, QUE SE RESUELVEN POR LA FÓRMULA DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Toda ecuación trinomia puede escribirse así:

$$a(x^n)^2 + bx^n + c = 0$$

Aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado se encuentra el valor de x^n y, luego, extrayendo la raíz enésima, se hallan los valores de x.

También pueden resolverse, al igual que las de segundo grado, por descomposición en factores.

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

Esta es una ecuación bicuadrada y puede escribirse así:

$$4(x^2)^2 - 37x^2 + 9 = 0$$

Aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado se encuentra el valor de x^2:

$$x^2 = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 4(4)(9)}}{8} = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 144}}{8} =$$

$$\frac{37 \pm \sqrt{1225}}{8} = \frac{37 \pm 35}{8}$$

$$x^2 = \frac{37 + 35}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

$$x^2 = \frac{37 - 35}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Así obtenemos los valores de x^2. Ahora, para hallar los valores de x, extraemos la raíz cuadrada a cada uno y tendremos:

$$x^2 = 9 \;\therefore\; x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \;\therefore\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Las cuatro raíces de la ecuación son: 3, – 3, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, todas reales.

2) Resolver la ecuación $3x^4 - 46x^2 - 32 = 0$

También es bicuadrada, y la resolveremos por descomposición, lo que suele ser más rápido que aplicar la fórmula. Tenemos:

$$(3x^2 + 2)(x^2 - 16) = 0$$

Al igualar a cero los factores tenemos:

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16 \;\therefore\; x = \pm 4$$

$$3x^2 + 2 = 0$$

$$3x^2 = -2$$

$$x^2 = - \;\therefore\; x = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}} = \pm i\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Las cuatro raíces son: $4, -4, i\sqrt{\frac{2}{3}}, -i\sqrt{\frac{2}{3}}$, dos reales y dos imaginarias.

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones encontrando todas las raíces:

1. $x^4 + 16x\ 2 - 225 = 0$ **R.** $\pm 3, \pm 5i$

2. $x^4 - 45x^2 - 196 = 0$ **R.** $\pm 7, \pm 2i$

3. $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ **R.** $\pm 1, \pm\sqrt{5}$

4. $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$ **R.** $\pm 3, \pm\frac{1}{2}$

5. $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$ **R.** $\pm 2, \pm\frac{2}{3}$

6. $25x^4 + 9x^2 - 16 = 0$ **R.** $\pm\frac{4}{5}, \pm i$

7. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **R.** $\pm 1, \pm 3$

8. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ **R.** $\pm 2, \pm 3$

9. $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ **R.** $\pm 2, \pm 5$

10. $x^4 - 61x^2 + 900 = 0$ **R.** $\pm 5, \pm 6$

11. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ **R.** $\pm 1, \pm 2i$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1) Resolver la ecuación

$$x^6 - 19x^3 - 216 = 0$$

Aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado obtenemos x^3

$$x^3 = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4(-216)}}{2} = \frac{19 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{19 \pm 35}{2}$$

$$x^3 = \frac{19+35}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

$$x^3 = \frac{19-35}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

Entonces, para hallar x, extraemos la raíz cúbica:

$x^3 = 27 \therefore x = \sqrt[3]{27} = 3$

$x^3 = -8 \therefore x = \sqrt[3]{-8} = -2$

3 y – 2 son las raíces principales. Además hay otras 4 raíces imaginarias que se obtienen resolviendo las ecuaciones binomias $x^3 - 27 = 0$ y $x^3 + 8 = 0$

Resolver por descomposición, como ya lo dijimos, es mucho más fácil y rápido, como vemos en la ecuación:

$$x^6 - 19x^3 - 216 = 0$$

En efecto, descomponiendo:

$$(x^3 - 27)(x^3 + 8) = 0$$

$x^3 - 27 = 0 \therefore x^3 = 27 \therefore x = \sqrt[3]{27} = 3$

$x^3 + 8 = 0 \therefore x^3 = -8 \therefore x = \sqrt[3]{-8} = -2$

2) Resolver la ecuación $x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{2}{3}} + 8 = 0$

Descomponemos el trinomio y tendremos:

$$\left(x^{\frac{2}{3}} - 2\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - 4\right) = 0$$

Al igualar a cero $x^{\frac{2}{3}} - 2$ tenemos:

$$x^{\frac{2}{3}} - 2 = 0$$

$$x^{\frac{2}{3}} = 2$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 2$$

Elevamos al cubo:

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

Igualamos a cero $x^{\frac{2}{3}} - 4$ y tenemos:

$$x^{\frac{2}{3}} - 4 = 0$$

$$x^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 4$$

Elevamos al cubo:

$$x^2 = 64$$

$$x = \pm\sqrt{64} = \pm 8$$

R. $\pm 2\sqrt{2}$ ± 8

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x^8 - 41x^4 + 400 = 0$ **R.** $\pm\sqrt{5}, \pm 2$

2. $x^{10} - 33x^5 + 32 = 0$ **R.** 1,2

3. $x^{-4} - 13x^{-2} + 36 = 0$ **R.** $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}$

4. $x^{-6} + 35x^{-3} = -216$ **R.** $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

5. $x^{-10} = 242x^{-5} + 243$ **R.** $\frac{1}{3}, -1$

6. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ **R.** – 1,2

7. $x^3 - 9x^{\frac{2}{3}} + 8 = 0$ **R.** 1,4

8. $x + x^{\frac{1}{2}} = 6$ **R.** 4,9

9. $3x = 16\sqrt{x} - 5$ **R.** $25, \frac{1}{9}$

10. $2x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{1}{4}} + 2 = 0$ **R.** $16, \frac{1}{16}$

11. $x^6 + 30x^3 + 81 = 0$ **R.** $-3, -\sqrt[3]{3}$

12. $8x^6 + 15x^3 - 2 = 0$ **R.** $\frac{1}{2}, -\sqrt[3]{2}$

TRANSFORMACIÓN DE EXPRESIONES DE LA FORMA $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ EN SUMA DE RADICALES SIMPLES

Hagamos

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (1)$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \quad (2)$$

y tendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x e y. Resolvamos el sistema:

Sumando (1) y (2) tenemos:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = 2\sqrt{x} \therefore \sqrt{x} = \frac{\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}}{2}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de esta última igualdad:

$$x = \frac{a+\sqrt{b} + 2\sqrt{a+\sqrt{b}} \bullet \sqrt{a-\sqrt{b}} + a - \sqrt{b}}{4}$$

$$= \frac{a+\sqrt{b} + 2\sqrt{\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)} + a - \sqrt{b}}{4}$$

$$= \frac{a+\sqrt{b} + 2\sqrt{a^2 - b} + a - \sqrt{b}}{4}$$

$$= \frac{2a + 2\sqrt{a^2 - b}}{4} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

luego, nos queda $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$

y designando $\sqrt{a^2 - b}$ por m tenemos:

$$x = \frac{a+m}{2} \quad (3)$$

Restando (1) y (2) tenemos:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{y}\ \therefore\ \sqrt{y}=\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}{2}$$

Elevamos al cuadrado:

$$y=\frac{a+\sqrt{b}-2\sqrt{a+\sqrt{b}}\bullet\sqrt{a-\sqrt{b}}+a-\sqrt{b}}{4}$$

$$=\frac{a+\sqrt{b}-2\sqrt{a^2-b}+a-\sqrt{b}}{4}=\frac{2a-2\sqrt{a^2-b}}{4}=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$$

luego, nos queda $y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$ o sea: $y=\frac{a-m}{2}\ (4)$

Al sustituir los valores hallados para x (3) e y (4) en las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+m}{2}}+\sqrt{\frac{a-m}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+m}{2}}-\sqrt{\frac{a-m}{2}}$$

En esta transformación se debe tener presente que $m=\sqrt{a^2-b}$

Si a^2-b tiene raíz cuadrada exacta, el radical doble se convierte en la suma algebraica de dos radicales simples; pero si a^2-b no tiene raíz cuadrada exacta, el radical doble se convierte en la suma de dos radicales dobles, lo que no tiene ninguna ventaja, pues lejos de simplificar, complica.

Ejemplos

1) Transformar $\sqrt{6+\sqrt{20}}$ en suma de radicales simples.

Aquí a = 6, b = 20, m = $\sqrt{a^2-b}=\sqrt{36-20}=\sqrt{16}=4$, luego:

$$\sqrt{6+\sqrt{20}}=\sqrt{\frac{6+4}{2}}+\sqrt{\frac{6-4}{2}}=\sqrt{5}+\sqrt{1}=1+\sqrt{5}$$

2) Transformar $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ en suma algebraica de radicales simples.

Introduciendo 2 bajo el signo radical, para lo cual hay que elevarlo al cuadrado, tenemos:

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{7-\sqrt{4\times 10}}=\sqrt{7-\sqrt{40}}$$

Aquí, a = 7, b = 40, m = $\sqrt{a^2-b}=\sqrt{49-40}=3$, luego:

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{\frac{7+3}{2}}-\sqrt{\frac{7-3}{2}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

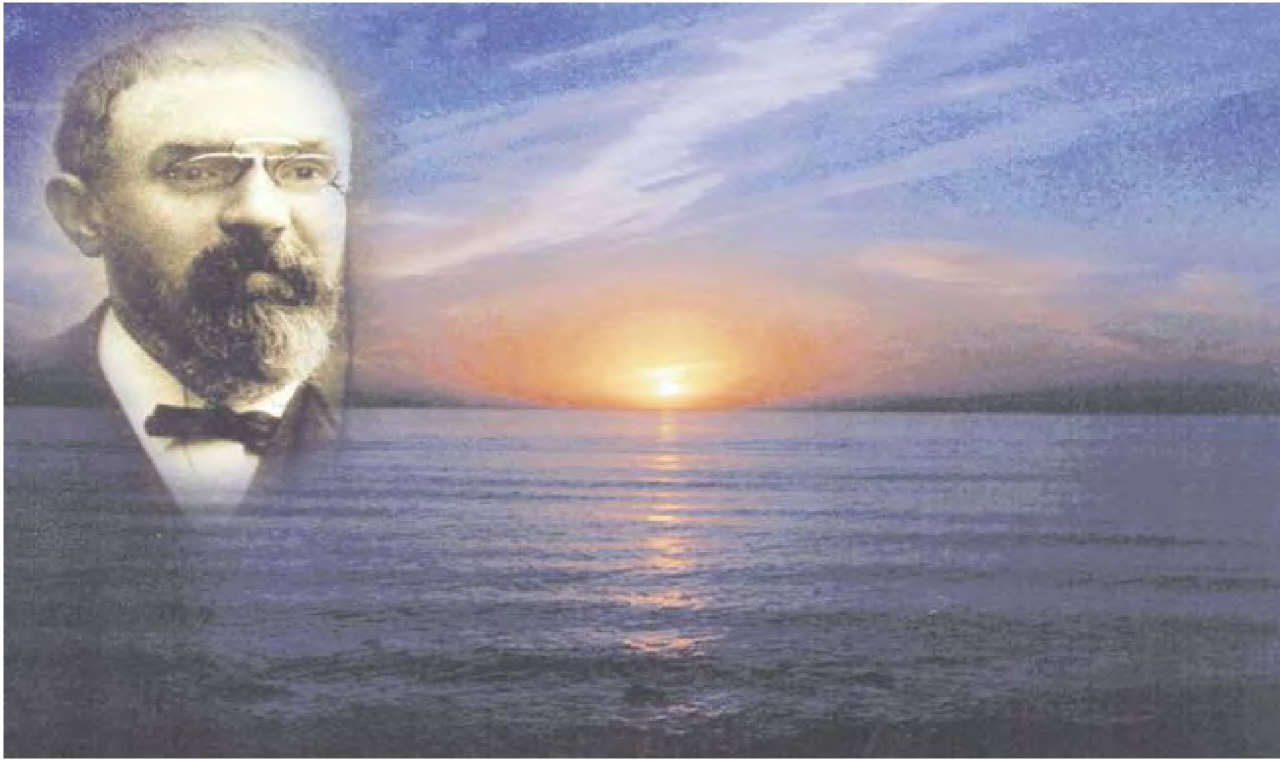
EJERCICIOS

Transforma en suma algebraica de radicales simples:

1. $\sqrt{\frac{5}{6}+\sqrt{\frac{2}{3}}}$ **R.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{3}$
2. $\sqrt{\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{1}{2}}}$ **R.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}$
3. $\sqrt{\frac{9}{16}+\sqrt{\frac{1}{8}}}$ **R.** $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$
4. $\sqrt{5+\sqrt{24}}$ **R.** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
5. $\sqrt{8-\sqrt{60}}$ **R.** $\sqrt{5}-\sqrt{3}$
6. $\sqrt{8+\sqrt{28}}$ **R.** $1+\sqrt{7}$
7. $\sqrt{32-\sqrt{700}}$ **R.** $5-\sqrt{7}$
8. $\sqrt{14+\sqrt{132}}$ **R.** $\sqrt{3}+\sqrt{11}$
9. $\sqrt{13+\sqrt{88}}$ **R.** $\sqrt{2}+\sqrt{11}$
10. $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$ **R.** $\sqrt{5}+\sqrt{6}$
11. $\sqrt{84-18\sqrt{3}}$ **R.** $9-\sqrt{3}$
12. $\sqrt{21+6\sqrt{10}}$ **R.** $\sqrt{6}+\sqrt{15}$
13. $\sqrt{28+14\sqrt{3}}$ **R.** $\sqrt{7}+\sqrt{21}$
14. $\sqrt{14-4\sqrt{6}}$ **R.** $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$
15. $\sqrt{55+30\sqrt{2}}$ **R.** $3\sqrt{5}+\sqrt{10}$
16. $\sqrt{73-12\sqrt{35}}$ **R.** $3\sqrt{5}-2\sqrt{7}$
17. $\sqrt{253-60\sqrt{7}}$ **R.** $15-2\sqrt{7}$
18. $\sqrt{293-30\sqrt{22}}$ **R.** $5\sqrt{11}-3\sqrt{2}$

Encuentra la raíz cuadrada de:

1. $6+4\sqrt{2}$ **R.** $2+\sqrt{2}$
2. $7+4\sqrt{3}$ **R.** $2+\sqrt{3}$
3. $8+2\sqrt{7}$ **R.** $1+\sqrt{7}$
4. $10+2\sqrt{21}$ **R.** $\sqrt{3}+\sqrt{7}$
5. $18+6\sqrt{5}$ **R.** $\sqrt{3}+\sqrt{15}$
6. $24-2\sqrt{143}$ **R.** $\sqrt{13}-\sqrt{11}$
7. $30-20\sqrt{2}$ **R.** $2\sqrt{5}-\sqrt{10}$
8. $9+6\sqrt{2}$ **R.** $\sqrt{3}+\sqrt{6}$
9. $98-24\sqrt{5}$ **R.** $3\sqrt{10}-2\sqrt{2}$



Jules-Henri Poincare, matemático francés, profesor de Mecánica y Física Experimental en la Facultad de Ciencias de París; sus obras más conocidas son: "Ciencia e Hipótesis" y "Valor Social de las Ciencias". Sobre las ecuaciones fuchisianas realizó un gran trabajo.

CAPÍTULO XXXVIII

PROGRESIONES

Una **serie** es una sucesión de términos formados de acuerdo con una ley: 1, 3, 5, 7. . . . es una serie cuya ley dice que cada término se obtiene sumando 2 al término anterior; 1, 2, 4, 8 . . . . es otra serie cuya ley dice que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por 2.

En Álgebra elemental estudiaremos las **progresiones,** que son series clasificadas en aritméticas y geométricas.

El signo que se usa en progresión aritmética es ÷ y un punto (.) después de cada término; y el que se usa en la progresión geométrica es ∺ con dos puntos (:) entre cada término.

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Son todas aquellas series donde cada término después del primero se obtiene sumándole al anterior una cantidad constante, llamada **razón** o **diferencia.**

El signo de la progresión aritmética es ÷ y entre cada término se escribe un punto. De este modo, ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . . . es una progresión aritmética creciente cuya razón es 2, porque 1 + 2 = 3; 3 + 2 = 5; 5 + 2 = 7, etc.

÷ 8 . 4 . 0 . – 4 . . . . es una progresión aritmética decreciente cuya razón es – 4, porque 8 + (– 4) = 8 – 4 = 4, 4 + (– 4) = 0, 0 + (– 4) = – 4, etc.

La **razón** en toda progresión aritmética se obtiene restándole a un término cualquiera el término anterior.

En ÷ $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1$ . . . . . la razón es $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

En ÷ $2\cdot 1\frac{3}{5}\cdot 1\frac{1}{5}$ . . . . la razón es $1\frac{3}{5}-2=\frac{8}{5}-2=-\frac{2}{5}$

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL TÉRMINO ENÉSIMO

Siendo la progresión

$$\div\, a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,e\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,u,$$

donde *u* es el término **enésimo** y la razón es *r*.

En toda progresión aritmética, cada término es igual al anterior más la razón; luego:

$$b = a + r$$
$$c = b + r = (a + r) + r = a + 2r$$
$$d = c + r = (a + 2r) + r = a + 3r$$
$$e = d + r = (a + 3r) + r = a + 4r \ldots$$

Podemos ver que cada término es igual al primer término de la progresión *a* más **tantas veces la razón como términos le preceden**; por tanto, como esta ley se cumple para todos los términos, *u* será igual al primer término *a* más tantas veces la razón como términos le preceden, y como *u* es el término enésimo, le preceden *n* – 1 términos; por tanto

$$u = a + (n - 1)r$$

Ejemplos

1) Hallar el 15° término de ÷ 4 . 7 . 10 . . . .

En este caso *a* = 4, *n* = 15, *r* = 7 – 4 = 3, luego:

$u = a + (n - 1)\,r = 4 + (15 - 1)3 = 4 + (14)3 = 4 + 42 = 46$

2) Hallar el 23° término de ÷ 9 . 4 . – 1 . . .

a = 9, *n* = 23, *r* = 4 – 9 = – 5, luego:

$$u = a + (n - 1)\,r = 9 + (23 - 1)(-5) =$$
$$9 + (22)(-5) = 9 - 110 = -101$$

3) Hallar el 38° término de ÷ 2 . 3 . 7 . . . .

$a = \frac{2}{3}$, n = 38, $r = \frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$, luego:

$u = \frac{2}{3} + (37)\ \frac{5}{6} = \frac{2}{3}+\frac{185}{6} = \frac{63}{2} = 31\ \frac{1}{2}$

4) Hallar el 42° término de ÷ - 2 . - 1 $\frac{2}{5}$- $\frac{4}{5}$ . . . .

$r = -1\ \frac{2}{5} - (-2) = -\frac{7}{5} + 2 = \frac{3}{5}$

$u = -2 + (41)\ \frac{3}{5} = -2 + \frac{123}{5} = \frac{113}{5} = 22\ \frac{3}{5}$

EJERCICIOS

Encuentra lo siguiente:

1. 33° término de ÷ $3\ \frac{2}{3}.2\frac{11}{12}$. . . . **R.** $-20\frac{1}{3}$

2. 41° término de ÷ $2\ \frac{4}{5}\cdot 2\frac{7}{10}$. . . . **R.** $-1\frac{1}{5}$

3. 26° término de ÷ $-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{10}$. . . . **R.** $21\frac{9}{10}$

4. 19° término de ÷ $-4\cdot-\frac{2}{3}$. . . . **R.** 56

5. 39° término de ÷ $3\cdot-1\frac{1}{4}$. . . . **R.** $-158\frac{1}{2}$

6. 9° término de ÷ $7\cdot 10\cdot 13$. . . . **R.** 31

7. 12° término de ÷ $5\cdot 10\cdot 15$. . . . **R.** 60

8. 48° término de ÷ $9\cdot 12\cdot 15$. . . . **R.** 150

9. 63° término de ÷ $3\cdot 10\cdot 17$. . . . **R.** 437

DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS DEL PRIMER TÉRMINO, DE LA RAZÓN Y DEL NÚMERO DE TÉRMINOS

Ya encontramos que

$$u = a + (n - 1)r \quad (1)$$

Ahora despejaremos *a, r* y *n* en esta fórmula.

Despejando *a* tenemos:

$$a = u - (n - 1)r$$

Para despejar *r* en (1) transponemos *a* y tenemos:

$$u - a = (n - 1)r \;\therefore\; r = \frac{u-a}{n-1}$$

Para despejar *n* en (1) efectuamos el producto indicado y tenemos:

$$u = a + nr - r$$

Transponiendo *a* y $-r$:

$$u - a + r = nr \;\therefore\; n = \frac{u-a+r}{r}$$

Ejemplos

1) Hallar el primer término de una progresión aritmética sabiendo que el 11° término es 10 y la razón $\frac{1}{2}$.

$$a = u - (n-1)r = 10 - (11-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = 10 - 5 = 5$$

2) Hallar la razón de una progresión aritmética cuyo primer término es $-\frac{3}{4}$ y el 8° término $3\frac{1}{8}$

$$r = \frac{u-a}{n-1} = \frac{3\frac{1}{8}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{8-1} = \frac{\frac{25}{8}+\frac{3}{4}}{7} = \frac{\frac{31}{8}}{7} = \frac{31}{56}$$

3) Descubrir cuántos términos tiene la progresión:

$$\div\, 2 \cdot 1\frac{2}{3} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; -4\frac{1}{3}$$

En este caso: $r = 1\frac{2}{3} - 2 = -\frac{1}{3}$. Entonces

$$n = \frac{u-a+r}{r} = \frac{-4\frac{1}{3}-2+\left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{13}{3}-2-\frac{1}{3}-\frac{20}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{20}{3}}{\frac{1}{3}} = 20\,\text{t.}$$

EJERCICIOS

1. El 15° término de una progresión aritmética es 20 y la razón $\frac{2}{7}$. Hallar el 1er. término. **R.** 16 .

2. El 32° término de una progresión aritmética es - 18 y la razón 3. Hallar el 1er. término. **R.** -111

3. Hallar el 1er. término de una progresión aritmética sabiendo que el 8° término es $\frac{3}{4}$ y el 9° término1. **R.** -1

4. El 5° término de una progresión aritmética es 7 y el 7° término $8\frac{1}{3}$. Hallar el primer término.

R. $4\frac{1}{3}$

5. Hallar la razón de ÷ 3 . . . . 8 donde 8 es el 6° término. **R.** 1

SUMA DE TÉRMINOS

En toda progresión aritmética la suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos.

Siendo la progresión ÷ *a* . . . . . . *m* . . . . . . *p* . . . . *u*, cuya razón es *r*. Supongamos que entre *a* y *m* hay *n* términos y entre *p* y *u* también hay *n* términos, es decir, que *m* y *p* son términos equidistantes de los extremos *a* y *u.* Aquí demostraremos que

$$m + p = a + u$$

Si hay *n* términos entre *a* y *m*, al término *m* le preceden *n* + 1 términos (contando la *a*); luego, podemos escribir que

$$m = a + (n + 1)r \; (1)$$

Del mismo modo, si hay *n* términos entre *p* y *u* tendremos:

$$u = p + (n + 1)r \; (2)$$

Al restar (2) de (1) tenemos:

$$\begin{array}{r} m = a + (n+1)r \\ -u = -p - (n+1)r \\ \hline m - u = a - p \end{array}$$

y pasando *p* al primer miembro de esta igualdad y *u* al segundo, nos queda:

$$m + p = a + u$$

que es lo que queríamos demostrar.

Si el número de términos de una progresión aritmética es impar, el término medio equidista de los extremos y por tanto el doble del **término medio** será igual a la suma de los extremos.

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA PARA ENCONTRAR LA SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Siendo la progresión ÷ *a* . *b* . *c* . . . . . . *l* . *m* . *u*, que consta de *n* términos.

Al designar como *S* la suma de todos los términos de esta progresión tendremos:

$$S = a + b + c \ldots\ldots + l + m + u$$

y también: $S = u + m + l + \ldots\ldots + c + b + a$

Si sumamos estas igualdades tenemos:

$$2S = (a+u) + (b+m) + (c+l) + \ldots + (l+c) + (m+b) + (u+a)$$

Todos estos binomios son iguales a $(a + u)$, porque como ya lo demostramos, la suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos, y como hay tantos binomios como términos tiene la progresión, tendremos:

$2S = (a + u)n$ y de aquí $S = \frac{(a+u)n}{2}$

Ejemplos

1) Hallar la suma de los 12 primeros términos de ÷ 7 . 13 . 19 . . . . En la fórmula de la suma entra *u*, que es el 12° término, el cual desconocemos y los vamos a buscar:

$u = a + (n - 1)r = 7 + (12 - 1)6 = 7 + (11)6 = 73$

Aplicado la fórmula de la suma: tendremos:

$$S = \frac{a+un}{2} = \frac{7+73\times 12}{2} = \frac{80\times 12}{2} = 480$$

2) Hallar la suma de los 13 primeros términos de ÷ $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{12}$ . . .

La razón es $\frac{1}{12} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{4}$. Busquemos el 13° término:

$u = a + (n - 1)r = \frac{5}{6} + (12)\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{6} - 9 = -\frac{44}{6}$

Aplicando ahora la fórmula de la suma tendremos:

$$S = \frac{(a+u)n}{2} = \frac{\left[\frac{5}{6}+\left(-\frac{49}{6}\right)\right]13}{2} = \frac{\left(\frac{5}{6}-\frac{49}{6}\right)13}{2} = \frac{\left(-\frac{44}{6}\right)13}{2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{22}{3}\right)13}{2} = \frac{-\frac{286}{3}}{2} = \frac{-286}{6} = -47\frac{2}{3}$$

EJERCICIOS

Encuentra la suma de los:

1. 9 primeros términos de ÷ $\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{2}$ . . . . **R.** $22\frac{1}{2}$

2. 14 primeros términos de ÷ $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$ . . . . **R.** $13\frac{3}{10}$

3. 19 primeros términos de ÷ $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4}$ . . . . **R.** $142\frac{1}{2}$

4. 34 primeros términos de ÷ $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{55}$ . . . . **R.** $-139\frac{2}{5}$

5. 11 primeros términos de ÷ $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{2}{15}$ . . . . **R.** $69\frac{2}{3}$

6. 46 primeros términos de ÷ $3\frac{1}{4} \cdot 3\frac{18}{20}$ . . . . **R.** $563\frac{1}{2}$

7. 17 primeros términos de ÷ $-2 \cdot \frac{1}{4}$ . . . . **R.** 272

8. 12 primeros términos de ÷ $-5 \cdot -4\frac{5}{8}$ . . . . **R.** $-35\frac{1}{4}$

9. 8 primeros términos de ÷ 15 . 19 . 23. . . . **R.** 232

10. 19 primeros términos de ÷ 31 . 38 . 45. . . .**R.** 1786

11. 24 primeros términos de ÷ 42 . 32 . 22. . . .**R.** –1752

12. 80 primeros términos de ÷ 10 . – 6 . – 2. . .**R.** 11840

13. 60 primeros términos de ÷ 11 . 1 . – 9. . . . **R.** -17040

14. 50 primeros términos de ÷ – 5 . – 13 . – 21. . . . **R.** -10050

MEDIOS ARITMÉTICOS

Son los términos de una progresión aritmética localizados entre el primero y el último términos.

En la progresión:

÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11

los términos 5, 7 y 9 son medios aritméticos.

INTERPOLACIÓN

Por otra parte, la interpolación de medios aritméticos entre dos números dados consiste en formar una progresión aritmética cuyos extremos sean los dos números dados.

Ejemplos

1) Interpolar 4 medios aritméticos entre 1 y 3.

1 y 3 son los extremos de la progresión.

÷ 1 . . . . 3 (1)

Debemos encontrar los 4 términos de la progresión que hay entre 1 y 3. Si hallamos la razón y se la sumamos a 1, tendremos el 2° término de la progresión; sumando este 2° término con la razón tendremos el 3er. término; su-mando el 3er. término con la razón obtendremos el 4° término, y así sucesivamente.

Podemos encontrar la razón por medio de la fórmula ya conocida $r=\frac{u-a}{n-1}$ sin olvidar que n es el número de términos de la progresión es decir, los medios que se van a interpolar más los dos extremos.
En este caso, la razón será:

$$r=\frac{u-a}{n-1}=\frac{3-1}{6-1}=\frac{2}{5}$$

Si la sumamos con cada término, obtendremos el siguiente término. Por tanto:

$1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$, 2° término

$\frac{7}{5}+\frac{2}{5}=\frac{9}{5}$, 3° término

$\frac{9}{5}+\frac{2}{5}=\frac{11}{5}$, 4° término

$\frac{11}{5}+\frac{2}{5}=\frac{13}{5}$, 5° término

Al interpolar estos medios en (1) tendremos la progresión:

$$\div\ 1\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{11}{5}\cdot\frac{13}{5}\cdot 3$$

o sea $\div\ 1\cdot 1\frac{2}{5}\cdot 1\frac{4}{5}\cdot 2\frac{1}{5}\cdot 2\frac{3}{5}\cdot 3$

Para encontrar la razón podemos utilizar la fórmula

$$r=\frac{u-a}{m+1}$$

donde m representa el número de medios a interpolar.

En el caso anterior donde interpolamos 4 medios, m = 4, por lo que aplicando esta fórmula tendremos:

$$r=\frac{u-a}{m+1}=\frac{3-1}{4+1}=\frac{2}{5}$$

que es un resultado idéntico al obtenido con la fórmula general de la razón.

2) Interpolar 5 medios aritméticos entre – 2 y $5\frac{1}{4}$

$\div$ - 2 . . . . $5\frac{1}{4}$ (1)

Al encontrar la razón tenemos:

$$r=\frac{u-a}{n-1}=\frac{5\frac{1}{4}-(-2)}{7-1}=$$

$$\frac{5\frac{1}{4}+2}{6}=\frac{7\frac{1}{4}}{6}=\frac{29}{24}$$

Si sumamos la razón con cada término obtendremos:

$-2+\frac{29}{24}=-\frac{19}{24}$

$-\frac{19}{24}+\frac{29}{24}=\frac{10}{24}$

$\frac{10}{24}+\frac{29}{24}=\frac{39}{24}$

$\frac{39}{24}+\frac{29}{24}=\frac{68}{24}$

$\frac{68}{24}+\frac{29}{24}=\frac{97}{24}$

Interpolando en (1) tenemos:

$$\div\ -2.-\frac{19}{24}\cdot\frac{10}{24}\cdot\frac{39}{24}\cdot\frac{68}{24}\cdot\frac{97}{24}\cdot 5\frac{1}{4}$$

y simplificando, queda:

$$\div -2.-\frac{19}{24}\cdot\frac{5}{12}\cdot 1\frac{5}{8}\cdot 2\frac{5}{6}\cdot 4\frac{1}{24}\cdot 5\frac{1}{4}$$

EJERCICIOS

Interpolar:

1. 4 medios aritméticos entre - 42 y 53
R. $\div -42.-23.-4.15.34.53$

2. 5 medios aritméticos entre - 81 y -9
R. $\div -81.-69.-57.-45.-33.-21.-9$

3. 3 medios aritméticos entre 1 y 3
R. $\div 1.1\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\frac{1}{2}\cdot 3$

4. 3 medios aritméticos entre 3 y 11
R. $\div 3.5.7.9.11$

5. 4 medios aritméticos entre 5 y 12
R. $\div 5.6\frac{2}{5}.7\frac{4}{5}.9\frac{1}{5}.10\frac{3}{5}.12$

6. 5 medios aritméticos entre - 4 y 3
R. $\div -4.-2\frac{5}{6}.-1\frac{2}{3}.-\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.1\frac{5}{6}.3$

7. 7 medios aritméticos entre 19 y - 5
R. $\div 19.16.13.10.7.4.1.-2.-5$

8. 5 medios aritméticos entre - 13 y - 73
R. $\div -13.-23.-33.-43.-53.-63.-73$

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Son todas aquellas series donde cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante, llamada razón.

El signo de la progresión geométrica es ∺ y entre cada término se escribe: (dos puntos). De este modo, ∺ 5:10: 20:40 . . . . . es una progresión geométrica donde la razón es 2, porque 5 × 2 = 10; 10 × 2 = 20;20 × 2 = 40, etc.

Una progresión geométrica es **creciente** cuando la razón es, en valor absoluto, mayor que uno, y es **decreciente** cuando la razón es, en valor absoluto, menor que uno, o sea, cuando la razón es una fracción **propia.**

$$∺\ 1 : 4 : 16 : 64 \ldots.$$

es una progresión geométrica creciente cuya razón es 4, y

$$∺\ 2 : 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} \ldots.$$

es una progresión geométrica decreciente cuya razón es $\frac{1}{2}$

En la progresión geométrica **finita** hay un número limitado de términos y en la **infinita** un número ilimitado.

∺ 2 : 4 : 8 : 16 es una progresión finita, porque consta de 4 términos, y

∺ $4 : 2 : 1 : \frac{1}{2}$ . . . . es infinita, porque consta de un número ilimitado de términos.

En toda progresión geométrica es posible encontrar la **razón** dividiendo un término cualquiera por el anterior

EJERCICIOS

1. Encuentra la suma de los 20 primeros múltiplos de 7. **R.** 1470
2. El 2° y el 4° términos de una progresión aritmética suman 22 y el 3° y el 7° suman 34. ¿Cuáles son esos cuatro términos? **R.** 2º 8,3º 11, 4º 14º, 7º 23.
3. Hallar la suma de los números impares del 51 al 813. **R.** 165024
4. El 5° término de una progresión aritmética es 31 y el 9° término 59. Hallar el 12° término. **R.** 80
5. Las ganancias de 3 años de un comerciante están en progresión aritmética. El primer año ganó 12,500 dólares y el tercero 20,500. ¿Cuál fue la ganancia del 2° año? **R.** 16500 dólares

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL TÉRMINO ENÉSIMO

Siendo la progresión

$$∺\ a : b : c : d : e : \ldots.. : u$$

donde *u* es el término **enésimo** y la razón es *r*.

En toda progresión geométrica, cada término es igual al anterior multiplicado por la razón; luego:

$$b = ar$$
$$c = br = (ar)\,r = ar^2$$
$$d = cr = (ar^2)\,r = ar^3$$
$$e = dr = (ar^3)\,r = ar^4 \ldots.$$

Podemos ver que un término cualquiera es igual al primero *a* multiplicado por la razón elevada a una potencia igual al número de términos que lo preceden, una ley que siempre se cumple; luego, como *u* es el término *n* y le preceden *n* – 1 términos, tendremos:

$$u = ar^{n-1}$$

Ejemplos

1) Hallar el 5° término de ∺ 2 : 6 : 18 . . . .

$$a = 2,\ n = 5;\ r = 6 \div 2 = 3$$

luego:

$$u = ar^{n-1} = 2 \times 3^{5-1} = 2 \times 3^4 = 162$$

2) Hallar el 8° término de ∺ 6 : 4 . . . .

$$a = 6,\ n = 8,\ r = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\ \text{luego:}$$

$$u = ar^{n-1} = 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 6 \times \frac{128}{2187} = \frac{256}{729}$$

3) Hallar el 7° término de ∺ $\frac{2}{3} : -\frac{1}{2} : \frac{8}{8}$ . . . .

La razón es: $-\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$. Por tanto:

$$u = ar^{n-1} = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^6 = \times \frac{729}{4096} = \frac{243}{2048}$$

Si la razón es negativa (y esto sucede siempre que los términos de la progresión son alternativamente positivos y negativos) hay que tener cuidado con el signo que resulta de elevar la razón a la potencia *n* – 1

Si *n* – 1 es par, el resultado tendrá signo +, y si es impar tendrá signo –

EJERCICIOS

1. Encuentra: El 6° término de ÷÷ $1 : \frac{2}{5} : \frac{4}{25} . . .$ **R.** $\frac{32}{3125}$

2. Encuentra: El 7° término de ÷÷ $3 : 2 : \frac{4}{3} . . .$ **R.** $\frac{64}{243}$

3. Encuentra: El 6° término de ÷÷ $\frac{1}{2} : \frac{1}{5} . . . .$ **R.** $\frac{16}{3125}$

4. Encuentra: El 8° término de ÷÷ $2\frac{1}{4} : 3 . . . .$ **R.** $16\frac{208}{243}$

5. Encuentra: El 6° término de ÷÷ - 3 : 6 : - 12. . . **R.** 96

6. Encuentra: El 9° término de ÷÷ $3 : -1 : \frac{1}{3} . . .$ **R.** $\frac{1}{2187}$

7. Encuentra: El 5° término de ÷÷ $\frac{5}{6} : \frac{1}{2} . . .$ **R.** $\frac{27}{250}$

8. Encuentra: El 8° término de ÷÷ 16 : - 4 : 1. . . **R.** $-\frac{1}{1024}$

9. Encuentra: El 8° término de ÷÷ $\frac{3}{4} : -\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ **R.** $-\frac{32}{729}$

10. Encuentra: El 5° término de ÷÷ $-\frac{3}{5} : \frac{3}{2} : -\frac{15}{4}$ **R.** $-23\frac{7}{16}$

11. Encuentra: El 7° término de ÷÷ 3 : 6 : 12. . . . **R.** 192

12. Encuentra: El 8° término de ÷÷ $\frac{1}{3} : 1 : 3 . . . .$ **R.** 729

13. Encuentra: El 9° término de ÷÷ 8 : 4 : 2. . . . **R.** $\frac{1}{32}$

14. La razón de una progresión geométrica es $\frac{1}{2}$ y el 7° término $\frac{1}{64}$ Hallar el primer término. **R.** 1

15. El 9° término de una progresión geométrica es $\frac{64}{2187}$ y la razón $\frac{2}{3}$ Hallar el primer término. **R.** $\frac{3}{4}$

16. El 5° término de una progresión geométrica es $\frac{16}{125}$ y el 6° término $\frac{32}{625}$. Hallar el 1er.término. **R.** 5

17. Hallar la razón de ÷÷ 2 : . . . . : 64 de 6 términos. **R.** 2

18. Hallar la razón de ÷÷ $\frac{1}{3}$: . . . . 243 de 7 términos. **R.** ± 3

19. Hallar la razón de ÷÷ - 5 : . . . . . . .640 de 8 términos. **R.** - 2

20. Hallar la razón de ÷÷ $\frac{729}{2}$: . . . . : de 6 términos. **R.** $\frac{1}{3}$

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL PRIMER TÉRMINO Y DE LA RAZÓN

Ya encontramos que $u = ar^{n-1}$ (1)

Al despejar a tenemos: $a = \frac{u}{r^{n-1}}$, la fórmula del primer termino en una progresión geométrica.

Para encontrar la razón despejamos r^{n-1} en (1) y tenemos:

$r^{n-1} = \frac{u}{a}$ y extrayendo la raíz $n - 1$, queda

$r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$,

que es la fórmula de la razón en una progresión geométrica.

Ejemplos

1) El 6° término de una progresión geométrica es $\frac{1}{16}$ y la razón $\frac{1}{2}$. Hallar el primer término.

$u = \frac{1}{16}$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 6$, luego

$$a = \frac{u}{r^{n-1}} = \frac{\frac{1}{16}}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{32}} = 2$$

2) El 1er. término de una progresión geométrica es 3 y el 6° término – 729. Hallar la razón.

$a = 3$, $u = -729$, $n = 6$, luego:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \sqrt[5]{-\frac{729}{3}} = \sqrt[5]{-243} = -3$$

En toda progresión geométrica el producto de dos términos equidistantes de los extremos es igual al producto de los extremos.

Siendo la progresión

÷÷ a : . . . . m : . . . . : p : . . . . : u

donde entre a y m hay n términos y entre p y u también hay n términos, entonces m y p son equidistantes de los extremos. Probaremos que $mp = au$

Aquí, $m = a . r^{n+1}$ $u = p . r^{n+1}$

Al dividir estas igualdades tenemos: $\frac{m}{u} = \frac{a}{p} : mp = au$

que es lo que queríamos demostrar.

Según la demostración anterior, si una progresión geométrica tiene un número impar de términos, el **cuadrado** del término medio **equivale** al producto de los extremos.

En la progresión ÷÷ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 tenemos

$12^2 = 144$ y $3 \times 48 = 144$

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE LA SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Siendo la progresión ∺ *a* : *b* : *c* : *d* : . . . . . *u* cuya razón es *r* .

Designamos como *S* la suma de todos sus términos y tendremos:

$$S = a + b + c + d + \ldots\ldots + u \qquad (1)$$

Multiplicamos los dos miembros de esta igualdad por la razón:

$$Sr = ar + br + cr + dr + \ldots\ldots + ur \qquad (2)$$

Al restar (1) de (2) tenemos:

Sr = ar + br + cr +dr + ... +ur
-S = – a – b – c – d – . . . .– u

Sr – S = ur – a

Cuando efectuamos esta resta debemos tener presente que, como cada término multiplicado por la razón da el siguiente, *ar* = *b* y esta *b* se anula con – *b* ; *br* = *c* y esta *c* se anula con – *c* ; *cr* = *d* y esta *d* se anula con – *d*, etc. Entonces, arriba queda *ur* y abajo – *a*, y de ahí resulta el 2o. miembro de la resta *ur* – *a*.

Sacando *S* factor común en el primer miembro de la última igualdad tenemos:

$$S(r-1) = ur - a$$

y de aquí

$$S = \frac{ur-a}{r-1}$$

Ejemplos

1) Hallar la suma de los 6 primeros términos de ∺4 . 2 . 1 .

Buscamos el 6° término:

$$u = ar^{n-1} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 4 \times \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$$

Aplicando la fórmula de la suma tenemos:

$$S = \frac{ur-a}{r-1} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)-4}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{16}-4}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{63}{16}}{-\frac{1}{2}} = \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}$$

2) Hallar la suma de los 8 primeros términos de ∺9:- 3 : 1 .

Aquí la razón es $r = -3 \div 9 = -\frac{1}{3}$. Buscamos el 8° término:

$$u = ar^{n-1} = 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = 9 \times \left(-\frac{1}{2187}\right) = -\frac{1}{243}$$

Al aplicar la fórmula de la suma tenemos:

$$S = \frac{ur-a}{r-1} = \frac{\left(-\frac{1}{243}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-9}{-\frac{1}{3}-1} = \frac{\frac{1}{729}-9}{-\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{6560}{729}}{-\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{1640}{243} = 6\frac{182}{243}$$

EJERCICIOS

Encuentra la suma de los:

1. 8 primeros términos de ∺ 2 : - 1 : $\frac{1}{2}$ . . . . **R.** $1\frac{21}{64}$

2. 6 primeros términos de ∺ $\frac{3}{2}$: 1 : $\frac{2}{3}$. . . . **R.** $4\frac{17}{162}$

3. 6 primeros términos de ∺ 9 : - 3 : 1. . . . **R.** $6\frac{20}{27}$

4. 5 primeros términos de ∺ 6 : 3 : 1 $\frac{1}{2}$. . . . **R.** $11\frac{5}{8}$

5. 6 primeros términos de ∺ 4 : - 8 : 16. . . . **R.** -84

6. 7 primeros términos de ∺12 : 4 : 1 . . . . **R.** $17\frac{241}{243}$

7. 10 primeros términos de ∺ $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{2}$: 1. . . . **R.** $255\frac{3}{4}$

8. 8 primeros términos de ∺ 2 $\frac{1}{4}$: 1 $\frac{1}{2}$. . . . **R.** $6\frac{473}{972}$

9. 7 primeros términos de ∺ -$\frac{1}{10}$: $\frac{1}{5}$: - $\frac{2}{5}$ **R.** $-4\frac{3}{10}$

10. 10 primeros términos de ∺ - 6 : - 3: - 1 $\frac{1}{2}$ **R.** $-11\frac{253}{256}$

INTERPOLAR MEDIOS GEOMÉTRICOS

Para interpolar **medios geométricos** entre dos números se forma una progresión geométrica cuyos extremos sean los números dados.

Ejemplos

Interpolar 4 medios geométricos entre 96 y 3

Formamos una progresión geométrica cuyo primer término sea 96 y el último 3:

∺ 96 . . . . 3 (1)

Hay que hallar la razón. Como vamos a interpolar 4 medios y ya tenemos los dos extremos, n = 6, entonces:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \sqrt[5]{\frac{3}{96}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

Si la razón es $\frac{1}{2}$ multiplicando 96 por $\frac{1}{2}$ tendremos el 2° término, el cual al ser multiplicado por $\frac{1}{2}$ dará el 3er. término, y así sucesivamente. Tenemos:

$$96 \times \frac{1}{2} = 48$$

$$48 \times \frac{1}{2} = 24$$

$$24 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$12 \times \frac{1}{2} = 6$$

Al interpolar en (1) tendremos la progresión

∺ 96 : 48 : 24 : 12 : 6 : 3

Para encontrar la razón, en este caso se puede utilizar la fórmula

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{u}{a}}$$

donde m es el número de medios que se interpolan.

EJERCICIOS

Interpolar:

1. 4 medios geométricos entre 4 $\frac{1}{2}$ y $\frac{16}{27}$ **R.** ∺ $4\frac{1}{2} : 3 : 2 : 1\frac{1}{3} : \frac{8}{9} : \frac{16}{27}$

2. 4 medios geométricos entre $\frac{4}{9}$ y $\frac{27}{256}$ **R.** ∺ $\frac{4}{9} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{3}{16} : \frac{9}{64} : \frac{27}{256}$

3. 3 medios geométricos entre 5 y 3125 **R.** ∺ $5 : \pm 25 : 125 : \pm 625 : 3125$

4. 4 medios geométricos entre – 7 y – 224 **R.** ∺ $-7 : -14 : -28 : -56 : -112 : -224$

5. 5 medios geométricos entre 128 y 2 **R.** ∺ $128 : \pm 64 : 32 : \pm 16 : 8 : \pm 4 : 2$

SUMA DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA DECRECIENTE INFINITA

Si en la fórmula $S = \frac{ur - a}{r - 1}$ sustituimos u por su valor $u = ar^{n-1}$, tendremos:

$$S = \frac{ur - a}{r - 1} = \frac{\left(ar^{n-1}\right)r - a}{r - 1} = \frac{ar^n - a}{r - 1}$$

y al cambiar los signos a los dos términos $S = \frac{a - ar^n}{1 - r}$ (1)

de esta última fracción tendremos:

En una progresión geométrica decreciente, la razón es una fracción propia, y si ésta se eleva a una potencia, cuanto mayor sea el exponente, menor será la potencia de la fracción. Por tanto, cuanto mayor sea n, menor es r^n y menor será ar^n; siendo n suficientemente grande, ar^n será tan pequeña como queramos, es decir que cuando n aumenta indefinidamente, ar^n **tiende al límite** 0 y por tanto $\frac{a - ar^n}{1 - r}$, o sea S, **tiende al límite** $\frac{a}{1 - r}$. Esto se expresa brevemente diciendo que cuando n, el número de términos de la progresión, es **infinito**, el valor de la suma es $S = \frac{a}{1 - r}$

EJEMPLOS

1) Hallar la suma de la progresión ∺ 4 : 2 : 1 . . . .

$a = 4$, $r = \frac{1}{2}$, luego $$S = \frac{a}{1 - r} = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

8 es el límite al cual tiende la suma, que nunca llega a ser igual a 8, pero cuanto mayor sea el número de términos que se tomen, más se aproximará a 8.

2) Hallar la suma de la progresión infinita ∺ 5 : $-\frac{3}{2}$: $\frac{9}{20}$ . . . .

$a = 5$, $r = -\frac{3}{10}$ luego:

$$S = \frac{a}{1 - r} = \frac{5}{1 - \left(-\frac{3}{10}\right)} = \frac{5}{1 + \frac{3}{10}} = \frac{5}{\frac{13}{10}} = \frac{50}{13} = 3\frac{11}{13}$$

$3\frac{11}{13}$ es el límite de la suma.

EJERCICIOS

Encuentra la suma de las progresiones infinitas:

1. $\div\div \frac{1}{6} : \frac{1}{7} : \frac{6}{49}$ **R.** $1\frac{1}{6}$

2. $\div\div 2 : -\frac{2}{5} : \frac{2}{25}$ **R.** $1\frac{2}{3}$

3. $\div\div -14 : -6 : -\frac{18}{7}$ **R.** $-24\frac{1}{2}$

4. $\div\div 2 : \frac{1}{2} : \frac{1}{8}$ **R.** $2\frac{2}{3}$

5. $\div\div \frac{1}{2} : \frac{1}{6} : \frac{1}{18}$ **R.** $\frac{3}{4}$

6. $\div\div -5 : -2 : -\frac{4}{5}$ **R.** $-8\frac{1}{3}$

7. $\div\div -4 : -\frac{8}{3} : -\frac{16}{9}$ **R.** -12

8. $\div\div \frac{3}{4} : \frac{1}{4} : \frac{1}{12}$ **R.** $1\frac{1}{8}$

EJERCICIOS

Por la suma al infinito, encuentra el valor de las siguientes fracciones decimales:

1. 0.666 **R.** $\frac{2}{3}$

2. 0.1212 **R.** $\frac{4}{33}$

3. 0.159159 **R.** $\frac{53}{333}$

4. 0.3232 **R.** $\frac{32}{99}$

5. 0.144144 **R.** $\frac{16}{111}$

6. 0.3555 **R.** $\frac{16}{45}$

7. 0.18111 **R.** $\frac{163}{900}$

HALLAR EL VALOR DE UNA FRACCIÓN DECIMAL PERIÓDICA

Una fracción decimal periódica es la suma de una progresión geométrica decreciente infinita, y su valor (su generatriz) puede hallarse mediante el procedimiento anterior.

Ejemplos

1) Hallar el valor de 0.333 . . . . .

$$0.333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$$

Esta es la suma de una progresión geométrica al infinito cuya razón es $\frac{1}{10}$

Tendremos: $S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ es el valor de la fracción 0.333 . . . .

2) Hallar el valor de 0.31515 . . . .

$$0.31515\ldots = \frac{3}{10} + \frac{15}{1000} + \frac{15}{100000} \ldots$$

Después de $\frac{3}{10}$ en el segundo miembro tenemos la suma de una progresión geométrica al infinito cuya razón es $\frac{1}{100}$, luego:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{15}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{15}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{1}{66}$$

Sumando $\frac{3}{10}$ con $\frac{1}{66}$ tenemos:

$$0.31515\ldots \frac{3}{10} + \frac{1}{66} = \frac{52}{165}$$

1. El lunes gané 2 dólares y cada día posterior gané el doble que el día anterior. ¿Cuánto gané el sábado y cuánto de lunes a sábado?
R. 64,126 dólares

2. Un hombre que ahorra cada año $\frac{2}{3}$ de lo que ahorró el año anterior, ahorró el 5° año $160. ¿Cuánto ha ahorrado en esos 5 años?
R. $2110.

3. La población de una ciudad aumenta en progresión geométrica de 59,049 habitantes en 1953 a 100,000 en 1958. ¿Cuál es la razón de crecimiento por año? **R.** $\frac{10}{9}$

4. Una persona gana cada año $\frac{1}{3}$ de lo que ganó el año anterior. Si el 1er. año ganó 24,300 dólares, ¿cuánto ha ganado en 6 años?
R. 36,400 dólares



Max Planck, matemático y físico alemán, Premio Nobel de Física de 1918. Fue el creador de la teoría Quanta, que está basada en la discontinuidad de la energía radiante, con lo cual renovó la Física moderna. El Instituto de Física Max Planck es uno de los más famosos del mundo.

CAPÍTULO XXXIX

LOGARITMOS

Un **logaritmo** es el exponente al que se eleva otro número, llamado **base**, para obtener el número dado:

$5_0 = 1$ $\quad$ $5_1 = 5$

$5_2 = 25$ $\quad$ $5_3 = 125$, etc.

En este caso, siendo la **base** 5, el logaritmo de 1 (se escribe log 1) es 0, que es el **exponente** al que se eleva la **base** 5 para que dé 1; el log 5 es 1; el log 25 es 2, el log 125 es 3, etc.

Cabe señalar que cualquier número positivo se puede tomar como base de un **sistema de logaritmos.**

SISTEMAS DE LOGARITMOS

Dado que puede tomarse como base de un sistema de logaritmos cualquier nú-mero positivo el número de sistemas es **ilimitado**. No obstante, generalmente se utiliza el sistema de **logaritmos vulgares** o de **Briggs**, cuya base es 10, y el **sistema de logaritmos naturales** o **neperianos**, creado por **Neper**, cuya base es el número inconmensurable

$e = 2.71828182845 \ldots$

PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS

1) La **base** de un **sistema de logaritmos** no puede ser **negativa,** pues de ser así sus potencias pares serían positivas y las impares negativas, y tendríamos una serie de números alternativamente positivos y negativos, y por tanto, habría números positivos que no tendrían logaritmo.

2) Los **números negativos no tienen logaritmo,** porque siendo la base positiva, todas sus potencias, pares o impares, son positivas y nunca negativas.

3) En todo **sistema el logaritmo de la base es 1**, porque siendo b la base tendremos:

$$b^1 = b \therefore \log b = 1$$

4) En todo sistema **el logaritmo de 1 es cero**, porque siendo b la base tendremos:

$$b^0 = 1 \therefore \log 1 = 0$$

5) Los números mayores que **1 tienen logaritmo positivo**, porque siendo log 1 = 0, los logaritmos de los números mayores que 1 serán mayores que cero, por tanto serán positivos.

6) Los números menores que **1 tienen logaritmo negativo**, porque siendo log 1 = 0, los logaritmos de los números menores que 1 serán menores que cero, por tanto serán negativos.

LOGARITMO DE UN PRODUCTO

El **logaritmo de un producto** es igual a la suma de los logaritmos de los factores. Siendo A y B los factores: $x = \log A$ e $y = \log B$ y siendo b la base del sistema, probaremos que

$$\log (A \times B) = \log A + \log B$$

Si x es el log de A significa que x es el **exponente** al que hay que elevar la base b para que dé A; y si y es el log de B significa que y es el **exponente** al que hay que elevar la base b para que dé B ; luego, tenemos:

$$b^x = A$$
$$b^y = B$$

Al multiplicar estas igualdades tenemos:

$$b^{x+y} = A \times B$$

Si $x + y$ es el **exponente** al que hay que elevar la base b para que dé $A \times B$, $x + y$ es el logaritmo de $A \times B$; luego,

$$\log (A \times B) = x + y$$

pero $x = \log A$ e $y = \log B$; luego,

$$\log (A \times B) = \log A + \log B$$

LOGARITMO DE UN COCIENTE

El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el del divisor.

Siendo A el dividendo, B el divisor, $x = \log A$, $y = \log B$ siendo b la base del sistema, probaremos que

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

En efecto:

$$b^x = A$$
$$b^y = B$$

Si dividimos miembro por miembro estas igualdades tenemos:

$$b^{x-y} = \frac{A}{B}$$

Si $x - y$ es el **exponente** al que hay que elevar la base para que dé $\frac{A}{B}$, $x - y$ es el log de $\frac{A}{B}$; luego,

$$\log \frac{A}{B} = x - y,$$

o sea:

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

COMO OBTENER EL LOGARITMO DE UNA POTENCIA

El **logaritmo de una potencia** es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.

Siendo $x = \log A$ y b la base del sistema, demostraremos que

$$\log A^n = n (\log A)$$

En efecto, al ser x el log A tenemos:

$$b^x = A$$

Elevamos ambos miembros a la potencia n y tenemos:

$$b^{nx} = A^n$$

Si nx es el **exponente** al que se eleva la base para que dé A^n, nx es el log de A^n ; luego,

$$\log A^n = nx$$

y como $x = \log A$ tenemos

$$\log A^n = n (\log A)$$

LOGARITMO DE UNA RAÍZ

El **logaritmo de una raíz** es igual al de la cantidad subradical dividido entre el índice de la raíz.

Siendo $x = \log A$ y b la base del sistema, probaremos que

$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{\log A}{n}$$

Si x es el $\log A$ tenemos

$$b^{x} = A$$

Extrayendo la raíz enésima de ambos miembros tenemos:

$$\sqrt[n]{b^{x}} = \sqrt[n]{A}$$

o sea,

$$b^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{A}$$

Ahora bien: Si $\frac{x}{n}$ es el exponente al que se eleva la base para que dé $\sqrt[n]{A}$, $\frac{x}{n}$ es el log de $\sqrt[n]{A}$, luego,

$$\log \sqrt{A} = \frac{x}{n}$$

y como $x = \log A$, queda:

$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{\log A}{n}$$

LOGARITMOS VULGARES

La base de estos logaritmos es el 10, y a continuación analizaremos sus propiedades particulares.

Si observamos la progresión

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$ $\qquad 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$

$10^2 = 100$ $\qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$

$10^3 = 1000$ $\qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0.001$

$10^4 = 10000$, etc. $10^{-4} = \frac{1}{10^4} =$ 0.0001,

deduciremos fácilmente las siguientes propiedades de los logaritmos de base 10:

1) Los únicos números cuyos logaritmos son números enteros son las potencias de 10:

log 1 = 0 $\qquad$ log 0.1 = – 1

log 10 = 1 $\qquad$ log 0.01 = – 2

log 100 = 2 $\qquad$ log 0.001 = – 3

log 1000 = 3 $\qquad$ log 0.0001 = – 4, etc.

log 10000 = 4, etc.

2) El logaritmo de todo número que no sea una potencia de 10 no es un número entero, sino **una fracción propia** o un **número entero más una fracción propia.**

Como logaritmo 1= 0 y logaritmo 10 = 1, los números comprendidos entre 1 y 10 tendrán un logaritmo mayor que 0 y menor que 1; por tanto, su logaritmo será una fracción propia.

Así, logaritmo 2 = 0.301030

Como logaritmo 10 = 1 y logaritmo 100 = 2, los números comprendidos entre 10 y 100 tendrán un logaritmo mayor que 1 y menor que 2; por tanto, su logaritmo será 1 más una fracción propia.

Así, logaritmo

15 = 1 + 0.176091 = 1.176091

Como logaritmo 100 = 2 y log 1000 = 3, los números comprendidos entre 100 y 1000 tendrán un logaritmo mayor que 2 y menor que 3; por tanto, su logaritmo será 2 más una fracción propia.

Así, logaritmo

564 = 2 + 0.751279 = 2.751279

El logaritmo de un número comprendido entre 1000 y 10000 será 3 más una fracción propia.

Así, logaritmo

1234 = 3 + 0.091315 = 3.091315

Del mismo modo, como logaritmo 1 = 0 y logaritmo 0.1 = – 1, los números comprendidos entre 1 y 0.1 tendrán un logaritmo mayor que – 1 y menor que cero; por tanto, su logaritmo será – 1 más una fracción propia. Así, logaritmo 0.5 = – 1 + 0.698970 = 1.698970. (Se pone el signo – encima de 1 para indicar que sólo es negativa la parte entera, pero no la decimal).

Como logaritmo 0.1 = – 1 y logaritmo 0.01 = – 2, los números comprendidos entre 0.1 y 0.01 tendrán un logaritmo mayor que – 2 y menor que – 1; por tanto, su logaritmo será – 2 más una fracción propia.

Así, logaritmo

0.08 = – 2 + 0.903090 = 2.903090

El logaritmo de un número comprendido entre 0.01 y 0.001 será mayor que – 3 y menor que – 2; por tanto, será – 3 más una fracción propia; el logaritmo de un número comprendido entre 0.001 y 0.0001 será mayor que – 4 y menor que – 3; por tanto será – 4 más una fracción propia, etc.

CARACTERÍSTICA Y MANTISA

Como ya vimos, el logaritmo de todo número que no sea una potencia de 10 consta de una parte entera y una decimal. La entera se llama **característica**, y la decimal **mantisa.**

Así,

en log 25 = 1.397940 la característica es 1 y la mantisa 0.397940;
en log 4125 = 3.615424 la característica es 3 y la mantisa 0.615424;
en log 0.05 = $\overline{2}$.698970 la característica es $\overline{2}$ y la mantisa 0.698970

La **mantisa** siempre es **positiva**, pero la característica puede ser **cero** si el número está comprendido entre 1 y10; por otro lado, es positiva si el número es mayor que 10 y **negativa** si es menor que 1.

Las potencias de 10 sólo tienen característica y su mantisa es 0.

VALOR DE LA CARACTERÍSTICA

De acuerdo con lo anterior podemos decir que:

1) La característica del logaritmo de un número comprendido entre 1 y 10 es cero.

2) La característica del logaritmo de un número mayor que 10 es positiva y su valor absoluto es 1 menos que el número de cifras enteras del número.

Así, 84 tiene **dos** cifras enteras y la característica de su logaritmo es 1; 512 tiene tres cifras enteras y la característica de su logaritmo es 2; 1215.65 tiene cuatro cifras enteras y la característica de su logaritmo es 3.

3) La característica de un número menor que 1 es negativa y su valor absoluto es 1 más que el número de ceros que hay entre el punto decimal y la primera cifra significativa decimal.

Así, la característica de logaritmo 0.5 es – 1; la de logaritmo 0.07 es – 2; la de logaritmo 0.0035 es – 3, etc.

CARACTERÍSTICAS NEGATIVAS

En el logaritmo de un número menor que 1 la **característica** es **negativa**, pero la **mantisa** es **positiva**.

Así, logaritmo 0.5 = – 1 + 0.698970. Este log no puede escribirse – 1.698970, pues esto indica que tanto la característica como la mantisa son negativas.

El modo correcto de escribirlo, indicando que **sólo** la característica es negativa, es $\overline{1}$,698970.

Del mismo modo,

$$\log 0.03 = \overline{2} + 0.477121 = \overline{2}.477121$$

CALCULAR EL VALOR DE EXPRESIONES POR MEDIO DE LOGARITMOS

Las propiedades de los logaritmos nos permiten utilizarlos para calcular el valor de diversas expresiones.

Ejemplos

1) Hallar el valor de 1215 × 0.84 por logaritmos.

Como el log de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores, tendremos:

$$\begin{aligned}\log(1215 \times 0.84) &= \log 1215 + \log 0.84\\ &= 3.084576 + \overline{1}.924279\\ &= 3.008855\end{aligned}$$

Buscando en una tabla el antilogaritmo de 3.008855 (o sea, el número al que corresponde este logaritmo) encontraremos que es 1020.59, luego

$$1215 \times 0.84 = 1020.59 \quad \text{o sea } 1020.6$$

2) Hallar por logaritmos el valor de 3214.8 × 0.003 × (– 43.76)

Como un número negativo no tiene logaritmo, trabajaremos prescindiendo del signo – de 43.76 y una vez hallado el producto, de acuerdo con la regla de los signos, le pondremos signo –. Tendremos:

$$\begin{aligned}\log(3214.8 \times 0.003 \times 43.76) &= \log 3214.8 + \log 0.003 + \log 43.76\\ &= 3.507154 + \overline{3}.477121 + 1.641077\\ &= 2.625352\end{aligned}$$

El antilogaritmo de 2.625352 es 422.0388, por tanto

$$3214.8 \times 0.003 \times (-43.76) = -422.0388$$

3) Hallar el valor de $\frac{0.765}{39.14}$ por logaritmos

El logaritmo de un cociente es igual al del dividendo menos el del divisor, luego

$$\log \frac{0.765}{39.14} = \log 0.765 - \log 39.14$$

pero dado que restar el log de un número equivale a sumar su cologaritmo, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\log \frac{0.765}{39.14} &= \log 0.765 + \operatorname{colog} 39.14\\ &= \overline{1}.883661 + 2.407379\\ &= \overline{2}.291040\end{aligned}$$

$\overline{2}.291040$ corresponde al número 0.019545, luego $\frac{0.765}{39.14} = 0.019545$

4) Hallar el valor de 7.5^6

Como el log de una potencia es igual al exponente multiplicado por el log de la base, tendremos:

$$\log 7.5^6 = 6(\log 7.5) = 6(0.875061) = 5.250366$$

El antilog de 5.250366 es 177977.551, luego 7.5^6 = 177977.551 aproximadamente.

5) hallar el valor de $\sqrt[5]{3}$

Como el log de una raíz es igual al log de la cantidad subradical dividido entre el índice de la raíz, tenemos:

$$\log \sqrt[5]{3} = \frac{\log 3}{5} = \frac{0.477121}{5} = 0.095424$$

0.095424 corresponde al número 1.24573, luego $\sqrt{3}$ = 1.24573

USO DEL COLOGARITMO

El cologaritmo de un número es el logaritmo de su inverso:

El cologaritmo de 2 es el logaritmo de $\frac{1}{2}$;

el cologaritmo de 54 es el log de $\frac{1}{54}$.

En general, colog x = log $\frac{1}{x}$ y como el log de un cociente es igual al log del dividendo menos el log del divisor, tendremos:

colog x = log $\frac{1}{x}$ =

log 1 – log x = 0 – log x = – log x

luego, queda

colog x = – log x , o sea, – log x = colog x

Esto nos dice que restar el logaritmo, de un número equivale a sumar el cologaritmo del mismo número.

Por tanto, como log $\frac{a}{b}$ = log a – log b en lugar de – log b podemos poner colog b y tendremos:

$$\log \frac{a}{b} = \log a + \text{colog } b$$

En conclusión, el cologaritmo se usa para convertir **en suma una resta** de logaritmos.

EJERCICIOS

Encuentra el valor de las expresiones siguientes por medio de logaritmos:

1. 8.125 ÷ 0.9324 **R.** 8.7141

2. 7653.95 ÷ 12.354 **R.** 619.55

3. $\frac{0.72183}{0.0095}$ **R.** 75.982

4. $\frac{9114}{0.02}$ **R.** 455700

5. 2^{10} **R.** 1024

6. 0.15^3 **R.** 0.003375

7. 18.65^4 **R.** 120980.56

8. 00.84^2 **R.** 0.028224

9. 7.2^6 **R.** 139313.183

10. $\sqrt{3}$ **R.** 1.73205

11. $\sqrt[3]{2}$ **R.** 1.25992

COMBINACIÓN DE LOS CASOS ANTERIORES

Ejemplos

1) Hallar el valor de $\frac{3284 \times 0.09132}{715.84}$ por logaritmos.

$$\log\left(\frac{3284 \times 0.09132}{715.84}\right) = \log(3284 \times 0.09132) + \text{colog } 715.84$$
$$= \log 3284 + \log 0.09132 + \text{colog } 715.84$$
$$= 3.516403 + \bar{2}.960566 + \bar{3}.145184 = \bar{1}.622153$$

El log $\bar{1}.622153$ corresponde al número 0.41894, que es el valor de la expresión dada, hallado por logaritmo.

2) Hallar el valor de $\frac{100.39 \times 0.03196}{7.14 \times 0.093}$ por logaritmo.

$$\log\left(\frac{100.39 \times 0.03196}{7.14 \times 0.093}\right) = \log(100.39 \times 0.03196) - (\log 7.14 \times 0.093)$$
$$= \log 100.39 + \log 0.03196 - (\log 7.14 + \log 0.093)$$
$$= \log 100.39 + \log 0.03196 - \log 7.14 - \log 0.093$$
$$= \log 100.39 + \log 0.03196 + \text{colog } 7.14 + \text{colog } 0.093$$
$$= 2.001690 + \bar{2}.504607 + \bar{1}.146302 + 1.031517$$
$$= 0.684116$$

Este logaritmo corresponde al número 4.831877

3) Hallar el valor de $3^{\frac{2}{5}} \times 5^{\frac{2}{3}}$ por logaritmo.

$$\log\left(3^{\frac{2}{5}} \times 5^{\frac{2}{5}}\right) = \log 3^{\frac{2}{5}} + \log 5^{\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{2}{5}(\log 3) + \frac{2}{3}(\log 5)$$
$$= \frac{2}{5}(0.477121) + \frac{2}{3}(0.698970)$$
$$= 0.190848 + 0.465980 = 0.656828$$

Este logaritmo corresponde al número 4.5376 luego $3^{\frac{2}{5}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 4.5376$

4) Hallar el valor de $\sqrt[3]{\frac{32.7 \times 0.006}{0.14 \times 89.17}}$ por logaritmo.

$$\log \sqrt[3]{\frac{32.7 \times 0.006}{0.14 \times 89.17}} = \frac{\log\left(\frac{32.7 \times 0.006}{0.14 \times 89.17}\right)}{3}$$
$$= \frac{\log 32.7 + \log 0.006 + \text{colog } 0.14 + \text{colog } 89.17}{3}$$
$$= \frac{1.514548 + \bar{3}.778151 + 0.853872 + \bar{2}.049781}{3}$$
$$= \frac{\bar{2}.196352}{3} = \overline{1}.398784$$

A $\overline{.1}$ 398784 corresponde el número 0.25048, y éste es el valor de la expresión dada.

A estas alturas sólo se puede hallar por logaritmos el valor de expresiones donde las operaciones indicadas son productos, cocientes, potencias y raíces, pero no sumas o restas.

EJERCICIOS

Encuentra por logaritmos el valor de las expresiones siguientes:

1. $\frac{32.6\times(-841.9)}{0.017\times 732.14}$ **R.** – 2205.14

2. $\frac{95.36\times(-0.14)}{(-83.7)\times 2.936}$ **R.** 0.054327

3. $\frac{(-7.2)\times(-8.135)}{(-0.003)\times 9134.7}$ **R.** – 2.13734

4. $5^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{2}{3}}$ **R.** 4.6512

5. $2^{\frac{1}{5}}\times 3^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{3}{4}}$ **R.** 6.6526

6. $\frac{0.53^7}{2.5^3}$ **R.** 0.00075182

7. $\frac{3^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{5}{3}}}$ **R.** 0.4888

8. $\sqrt{7.86\times 8.14}$ **R.** 7.9988

9. $\sqrt{932.5\times 813.6\times 0.005}$ **R.** 61.591

10. $\sqrt{\frac{93.7\times 104.2}{8.35\times 7.3}}$ **R.** 12.6564

11. $\sqrt[4]{\frac{12316\times 0.25}{931.8\times 0.07}}$ **R.** 2.60614

12. $\sqrt[5]{\frac{56813}{22117}}$ **R.** 1.20766

13. $\left(\frac{0.0316}{0.1615}\right)^{\frac{3}{2}}$ **R.** 0.086551

14. $\sqrt[7]{\frac{15}{4}}$ **R.** 1.20782

15. $\sqrt[5]{-\frac{5}{3}}$ **R.** – 1.10756

16. $\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{6}{5}}$ **R.** 0.56893

17. $\sqrt{\frac{3}{5}}\times\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ **R.** 0.69241

DADOS LOS LOGARITMOS DE CIERTOS NÚMEROS, HALLAR EL LOGARITMO DE OTRO SIN USAR LA TABLA

Ejemplos

1) Dados los logaritmos 2 = 0.301030 y 3 = 0.477121, hallar el logaritmo 108 sin usar la tabla.

Tenemos:

$$108 = 2^2 \times 3^3$$
$$\log 108 = 2(\log 2) + 3(\log 3)$$
$$= 2(0.301030) + 3(0.477121)$$
$$= 0.602060 + 1.431363$$
$$= 2.033423$$

Al buscar en una tabla el log 108 se encuentra 2.033424. La diferencia entre este logaritmo y el que encontramos sin usar la tabla obedece a que los logaritmos dados de 2 y 3 no son rigurosamente exactos.

2) Dado el logaritmo 115 = 2.060698 y el logaritmo 5 = 0.698970 hallar el logaritmo 23

$$23 = \frac{115}{5}$$
$$\log 23 = \log 115 + \text{colog } 5$$
$$= 2.060698 + \bar{1}.301030$$
$$= 1.361728$$

EJERCICIOS

Dados los logaritmos 2 = 0.301030, 3 = 0.477121, 5 = 0.698970 y 7 = 0.845098, hallar:

1. log 36 **R.** 1.556302

2. log 75 **R.** 1.875061

3. log 30 **R.** 1.477121

4. log 48 **R.** 1.681241

5. log 120 **R.** 2.079181

6. log 98 **R.** 1.991226

7. log 0.343 **R.** $\bar{1}.535294$

8. log 22.5 **R.** 1.352182

9. log 1.96 **R.** 0.292256

10. log $2\frac{1}{2}$ **R.** 0.397940

11. Dado el logaritmo 143 = 2.155336 y logaritmo 11 = 1.041393 hallar el logaritmo 13. **R.** 1.113943

ECUACIONES EXPONENCIALES

Las **ecuaciones exponenciales** son aquellas en que la incógnita es exponente de una cantidad, y para resolverlas se aplican logaritmos a los dos miembros de la ecuación y se despeja la incógnita.

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $3^x = 60$

Aplicando logaritmos tenemos:

$$x\,(\log 3) = \log 60$$

$$x = \frac{\log 60}{\log 3} = \frac{1.778151}{0.477121} = 3.72$$

2) Resolver la ecuación $5^{2x-1} = 125$

Aplicando logaritmos:

$$(2x - 1)\log 5 = \log 125$$

$$2x - 1 = \frac{\log 125}{\log 5}$$

$$2x = \frac{\log 125}{\log 5} + 1$$

$$x = \frac{\dfrac{\log 125}{\log 5} + 1}{2}$$

$$x = \frac{\dfrac{2.096910}{0.698970} + 1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $5^x = 3$ **R.** 0.6826

2. $7^x = 512$ **R.** 3.2059

3. $0.2^x = 0.0016$ **R.** 4

4. $9^x = 0.576$ **R.** – 0.25107

5. $3^{x+1} = 729$ **R.** 5

6. $5^{x-2} = 625$ **R.** 6

7. $2^{3x+1} = 128$ **R.** 2

8. $3^{2x-1} = 2187$ **R.** 4

9. $11^{2x} = 915$ **R.** 1.42186

CÓMO DEDUCIR LA FÓRMULA PARA HALLAR EL NÚMERO DE TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Conocemos la fórmula

$$u = ar^{n-1}$$

Siendo n la incógnita, tenemos una ecuación exponencial. Si aplicamos logaritmos a los dos miembros tenemos:

$$\log u = \log a + (n-1)\log r$$

$$\log u - \log a = (n-1)\log r$$

$$n - 1 = \frac{\log u - \log a}{\log r}$$

$$n = \frac{\log u - \log a}{\log r} + 1$$

o también

$$n = \frac{\log u + co\log a}{\log r} + 1$$

Ejemplo

¿Cuántos términos tiene la progresión ∺ 2 : 6 : . . :1458?

Aquí $u = 1458$, $a = 2$, $r = 3$; luego, aplicando la fórmula anterior, tenemos:

$$n = \frac{\log 1458 + co\log 2}{\log 3} + 1 = \frac{3.163758 + \bar{1}698970}{0.477121} + 1$$

$$= \frac{2.862728}{0.477121} + 1$$

$$= 6 + 1 = 7$$

EJERCICIOS

Encuentra el número de términos de las siguientes progresiones:

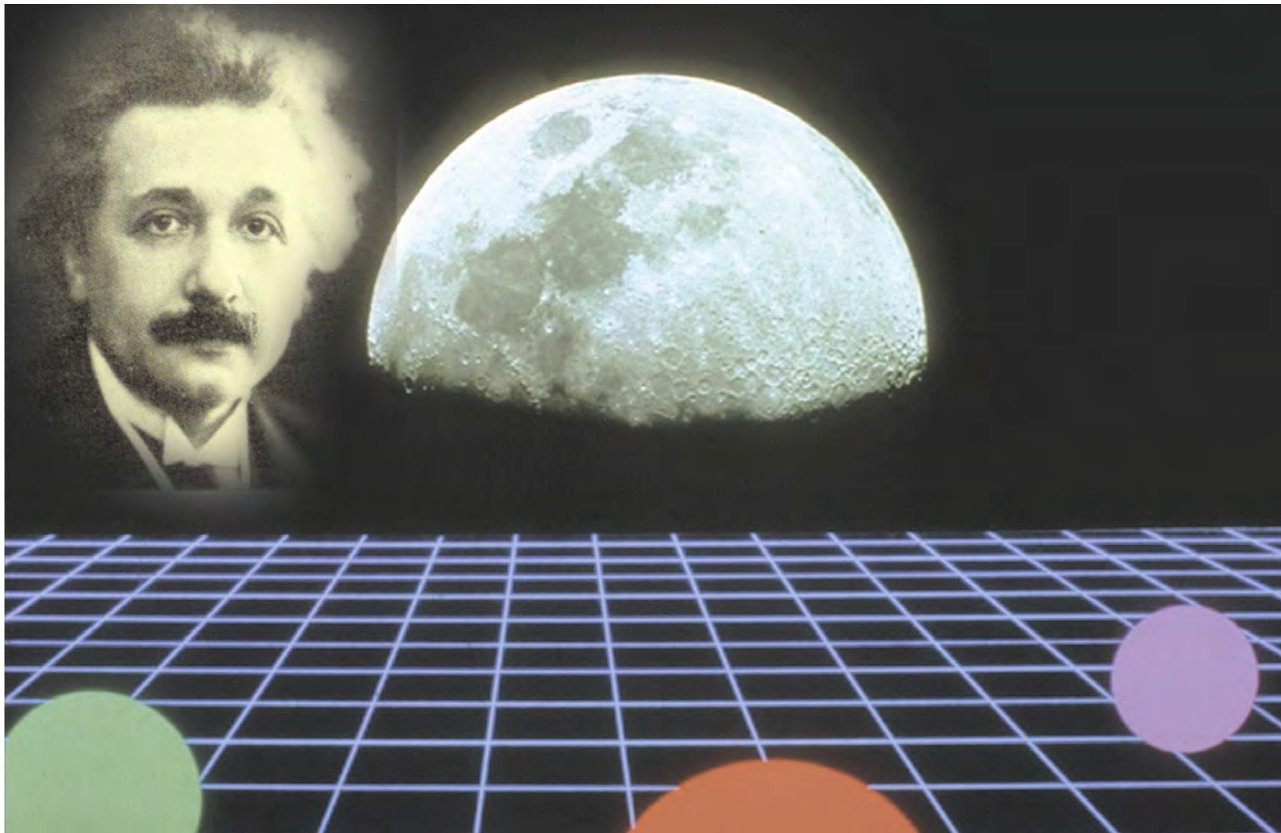
1. ∺ 4 : 8 : . . . . . : 512 **R.** 8

2. ∺ 6 : 8 : . . . . . : $\frac{2048}{81}$ **R.** 6

3. ∺ 2 : 5 : . . . . . : $\frac{625}{8}$ **R.** 5

4. ∺ 3 : 6 : . . . . . : 48 **R.** 5

5. ∺ 2 : 3 : . . . . . : $\frac{243}{16}$ **R.** 6



Albert Einstein, matemático y físico alemán. Fue profesor de la Universidad de Zurich, en 1921 fue nombrado Premio Nobel de Física por su famosa Teoría de la Relatividad del Tiempo, que modifica la Teoría de la Gravitación; junto con otros científicos, logró la desintegración del átomo, base de la bomba atómica, es uno de los grandes genios del siglo XX.

CAPÍTULO XL

INTERÉS COMPUESTO, AMORTIZACIONES E IMPOSICIONES

Se dice que un interés es **compuesto** cuando los intereses que gana el capital prestado se **capitalizan periódicamente,** es decir que se suman al capital prestado a intervalos iguales de tiempo, constituyéndose así un nuevo capital al final de cada unidad de tiempo.

En la amortización se destina una cantidad constante para el servicio de la deuda, aplicándose una parte a los intereses y otra a la reducción de la deuda.

Al principio es mayor la parte destinada a intereses que a amortización, pero a medida que va reduciéndose la deuda, se va destinando mayor parte a la amortización.

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA FUNDAMENTAL Y DERIVADAS

Siendo c el capital prestado a interés compuesto durante t años y r el **tanto por uno** anual, o sea, lo que gana $1 al año.

Cada dólar gana r al año; luego, en un año se convierte en $1 + r$ y c dólares se convertirán, al cabo de un año, en

$$c\,(1 + r)$$

Cada dólar de este nuevo capital, en el segundo año, se convierte en $1 + r$; luego, los $c\,(1 + r)$ dólares, al final del segundo año, se habrán convertido en

$$c\,(1 + r)(1 + r) = c\,(1 + r)^2$$

Si aplicamos a este nuevo capital la misma regla, tendremos que al final del tercer año se habrá convertido en

$$c\,(1 + r)^2(1 + r) = c\,(1 + r)^3$$

Este nuevo capital, al final del cuarto año, se convertirá en

$$c\,(1 + r)^3(1 + r) = c\,(1 + r)^4$$

y así sucesivamente; por tanto, al final de t años, el capital estará convertido en

$$c\,(1 + r)^t,$$

y si lo designamos como C tendremos:

$$C = c\,(1 + r)^t \quad (1)$$

que es la formula fundamental del interés compuesto, calculable por logaritmos. De este modo, al aplicar logaritmos tendremos:

$$\log C = \log c + t\log(1 + r)$$

Fórmulas derivadas

La ecuación (1) presenta una relación entre cuatro cantidades; conocidas tres de ellas, podemos hallar la cuarta.

Despejamos c en (1) y tenemos:

$$c = \frac{C}{(1+r)^t},$$

y aplicando logaritmos:

$$\log c = \log C - t\log(1 + r),$$

t puede despejarse en esta última fórmula. Pasando $-t\log(1 + r)$ al primer miembro y $\log c$ al segundo tenemos:

$$t\log(1 + r) = \log C - \log c,$$

y de aquí:

$$t = \frac{\log C - \log c}{\log(1+r)}$$

Para hallar r, en la fórmula (1), al despejar $(1 + r)^t$ tenemos:

$$(1 + r)^t = \frac{C}{c}$$

Extrayendo la raíz t:

$$1 + r = \sqrt[t]{\frac{C}{c}}$$

y aplicando logaritmos:

$$\log(1 + r) = \frac{\log C - \log c}{t}$$

Una vez obtenido el valor de $1 + r$ se le resta 1 y tenemos r.

Ejemplos

1) ¿En cuánto se convertirán $5,800 al 5% anual de interés compuesto en 7 años?

No olvidemos que r representa el tanto por 1, es decir, lo que gana $1 en la unidad de tiempo. El tanto por ciento es el 5 anual, lo cual significa que $100 ganan $5 al año, por tanto $1 ganará $\$\frac{5}{100} = \$0.05$.

$c = 5800$, $r = 0.05$, $t = 7$

Al sustituir estos valores en la fórmula $C = c\,(1 + r)^t$ tenemos:

$$C = 5800(1 + 0.05)^7$$

o sea $C = 5800(1.05)^7$

Aplicando logaritmos:

$$\begin{aligned}\log C &= \log 5800 + 7(\log 1.05)\\ &= 3.763428 + 7(0.021189)\\ &= 3.763428 + 0.148323\\ &= 3.911751\end{aligned}$$

El número a que corresponde este logaritmo es 8161.148, o sea 8161.15; luego, el capital prestado se convertirá en $8161.15.

2) ¿En cuánto se convertirán $918.54 al 4% anual de interés compuesto en 1 año, capitalizando los intereses por trimestres?

Dado que los intereses se capitalizan, es decir que se suman al capital por trimestres, t representa el número de trimestres que hay en 1 año, o sea 4.

Buscamos el tanto por 1 anual. Si $100 ganan $4 al año, $1 ganará $0.04 al año. Este tanto por 1 anual hay que hacerlo trimestral. Si $1 gana $0.04 al año, en un trimestre ganará $0.04 ÷ 4 = $0.01, por lo que tenemos:

$c = 918.54$, $t = 4$, $r = 0.01$

al sustituir en la fórmula $C = c\,(1 + r)^t$ tendremos:

$$C = 918.54(1 + 0.01)^4$$

o sea $C = 918.54(1.01)^4$

Aplicando logaritmos:

$$\begin{aligned}\log C &= \log 918.54 + 4(\log 1.01)\\ &= 2.963098 + 4(0.004321)\\ &= 2.963098 + 0.017284\\ &= 2.980382\end{aligned}$$

El antilogaritmo es 955.83

Luego, los $918.54 se convertirán en $955.83

3) Una suma prestada al $3\frac{1}{2}$ % de interés compuesto durante 9 años se ha con-vertido en 3254.60 dólares. ¿Cuál fue la suma prestada?

Hay que hallar c

$$c = \frac{C}{(1+r)^t}$$

Aquí $C = 3254.60$, $r = 3.5 \div 100 = 0.035$, $t = 9$, luego

$$c = \frac{3254.60}{(1.035)^9}$$

Aplicando logaritmos:

$\log C = \log 3254.60 + 9(\text{colog } 1.035)$
$= 3.512498 + 9(1.985060)$
$= 3.512498 + 1.865540$
$= 3.378038$

El antilogaritmo obtenido es 2388.02. Luego, la suma prestada fue de 2388.02 dólares.

4) ¿En cuántos años una suma de 834 dólares prestada al 8% anual de interés compuesto se convertirá en 1323.46 dólares?

La fórmula es

$$t = \frac{\log C - \log c}{\log(1+r)}$$

Aquí, $C = 1323.46$, $c = 834$, $1 + r = 1.08$, luego

$$t = \frac{\log 1323.46 - \log 834}{\log 1.08}$$

$$= \frac{3.121711 - 2.921166}{0.033424}$$

$$= \frac{0.200545}{0.033424} = 6 \text{ años}$$

5) Una suma de 700 dólares prestada a interés compuesto durante 5 años se ha convertido en 851.65 dólares ¿A qué % anual se prestó?

La fórmula es

$$\log(1 + r) = \frac{\log C - \log c}{t}$$

Sustituyendo:

$$\log(1 + r) = \frac{\log 851.65 - \log 700}{5}$$

$$= \frac{2.930262 - 2.845098}{5}$$

$= 0.017033$

El antilogaritmo obtenido es: 1.04

Luego, $1 + r = 1.04$ y por tanto $r = 0.04$. Si el tanto por 1 es 0.04 entonces el % es 4.

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA APLICABLE

Siendo c un capital prestado a interés compuesto, a un tanto por uno r durante t años. Este capital en t se convertirá en

$$c(1 + r)^t$$

Siendo a la anualidad que tiene que pagar el deudor. La primera anualidad se paga al **final del primer año** y produce interés compuesto, a favor del deudor, al mismo tanto por uno r que el capital prestado, durante $t - 1$ años; luego, se convertirá en

$$a(1 + r)^{t-1}$$

La segunda anualidad se paga al final del segundo año y produce interés compuesto durante $t - 2$ años; luego, se convertirá en

$$a(1 + r)^{t-2}$$

La tercera anualidad, pagada al final del tercer año, se convertirá en

$$a(1 + r)^{t-3}$$

Del mismo modo, la cuarta, quinta, etc. anualidades se convierten en

$$a(1 + r)^{t-4},\ a(1 + r)^{t-5}\ldots\ldots, \text{etc.}$$

La penúltima anualidad se convierte en

$$a(1 + r)$$

y la última anualidad, que se paga al final del último año, ya no produce interés a favor del deudor, porque se paga al cumplirse t años; por tanto, el valor de la última anualidad es a.
La suma de los valores que adquieren las diversas anualidades junto con el valor a de la última anualidad debe ser igual al capital prestado con su interés compuesto; por tanto,

$$c(1 + r)^t = a + a(1 + r) + \ldots\ldots + a(1+r)^{t-3} + a(1+r)^{t-2} + a(1 + r)^{t-1}$$

El segundo miembro de esta igualdad es la suma de los términos de una progresión geométrica cuya razón es $(1 + r)$; luego, aplicando la fórmula

$$S = \frac{ur - a}{r - 1} \text{ tendremos:}$$

$$c(1 + r)^t = \frac{a(1+r)^{t-1}(1+r) - a}{(1+r)},$$

o sea: $c(1 + r)^t = \dfrac{a(1+r)^t - a}{r}$

Quitamos denominadores:

$$cr(1 + r)^t = a(1 + r)^t - a$$

Sacamos a factor común:

$$cr(1 + r)^t = a[(1 + r)^t - 1]$$

y despejando a queda:

$$a = \frac{cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$$

que es la fórmula de las anualidades.

Ejemplo

Una ciudad toma un empréstito de \$500,000 al 4% de interés compuesto, para amortizarlo en 15 años. ¿Qué anualidad deberá pagar?

Aquí, $c = 500{,}000$, $r = 0.04$, $t = 15$; sustituyendo en la fórmula anterior tenemos:

$$a = \frac{500{,}000 \times 0.04 \times (1.04)^{15}}{(1.04)^{15} - 1} \quad (1)$$

Buscamos el valor de $(1.04)^{15}$ en una tabla de interés compuesto, aunque en este caso vamos a calcularlo por logaritmos. Tendremos:

$\log(1.04)^{15} = 15(\log 1.04)$
$= 15(0.017033) = 0.255495$

El antilogaritmo obtenido es 1 8009, luego $(1.04)^{15} = 1.8009$

Al sustituir este valor en (1) tenemos:

$$a = \frac{500{,}000 \times 0.04 \times 1.8009}{1.8009 - 1}$$

o sea

$$a = \frac{500{,}000 \times 0.04 \times 1.809}{0.8009}$$

Aplicando logaritmos:

$\log a = \log 500000 + \log 0.04 + \log 1.8009 + \text{colog } 0.8009$
$= 5.698970 + 2.602060 + 0.255495 + 0.096422$
$= 4.652947$

Hallando el antilogaritmo se encuentra que $a = \$44972.47$

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE LAS IMPOSICIONES

Siendo c el capital que se quiere constituir en t años. Sea i la imposición anual fija al principio de cada uno de los t años, a un tanto por uno r, para constituir el capital.

La primera imposición, hecha al principio del primer año, produce un interés compuesto durante t años; luego, se convertirá en

$$i\,(1+r)^t$$

La segunda imposición, hecha al principio del segundo año, produce un interés compuesto durante $t-1$ años; luego, se convertirá en

$$i\,(1+r)^{t-1}$$

Asimismo, la tercera, cuarta, imposiciones se convertirán en

$$i\,(1+r)^{t-2},\ i\,(1+r)^{t-3}\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ \text{etc.}$$

y la última, hecha al principio del último año, se convertirá en

$$i\,(1+r)$$

La suma de los valores de todas las imposiciones al cabo de t años tiene que ser igual al capital que se quiere constituir; por tanto tendremos:

$$c = i\,(1+r) + .\ .\ .\ .\ . + i\,(1+r)^{t-2} + i\,(1+r)^{t-1} + i\,(1+r)$$

El segundo miembro de esta igualdad es la suma de los términos de una progresión geométrica cuya razón es $1+r$; aplicando la fórmula

$$S = \frac{ur-a}{r-1} \text{ a tenemos: } c = \frac{i\,(1+r)^t(1+r) - i\,(1+r)}{(1+r)-1}$$

$$\text{Simplificando: } c = \frac{i\,(1+r)^{t+1} - i\,(1+r)}{r}$$

Quitando denominadores: $c\,r = i\,(1+r)^{t+1} - i\,(1+r)$

Sacando i factor común en el segundo miembro, tenemos:

$$cr = i\,[(1+r)^{t+1} - (1+r)]$$

Despejando i:

$$i = \frac{cr}{(1+r)^{t+1} - (1+r)}$$

que es la fórmula de las imposiciones.

Ejemplo

1) ¿Qué imposición anual al 5% habrá que hacer para constituir en 20 años un capital de $80,000?

Aquí $c = 80{,}000$, $r = 0.05$, $t = 20$, por tanto, sustituyendo en la fórmula tenemos:

$$i = \frac{80000 \times 0.05}{(1.05)^{21} - 1.05} \qquad (1)$$

Buscamos el valor de $(1.05)^{21}$ y tendremos:

$\log\,(1.05)^{21} = 21(\log 1.05) = 21(0.021189) = 0.444969$

Al obtener el antilogaritmo vemos que $(1.05)^{21} = 2.7859$

Así que al substituir en (1) este valor:

$$i = \frac{80000 \times 0.05}{2.7859 - 1.05}$$

o sea

$$i = \frac{80000 \times 0.05}{1.7359}$$

Aplicando logaritmos:

$$\begin{aligned}\log i &= \log 80000 + \log 0.05 + \text{colog } 1.7359\\ &= 4.903090 + 2.698970 + 1.760476\\ &= 3.362536.\end{aligned}$$

Al encontrar el antilogaritmo tenemos que $i = \$2304.28$

EJERCICIOS

1. Si una suma de $500 se invierte al 6% de interés compuesto durante 3 años, ¿en cuánto se convertirá?
R. $ 595.51

2. Se prestan 3500 dólares al 7% de interés compuesto durante 5 años. ¿En cuánto se convertirá?
R. 4908.94 dólares

3. ¿En cuánto se convertirán $800 al 3% anual, en 2 años, capitalizando los intereses por semestres?
R. $ 849.09

4. ¿En cuánto se convertirán $900 al 4% anual en 1 año, capitalizando los intereses por trimestres?
R. $936.54

5. Una suma prestada al 5% anual de interés compuesto se ha convertido en $972.60 en 4 años. ¿Cuál fue la suma prestada?
R. $ 800.16

6. Se presta cierta suma al $4\frac{1}{2}$ % anual y en 6 años se convierte en $1893.50. ¿Cuál fue la suma prestada?
R. 1454.02

AMORTIZACIÓN DE UNA DEUDA POR ANUALIDADES

Un capital *c* se presta a interés compuesto, siendo *r* el tanto por 1, durante *t* años. El capital prestado y sus intereses compuestos durante el tiempo que dura el préstamo deben amortizarse mediante *t* pagos iguales, que se verifican al final de cada año.

La **anualidad** es la cantidad fija a pagar al final de cada año para amortizar un capital prestado y sus intereses compuestos en cierto número de años.

EJERCICIOS

1. ¿Qué imposición anual al 6% habrá que hacer para tener en 9 años $30,000?
R. $ 2,462.38

2. Para constituir un capital de 90,000 dólares en 20 años, ¿qué imposición anual al 4% habrá que hacer?
R. 2,906.03 dólares

3. Se ha constituido un capital de $200,000 en 40 años mediante imposición anuales fijas al 5%. ¿Cuál ha sido la imposición anual?
R. $ 1,576.79

4. Un padre de familia desea que cuando su hijo cumpla 25 años tenga constituido un capital de $40,000. ¿Qué imposición anual al 6%, a partir del nacimiento del hijo, deberá hacer para constituir dicho capital?
R. $ 687.79

FORMACIÓN DE UN CAPITAL MEDIANTE IMPOSICIONES SUCESIVAS IGUALES

Para formar un **capital** mediante **imposiciones sucesivas iguales** hay que constituir un capital *c* en cierto número de años, estableciendo al principio de cada año una cantidad fija a interés compuesto.

EJERCICIOS

1. ¿Qué anualidad hay que pagar para amortizar una deuda de $40,000 al 5% en 10 años? **R.** $ 5180.21

2. Una ciudad toma un empréstito de $600,000 al 5%. ¿Qué anualidad deberá pagar para amortizar la deuda en 20 años?
R. $ 48.146

Resuelve los problemas aplicando la tabla de interés compuesto decreciente. Compruébalos usando la fórmula de la anualidad.

3. Una deuda de 3,000 dólares con el 6% de interés se debe pagar en 5 años. ¿Cuál será el importe de la anualidad?
R. 712.19 dólares

4. Se constituye una hipoteca sobre un bien inmueble por la cantidad de 12,000 dólares al 7% de interés, pagadera en 12 años. Determinar la anualidad a pagar.
R. 1510.82. dólares

5. Un empresario invierte 473,000 dólares en un préstamo hipotecario al $3\frac{1}{2}$% de interés por 9 años. ¿Qué anualidad se le deberá abonar?
R. 62,173.96 dólares

TABLA DE INTERÉS COMPUESTO

Valor adquirido por $1 a interés compuesto, de 1 a 30 años o sea valor de $(1 + r)^t$

AÑOS	1/2%	1%	11/2 %	2%	21/2 %	3%	31/2 %	4 %	41/2 %	5%	51/2 %	6%	7%	8%	9%	10%
1	1.005000	1.010000	1.015000	1.020000	1.025000	1.030000	1.035000	1.040000	1.045000	1.050000	1.055000	1.060000	1.070000	1.080000	1.090000	1.100000
2	1.010025	1.020100	1.030225	1.040400	1.050625	1.060900	1.071225	1.081600	1.092025	1.102500	1.113025	1.123600	1.144900	1.166400	1.188100	1.210000
3	1.015075	1.030301	1.045678	1.061208	1.076891	1.092727	1.108718	1.124864	1.141166	1.157625	1.174241	1.191016	1.225043	1.259712	1.295029	1.331000
4	1.020151	1.040604	1.061364	1.082432	1.103813	1.125509	1.147523	1.169859	1.192519	1.215506	1.238825	1.262577	1.310796	1.360489	1.411582	1.464100
5	1.025251	1.051010	1.077284	1.104081	1.131408	1.159274	1.187686	1.216653	1.246182	1.276282	1.306960	1.338226	1.402552	1.469328	1.538624	1.610510
6	1.030378	1.061520	1.093443	1.126162	1.159693	1.194052	1.229255	1.265319	1.302260	1.340096	1.378843	1.418519	1.500730	1.586874	1.677100	1.771561
7	1.035529	1.072135	1.109845	1.148686	1.188686	1.229874	1.272279	1.315932	1.360862	1.407100	1.454679	1.503630	1.605781	1.713824	1.828039	1.948717
8	1.040707	1.082857	1.126493	1.171659	1.218403	1.266770	1.316809	1.368569	1.422101	1.477455	1.534687	1.593848	1.718186	1.850930	1.992563	2.743589
9	1.045911	1.093685	1.143390	1.195093	1.248863	1.304773	1.362897	1.423312	1.486095	1.551328	1.619094	1.689479	1.838459	1.999005	2.171893	2.357948
10	1.051140	1.104622	1.160541	1.218994	1.280085	1.343916	1.410599	1.480244	1.552969	1.628895	1.708144	1.790848	1.967151	2.158925	2.367364	2.593742
11	1.056396	1.115668	1.177949	1.243374	1.312087	1.384234	1.459970	1.539454	1.622853	1.710339	1.802092	1.898299	2.104852	2.331639	2.580426	2.853117
12	1.061678	1.126825	1.195618	1.268242	1.344889	1.455761	1.511069	1.601032	1.695881	1.795856	1.901207	2.012196	2.252192	2.518170	2.812665	3.138428
13	1.066986	1.138093	1.213552	1.293607	1.378511	1.468534	1.563956	1.665074	1.772196	1.885649	2.005774	2.132928	2.409845	2.719624	3.065805	3.452271
14	1.072321	1.149474	1.231756	1.319479	1.412974	1.512590	1.618695	1.731676	1.851945	1.979932	2.116091	2.260904	2.578534	2.937194	3.341727	3.797498
15	1.077683	1.160969	1.250232	1.345868	1.448298	1.557967	1.675349	1.800944	1.935282	2.078928	2.232476	2.396558	2.759032	3.172169	3.642482	4.177248
16	1.083071	1.172579	1.268986	1.372786	1.484506	1.604706	1.733986	1.872981	2.022370	2.182875	2.355263	2.540352	2.952164	3.425943	3.970306	4.594973
17	1.088487	1.184304	1.288020	1.400241	1.521618	1.652848	1.794676	1.947901	2.113377	2.292018	2.484802	2.692773	3.158815	3.700018	4.327633	5.054470
18	1.093929	1.196147	1.307341	1.428246	1.559659	1.702433	1.857489	2.025817	2.208479	2.406619	2.621466	2.854339	3.379932	3.996020	4.717120	5.559917
19	1.099399	1.208109	1.326951	1.456811	1.598650	1.753506	1.922501	2.106849	2.307860	2.526950	2.765647	3.025600	3.616528	4.315701	5.141661	6.115909
20	1.104896	1.220190	1.346855	1.485947	1.638616	1.806111	1.989789	2.191123	2.411714	2.653298	2.917757	3.207135	3.869684	4.660957	5.604411	6.727500
21	1.110420	1.232392	1.367058	1.515666	1.679582	1.860295	2.059431	2.278768	2.520241	2.785963	3.078234	3.399564	4.140562	5.033834	6.108808	7.400250
22	1.115972	1.244716	1.387564	1.545980	1.721571	1.916103	2.131512	2.369919	2.633652	2.925261	3.247537	3.603537	4.430402	5.436540	6.658600	8.140275
23	1.121552	1.257163	1.408377	1.576899	1.764611	1.973587	2.206114	2.464716	2.752166	3.071524	3.426152	3.819750	4.740530	5.871464	7.257874	8.954302
24	1.127160	1.269735	1.429503	1.608437	1.808726	2.032794	2.283328	2.563304	2.876014	3.225100	3.614590	4.048935	5.072367	6.341181	7.911083	9.849733
25	1.132796	1.282432	1.450945	1.640606	1.853944	2.093778	2.363245	2.665836	3.005434	3.386355	3.813392	4.291871	5.427433	6.848475	8.623081	10.834706
26	1.138460	1.295256	1.472710	1.673418	1.900293	2.156591	2.445959	2.772470	3.140679	3.555673	4.023129	4.549383	5.807353	7.396353	9.399158	11.918177
27	1.144152	1.308209	1.494800	1.706886	1.947800	2.221289	2.531567	2.883369	3.282010	3.733456	4.244401	4.822346	6.213868	7.988061	10.245082	13.109994
28	1.149873	1.321291	1.517222	1.741024	1.996495	2.287928	2.620172	2.998703	3.429700	3.920129	4.477843	5.111687	6.648838	8.627106	11.167140	14.420994
29	1.155622	1.334504	1.539981	1.775845	2.046407	2.356566	2.711878	3.118651	3.584036	4.116136	4.724124	5.418388	7.114257	9.317275	12.172182	15.863093
30	1.161400	1.347843	1.563080	1.811362	2.097568	2.427262	2.806794	3.243398	3.745318	4.321942	4.983951	5.743491	7.612255	10.062657	13.267678	17.449402

TABLA DE INTERÉS COMPUESTO DECRECIENTE

Anualidad cuyo valor actual es $1 a interés compuesto de 1 a 30 años

AÑOS	1/2%	1%	11/2 %	2 %	21/2 %	3 %	31/2 %	4 %	41/2 %	5 %	5 1/2 %	6 %	7 %	8 %	9 %	10 %
1	1.005000	1.010000	1.015000	1.020000	1.025000	1.030000	1.035000	1.040000	1.045000	1.050000	1.055000	1.060000	1.070000	1.080000	1.090000	1.100000
2	0.503753	0.507512	0.511278	0.515050	0.518827	0.522611	0.526400	0.530196	0.533998	0.537805	0.541618	0.545437	0.553092	0.560769	0.568469	0.576190
3	0.336672	0.340022	0.343383	0.346755	0.350137	0.353530	0.356934	0.360349	0.363773	0.367209	0.370654	0.374110	0.381052	0.388034	0.395055	0.402115
4	0.253133	0.256281	0.259445	0.262624	0.265818	0.269027	0.272251	0.275490	0.278744	0.282012	0.285294	0.288591	0.295228	0.301921	0.308669	0.315471
5	0.203010	0.206040	0.209089	0.212158	0.215247	0.218355	0.221481	0.224627	0.227792	0.230975	0.234176	0.237396	0.243891	0.250456	0.257092	0.263797
6	0.169595	0.172548	0.172525	0.178526	0.181550	0.184598	0.187668	0.190762	1.193878	0.197017	0.200179	0.203363	0.209796	0.216315	0.222920	0.229607
7	0.145729	0.148628	0.151556	0.154512	0.157495	0.160506	0.163544	0.166610	0.169701	0.172820	0.175964	0.179135	0.185553	0.192072	0.198691	0.205406
8	0.127829	0.130690	0.133584	0.136510	0.139467	0.142456	0.145477	0.148528	0.151610	0.154722	0.157864	0.161036	0.167468	0.174015	0.180674	0.187444
9	0.113907	0.116740	0.119610	0.122515	0.125457	0.128434	0.131446	0.134493	0.137574	0.140690	0.143839	0.147022	0.153486	0.160080	0.166799	0.173641
10	0.102771	0.105582	0.108434	0.111327	0.114259	0.117231	0.120241	0.123291	0.126379	0.129505	0.132668	0.135868	0.142378	0.149029	0.155820	1.162745
11	0.093659	0.096454	0.099294	0.102178	0.105106	0.108077	0.111092	0.114149	0.117248	0.120389	0.123571	0.126793	0.133357	0.140076	0.146947	0.153963
12	0.086066	0.088849	0.091680	0.094560	0.097487	0.100462	0.103484	0.106552	0.109666	0.112825	0.116029	0.119277	0.125902	0.132695	0.139651	0.146763
13	0.079642	0.082415	0.085240	0.088118	0.091048	0.094030	0.097062	0.100144	0.103275	0.106456	0.109684	0.112960	0.119651	0.126522	0.133567	0.140779
14	0.074136	0.076901	0.079723	0.082602	0.085537	0.088526	0.091571	0.094669	0.097820	0.101024	0.104279	0.107585	0.114345	0.121297	0.128433	0.135746
15	0.069364	0.072124	0.074944	0.077825	0.080766	0.083767	0.086825	0.089941	0.093114	0.096342	0.099626	0.102963	0.109795	0.116830	0.124059	0.131474
16	0.065189	0.067945	0.070765	0.073650	0.076599	0.079611	0.082685	0.085820	0.089015	0.092270	0.095583	0.098952	0.105858	0.112977	0.120300	0.127817
17	0.061506	0.064258	0.067080	0.069970	0.072928	0.075953	0.079043	0.082199	0.085418	0.088699	0.092042	0.095445	0.102425	0.109629	0.117046	0.124664
18	0.058232	0.060982	0.063806	0.066702	0.069670	0.072709	0.075817	0.078993	0.082237	0.085546	0.088920	0.092357	0.099413	0.106702	0.114212	0.121930
19	0.055303	0.058052	0.060878	0.063782	0.066761	0.069814	0.072940	0.076139	0.079407	0.082745	0.086150	0.089621	0.096753	0.104128	0.111730	0.119547
20	0.052666	0.055415	0.058246	0.061157	0.064147	0.067216	0.070361	0.073582	0.076876	0.080243	0.083679	0.087185	0.094393	0.101852	0.109546	0.117460
21	0.050282	0.053031	0.055866	0.058785	0.061787	0.064872	0.068037	0.071280	0.074601	0.077996	0.081465	0.085005	0.092289	0.099832	0.107617	0.115624
22	0.048114	0.050864	0.053703	0.056631	0.059647	0.062747	0.065932	0.069199	0.072547	0.075971	0.079471	0.083046	0.090406	0.098032	0.105905	0.114005
23	0.046135	0.048886	0.051731	0.054668	0.057696	0.060814	0.064019	0.067309	0.070682	0.074137	0.077670	0.081278	0.088714	0.096422	0.104382	0.112572
24	0.044321	0.047073	0.049924	0.052871	0.055913	0.059047	0.062273	0.065587	0.068987	0.072471	0.076036	0.079679	0.087189	0.094978	0.103023	0.111300
25	0.042652	0.045407	0.048263	0.051220	0.054278	0.057428	0.060674	0.064012	0.067439	0.070952	0.074549	0.078227	0.085811	0.093679	0.101806	0.110168
26	0.041112	0.043869	0.046732	0.049699	0.052769	0.055938	0.059205	0.062567	0.066021	0.069564	0.073193	0.076904	0.084561	0.092507	0.100715	0.109159
27	0.039686	0.042446	0.045315	0.048293	0.051377	0.054564	0.057852	0.061239	0.064719	0.068292	0.071952	0.075697	0.083426	0.091448	0.099735	0.108258
28	0.038362	0.041124	0.044001	0.046990	0.050088	0.053293	0.056603	0.060013	0.063521	0.067123	0.070814	0.074593	0.082392	0.090489	0.098852	0.107451
29	0.037129	0.039895	0.042779	0.045778	0.048891	0.052115	0.055445	0.058880	0.062415	0.066046	0.069769	0.073580	0.081449	0.089619	0.098056	0.106728
30	0.035979	0.038748	0.041639	0.044650	0.047778	0.051019	0.054371	0.057830	0.061392	0.065051	0.068805	0.072649	0.080586	0.088827	0.097336	0.106079

TABLA DE POTENCIAS Y RAÍCES

No.	(No)^2	$\sqrt[2]{No.}$	(No.)^3	$\sqrt[3]{No.}$	Inverso	No.	(No)^2	$\sqrt[2]{No.}$	(No.)^3	$\sqrt[3]{No.}$	Inverso
1	1	1.000	1	1.000	1.00000000	51	2,601	7.141	132,651	3.708	.019607843
2	4	1.414	8	1.260 .	.500000000	52	2,704	7.211	140.608	3.733	.019230769
3	9	1.732	27	1.442	.333333333	53	2,809	7.280	148,877	3.756	.018867925
4	16	2.000	64	1.587	.250000000	54	2,916	7.348	157,464	3.780	.018518519
5	25	2.236	125	1.710	.200000000	55	3,025	7.416	166,375	3.803	.018181818
6	36	2.449	216	1.817	.166666667	56	3,136	7.483	175,616	3.826	.017857143
7	49	2.646	343	1.913	.142857143	57	3,249	7.550	185,193	3.849	.017543860
8	64	2.828	512	2.000	.125000000	58	3,364	7.616	195,112	3.871	.017241379
9	81	3.000	729	2.080	.1111111	59	3,481	7.681	205,379	3.893	.016949153
10	100	3.162	1,000	2.154	.100000000	60	3,600	7.746	216,000	3.915	.016666667
11	121	3.317	1,331	2.224	.090909091	61	3,721	7.810	226,981	3.936	.016393443
12	144	3.464	1,728	2.289	.083333333	62	3,844	7.874	238,328	3.958	.016129032
13	169	3.606	2,197	2.351	.076923077	63	3,969	7.937	250,047	3.979	.015873016
14	196	3.742	2,744	2.410	.071428571	64	4,096	8.000	262,144	4.000	.015625000
15	225	3.873	3,375	2.466	.066666667	65	4,225	8.062	274,625	4.021	.015384615
16	256	4.000	4,096	2.520	.062500000	66	4,356	8.124	287,496	4.041	.015151515
17	289	4.123	4,913	2.571	.058823529	67	4,489	8.185	300,763	4.062	.014925373
18	324	4.243	5,832	2.621	.055555556	68	4,624	8.246	314,432	4.082	.014705882
19	361	4.359	6,859	2.668	.052631579	69	4,761	8.307	328,509	4.102	.014492754
20	400	4.472	8,000	2.714	.050000000	70	4,900	8.367	343,000	4.121	.014285714
21	441	4.583	9,261	2.759	.047619048	71	5,041	8.426	357,911	4.141	.014084507
22	484	4.690	10,648	2.802	.045454545	72	5.184	8.485	373,248	4.160	.013888889
23	529	4.796	12,167	2.844	.043478261	73	5,329	8.544	389,017	4.179	.013698630
24	576	4.899	13,824	2.884	.041666667	74	5,476	8.602	405,224	4.198	.013513514
25	625	5.000	15,625	2.924	.040000000	75	5,625	8.660	421,875	4.217	.013333333
26	676	5.099	17,576	2.962	.038461538	76	5,776	8.718	438,976	4.236	.013157895
27	729	5.196	19,683	3.000	.037037037	77	5,929	8.775	456,533	4.254	.012987013
28	784	5.291	21,952	3.037	.035714286	78	6,084	8.832	474,552	4.273	.012820513
29	841	5.385	24,389	3.072	.034482759	79	6,241	8.888	493,039	4.291	.012658228
30	900	5.477	27,000	3.107	.033333333	80	6,400	8.944	512,000	4.309	.012500000
31	961	5.568	29,791	3.141	.032258065	81	6,561	9.000	531,441	4.327	.012345679
32	1,024	5.657	32,768	3.175	.031250000	82	6,724	9.055	551,368	4.344	.012195122
33	1,089	5.745	35,937	3.208	.030303030	83	6,889	9.110	571,787	4.362	.012048193
34	1,156	5.831	39,304	3.240	.029411765	84	7,056	9.165	592,704	4.380	.011904762
35	1,225	5.916	42,875	3.271	.028571429	85	7,225	9.220	614,125	4.397	.011764706
36	1,296	6.000	46,656	3.302	.027777778	86	7,396	9.274	636,056	4.414	.011627907
37	1,369	6.083	50,653	3.332	.027027027	87	7,569	9.327	658,503	4.431	.011494253
38	1,444	6.164	54,872	3.362	.026315789	88	7,744	9.381	681,472	4.448	.011363636
39	1,521	6.245	59,319	3.391	.025641026	89	7,921	9.434	704,969	4.465	.011235955
40	1,600	6.325	64,000	3.420	.025000000	90	8,100	9.487	729,000	4.481	.011111111
41	1,681	6.403	68,921	3.448	.024390244	91	8,281	9.539	753,571	4.498	.010989011
42	1,764	6.481	74,088	3.476	.023809524	92	8,464	9.592	778,688	4.514	.010869565
43	1,849	6.557	79,507	3.503	.023255814	93	8,649	9.644	804,357	4.531	.010752688
44	1,936	6.633	85,184	3.530	.022727273	94	8,836	9.695	830,584	4.547	.010638298
45	2,025	6.708	91,125	3.557	.022222222	95	9,025	9.747	857,375	4.563	.010526316
46	2,116	6.782	97,336	3.583	.021739130	96	9,216	9.798	884,736	4.579	.010416667
47	2,209	6.856	103,823	3.609	.021276596	97	9,409	9.849	912,673	4.595	.010309278
48	2,304	6.928	110,592	3.634	.020833333	98	9,604	9.899	941,192	4.610	.010204082
49	2,401	7.000	117,649	3.659	.020408163	99	9,801	9.950	970,299	4.626	.010101010
50	2,500	7.071	125,000	3.684	.020000000	100	10,000	10.000	1,000,000	4.642	.010000000

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS INTENCIONALMENTE EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS INTENCIONALMENTE EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS INTENCIONALMENTE EN BLANCO

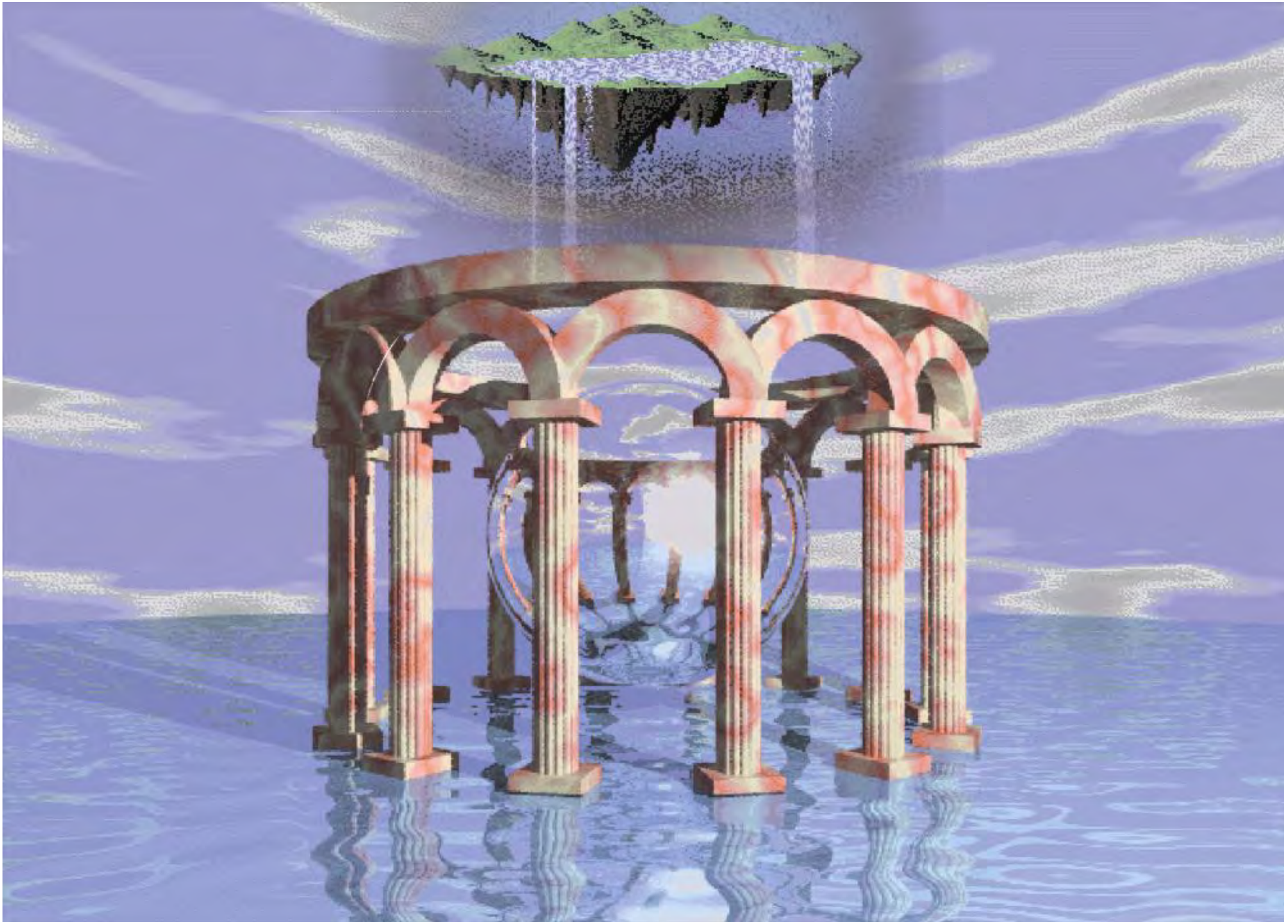
PÁGINA DE RESPUESTAS INTENCIONALMENTE EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

Geometría y Trigonometría



PÁGINA
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO



Los primeros conocimientos geométricos se limitaban a los que se tomaban de la naturaleza, y de ella se comenzaron a sacar las primeras formas tanto curvas como rectas.

CAPÍTULO I

- ESPACIO

›s conocimientos
›ncillo conjunto de
a Geometría fuera
›on de transcurrir
ultura griega.

se empezaron a
›íricos adquiridos
o, remplazando la
›on deducciones
›ar la Geometría

MESOPOTAMIA Y BABILONIA

En Mesopotamia, en una región situada entre el Tigris y el Eufrates, floreció la civilización babilonia, cuya antigüedad se remonta aproximadamente a 5,700 años.

En esa lejana época los babilonios inventaron la rueda, de donde provino quizás su afán por descubrir las propiedades de la circunferencia que los condujo a la conclusión de que la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro era igual a 3, un valor muy conocido que también aparece en el Antiguo Testamento (Primer Libro de los Reyes).

Los babilonios hallaron este valor considerando que la longitud de la circunferencia era un valor intermedio entre los perímetros de los cuadrados inscrito y circunscrito a una circunferencia.

Gracias a sus conocimientos de Astronomía sabían que el año tiene aproximadamente 360 días, por lo que dividieron la circunferencia en 360 partes iguales

EGIPTO Y GRECIA

Por otra parte, la base de la **civilización egipcia** fue la agricultura, y precisamente la aplicación de los conocimientos geométricos a la medida de la tierra dio origen a que esta parte de las Matemáticas recibiera el nombre de **Geometría**, concepto que significa **medida de la tierra.**

Los reyes de Egipto dividieron las tierras en parcelas, pero cuando se desbordaba el Nilo en sus periódicas crecidas arrastraba parte de esas tierras, por lo que los agrimensores tenían que rehacer las divisiones y calcular cuánto debía pagar el dueño de la parcela por concepto de impuesto, ya que éste era proporcional a la superficie cultivada.

Sin embargo, la necesidad de medir las tierras no fue el único motivo de los egipcios para estudiar las Matemáticas, pues sus sacerdotes aprovecharon la Geometría para aplicarla en la construcción.

La "Gran Pirámide" de Egipto se construyó hace más de veinte siglos, y un pueblo que emprendió una obra de tal magnitud debía poseer, sin lugar a dudas, extensos conocimientos de Geometría, pero también de Astronomía, pues se ha comprobado que, además de la precisión con que están determinadas sus dimensiones, la Gran Pirámide de Egipto está perfectamente orientada.

Hemos llegado a conocer la matemática egipcia principalmente a través de los papiros, que dejaron testimonio de la resolución de diversos problemas geométricos acerca, por ejemplo de las áreas del **triángulo isósceles**, el **trapecio isósceles**, y el **área del círculo**.

Los papiros muestran también un estudio referente a los cuadrados que hace pensar que los egipcios conocían algunos casos particulares de la propiedad del triángulo rectángulo, que más adelante inmortalizó a Pitágoras.

La Geometría de los egipcios era eminentemente empírica, ya que no se basaba en un sistema lógico deducido a partir de axiomas y postulados.

Por su parte, los grandes pensadores griegos no se conformaron con conocer las reglas y resolver "problemas particulares", sino que buscaron afanosamente explicaciones racionales de todas las cuestiones en general y de las geométricas en particular.

TALES DE MILETO

Es en **Grecia** donde comienza la Geometría como ciencia deductiva, aunque es probable que algunos matemáticos griegos como Tales, Herodoto y Pitágoras, entre otros, hayan viajado a Egipto para iniciarse en sus conocimientos geométricos, pero el gran mérito de los griegos es que a ellos se debe la transformación de la geometría en Ciencia deductiva.

Tales de Mileto (siglo VII a.C.) representa los comienzos de la Geometría como ciencia racional. Fue uno de los "siete sabios" y fundador de la Escuela jónica a la que pertenecieron Anaximandro, Anaxágoras y muchos otros.

En su edad madura Tales de Mileto se dedicó al estudio de la Filosofía y las Ciencias, especialmente la Geometría, llegando a resolver dichos problemas como la determinación de distancias inaccesibles; la igualdad de los ángulos de la base en el triángulo isósceles; el valor del ángulo inscrito y la demostración de los conocidos teoremas que llevan su nombre, relativos a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas.

EUCLIDES

Euclides (siglo IV a C.) escribió una de las obras más famosas de todos los tiempos: los **Elementos** que consta de 13 capítulos conocidos como "libros" y de la que se han hecho tantas ediciones que sólo la supera la **Biblia**.

Euclides construyó la Geometría partiendo de definiciones, postulados y axiomas con los cuales demostró teoremas que, a su vez, le sirvieron para demostrar otros teoremas. Cabe destacar que el edificio geométrico construido por Euclides ha sobrevivido hasta nuestros días.

A continuación se enlistan los trece capítulos o "libros" de la magna obra **Elementos** y los temas que trata cada uno de ellos:

Libro I. Relación de igualdad de triángulos. Teoremas sobre paralelas. Suma de los ángulos de un polígono. Igualdad de las áreas de triángulos o paralelogramos de igual base y altura. Teorema de Pitágoras.

Libro II. Conjunto de relaciones de igualdad entre áreas de rectángulos que conducen a la resolución geométrica de la ecuación de segundo grado.

Libro III. La Circunferencia, ángulo inscrito.

Libro IV. Construcción de polígonos regulares inscritos o circunscritos a una circunferencia.

Libro V. Teorema general de la medida de magnitudes bajo forma geométrica, hasta los números irracionales.

Libro VI. Proporciones. Triángulos semejantes.

Libro VII, VIII y IX. Aritmética: proporciones, máximo común divisor y números primos.

Libro X. Números inconmensurables bajo forma geométrica a partir de los radicales cuadráticos.

Libro XI y XII. Geometría del espacio y, en particular, relación entre volúmenes de prismas y pirámides; cilindro y cono; proporcionalidad del volumen de una esfera al cubo del diámetro.

Libro XIII. Construcción de los cinco poliedros regulares.

PITÁGORAS DE SAMOS

Pitágoras (siglo VI a. C.), de quien se dice fue discípulo de Tales, se apartó de la escuela jónica para fundar en Crotona, Italia, la escuela pitagórica.

Ya dijimos que los egipcios conocieron la propiedad del triángulo rectángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades, en los que se verifica la relación $5^2 = 3^2 + 4^2$, pero el descubrimiento de la relación $a^2 = b^2 + c^2$ para cualquier triángulo rectángulo y su demostración se deben indiscutiblemente a Pitágoras.

Asimismo se atribuye a la escuela pitagórica la demostración de la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo y la construcción geométrica del polígono estrellado de cinco lados.

ARQUÍMEDES DE SIRACUSA

Arquímedes (287-212 a.C.) estudió en Alejandría. Poseedor de una mentalidad práctica y un genio técnico que lo llevó a investigar problemas de orden físico y resolverlos por métodos nuevos.
Debido a esto, después de fuertes disputas con los euclidianos, se retiró a Siracusa donde puso sus descubrimientos al servicio de la técnica.

Calculó un valor más aproximado de π, el área de la elipse, el volumen del cono, de la esfera, etc. Estudió la llamada espiral de Arquímedes que sirve para la trisección del ángulo.

HERÓN DE ALEJANDRÍA

Herón (siglo II d.C.) demostró la fórmula que lleva su nombre para hallar el área de un triángulo en función de sus lados.

APOLONIO DE PÉRGA

Apolonio (260-200 a.C.) estudió ampliamente las secciones cónicas que dieciocho siglos después ayudarían a Kepler en sus trabajos de Astronomía, determinando casi todas sus propiedades. En su obra se encuentran ya las ideas que condujeron a Descartes a inventar la Geometría Analítica, veinte siglos después.

PLATÓN

En la primera mitad del siglo IV, a. C., se inició en Atenas un movimiento científico a través de la Academia de Platón. Para **Platón** la Matemática no tiene una finalidad práctica, sino que simplemente se cultiva con el único fin de conocer. Por esta razón se opuso a las aplicaciones de la Geometría, a la que dividió en elemental y superior. La **Geometría elemental** comprendía todos los problemas que se podían resolver con regla y compás, y la **geometría superior** estudiaba los tres problemas más famosos de la Geometría antigua no resolubles por la regla y el compás:

1. **La cuadratura del círculo.** Se trata, como su nombre lo indica, de construir el lado de un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado, utilizando solamente la regla y el compás.

2. **La trisección del ángulo. El** problema de dividir un ángulo en tres partes iguales utilizando solamente la regla y el compás sólo puede resolverse en algunos casos particulares.

3. **La duplicación del cubo. Este** problema consiste en hallar, mediante una construcción geométrica en la que sólo se utilice la regla y el compás, un cubo que tenga un volumen del doble de un cubo dado.

Estos tres problemas se pueden resolver, utilizando la regla y el compás, con toda la aproximación que se desee y si se busca la precisión, utilizando curvas especiales. No se trata por consiguiente de problemas qua q<e no se hayan resuelto en la práctica, sino de problemas de importancia puramente teórica.

GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

Los Elementos de Euclides fueron considerados como una obra en la que se sigue el método axiomático, ya que partiendo de proposiciones previamente establecidas (definiciones, axiomas y postulados) se deduce toda la Geometría en una forma lógica.

Posteriormente se ha podido constatar que tiene varias fallas lógicas, es decir, no se cumplen en el texto todas las exigencias que impone la lógica.

Sin embargo, todos los defectos que puedan señalarse resultan insignificantes comparados con su extraordinario mérito de haber construido una ciencia deductiva a partir de conocimientos empíricos.

De los cinco postulados de Euclides, el V es el que más llamó la atención:

"Por un punto exterior a una recta pasa una y solamente una paralela".

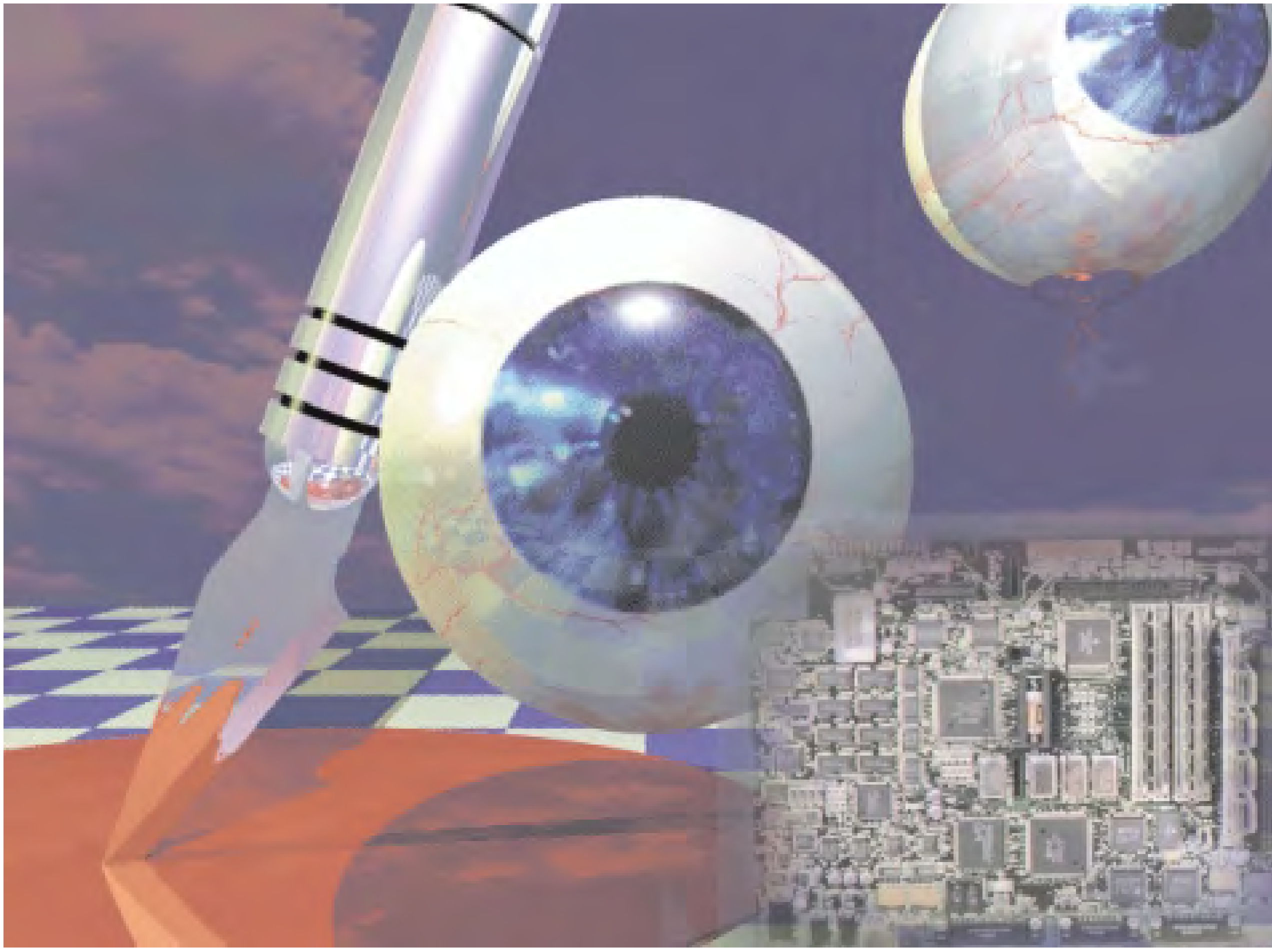
Durante veinte siglos se trató de "demostrar" este postulado, es decir, de convertirlo en teorema, pero finalmente se pensó que si de verdad era un postulado, el hecho de negarlo, aceptando los demás, no debía conducir a contradicción alguna, y de acuerdo con esto procedieron Lobatchevsky (1793-1856) y Riemann (1826-1866).

La Geometría de Riemann sustituye el postulado V por el siguiente:

"Por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela".
Y la Geometría de Lobatchevsky lo sustituye por éste:

"Por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas que separan las infinitas rectas no secantes de las infinitas secantes".

Así, basados en estos nuevos postulados construyeron lo que denominaron **geometrías no euclidianas.**



Las diversas formas de las cosas, los animales, los vegetales y del hombre mismo, son amplios campos de estudio para la Geometría, pues las figuras se presentan en cada grupo mencionado.

CAPÍTULO II

GENERALIDADES

En cualquier ciencia, y principalmente en la Geometría, se aplica el método deductivo, que consiste en encadenar conocimientos que se suponen verdaderos con el objetivo de obtener nuevos conocimientos o nuevas proposiciones como consecuencia lógica de otras anteriores. Sin embargo, no todas las propiedades son consecuencia de otras, pues algunas se aceptan como ciertas por sí mismas, tal es el caso de los **axiomas** y los **postulados.**

Por otra parte, están las proposiciones que exponen con claridad y precisión los caracteres de una cosa, y una característica de la Geometría moderna consiste precisamente en evitar la definición de conceptos primarios que tengan poco o ningún sentido. Así, por ejemplo, definiciones tan conocidas de Euclides como: "Punto es lo que no tiene partes", "Línea es una longitud sin anchura", etc., se basan en conceptos (partes, anchura) cuya definición es más compleja que lo que se trata de definir.

CONCEPTOS GEOMÉTRICOS

El **axioma** es una proposición tan sencilla y obvia que se admite sin requerir demostración alguna, por ejemplo: "El todo es mayor que cualquiera de sus partes".

Un **postulado** es una proposición no tan obvia como el axioma, pero que tampoco requiere demostración, por ejemplo: "Hay infinitos puntos".

El teorema es una proposición que puede ser demostrada por medio de un conjunto de razonamientos que conducen a la evidencia de la verdad de la proposición.

El **enunciado** de todo teorema resalta dos partes: la hipótesis, que es lo que se supone, y la tesis, que es lo que se quiere demostrar, por ejemplo: "La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale dos rectos", donde vemos la **hipótesis**: "*A*, *B* y *C* son los ángulos interiores de un triángulo", así como la tesis: "La suma de los ángulos *A*, *B* y *C* vale dos rectos."

En la **demostración** se utilizan los conocimientos adquiridos hasta aquel momento, enlazados de una manera lógica.

El **corolario** es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo. Por ejemplo, del teorema: "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos", se deduce el siguiente corolario: "La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo vale un recto".

Todo teorema tiene su **recíproco** cuyas hipótesis y tesis son, respectivamente, la tesis y la hipótesis del otro teorema que, en este caso, se llama teorema directo. Por ejemplo, el recíproco del teorema: "La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale dos rectos", dice: "Si la suma de los ángulos interiores de un polígono vale dos rectos, el polígono es un triángulo".

En este **teorema recíproco** la hipótesis es: "Tenemos un polígono cuyos ángulos interiores suman dos rectos", y la tesis dice: "El polígono es un triángulo".

No siempre los teoremas recíprocos son verdaderos, y así, por ejemplo, un teorema dice: "Las diagonales de un cuadrado son iguales" y su recíproco dice: "Si las diagonales de un paralelogramo son iguales, la figura es un cuadrado".

Este recíproco es falso porque la figura puede ser un rectángulo que también tiene sus diagonales iguales.

El **lema** es una proposición que sirve de base para la demostración de un teorema. Es como un "teorema preliminar" a otro que se considera más importante.

Por ejemplo, para demostrar el volumen de una pirámide se tiene que demostrar antes el lema que dice: "Un prisma triangular se puede descomponer en tres tetraedros equivalentes".

En la actualidad se ha prescindido de la palabra lema en la mayoría de los casos y se le suele llamar **teorema o teorema preliminar.**

El escolio es una observación acerca de un teorema previamente demostrado. Por ejemplo, después de demostrar el teorema que dice: "En una misma circunferencia o en circunferencias iguales a mayor arco corresponde mayor cuerda" (considerando arcos menores que una semicircunferencia), se podría añadir, como escolio: "Si no se consideran arcos menores que una semicircunferencia, a mayor arco corresponde menor cuerda".

Actualmente la palabra **escolio** se sustituye por **observación.**

Un **problema** es una proposición en la que se pide construir una figura que reúna ciertas condiciones (los problemas gráficos) o bien calcular el valor de alguna magnitud geométrica (los problemas numéricos).

Por ejemplo, en un problema gráfico se pide construir la circunferencia que pasa por tres puntos dados, y en un problema numérico se solicita calcular la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 6 cm.

LÍNEA

Las **líneas** son tipos especiales de conjuntos de puntos, y entre las más comunes están:

La **línea recta.** Una imagen de este conjunto de puntos puede ser un rayo luminoso, el borde de una regla, etc.



Figura 1

Una recta geométrica se extiende sin límite en dos sentidos. No comienza ni termina. Y aquí podemos admitir los siguientes postulados:

Por **dos puntos** pasa una recta y solo una.

Dos rectas no pueden tener más que un solo punto común.

La **recta** suele designarse por dos de sus puntos con el símbolo <–> encima. Así, la recta *AB* (Fig. 1) se representa *AB*.

La **línea curva**. Una imagen de este conjunto de puntos es la circunferencia. Actualmente se considera que las líneas curvas pueden o no tener trazos rectos (Fig. 2).



Figura 2

Un tipo especial de curva es la línea quebrada formada por trazos rectos. Aunque resulta extraño llamar curva a una línea formada por sus trazos rectos, es recomendable acostumbrarse a en a esta nueva nomenclatura dada la utilidad que significa en estudios más avanzados.

Otro tipo especial de esta línea es la curva simple cerrada, que se puede trazar de tal manera que empieza y termina en un mismo punto que es el único que se toca dos veces. Este tipo de curva tiene un interior y un exterior y se puede admitir el siguiente postulado:

Al unir un punto interior *A* con uno exterior *B* (Fig. 3) de una curva simple cerrada se corta dicha curva.



Figura 3

Una línea tiene una sola dimensión: longitud.

EL PUNTO

Por otra parte, ya hemos dicho que el punto no se define, pues la idea de punto está sugerida por la huella que deja en el papel un lápiz bien afilado.

Un **punto geométrico es** imaginado tan pequeño que **carece de dimensión.**

Por tanto admitimos el siguiente postulado:

"Hay infinitos puntos".

Los puntos suelen designarse por medio de letras mayúsculas y se representan con un trazo, un circulito o una cruz. Así, decimos el punto *A*; el punto *B*; etc. (Fig. 4).

X •

A *B*

Figura 4

CUERPOS GEOMÉTRICOS

Son **cuerpos físicos** todas las cosas que nos rodean (libros, lápices, mesas, etc.) y que tienen forma, color, están hechos de una sustancia determinada y ocupan un lugar en el espacio. Siguiendo esquemas ideales de ciertos cuerpos físicos, la Geometría considera solamente su forma y su tamaño, con lo que tenemos los **cuerpos geométricos** o **sólidos** como son los prismas, conos, esferas, etc.

Los sólidos tienen tres dimensiones: **largo**, **ancho** y **alto**.

SEMIRECTA

Si sobre una recta señalamos un punto *A*, se le llama **semirrecta** al conjunto de puntos formado por el punto *A* (origen) y todos los que le siguen o le preceden.

Una semirrecta se representa por el origen y otro punto de la misma con el símbolo - encima.

La semirrecta de origen *C* y otro punto *D* (Fig. 5) se representa: $\overrightarrow{CD}$.

C X *D*

Figura 5

SUPERFICIES

Las **superficies** son los límites que separan a los cuerpos del espacio que los rodea.
Las superficies tienen dos dimensiones largo y ancho.

Por ejemplo, *ABCD* es una parte conocida como **cara** de la superficie (Fig. 6).

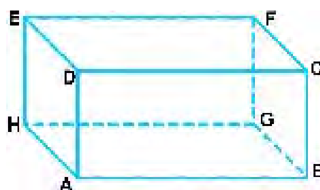


Figura 6

SEGMENTO

Cuando sobre una recta señalamos dos puntos *A* y *B*, se le llama **segmento** al conjunto de puntos comprendidos entre *A* y *B* más estos dos puntos o extremos del segmento. Generalmente al primero se le llama origen y al otro, extremo.

Aquí admitimos el postulado:
La distancia más corta entre dos puntos es el segmento que los une.

Un segmento se designa por las letras de sus extremos y con un trazo encima; por ejemplo, el segmento *EF* :

(Fig. 7) se representa $\overline{EF}$.

X X
E *F*

Figura 7

PLANO

En Geometría el **plano** es una superficie (una pared, un piso, etc.) formada por conjuntos parciales de puntos infinitos.

En Matemáticas al plano se le asigna una extensión ilimitada; suele representarse por un paralelogramo, como el *ABCD* en la figura 8, y se nombra por tres de sus puntos no alineados o por una letra griega. Así, el plano de la Fig. 8 se nombra *ABC*, o plano a.

En los siguientes postulados resaltan dos propiedades características de los planos:

Por tres puntos no alineados pasa un plano y solamente uno.

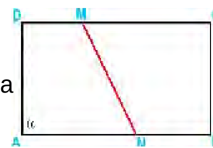


Figura 8

Si una recta tiene dos puntos comunes con un plano, toda la recta está contenida en el plano.

SEMIPLANO



Toda recta *MN* (Fig. 8) de un plano divide a éste en dos regiones llamadas semiplanos. Cada punto del plano pertenece a uno de los semiplanos, excepto los puntos de la recta, que pertenecen a ambos.

Se admite este postulado acerca de la separación del plano:
Dos puntos de un mismo semiplano determinan un **segmento** que no corta a la recta que da origen a los dos semiplanos; y **dos puntos** de distinto semiplano determinan un **segmento** que corta a la recta.

INTERSECCIÓN DE PLANOS

En cuanto a la **intersección de planos** se admite el siguiente postulado:
Si los planos tienen un punto común tienen una recta común.

En este caso se dice que los dos planos se cortan y la recta común es la recta de intersección. En la figura 9 vemos que la recta *RS* es la intersección de los dos planos *ABC* y *NMP*.

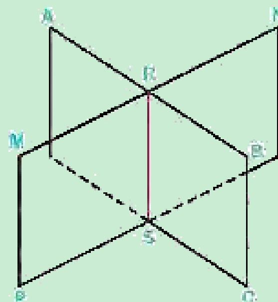


Figura 9

POLIGONALES CÓNCAVAS Y CONVEXAS

A las líneas quebradas se les llama también **poligonales** y, en este caso, los segmentos que las forman reciben el nombre de **lados** y a los puntos comunes de los lados se les llama **vértices**.

Una **poligonal** es **convexa** (Fig. 10) cuando, al prolongar en los dos sentidos cualquiera de sus lados, toda la poligonal queda en un mismo semiplano. Y es **cóncava** (Fig. 11) cuando al prolongar en los dos sentidos alguno de sus lados, parte de la poligonal queda en un semiplano y parte en el otro.



Figura 11



Figura 10

MEDIDA DE SEGMENTOS

Un **segmento se mide** para compararlo con otro elegido como una unidad, para lo cual se usan las unidades de longitud del sistema métrico decimal, del sistema inglés o de cualquier otro.

Los instrumentos más comunes para medir son las reglas graduadas, las cintas, etc., de modo que para medir el segmento *AB* (Fig. 12) se hace coincidir una división cualquiera (generalmente el cero) de la regla con uno de los extremos del segmento y se observa la división en mayor coincidencia con el otro extremo. La diferencia entre ambas lecturas nos dará el valor de la longitud del segmento.

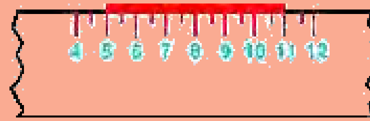


Figura 12

Aquí tenemos:

Extremo *B* = 10.5 cm

Extremo *A* = 5.0 cm

Longitud $\overline{AB}$ = 5.5 cm

También se puede medir utilizando un compás con ambas puntas metálicas, con el que se toma la longitud del segmento (Fig. 13) y se traslada esta abertura sobre una regla (Fig. 14).

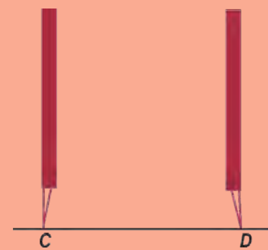


Figura 13

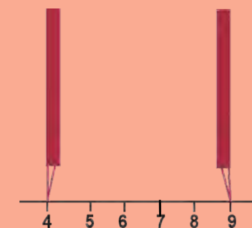


Figura 14

OPERACIONES CON SEGMENTOS

Para realizar **operaciones con segmentos** se puede proceder gráficamente de esta manera:

a) Suma de segmentos. Para sumar los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, procedemos así:

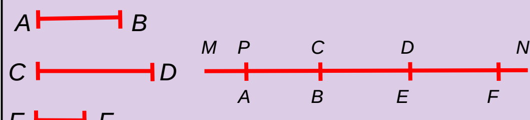


Figura 15

Sobre una recta indefinida $\overleftrightarrow{MN}$ (Fig. 15) y a partir de un punto cualquiera *P*, se llevan los segmentos a sumar, en un sentido determinado, uno a continuación de otro, haciendo que el extremo de cada sumando coincida con el origen del siguiente. El segmento $\overline{AF}$, que tiene por origen el del primero y por extremo el del último, representa la suma.

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \overline{AF}$$

b) Sustracción de segmentos. Para obtener la diferencia de los segmentos $\overline{AB} - \overline{CD}$ se procede así:

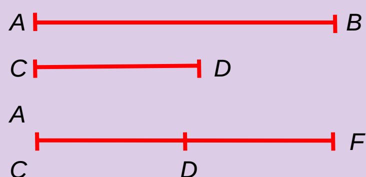


Figura 16

Sobre el segmento minuendo $\overline{AB}$ (Fig. 16) se lleva el segmento sustraendo $\overline{CD}$,de modo que coincidan A y C.

El segmento resultante, $\overline{DB}$ representa la diferencia:

$$\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{DB}$$

c) Multiplicación de un segmento por un número real.

El producto del segmento $\overline{AB}$ por un número natural, 4 por ejemplo, se obtiene llevando sobre una recta cualquiera $\overleftrightarrow{MN}$ (Fig. 17) y a partir de un punto cualquiera de ella, *P*, el segmento *AB*, tantas veces como indica el número (4 en este caso), por el cual se va a multiplicar. Así:

$$\overline{PR} = 4\,\overline{AB}$$

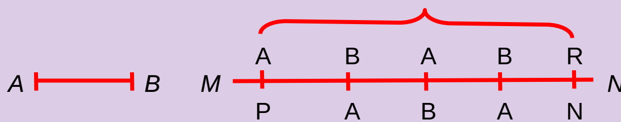


Figura 17

d) División de un segmento en un número de partes iguales. Siendo el segmento $\overline{AB}$ se quiere dividir en 8 partes iguales.

A partir de uno de los extremos del segmento $\overline{AB}$ (Fig. 18) se traza una semirrecta $\overline{AC}$, con cualquier inclinación. Sobre $\overrightarrow{AC}$ y a partir de *A*, se lleva un segmento de cualquier longitud *b* tantas veces (8 en nuestro caso) como indica el divisor. El extremo del último segmento *b* se une con *B* y se trazan peralelas al segmeto $\overline{B8}$ por los puntos 1, 2, 3, etc., con lo que tendremos:

$$x = \frac{\overline{AB}}{8}$$

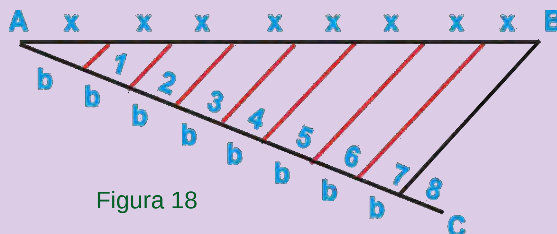


Figura 18

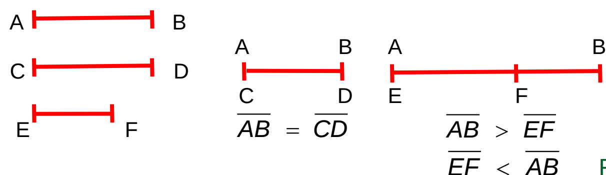
Más adelante explicaremos la razón para esta construcción.

Observemos que las operaciones anteriores se pueden hacer midiendo los segmentos y operando con las medidas obtenidas.

IGUALDAD Y DESIGUALDAD DE SEGMENTOS

Si al superponer dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (Fig. 19) se pueden hacer coincidir los dos extremos del primero con los del segundo, son segmentos iguales (=).

Obviamente, cuando no se cumple dicha condición se dice que **son segmentos desiguales**, y de éstos uno es mayor que (>) o menor que (<) el otro. Así, $\overline{AB} > \overline{EF}$ y $\overline{EF} < \overline{AB}$ (Fig. 19).



$\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{AB} > \overline{EF}$

$\overline{EF} < \overline{AB}$

Figura 19

ERROR DE MEDIDA

En la práctica las medidas generalmente son aproximadas, y a la diferencia entre la verdadera longitud del segmento y el valor obtenido se le llama **error de medida**, el cual puede darse por exceso (al tomar un valor mayor que el verdadero) o por defecto (al tomar un valor menor que el verdadero). Un error se origina por las imperfecciones de nuestros sentidos, de los instrumentos que empleamos o por otras causas diversas.

GEOMETRÍA

La **Geometría elemental** es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades intrínsecas de las figuras, es decir, las que no se alteran con el movimiento.

La **Geometría** plana estudia las figuras contenidas en un plano (es decir, de dos dimensiones) y la **Geometría del espacio** estudia los cuerpos geométricos (de tres dimensiones).

Otras especialidades dentro del campo de la Matemática son la Geometría analítica, la Geometría descriptiva y la Geometría proyectiva.

Teorema

"En dos poligonales convexas, de extremos comunes, la envolvente es mayor que la envuelta" (Fig. 20).

Hipótesis: *ABCD*, poligonal envolvente
AFED, poligonal envuelta
A y *D*, extremos comunes

Tesis: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} > \overline{AF} + \overline{FE} + \overline{ED}$

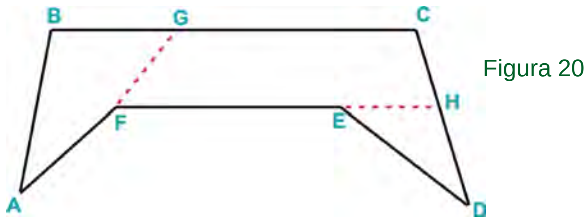


Figura 20

Construcción auxiliar: Prolonguemos $\overline{AF}$ hasta cortar $\overline{BC}$ en G, y $\overline{FE}$ hasta cortar $\overline{CD}$ en H.

En *ABGF*:

$\overline{AB} + \overline{BG} > \overline{AF} + \overline{FG}$ (1)

En *FGCHE*:

$\overline{FG} + \overline{GC} + \overline{CH} > \overline{FE} + \overline{EH}$ (2)

En *EHD*:

$\overline{EH} + \overline{HD} > \overline{DE}$ (3)

Postulado de la menor distancia entre dos puntos.

Al sumar ordenadamente (1), (2) y (3) tendremos:

$$\overline{AB} + \overline{BG} + \overline{FG} + \overline{GC} + \overline{CH} + \overline{EH} + \overline{HD} > \overline{AF} + \overline{FG} + \overline{FE} + \overline{EH} + \overline{ED} \quad (4)$$

Pero:

$\overline{BG} + \overline{GC} = \overline{BC}$ (5) Suma de segmentos

$\overline{CH} + \overline{HD} = \overline{CD}$ (6) Suma de segmentos

Sustituimos (5) y (6) en (4) y tenemos:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{FG} + \overline{EH} > \overline{AF} + \overline{FG} + \overline{FE} + \overline{EH} + \overline{ED} \quad (7)$$

Simplificando: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} > \overline{AF} + \overline{FE} + \overline{ED}$

que es lo que se quería demostrar.

EJERCICIOS

1. Indica cuál es el axioma:

a) En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
b) La suma de las partes es igual al todo.

c) En todo triángulo isósceles, los ángulos en la base son iguales.

R. (*b*)

2. Señalar cuál es el postulado:

a) El todo es mayor que cualquiera de las partes.

b) Todo punto en la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.

c) Hay infinitos puntos.

R. (*c*)

3. Cuál es el teorema:

a) Las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio.

b) Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.

c) La parte es menor que el todo.

R. (*a*)

4. Dibuja los siguientes segmentos:

a) $\overline{AB} = 1.5$ cm

b) $\overline{CD} = 2$ cm

c) $\overline{EF} = 3$ cm y sùmalos gràficamente.

5. Dibuja estos segmentos:

$\overline{MN} = 8$cm; $\overline{PQ} = 3$cm y réstalos gráficamente.

6. Multiplica el segmento $\overline{AB} = 2$ cm, por tres, gráficamente.

7. Divide el segmento $\overline{AB} = 9$ cm en tres partes iguales, gráficamente.

8. Si B es el punto medio de $\overline{AD}$, C es el punto medio de $\overline{BD}$ y $\overline{AD}$ = 20 cm; encuentra AB, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.

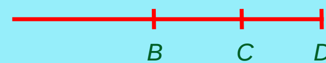


Figura 21

R. $\overline{AB} = 10$cm; $\overline{DC} = \overline{BC} = 5$cm

9. Demostrar que: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} > \overline{AG} + \overline{GF} + \overline{FE}$

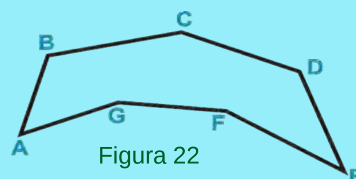


Figura 22

10. SI: $\overline{MN} = \overline{QR} = 2\overline{PQ}; \overline{NP} = \overline{MN} + 1$ y $\overline{MR} = 50$ cm.

Hallar: $\overline{MN}, \overline{NP}, \overline{PQ}$ y $\overline{QR}$

R. $\overline{MN} = 14$ cm
$\overline{NP} = 15$ cm
$\overline{PQ} = 7$ cm
$\overline{QR} = 14$ cm



Figura 23

11. Demostrar: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} > \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HE}$.

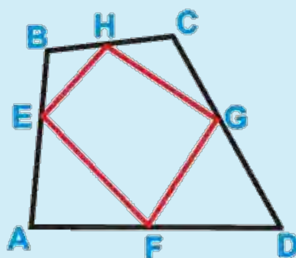


Figura 24

12. Si $\overline{AD} = \overline{DC}$ y $\overline{AB} = \overline{BC}$, demostrar que $\overline{AB} > \overline{AD}$.

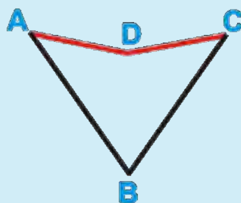


Figura 25

13. Demostrar que la suma de dos segmentos que se cortan es mayor que la suma de los segmentos que unen sus extremos.

14. Demostrar que si, desde un punto interior de un triángulo, se trazan segmentos a los vértices, la suma de dichos segmentos será mayor que la semisuma de los lados.

15. Si E es la intersección de $\overline{CD}$ con $\overline{AB}$ y $\overline{CG} = \overline{GD}, \overline{CF} = \overline{FD}, \overline{CE} = \overline{DE}$; demostrar que: $\overline{CG} > \overline{CF} > \overline{CE}$:

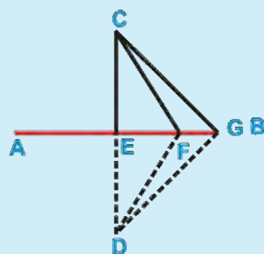


Figura26

16. Demostrar que: $\overline{AB} + \overline{CD} > \overline{AF} + \overline{FC} + \overline{DE} + \overline{EB}$

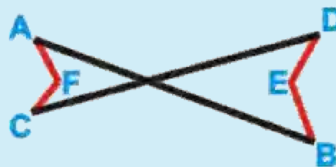


Figura 27

17. Demostrar que el perímetro del $\Delta\, ABC$ es mayor que el perímetro del $\Delta\, ADC$.

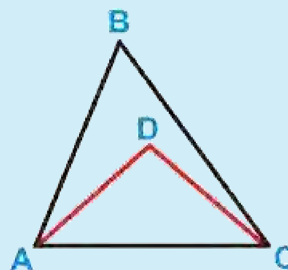


Figura 28

18. Demostrar que el perímetro del $\Delta\, ABC$ es mayor que el perímetro del D *EDF*.

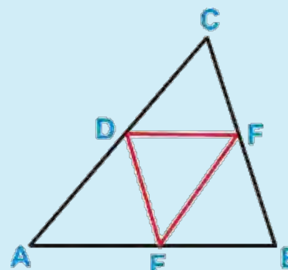


Figura 29

19. Demostrar que el perímetro del rectángulo *ABCD* es mayor que el perímetro del rectángulo *MNPQ*

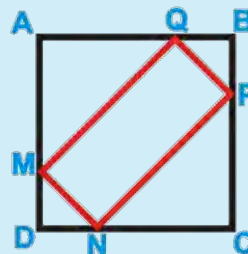


Figura 30

20. Demostrar que el perímetro del rectángulo *ABDE* es mayor que el perímetro del triángulo *AC E*

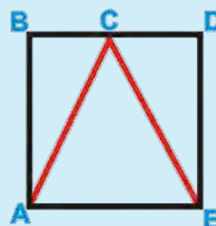


Figura 31

Algunos pueblos de la antigüedad, dividieron el círculo en 360 partes, tomaron por base la división del año en 360 días, de esta forma les era fácil dividir el círculo y la circunferencia en 6 partes iguales, siendo éste el fundamento del cómputo sexagesimal.

CAPÍTULO III

LOS ÁNGULOS

Un **ángulo** es la abertura formada por dos semirrectas o lados con un mismo origen llamado "vértice". El ángulo se designa por una letra mayúscula situada en el vértice, por una letra griega dentro del ángulo, y también podemos usar tres letras mayúsculas de manera que quede en medio la letra situada en el vértice del ángulo. En las siguientes figuras se representan los ángulos *A*, α y *MNP*, o *PNM*.

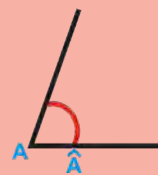


Figura 32

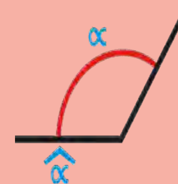


Figura 33

Bisectriz

Por otra parte, la *bisectriz* de un ángulo es la semirrecta que tiene como origen el vértice y divide al ángulo en dos ángulos iguales.

La semirrecta *NQ* es la bisectriz del *N* si $\angle$ *MNQ* =$\angle$*QNP*.

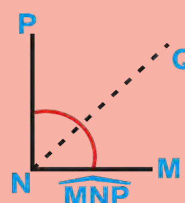


Figura 34

MEDIDA DE ÁNGULOS

Para **medir un ángulo** debe compararse con otro que se toma como unidad y desde la antigüedad se ha tomado como unidad el grado **sexagesimal**, el cual se obtiene siguiendo este procedimiento:

Se considera una circunferencia dividida en 360 partes iguales y un ángulo de un grado que tiene el vértice en el centro y sus lados pasan por dos divisiones consecutivas. A cada división de la circunferencia se le llama grado y cada grado se considera dividido en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos.

Los símbolos para estas unidades son:

grado °; minuto ' ; segundo "

Por ejemplo, si un ángulo *ABC* mide 38 grados 15 minutos 12 segundos, se escribe: 38°15' 12".

Sistema centesimal. En tiempos más recientes se optó por considerar una circunferencia dividida en 400 partes iguales llamadas "grados centesimales" donde cada minuto contiene 100 "segundos centesimales". Por ejemplo, si un ángulo *ABC* mide 72 grados 50 minutos 18 segundos centesimales se escribe:

$72^g\ 50^m\ 18^s$

Sistema circular. Aquí se usa como unidad el "radián", que es el ángulo cuyos lados comprenden un arco con una longitud igual al radio de la circunferencia.

Si la longitud del arco *AB* (Fig. 35) es igual a *r* , entonces ∠ *AOB* = 1 radián.

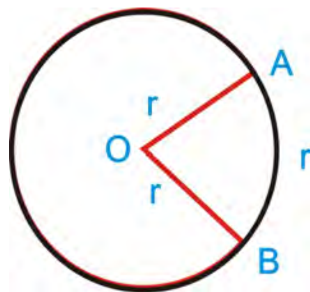


Figura 35

Como la longitud de una circunferencia es 2π radios, resulta que un ángulo de 360° equivale a 2π radianes, es decir: 6.28 radianes, dándole a p el valor de 3.14.

Un radián equivale a 57°18' (lo que se obtiene dividiendo 360° entre 2π).

A menos que se advierta sobre otra cosa, aquí nos basaremos en el sistema sexagesimal.

RELACIÓN ENTRE GRADO SEXAGESIMAL Y RADIÁN

Si representamos por *S* la medida de un ángulo en grados sexagesimales y por *R* la medida del mismo ángulo en radianes, podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{S}{360^0} = \frac{R}{2\pi}; \qquad \pi = 3.14$$

Simplificando: $\frac{S}{180^0} = \frac{R}{\pi}$

Expresar en radianes un ángulo de 90°:

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}; \qquad \frac{90}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\therefore\ R = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$$

y como π =3.14, también podemos escribir:

$$R. = \frac{3.14}{2} = 1.57$$

2) Expresar en grados sexagesimales un ángulo de 6.28 radianes:

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}; \quad \frac{S}{180} = \frac{6.28}{3.14}; \ \pi = 3.14;$$

$$\therefore\ S = \frac{180 \times 6.28}{3.14}$$

$$\therefore\ S = 360°$$

ÁNGULOS ADYACENTES

Los **ángulos adyacentes** están formados de manera que un lado es común y los otros dos pertenecen a la misma recta.



Figura 36

Ejemplo

$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, están sobre la misma recta $\overrightarrow{AB}$ (Fig. 36); $\overrightarrow{OC}$ es común.

∴ ∠ *AOC* y ∠ *BOC* son ángulos adyacentes.

ÁNGULO RECTO

El **ángulo recto** mide 90° (Fig. 37).

∠ *AOB* = 1 ∠ recto = 90°.

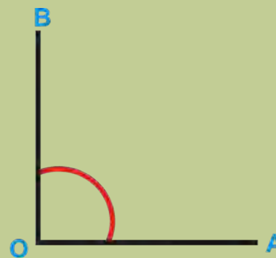


Figura 37

ÁNGULO LLANO

Un **ángulo llano** es aquel (Fig. 38) en el cual un lado es la prolongación del otro y mide 180°.

∠ *MON* = 1 ∠ llano = 180°



Figura 38

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Al sumar dos **ángulos complementarios** dan como resultado un ángulo recto, es decir de 90°.

Ejemplo

Si $\angle AOB = 60°, \angle BOC = 30°$

Sumando:

$\angle AOB + \angle BOC = 90°$ y los ángulos *AOB* y *BOC* son complementarios.

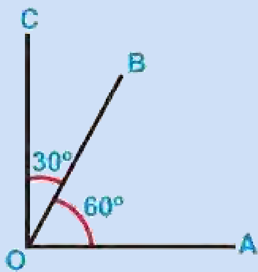


Figura 39

Complemento de un ángulo

Se llama **complemento de un ángulo** a lo que le falta a éste para valer un ángulo recto.

El complemento del $\angle AOB$ (Fig. 39) es 30° y el complemento del $\angle BOC$ es 60°.

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Los **ángulos suplementarios** son aquellos que sumados valen dos ángulos rectos, o sea, 180°.

Ejemplo

Si $\angle MON = 120°; \angle NOP = 60°$

Sumando:

$\angle MON + \angle NOP = 180°$

y los ángulos *MON* y *NOP* son suplementarios.

Suplemento de un ángulo

El **suplemento de un ángulo** es lo que le falta al ángulo para valer dos ángulos rectos.

El suplemento del $\angle MON$ (Fig. 40) es 60° y el del $\angle NOP$ es 120°.

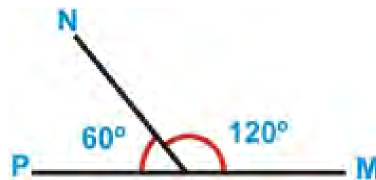


Figura 40

Teorema

"Dos ángulos adyacentes son suplementarios".

Hipótesis: $\angle AOC$ y $\angle BOC$ son ángulos adyacentes (Fig. 41).

Tesis: $\angle AOC + \angle BOC = 180°$

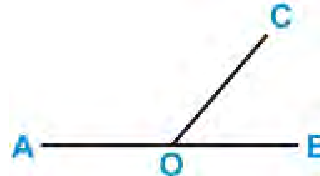


Figura 41

Demostración:

$\angle AOC + \angle BOC = \angle BOA$ (1)
(por suma de ángulos)

$\angle BOA = 180°$ (2)
(por ángulo llano)

Luego: $\angle AOC + \angle BOC = 180°$, por el axioma que dice: Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí (carácter transitivo de la igualdad).

ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

Los ángulos opuestos por el vértice son dos ángulos tales que los lados de uno de ellos son las prolongaciones de los lados del otro.

En la figura 42 son opuestos por el vértice:

$\angle AOC$ y $\angle BOD$
$\angle AOD$ y $\angle BOC$

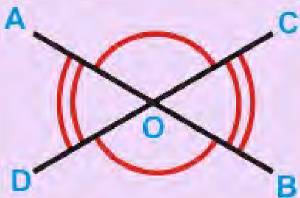


Figura 42

Teorema

"Los ángulos opuestos por el vértice son iguales".

Hipótesis: $\angle AOC$ y $\angle BOC$ son opuestos por el vértice (Fig. 43).

Tesis: $\angle AOD = \angle BOC$

Demostración:

$\angle AOD + \angle AOC = 2R$

(por ser adyacente).

trasponiendo $\angle AOC$:

$\angle AOD = 2R - \angle AOC$ (1)

$\angle BOC + \angle AOC = 2R$ Adyacentes;

trasponiendo $\angle AOC$:

$\angle BOC = 2R - \angle AOC$ (2)

Comparando las igualdades (1) y (2):

$\angle AOD = \angle BOC$ Carácter transitivo de la igualdad.

Análogamente se demuestra que:

$\angle AOC = \angle BOD$

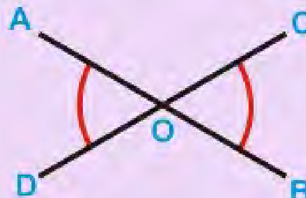


Figura 43

ÁNGULOS CONSECUTIVOS

Dos **ángulos consecutivos** tienen un lado común que separa a los otros dos, y varios ángulos son consecutivos si el primero es consecutivo del segundo, éste del tercero y así sucesivamente.

Ejemplo

Los ángulos *COD* y *DOE* (Fig. 44) son consecutivos.

Los ángulos *AOB* , *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOF* y *FOA* son consecutivos.

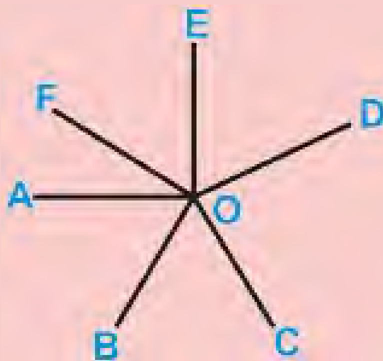


Figura 44

Teorema 1

"Los ángulos consecutivos formados a un lado de una recta, suman 180°".

Hipótesis:

$$\angle AOD, \angle DOC \text{ y } \angle COB$$

son ángulos consecutivos formados a un lado de la recta *AB* (Fig. 45).

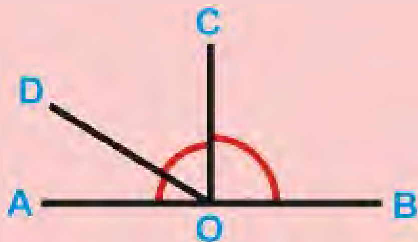


Figura 45

Tesis:

$$\angle AOD + \angle DOC + \angle COB = 180^0$$

Demostración:

$\angle AOD + \angle DOC = 180^0$ (1) Adyacentes

Pero:

$\angle DOB = \angle DOC + \angle COB$ (2) Suma de ángulos

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$\angle AOD + \angle DOC + \angle COB = 180^0$$

Teorema 2

"La suma de los ángulos consecutivos alrededor de un punto, vale cuatro ángulos rectos".

Hipótesis:

$\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOE$ *y* $\angle EOA$ (Fig. 31) son ángulos consecutivos alrededor del punto O .

Tesis:

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 4R$$

Construcción auxiliar: Prolonguemos un lado cualquiera, por ejemplo BO , de manera que el $\angle DOE$ quede dividido en $\angle DOM$ y $\angle$MOE tales que $\angle$DOM + $\angle MOE = \angle DOE$.

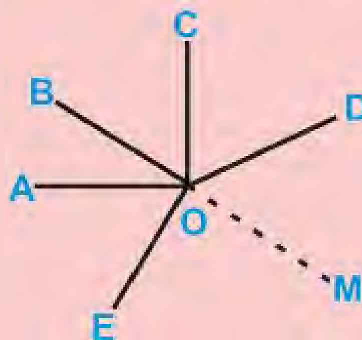


Figura 46

Demostración:

$\angle BOC + \angle COD + \angle DOM = 2R$ (1) Consecutivos a un lado de una recta.

$\angle AOB + \angle EOA + \angle MOE = 2R$ (2) La misma razón anterior

Sumando miembro por miembro las igualdades (1) y (2):

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle EOA + \angle DOM + \angle MOE = 4R \quad (3)$$

Pero:

$\angle DOM + \angle MOE = \angle DOE$ (4) Suma de ángulos

Sustituyendo (4) en (3):

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle EOA + \angle DOE = 4R$$

que es lo que se quería demostrar

EJERCICIOS

1. Hallar el ángulo que es igual a su complemento. **R.** 45º

2. Hallar el ángulo que es el doble de su complemento. **R.** 60º

3. Hallar el ángulo que es igual a la mitad de su complemento. **R.** 30º

4. Expresa los siguientes ángulos en el sistema sexagesimal:
a) 3.14 rad **R.** 180º
b) 9.42 rad 540º

5. Expresa los siguientes ángulos en el sistema circular:
a) 45º **R.** 0.785 rad
b) 135º 2.35 rad

6. $\angle AOC$ y $\angle COB$ están en la relación 2 : 3. Encuéntralos:
R. $\angle AOC = 72º$; $\angle COB = 108º$

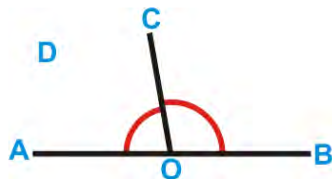


Figura 47

7. Si: $\angle AOD = 2x$, $\angle DOC = 5x$, $COB = 3x$; ¿cuánto mide cada ángulo?
R. $\angle AOD = 36º$ $\angle DOC = 90º$; $\angle COB = 54º$

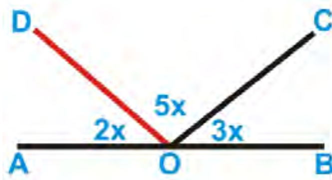


Figura 48

8. Encuentra los complementos de estos ángulos:

a) 18º 72º
b) 36º52' **R.** 53º8'
c) 48º39'15" 41º20'45"

9. Encuentra los suplementos de los siguientes ángulos:

a) 78º 102º
b) 92º15' R. 87º45'
c) 123º9'16" 6º50'44"

10. Si el $\angle AOB$ es recto y $\angle AOC$ y $\angle BOC$ están en la relación 4:5, ¿cuánto vale cada ángulo?
R. $\angle AOC = 40º$; $\angle BOC = 50º$

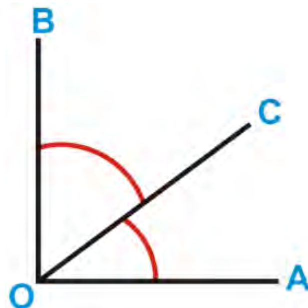


Figura 49

11. Si el $\angle AOD$ es recto y $\angle AOB = 2x$, $\angle BOC = 3x$, $\angle COD = 4x$, ¿cuánto vale cada ángulo?
R. $\angle AOB = 20º$; $\angle BOC = 30º$; $\angle COD = 40º$

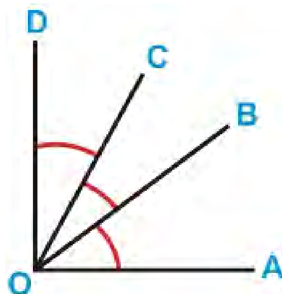


Figura 50

12. Hallar el ángulo que es igual a la mitad de su suplemento.
R. 60º.

13. Hallar el ángulo que es igual al doble de su suplemento.
R. 120º.

14. Si $\angle BOC = 2\angle AOB$, hallar: $\angle AOB$, $\angle COD$, $\angle BOC$, $\angle AOD$.
R. $\angle AOB = \angle COD = 60º$; $\angle BOC = \angle AOD = 120º$

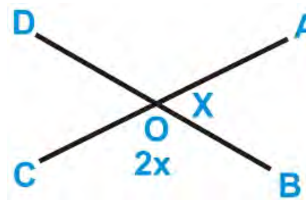


Figura 51

15. Si $\angle MON$ y $\angle NOP$ están en la relación 4 : 5, ¿cuánto mide cada uno?
R. $\angle MON = \angle POQ = 80º$; $\angle NOP = \angle MOQ = 100º$

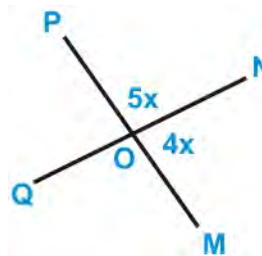


Figura 52

16. Un ángulo y su suplemento están en relación 5:1. ¿Cuáles son?
R. 150º y 30º

17. Dos ángulos están en relación 3:4 y su suma vale 70º. ¿cuáles son? **R.** 30º y 40º.

18. Dos ángulos están en relación 4:9 y su suma vale 130º. ¿cuáles son? **R.** 40º y 90º.

19. Un ángulo y su complemento están en relación 5:4. Hallar dicho ángulo y su complemento.
R. 50º y 40º.

20. Hallar el ángulo que es igual a su suplemento.
R. 90º.

Las rectas perpendiculares y paralelas son muy útiles para dibujar proyecciones y figuras en tercera dimensión. Hoy en día son utilizadas en gran medida para aplicarse al diseño de las diferentes actividades del hombre.

CAPÍTULO IV

PERPENDICULARES Y PARALELAS Y ÁNGULOS QUE SE FORMAN

Si se admite por convención, que una recta o un plano son paralelos a sí mismos, los caracteres del paralelismo entre rectas o entre planos son los caracteres de la igualdad: idéntico, recíproco y transitivo.

Dos rectas de un plano, como la *x y* y *OO* ', son perpendiculares cuando forman entre sí ángulos iguales. Por un punto de un plano puede trazarse una sola perpendicular a una recta. El punto de intersección de las perpendiculares se llama pie.

DEFINICIONES

Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos rectos iguales.

Cuando dos rectas se cortan y no son perpendiculares entonces se dice que son oblicuas.

En la figura 53: $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90°$

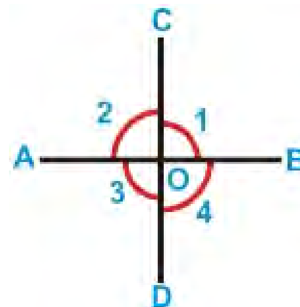


Figura 53

PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO

Carácter recíproco de la **perpendicularidad:** "Si una recta es perpendicular a otra, ésta es perpendicular a la primera".

Es decir, si $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (Fig. 53).
entonces $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$.
Postulado

"Por un punto fuera de una recta, en un plano, pasa una perpendicular a dicha recta y sólo una".

La figura 54 muestra una recta AB y un punto P fuera de ella.

Entre todas las rectas que pasan por P y cortan la recta $\overleftrightarrow{AB}$, admitimos que solamente una, $\overleftrightarrow{CD}$, es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.

Tracemos también las rectas $\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{GH}$ de tal manera que intersecten a $\overleftrightarrow{AB}$ en M y N.

Al punto O de la intersección se le llama pie de la perpendicular.

Los puntos M, N, etc. de intersección de las oblicuas se conocen como pies de las oblicuas.

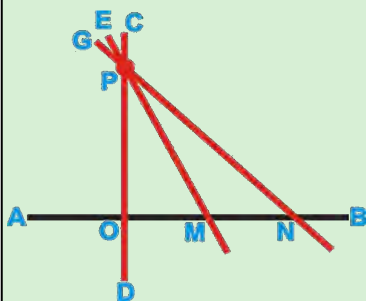


Figura 54

Teorema

Si por un punto exterior a una recta trazamos una perpendicular y varias oblicuas, se puede verificar lo siguiente (Fig. 55):

1) El segmento de perpendicular comprendido entre el punto y la recta es menor que cualquier segmento de oblicua.

2) Los segmentos de oblicuas cuyos pies no equidistan del pie de la perpendicular, son iguales.

3) De dos segmentos de oblicuas cuyos pies no equidistan del pie de la perpendicular, es mayor aquel que dista más.

Demostremos este teorema utilizando el siguiente postulado del movimiento:

Una figura geométrica puede moverse sin cambiar de tamaño ni forma.

Hipótesis:

$\overleftrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{PF}$, $\overleftrightarrow{PD}$, $\overleftrightarrow{PE}$ oblicuas a $\overleftrightarrow{AB}$

$\overline{CF} = \overline{CD}$; $\overline{CE} > \overline{CD}$

Tesis:

1a) $\overline{PC} < \overline{PD}$;
2a) $\overline{PF} = \overline{PD}$;
3a) $\overline{PE} > \overline{PD}$

Construcción auxiliar: Doblemos la figura por $\overleftrightarrow{AB}$ (postulado del movimiento). El punto P ocupará la posición P' de manera que $\overline{CP'} = \overline{CP}$ y $\overline{P'F} = \overline{PF}$; $\overline{P'D} = \overline{PD}$; $\overline{P'E} = \overline{PE}$.

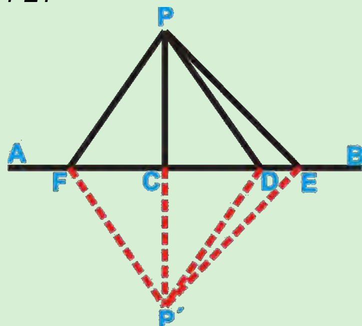


Figura 55

Demostración: (1ª parte)

$\overline{PC} + \overline{CP'} < \overline{PD} + \overline{DP'}$ (1)

La distancia más corta entre dos puntos es la recta.

Pero: $\overline{PC} = \overline{CP'}$ (2)

$\overline{PD} = \overline{DP'}$ (3) Construcción

$\therefore \quad \overline{PC} + \overline{PC} < \overline{PD} + \overline{PD}$

Sustituimos (2) y (3) en (1).

$\therefore \quad 2\overline{PC} < \dfrac{2\overline{PD}}{2}$ Sumamos

$\therefore \quad \overline{PC} < 2\overline{PD}$ Trasponemos

$\therefore \quad \overline{PC} < \overline{PD}$ Simplificamos

(2ª parte)

Doblemos la figura por $\overleftrightarrow{PP'}$ de manera que llevemos el semiplano de la izquierda sobre el semiplano de la derecha. El punto F coincidirá con el punto D porque $\overline{FC} = \overline{CD}$. Entonces tendremos que $\overline{PF} = \overline{PD}$ al coincidir sus extremos, ya que el punto P es común y el postulado dice que por dos puntos pasa una recta y solamente una.

(3ª parte)

$\overline{PE} + \overline{P'E} > \overline{PD} + \overline{P'D}$ (6) Envolvente y envuelta

Pero: $\overline{PE} = \overline{P'E}$ (7)
$\overline{PD} = \overline{P'D}$ (8) } Construcción

$\therefore \overline{PE} + \overline{PE} > \overline{PD} + \overline{PD}$

Sustituimos (7) y (8) en (6)

$\therefore 2\overline{PE} > 2\overline{PD}$ Sumamos

$\therefore \overline{PE} > \dfrac{2\overline{PD}}{2}$ Trasponemos

$\therefore \overline{PE} > \overline{PD}$ Simplificamos

Recíproco: Si por un punto exterior a una recta se trazan varias rectas que corten a la primera, podemos verificar que:

1) El menor de todos los segmentos comprendidos entre el punto y la recta es perpendicular a ésta.

2) Si dos segmentos oblicuos son iguales, sus pies equidistan del pie de la perpendicular.

3) Si dos segmentos oblicuos son desiguales, el pie del segmento mayor dista más del pie de la perpendicular que el del segmento menor.

PARALELISMO

Se afirma que dos rectas de un plano son **paralelas** cuando al prolongarlas no tienen ningún punto común. El **paralelismo** es recíproco, lo cual significa que si una recta es paralela a otra, ésta es paralela a la primera.

Por otra parte, es válido decir que toda recta es paralela a sí misma, a lo que se llama "propiedad idéntica".

El paralelismo se expresa con el signo ||. De tal modo, $AB \parallel CD$ (Fig. 56).

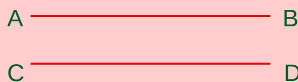


Figura 56

Teorema

"Dos rectas de un plano, perpendiculares a una tercera, son paralelas entre sí".

Hipótesis: $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AB}$

Tesis: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

Demostración:

Supongamos que $\overleftrightarrow{CD}$ no es paralela a $\overleftrightarrow{EF}$. En este caso se cortaría en algún punto, que podría ser *P*.

Pero entonces por *P* pasarían dos perpendiculares a la misma recta $\overline{AB}$, lo cual es imposible, por lo que $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ no pueden tener ningún punto común y, por tanto, son paralelas (Fig. 57). Es decir, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$.

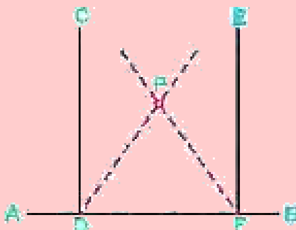


Figura 57

Corolario: "Por un punto exterior a una recta pasa una paralela a dicha recta".

Siendo $\overleftrightarrow{AB}$ la recta dada y *E* el Punto exterior. Por *E* trazamos $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y en el punto *E* trazamos $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{EF}$; resulta entonces $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$, en virtud del teorema anterior (Fig. 58).

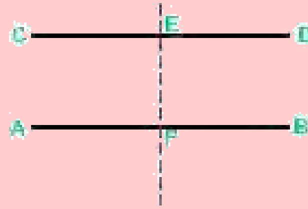


Figura 58

POSTULADO DE EUCLIDES

Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a dicha recta. En el capítulo II mencionamos este postulado tan controvertido y cuya negación dio origen a las geometrías no euclidianas.

Corolario 1: "Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí".

Hipótesis: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$; (Fig. 59).
$\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

Tesis: $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

Demostración: Si $\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ no fueran paralelas, se cortarían en un punto *P*.

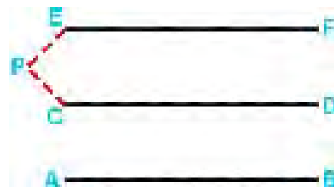


Figura 59

De tal modo, por el punto *P* pasarían dos paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$, lo cual es contrario al postulado de Euclides.

Por tanto: $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

Corolario 2: "Si una recta corta a otra, también corta a sus paralelas"

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (Fig. 60)
$\overleftrightarrow{EF}$ corta a $\overleftrightarrow{AB}$ en *P*

Tesis: $\overleftrightarrow{EF}$ corta a $\overleftrightarrow{CD}$

Demostración: Supongamos que $\overleftrightarrow{EF}$ no corta a $\overleftrightarrow{CD}$, entonces sería paralela a ella, lo cual es imposible porque tendríamos por el mismo punto *P* dos paralelas a $\overleftrightarrow{CD}$: la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y la recta $\overleftrightarrow{EF}$. Por tanto $\overleftrightarrow{EF}$ corta a $\overleftrightarrow{CD}$.



Figura 60

Corolario 3. "Si una recta es perpendicular a otra, también es perpendicular a toda paralela a esta otra".

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (Fig. 61)
$\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{AB}$

Tesis: $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{CD}$

Demostración: Si $\overleftrightarrow{GH}$ corta a $\overleftrightarrow{AB}$, también corta a $\overleftrightarrow{CD}$. Supongamos que el punto de intersección es *P* y que $\overleftrightarrow{GH}$ no es perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$. Entonces, por *P* podríamos trazar $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{GH}$ y tendríamos: $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, o sea que por el mismo punto *P* pasarían dos paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$ que serían $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$, lo cual es imposible; por tanto: $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

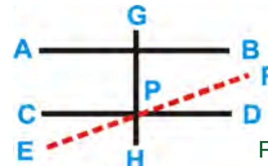


Figura 61

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La **distancia de un punto a una recta** es la longitud del segmento perpendicular trazado desde el punto hasta la recta y el cual tiene las propiedades de ser único y el menor posible.

CLASES DE PARALELISMO

Idéntico: "Toda recta es paralela a sí misma".

Recíproco: "Si una recta es paralela a otra, ésta es paralela a la primera".

Transitivo: "Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí".

MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN POR REDUCCIÓN AL ABSURDO

En los teoremas planteados acerca del paralelismo se ha utilizado el método de "reducción al absurdo", que consiste en suponer lo contrario a lo que se quiere demostrar para mediante un razonamiento, llegar a obtener una conclusión que se contradice con otros teoremas ya demostrados o con postulados admitidos.

Con esto sabemos que la tesis que queremos demostrar es verdadera.

PROBLEMAS GRÁFICOS

1) Trazar una perpendicular en el punto medio de un segmento.

Siendo el segmento $\overline{AB}$ (Fig. 62).
Con una abertura de compás mayor a la mitad del segmento y haciendo centro en *A* y en *B*, sucesivamente, se trazan los arcos *o* , *m* , *n* y *p*, que se cortan en *C* y *D* , respectivamente.

Uniendo *C* con *D* tenemos la perpendicular en el punto medio *H* del segmento $\overline{AB}$.

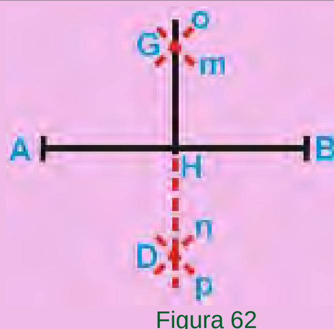


Figura 62

2) Trazar una perpendicular en un punto cualquiera de una recta.

Siendo *P* un punto cualquiera de la recta $\overline{AB}$ (figura 63). Haciendo centro en *P* y con una abertura cualquiera del compás se trazan los arcos *m* y *n* ; haciendo centro en los puntos donde estos arcos cortan la recta, se trazan los arcos *q* y *r* , que se cortan en el punto *S*. Uniendo S con P se tiene $\overline{PS}$, que es la perpendicular buscada.



Figura 63

3) Trazar una perpendicular en un extremo de un segmento sin prolongarlo (Fig. 64).

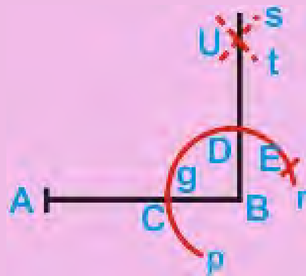


Figura 64

Siendo $\overline{AB}$ el segmento. Para trazar la perpendicular en un extremo *B*, se hace centro en *B* y con una abertura cualquiera de compás se traza el arco p g r que corta $\overline{AB}$ en C . Haciendo centro en *C* y con la misma abertura, se señala el punto *D* ; haciendo centro en *D* se señala el punto *E*. Haciendo centro en *D* y en *E* , sucesivamente, se trazan los arcos *s* y *t* , que se cortan en *U* . Uniendo *U* con *B* tendremos la perpendicular buscada.

4) Por un punto *P* exterior a una recta $\overleftrightarrow{AB}$, trazar una paralela a ésta (Fig. 65).

Por un punto cualquiera *C* de la recta y con radio $\overline{CP}$ se traza el arco *QPD*. Haciendo centro en *P* y con el mismo radio se traza el arco *OCE*.

Con centro en *C* y tomando una abertura de compás igual a $\overline{PD}$ se señala el punto *M* .

La recta $\overleftrightarrow{PM}$ es paralela a la recta *AB* y pasa por *P*.

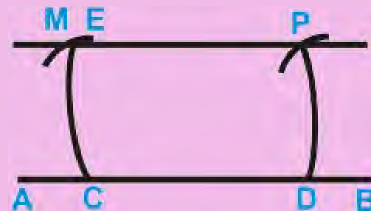


Figura 65

5) Trazar la bisectriz de un ángulo.

Siendo el ángulo *ABC* (Fig. 66).

Haciendo centro en el vértice *B* se traza el arco *OMN*.

Con centro en *M* trazamos el arco *r* y con centro en *N* el arco *s*. Entonces *r* y *s* se cortan en *P*.

La semirrecta $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz del ángulo *ABC*.

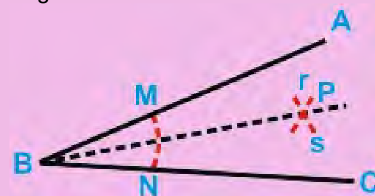


Figura 66

RECTAS CORTADAS POR UNA SECANTE

Al cortar dos rectas, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ (Fig. 67), por una tercera recta $\overleftrightarrow{SS'}$ llamada **secante**, se forman 8 ángulos (4 en cada punto de intersección).

Los ángulos internos son : ∠4, ∠3, ∠6, ∠5.

Los ángulos externos son : ∠1, ∠2, ∠8, ∠7.

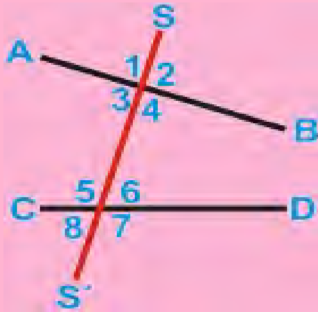


Figura 67

Los **ángulos alternos** son los pares de ángulos ∠3 y ∠5; ∠4 y ∠6; y ∠1 y ∠7; ∠2 y ∠8, y se dividen en:

1) Alternos internos:

∠3 y ∠ 5; ∠4 y ∠ 6

2) Alternos externos:

∠1 y ∠7; ∠2 y ∠8

Los **ángulos correspondientes** son los pares de ángulos ∠1 y ∠5; ∠2 y ∠6; ∠3 y ∠7; ∠4 y ∠8

Los **ángulos conjugados** son dos ángulos internos, o dos externos, situados en un mismo semiplano respecto de la secante, y se dividen en:

1) Conjugados internos:

∠3 y ∠6; ∠4 y ∠5

2) Conjugados externos:

∠2 y ∠7; ∠1 y ∠8

PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE

El postulado para las paralelas cortadas por una secante dice:

"Toda secante forma con dos paralelas ángulos correspondientes iguales".

Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, se verifica (Fig. 68)

∠1 = ∠5 ∠3 = ∠7

∠2 = ∠6 ∠4 = ∠8

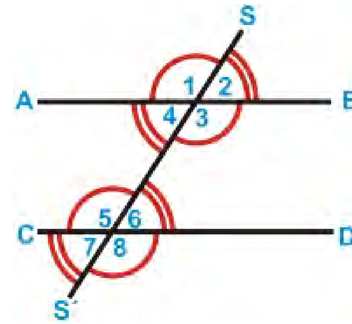


Figura68

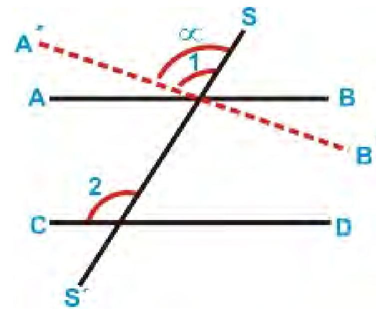
Una vez admitido el postulado anterior, se demuestra que "Si una secante forma, con dos rectas de un plano, ángulos correspondientes iguales, dichas rectas son paralelas".

Hipótesis: ∠1 = ∠2 (Fig. 69)

Tesis: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

Demostración: (Por el método de reducción al absurdo). Supongamos que $\overleftrightarrow{AB}$ no es paralela a $\overleftrightarrow{CD}$.

Entonces podremos trazar $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (Postulado de Euclides).



Tendríamos: ∠α = ∠ 2, en virtud del postulado.

Figura 69

Comparando esta igualdad con la hipótesis tenemos:

∠α = ∠2; ∠1 = ∠2 ∴ = ∠1 (carácter transitivo).

Esta conclusión es absurda, a menos que la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$ coincida con la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Luego $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, que es lo que se quería demostrar.

TEOREMA 1

"Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos internos iguales".

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{SS'}$ es una secante (Fig. 70);

∠4 y ∠ 6 } son ángulos
∠3 y ∠ 5 } alternos internos**.**

Tesis: ∠ 4 = ∠ 6
∠ 3 = ∠ 5

Demostración:

∠4 = ∠2 (opuestos por el vértice).

∠2 = ∠6 (correspondientes);

∴ ∠4 = ∠6 (carácter transitivo).

Análogamente se demuestra que:

∠3 = ∠5

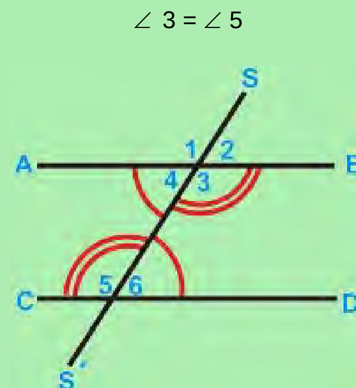


Figura 70

Recíproco: "Si una secante forma con dos rectas de un plano ángulos alternos internos iguales, dichas rectas son paralelas".

TEOREMA 2

"Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos externos iguales".

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{SS'}$ es una secante (Fig. 71);

$\left.\begin{array}{l}\angle 1 \text{ y } \angle 7 \\ \angle 2 \text{ y } \angle 8\end{array}\right\}$ ángulos alternos externos.

Tesis: $\angle 1 = \angle 7$
$\angle 2 = \angle 8$

Demostración: $\angle 1 = \angle 3$ (1) (opuestos por el vértice);

$\angle 3 = \angle 7$ (2) (correspondientes);

Comparando (1) y (2):

$\angle 1 = \angle 7$ (carácter transitivo).

Análogamente se demuestra que: $\angle 2 = \angle 8$

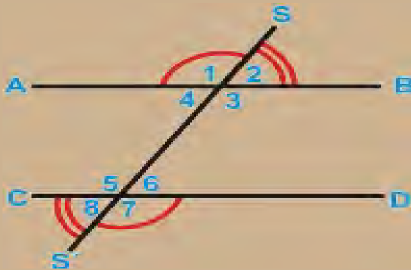


Figura 71

Recíproco: "Si una secante forma, con dos rectas de un plano, ángulos alternos externos iguales, dichas rectas son paralelas".

TEOREMA 3

"Dos ángulos conjugados internos, entre paralelas, son suplementarios".

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{SS'}$ es una secante (Fig. 72)

$\left.\begin{array}{l}\angle 3 \text{ y } \angle 6 \\ \angle 4 \text{ y } \angle 5\end{array}\right\}$ conjugados internos

Tesis: $\angle 3 + \angle 6 = 2R$
$\angle 4 + \angle 5 = 2R$

Demostración: $\angle 5 + \angle 6 = 2R$ (1) (por adyacentes);
$\angle 5 = \angle 3$ (2) (por alternos internos)

Sustituyendo (2) en (1):

$\angle 3 + \angle 6 = 2R$

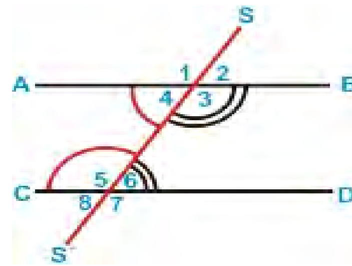


Figura 72

Siguiendo el axioma que dice: Un número se puede sustituir por otro igual en cualquier operación entre números.

Análogamente se demuestra que: $\angle 4 + \angle 5 = 2R$

Recíproco: "Si una secante forma, con dos rectas de un plano, ángulos conjugados internos suplementarios, dichas rectas son paralelas".

TEOREMA 4

"Los ángulos conjugados externos, entre paralelas, son suplementarios".

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{SS'}$ es una secante (Fig. 73)

$\left.\begin{array}{l}\angle 1 \text{ y } \angle 8 \\ \angle 2 \text{ y } \angle 7\end{array}\right\}$ son ángulos conjugados externos

Tesis: $\angle 1 + \angle 8 = 2R$
$\angle 2 + \angle 7 = 2R$

Demostración: $\angle 7 + \angle 8 = 2R$ (1) por adyacentes;

$\angle 7 = \angle 1$ (2) por alternos externos

Sustituyendo (2) en (1):

$\angle 1 + \angle 8 = 2R$

Análogamente se demuestra que $\angle 2 + \angle 7 = 2R$

Recíproco: "Si una secante forma con dos rectas de un plano ángulos conjugados externos suplementarios, dichas rectas son paralelas".



Figura 73

EJERCICIOS

1. Si $\overleftrightarrow{EH} \parallel \overleftrightarrow{DA}$; $\overleftrightarrow{LK} \parallel \overleftrightarrow{MJ}$ y $\angle ABJ = 100^\circ$, hallar: $\angle FGB$ y $\angle CFG$.
R. $\angle FGB = 80^\circ$;
$\angle CFG = 100^\circ$

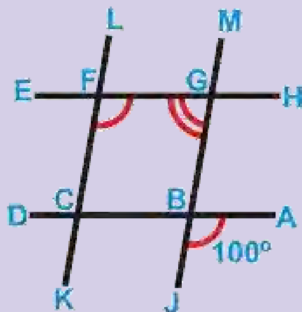


Figura 74

2. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF}$ es una secante, $\overleftrightarrow{GH}$ es bisectriz del $\angle AGI$ y $\angle AGH = 30^\circ$. Hallar $\angle CIF$
R. $\angle CIF = 120^\circ$

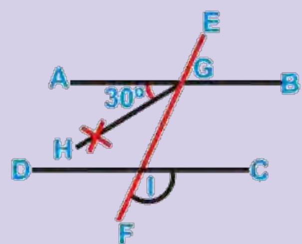


Figura 75

3. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ y $\angle CON = 130^\circ$; hallar $\angle ABC$.
R. $\angle ABC = 50^\circ$

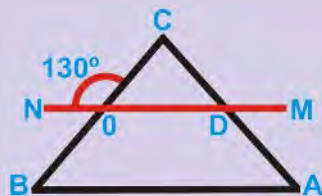


Figura 76

4. ¿La perpendicularidad tiene la propiedad recíproca? ¿Y la propiedad idéntica?
R. Sí; no.

5. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{SS'}$ es una secante y $\angle 1 = 120^\circ$; hallar los otros ángulos.
R. $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 60^\circ$;
$\angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 120^\circ$

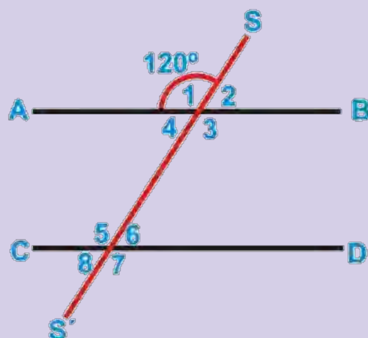


Figura 77

6. Si $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{SS'}$ es una secante y $\angle 7 = \angle 8$; hallar los otros ángulos.
2
R. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 60^\circ$;
$\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 120^\circ$

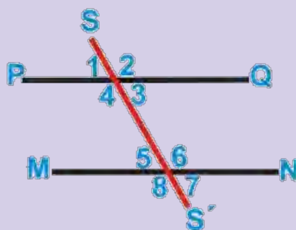


Figura 78

7. Si $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{SS'}$ es una secante y $\angle 1 = 5x$, $\angle 6 = 13x$; hallar todos los ángulos.
R. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 50^\circ$;
$\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 130^\circ$

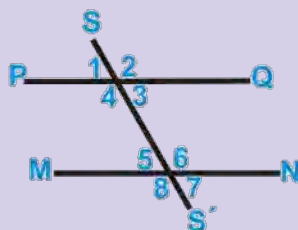


Figura 79

8. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, demostrar que: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2R$.

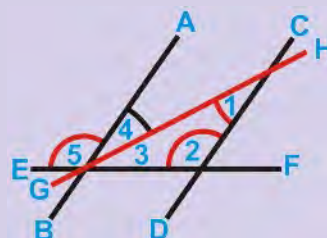


Figura 80

9. La recta $\overleftrightarrow{CE}$ es bisectriz del $\angle BCD$ y $\angle A = \angle B$. Demostrar que: $\overleftrightarrow{EC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

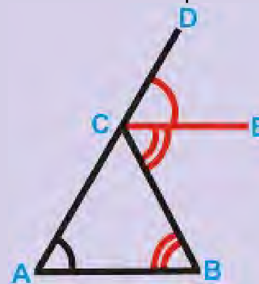


Figura 81

10. Si $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $\angle BAD = 2x$ y $\angle ABC = 6x$; hallar: $\angle ABC$; $\angle BCD$; CDA; $\angle DAB$.
R. $\angle ABC = \angle CDA = 135^\circ$;
$\angle BCD = \angle DAB = 45^\circ$

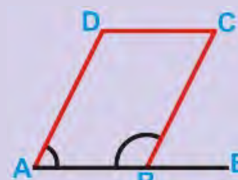


Figura 82

11. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{GH}$ y $\angle EMN = 60^\circ$; hallar $\angle HPD$.
R. $\angle HPD = 120^\circ$

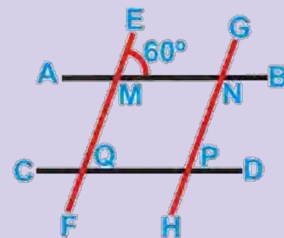


Figura 83

Gracias a la navegación, los fenicios conocieron aspectos inéditos sobre el cielo y la tierra. Determinaron que la Tierra era esférica por la observación del horizonte. Descubrieron la estrella polar.

CAPÍTULO V

ÁNGULOS CON LADOS PARALELOS O PERPENDICULARES

Para determinar un ángulo en valor y signo, debe considerarse un punto O y una semirrecta OX como vértice y origen de los ángulos fijos, fijarse el sentido positivo de rotación y hacer variar el segundo lado OA.

Dos ángulos pueden ser adyacentes, complementarios, suplementarios, u opuestos por el vértice.

TEOREMA 1

"Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido son iguales".

Hipótesis: $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{B'A'}$; (Fig. 84)

$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{B'C'}$

$\angle ABC$ y $\angle A'B'C'$ tienen sus lados dirigidos en el mismo sentido.

Tesis : $\angle ABC = \angle A'B'C'$

Construcción auxiliar : Prolonguemos el lado $\overleftrightarrow{C'B'}$ hasta que corte al lado $\overrightarrow{BA}$ formándose el $\angle\alpha$.

$\angle ABC = \angle\alpha$ (correspondientes)

$\angle A'B'C' = \angle\alpha$ (correspondientes)

$\therefore\ \angle ABC = \angle A'B'C'$ (carácter transitivo)

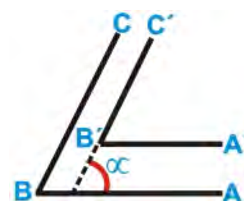


Figura 84

TEOREMA 2

"Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario son iguales".

Hipótesis: $\overrightarrow{BA} \angle\angle \overrightarrow{B'A'}$; (Fig. 85)

$\overrightarrow{BC} \angle\angle \overrightarrow{B'C'}$

$\angle ABC$ y $\angle A'B'C'$ tienen sus lados dirigidos en sentido contrario.

$\angle ABC = \angle A'B'C'$

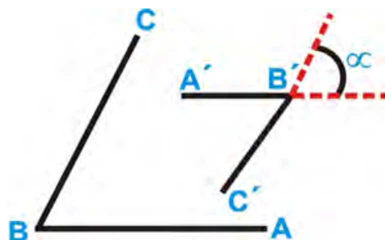


Figura 85

Construcción auxiliar: Prolonguemos los lados $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{C'B'}$ para formar el $\angle\alpha$

Demostración:

$\angle ABC = \angle\alpha$ — Por tener lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

$\angle A'B'C' =$ — Opuestos por el vértice.

$\therefore$ $\angle ABC = \angle A'B'C'$ — Carácter transitivo.

TEOREMA 3

"Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, dos de ellos dirigidos en el mismo sentido y los otros dos en sentido contrario, dichos ángulos son suplementarios".

Hipótesis: $\overrightarrow{BA} \angle\angle \overrightarrow{B'A'}$ y en sentido contrario (Fig. 86).

$\overrightarrow{BC} \angle\angle \overrightarrow{B'C'}$ y en el mismo sentido.

Tesis : $\angle ABC + A'B'C' = 2R$

Construcción auxiliar: Prolonguemos $\overrightarrow{A'B'}$ para formar el ángulo a .

Demostración : $\angle A'B'C' + \angle\alpha = 2R$ (1) (adyacentes);

$\angle\alpha =$ ABC (2) (por tener lados paralelos y del mismo sentido).

Sustituyendo (2) en (1) y según el axioma: Un número se puede sustituir por otro igual en cualquier operación entre números.

$\angle A'B'C' + \angle ABC = 2R$

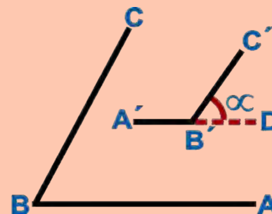


Figura 86

Teorema 4

"Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares son iguales".

Hipótesis : $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{B'A'}$ (Fig. 87)

$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{B'C'}$

$\angle ABC < 1R$

$\angle A'B'C' < 1R$

Tesis : $\angle ABC = \angle A'B'C'$

Construcción auxiliar: Tracemos por B las semirrectas $\overrightarrow{BA} \,||\, \overrightarrow{B'A'}$ y $\overrightarrow{BC} \,||\, \overrightarrow{B'C'}$ de manera que $\angle$A "BC" = A'B'C' por tener lados paralelos y del mismo sentido. Además formamos el $\angle\alpha$**.**

Demostración : $\angle C''BA'' + \angle\alpha = 1R$, por ser $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{B'C'}$ y $\overrightarrow{BC''} \angle\angle \overrightarrow{B'C'}$.

Trasponiendo: $\angle C''BA'' = 1R - \angle\alpha$ (1)

$\angle ABC + = 1R$, por ser BA $\perp$ B´A´, BA´´ $\parallel$ B´A´

Trasponiendo: $\angle ABC = 1R - \angle\alpha$ (2)

Comparando (1) y (2):

$\angle C''BA'' = \angle ABC$ (3) Carácter transitivo

Pero:

$\angle C''BA'' = \angle A'B'C'$ (4) Lados paralelos en el mismo sentido

Sustituyendo (4) en (3), tenemos:

$\angle A'B'C' = \angle ABC$

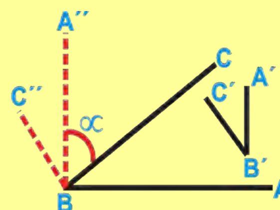


Figura 87

TEOREMA 5

"Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son suplementarios".

Hipótesis: $\overleftrightarrow{B'A'} \perp \overleftrightarrow{BA}$; (Fig. 88)
$\overleftrightarrow{B'C'} \perp \overleftrightarrow{BC}$
$\angle ABC < 1R$
$\angle A'B'C' > 1R$

Tesis: $\angle ABC + \angle A'B'C' = 2R$

Construcción auxiliar:
Prolonguemos $\overleftrightarrow{A'B'}$
hasta que se forme el $\angle \alpha$.

Figura 88

Demostración:

$\angle ABC = \angle a$ (1) Por tener lados perpendiculares

y ser los dos ángulos agudos.

$\angle A'B'C' + \angle a = 180º$ (2) Adyacentes.

Sustituyendo (1) en (2) resulta:

$\angle A'B'C' + \angle ABC = 180º$

TEOREMA 6

"Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales" (Fig. 89).

Hipótesis: $\overleftrightarrow{B'A'} \perp \overleftrightarrow{BA}$
$\overleftrightarrow{B'C'} \perp \overleftrightarrow{BC}$
$\angle ABC > 1R$
$\angle A'B'C' > 1R$

Tesis: $\angle ABC = \angle A'B'C'$

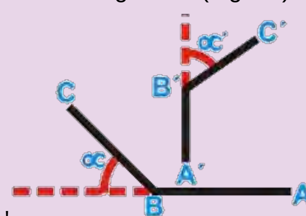


Figura 89

Construcción auxiliar: Prolonguemos $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{A'B'}$, con lo que se forman los ángulos $\angle \alpha$ y $\angle \alpha'$, iguales por ser agudos y tener sus lados respectivamente perpendiculares.

Demostración: $\angle ABC + \angle \alpha = 2R$ Adyacentes

Trasponiendo: $\angle ABC = 2R - \angle \alpha$ (1)

También: $\angle A'B'C' = 2R - \angle \alpha'$ (2)

Pero: $\angle \alpha' = \angle \alpha$ (3) Agudos y lados perpendiculares.

Sustituyendo (3) en (2):

$\angle A'B'C' = 2R - \angle \alpha$ (4)

Comparando (1) y (4) tenemos:

$\angle ABC = \angle A'B'C'$ Carácter transitivo

EJERCICIOS

1. $\overleftrightarrow{TU} \perp \overleftrightarrow{RQ}$; $\overleftrightarrow{UV} \perp \overleftrightarrow{RS}$; $\angle WUX = 30º$.
Hallar $\angle QRS$.
R. $\angle QRS = 30º$

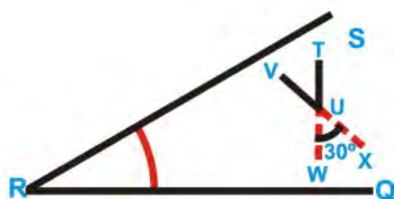
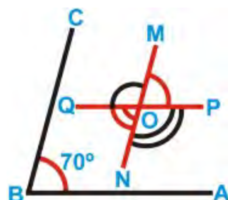


Figura 90

2. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$; $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{MN}$, $\angle ABC = 70º$. Figura 91
Hallar: $\angle MOP$, $\angle NOP$,
$\angle NOQ$ y $\angle MOQ$.
R. $\angle MOP = 70º$;
$\angle NOP = 110º$;
$\angle NOQ = 70º$;
$\angle MOQ = 110º$



3. $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$,
$\overleftrightarrow{NP} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\angle MNP = 48º$
Hallar $\angle A'B'C'$
R. $\angle A'B'C' = 48º$

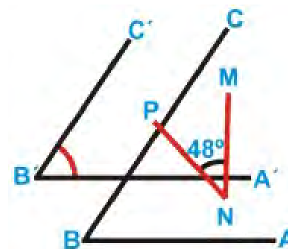


Figura 92

4. $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{ED}$; $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{CD}$;
$\angle CDE = 150º$.
Hallar $\angle ABC$
R. $\angle ABC = 30º$

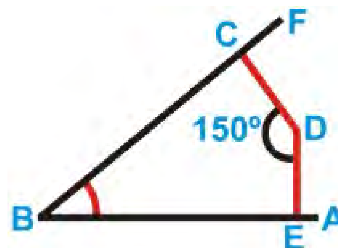


Figura 93

5. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{ED}$; $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{HI} \perp \overleftrightarrow{ED}$; $\overleftrightarrow{HK} \perp \overleftrightarrow{EF}$; $\angle JHI = 150°$.
Hallar $\angle ABC$
R. $\angle ABC = 30°$

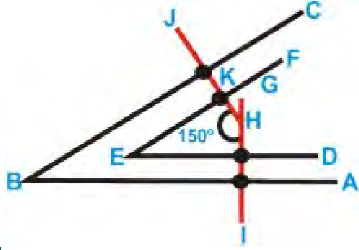


Figura 94

6. $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$; $\overline{EF} \parallel \overline{CD}$; $\angle EBC = 2\angle BED$. Hallar $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$.
R. $\angle B = 120°$; $\angle D = 120°$; $\angle C = 60°$; $\angle E = 60°$

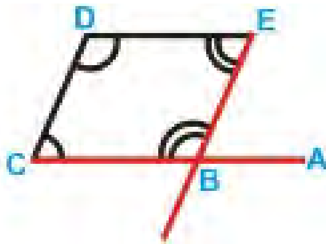


Figura 95

7. $\overleftrightarrow{GE} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{IK}$; $\overleftrightarrow{AG} \parallel \overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{JL}$; $\angle FOD = 60°$.
Hallar $\angle A$, $\angle C$, $\angle E$, $\angle G$.
R. $\angle A = 60°$; $\angle C = 120°$; $\angle E = 60°$; $\angle G = 120°$

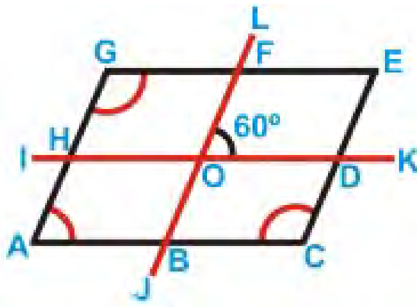


Figura 96

8. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$; $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$, $\angle EB'D = 60°$. Hallar el $\angle ABC$.
R. $\angle ABC = 60°$

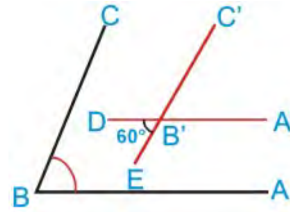


Figura 97

9. $\overleftrightarrow{PN} \parallel \overleftrightarrow{RS}$; $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{RQ}$, $\angle MNP = 60°$. Hallar $\angle QRS$.
R. $\angle QRS = 120°$

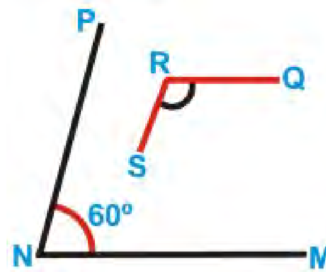


Figura 98

10. $\overline{EF} \perp \overline{AB}$, $\overline{DE} \perp \overline{BC}$, $\angle DEF = 120°$. Hallar $\angle ABC$.
R. $\angle ABC = 60°$.

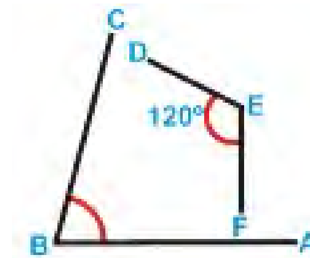


Figura 99

Thales de Mileto es considerado como el primer geómetra griego y uno de los siete sabios de Grecia. Realizó diversos estudios sobre los triángulos, determinó leyes geométricas que hoy en día siguen vigentes.

CAPÍTULO VI

TRIÁNGULOS

Un **triángulo** es la porción de un plano limitado por tres rectas que se cortan dos a dos (Fig. 100) y cuyos puntos de intersección son los vértices del triángulo: A, B y C .

Los segmentos determinados son los lados del triángulo: a, b y c, y esos lados forman los ángulos interiores que se nombran con las letras de los vértices. El lado opuesto a un ángulo se nombra con la misma letra, pero minúscula.

El triángulo consta de 3 ángulos, 3 lados y 3 vértices,
y su **perímetro** se obtiene con la suma de sus tres lados.

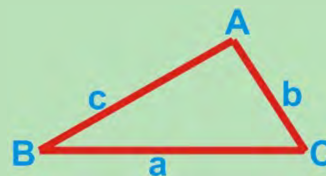


Figura 100

En el triángulo ABC : $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = a + b + c = 2p$

donde p representa al semiperímetro (mitad del perímetro).

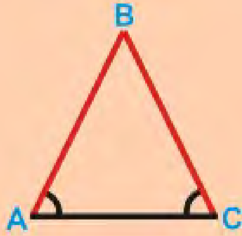
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

En razón de sus **lados**, los triángulos se clasifican en:

Triángulo **isósceles**, el que tiene dos lados iguales (Fig. 101).

Figura 101

$\overline{BA} = \overline{BC}$



Más adelante veremos que los ángulos opuestos a dichos lados también son iguales, es decir:

Si $\overline{AB} = \overline{BC}$, también $\angle A = \angle C$

El lado desigual es lo que conocemos como **base** del triángulo.

Triángulo **equilátero**, el que tiene sus tres lados iguales (Fig. 102), así como sus tres ángulos iguales.

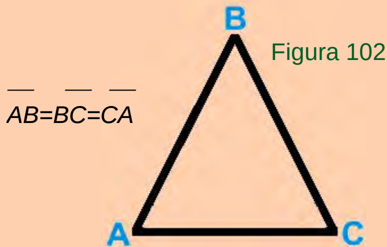


Figura 102

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

Triángulo escaleno, el que tiene sus tres lados diferentes (Fig.103) $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq BC$; $\angle A \neq B \neq C$. Sus ángulos también son desiguales.

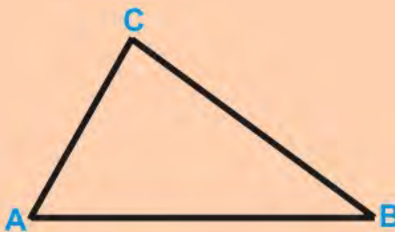


Figura 103

Por otra parte, en razón de sus ángulos, los triángulos también se clasifican en:

Acutángulo

El que tiene los tres ángulos agudos (Fig. 104).

$\angle A < 1R$; $\angle B < 1R$; $\angle C < 1R$

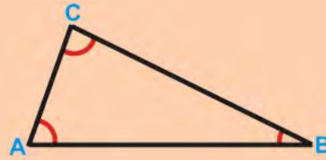


Figura 104

Obtusángulo

El que tiene un ángulo obtuso (Fig.105): $\angle A > 1R$

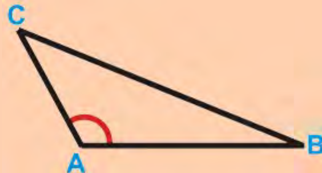


Figura 105

Rectángulo

Es el que tiene un ángulo recto (Fig. 106): $\angle A = 1R$

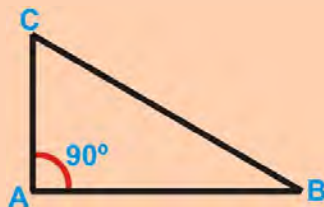


Figura 106

Por cierto que los **lados** del triángulo rectángulo tienen sus nombres especiales:

Los catetos son los lados que forman el ángulo recto: $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$

La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto: $\overline{BC}$

RECTAS Y PUNTOS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO

a) Mediana es el segmento trazado desde un vértice hasta el: punto medio del lado opuesto $\overline{AR}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ (Fig. 107).

$$\overline{AP} = \overline{PC}$$
$$\overline{AQ} = \overline{BQ}$$
$$\overline{BR} = \overline{CR}$$

Hay tres medianas, una correspondiente a cada lado, las cuales se designan con la letra "m " y un subíndice que indica el lado:

$$\overline{AR} = m_a$$
$$\overline{BP} = m_b$$
$$\overline{CQ} = m_c$$

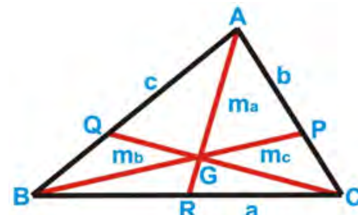


Figura 107

El punto de intersección, G, de las tres medianas se llama **baricentro**.

b) Altura es la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación: $\overline{AM}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CN}$ (Fig. 108) .

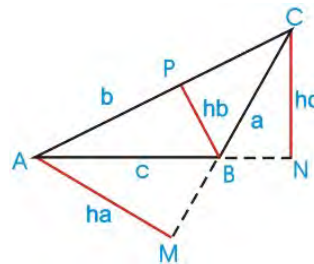
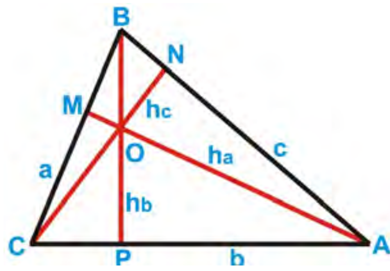


Figura 108

Hay tres alturas, una correspondiente a cada lado, las cuales se designan con la letra "h " y un subíndice que indica el lado (Fig. 109).

$$\overline{AM} = h_a$$
$$\overline{BP} = h_b$$
$$\overline{CN} = h_c$$

.



El punto O donde concurren las tres alturas se llama **ortocentro**
.
Figura 109

c) Bisectriz es la recta notable que corresponde a la bisectriz de un ángulo interior, y consecuentemente hay tres bisectrices, una para cada ángulo, que generalmente se nombran con letras griegas: α(alfa), β(beta), γ(gamma) (Fig. 110).

$\angle 1 = \angle 2$
$\angle 3 = \angle 4$
$\angle 5 = \angle 6$

El punto *I* donde concurren las tres bisectrices se llama **incentro**.

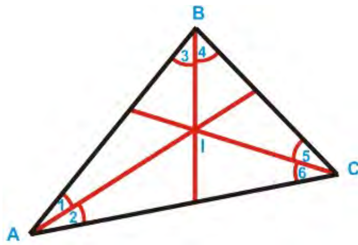


Figura 110

d) Mediatriz es la perpendicular en el punto medio de cada lado. Hay tres mediatrices que se denominan con la letra "M " y un subíndice que indica el lado (Fig. 111):

$\overline{KS} = M_a$
$\overline{KU} = M_b$
$\overline{KT} = M_c$

El punto *K* de intersección de las tres mediatrices se llama **circuncentro**.

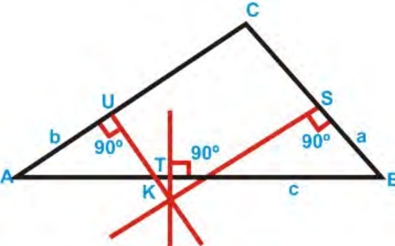


Figura 111

Teorema

"La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo vale dos ángulos rectos".

Hipótesis : $\angle$ A,$\angle$ B y $\angle$ C son los ángulos interiores $\triangle$del ABC (Fig. 112)

Tesis : $\angle$ A +$\angle$ B +$\angle$ C = 2R

Construcción auxiliar:

Tracemos por el vértice C , $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ formándose los $\angle$ x $\angle$ y

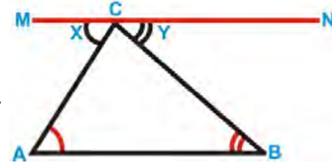


Figura 112

Demostración:

$\angle$ *x* + $\angle$ C + $\angle$ y = 2R (1) Consecutivos a un lado de una recta.

Pero: $\angle$x = $\angle$A (2)
$\angle$y = $\angle$B (3)
} Alternos internos entre paralelas.

Sustituyendo (2) y (3), en (1): Un número se puede sustituir por otro igual en cualquier operación entre números.

$\angle$ A + $\angle$ B + $\angle$ C = 2R

Corolario. La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo vale un ángulo recto.
En efecto: Si los tres ángulos suman 2 rectos y uno de ellos mide un recto, la suma de los otros dos deberá valer un ángulo recto.

ÁNGULO EXTERIOR DE UN TRIÁNGULO

El ángulo exterior de un triángulo es el que está formado por un lado y la prolongación de otro. $\angle$ x,$\angle$ y,$\angle$ z son los ángulos exteriores del $\triangle$ ABC (Fig. 113).

Teorema 1

"La suma de los ángulos exteriores de un triángulo vale cuatro ángulos rectos".

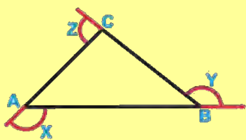


Figura 113

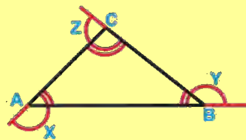


Figura 114

Hipótesis : $\angle$ x, $\angle$ y, $\angle$ z son los ángulos exteriores del $\triangle$ ABC (Fig. 114)

Tesis : $\angle$ x + $\angle$ y + $\angle$ z = 4R

Demostración : $\angle$ A + $\angle$ x = 2R (1) Adyacentes
$\angle$ B + $\angle$ y = 2R (2) Adyacentes
$\angle$ C + $\angle$ z = 2R (3) Adyacentes

Sumando (1), (2) y (3):

$\angle$A + $\angle$B + $\angle$ C + $\angle$x + $\angle$y +$\angle$z = 6R (4)

Pero: $\angle$A +$\angle$B +$\angle$C = 2*R* (5) Suma de ángulos interiores

Sustituyendo (5) en (4):

$2R + \angle x + \angle y + \angle z = 6R$ Un número se puede sustituir por otro igual en cualquier operación entre números.

$\therefore \angle x + \angle y + \angle z = 6R - 2R$ Trasponiendo

$\therefore \angle x + \angle y + \angle z = 4R$ Simplificando

Teorema 2

"Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes".

Hipótesis : En el Δ ABC (Fig. 115): $\angle$ x = ángulo exterior.

$\angle$ A y $\angle$ C ángulos interiores no adyacentes a $\angle$ x

Tesis: $\angle x = \angle A + \angle C$

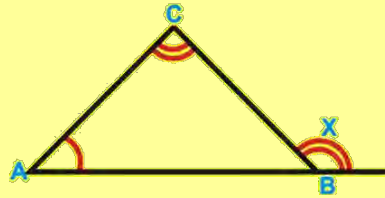


Figura 115

Demostración:

$\angle x + \angle B = 2R$ Adyacentes

$\therefore \angle x = 2R - B$ (1) Trasponiendo

También; $\angle A + \angle B + \angle C = 2R$ Suma de los ángulos interiores;

$\therefore \angle A + \angle C = 2R - B$ (2) Trasponiendo;

Comparando (1) y (2) tenemos:

$\angle x = \angle A + \angle C$ Carácter transitivo

IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son iguales cuando al ser superpuestos coinciden.

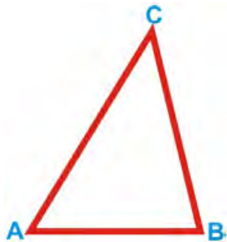


Figura 116

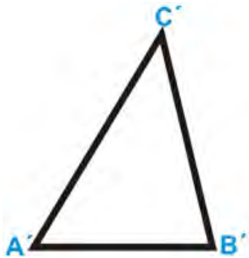


Figura 117

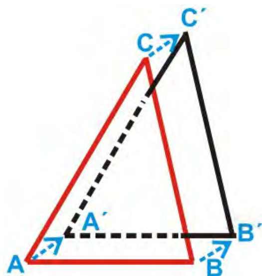


Figura 118

Por ejemplo, al colocar el triángulo Δ ABC (Fig. 116) sobre el triángulo Δ A 'B 'C ' (Fig. 117), al coincidir A con A ' vemos que B (Fig. 118) coincide con B ' y C con C ', es decir, el triángulo Δ ABC coincide con el A 'B 'C ', y entonces decimos que:

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$$

De este modo se cumplen seis condiciones:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \qquad \angle A = \angle A'$$
$$\overline{BC} = \overline{B'C'} \qquad \angle B = \angle B'$$
$$\overline{CA} = \overline{C'A'} \qquad \angle C = \angle C'$$

Para demostrar que dos triángulos son iguales no es necesario probar estas seis condiciones, ya que si se cumplen sólo tres de ellas, siempre que por lo menos una se refiera a los lados, necesariamente se cumplirán las otras tres.

En el siguiente capítulo demostraremos que **dos triángulos son iguales** cuando se cumplen las siguientes tres condiciones:

1) Un lado y los dos ángulos adyacentes son iguales (Figs. 119 y 120):

Si $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \angle A = \angle A', \angle B = \angle B'$

Entonces Δ ABC = Δ A 'B 'C '

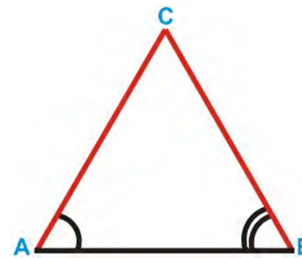


Figura 119

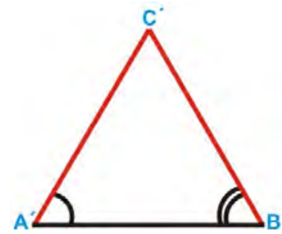


Figura 120

2) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son iguales (Figs. 121 y 122):

Si $\overline{AC} = \overline{A'B'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \angle A, \angle A'$

Entonces Δ ABC = Δ A′B′C′

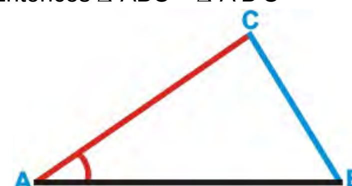


Figura 121

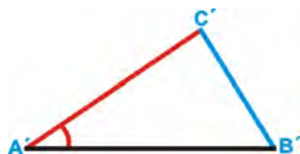


Figura 122

3) Los tres lados son iguales (Figs. 123 y 124)

Si $\overline{AB} = \overline{A'B'}, = \overline{BC} = \overline{B'C'}, = \overline{CA} = \overline{C'A'}$

Entonces Δ ABC = Δ A′B′C′



Figura 123

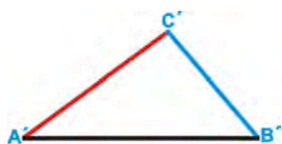


Figura 124

Aquí es conveniente observar que algunos estudiantes tienden a creer que dos triángulos también son iguales si tienen los tres ángulos respectivamente iguales, lo cual no es cierto, pues hay triángulos como Δ ABC y Δ A 'B 'C ' (Fig. 125) con sus tres ángulos respectivamente iguales y, sin embargo, no son iguales, sino semejantes, como veremos más adelante.

Si: $\angle A = \angle A'$

$\angle B = \angle B'$

$\angle C = \angle C'$

$\therefore \quad \Delta ABC \neq A'B'C'$

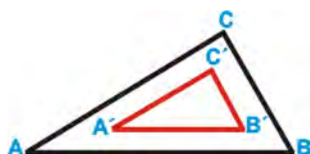


Figura 125

PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS

Estas son las propiedades de los triángulos:

1. En **dos triángulos iguales,** a ángulos iguales se oponen lados iguales (homólogos) y recíprocamente.

2. En un triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia.

3. En un triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente.

4. En dos triángulos que tienen dos lados respectivamente iguales y desigual el ángulo comprendido, a mayor ángulo se opone mayor lado.

5. La altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles es también mediana y bisectriz del triángulo.

EJERCICIOS

1. ¿Cuánto vale el ángulo de un triángulo equilátero?

R. 60^0

2. Dos ángulos de un triángulo miden 40° y 30°, respectivamente. ¿Cuánto mide el tercer ángulo y cada uno de los ángulos exteriores?

R. $110^0;140^0;150^0;70^0$

3. Los ángulos en la base de un triángulo isósceles miden 40° cada uno. ¿Cuánto mide el ángulo opuesto a la base?.

R. 100^0

4 ¿Puede ser obtuso el ángulo en la base de un triángulo isósceles?

5. ¿Puede construirse un triángulo cuyos lados midan 10 cm, 5 cm y 4 cm?

6. ¿Puede ser equilátero un triángulo rectángulo?

7. Los lados de un triángulo miden 6 cm, 7 cm y 9 cm. Construir el triángulo y calcular su perímetro y semiperímetro.

R. 22 cm y 11cm

8. Los lados de un triángulo miden 3, 4 y 5 pulgadas. Construir el triángulo y calcular su perímetro y semiperímetro en pulgadas y centímetros (tomar como valor por pulgada 2.54 cm).

R.12 y 6 pulg;30.48 y 15.24 cm

9. Construir un triángulo que tenga un ángulo de 50° y los dos lados que lo forman midan 5 cm y 3.5 cm.

10. Construir un triángulo con un ángulo de 60° y los dos lados que lo forman midan tres y cuatro pulgadas. Trazar las tres medianas y señalar el baricentro.

11. Construir un triángulo que mida de un lado 7 cm y los dos ángulos adyacentes midan 30° y 70°. Trazar las tres alturas y señalar el ortocentro.

12. Construir un triángulo con un lado de 4 pulgadas y los ángulos adyacentes midan 40° y 50°. Trazar las bisectrices y señalar el incentro.

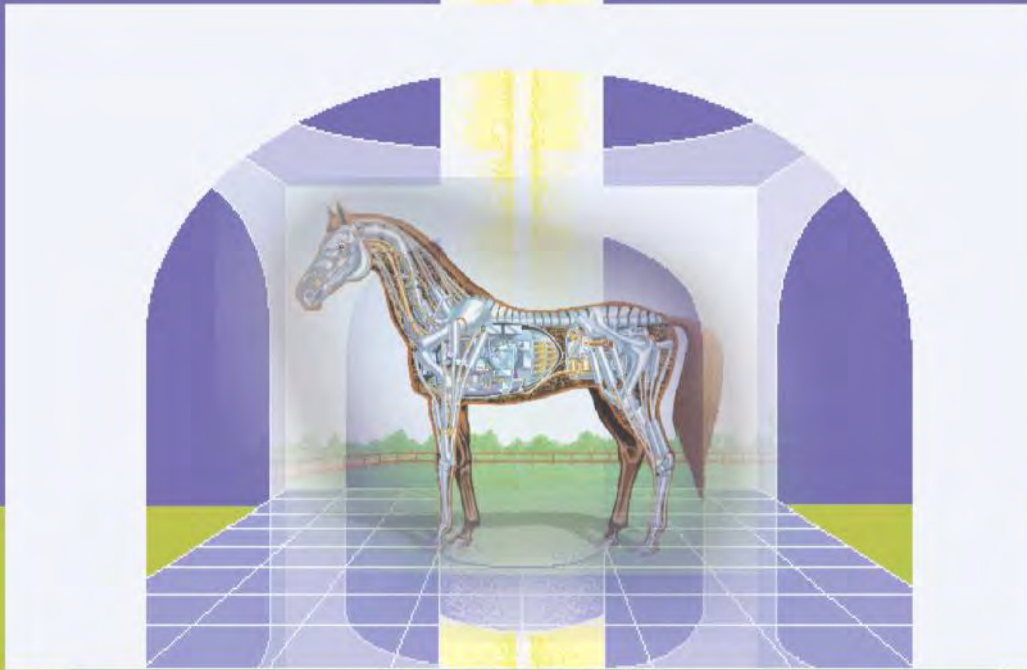
13. Construir un triángulo equilátero de 5 cm por lado. Trazar las mediatrices y señalar el circuncentro.

14. Construir un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 cm y 4 cm.

15. Construir un triángulo rectángulo con un cateto de 8 cm y una hipotenusa de 10 cm. Dibujar las tres alturas.

16. Construir un triángulo rectángulo con un cateto de 6 cm y un ángulo agudo de 50°. Dibujar las tres mediatrices.

17. Construir un triángulo rectángulo con una hipotenusa de 5 cm y un ángulo de 45°. Dibujar las tres medianas.



El punto de partida de las enseñanzas geométricas de Pitágoras era "la unidad que tiene una posición", todos los demás cuerpos geométricos son "pluralidad" porque están constituidos por un número infinito de puntos.

CAPÍTULO VII

IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

En las igualdades de los triángulos se dice que dos triángulos son congruentes si tienen tres pares de ángulos congruentes y tres pares de lados congruentes.

Sin embargo, existen algunos criterios o reglas que nos aseguran la congruencia de triángulos, por ejemplo:

Si dos triángulos tienen las siguientes características: si tienen dos lados y el ángulo comprendido; si tienen dos ángulos y el lado comprendido; si tienen sus lados comprendidos; si tienen sus lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos comprendidos, si tienen tres elementos respectivamente congruentes, entonces en cada caso significa que los triángulos son congruentes.

TEOREMA 1

"Dos triángulos son iguales si tienen un lado igual y respectivamente iguales los ángulos adyacentes a ese lado".

En las figuras 126 y 127 vemos que:

Hipótesis:

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$

Tesis : Δ ABC = Δ A′B′C′.

Demostración : Llevemos, según el postulado del movimiento, el Δ ABC sobre Δ A 'B 'C ' de manera que el vértice A coincida con el vértice A ' y el lado AB con el lado A′B′. Entonces:

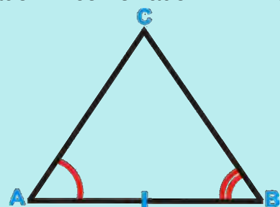


Figura 126

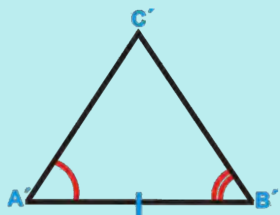


Figura 127

El vértice B coincidirá con el vértice B'. Porque $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ por hipótesis.

El lado $\overline{BC}$ coincidirá con $\overline{B'C'}$. Porque $\angle B = \angle B'$ por hipótesis.

El lado $\overline{AC}$ coincidirá con $\overline{A'C'}$. Porque $\angle A = \angle A'$ por hipótesis.

$\therefore$ El vértice C coincidirá con C '. Postulado (dos rectas que se cortan tienen un solo punto común).

Todos los elementos del ΔABC coincidieron con los elementos del $\Delta A'B'C'$.

$\therefore$ ABC = $\Delta A'B'C'$

TEOREMA 2

Teorema. "Dos triángulos son iguales si tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente iguales".

En las figuras 128 y 129 vemos que:

Hipótesis:

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\overline{AC} = \overline{A'C'}$; $\angle A = \angle A'$

Tesis : $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$

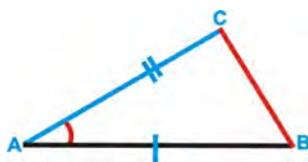


Figura 128



Figura 129

Demostración : Llevemos el ΔABC sobre el $\Delta A'B'C'$ de manera que el $\angle A$ coincida con el $\angle A'$. Postulado del movimiento.

El vértice B coincidirá con el vértice B'. Porque $\overline{AB} = \overline{A'C'}$ por hipótesis.

El vértice C coincidirá con el vértice C'. Porque $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ por hipótesis.

$\overline{BC}$ coincidirá con $\overline{B'C'}$. Postulado (dos puntos determinan una recta).

Todos los elementos han coincidido.

$\therefore \Delta ABC = \Delta A'B'C'$

En todo triángulo isósceles ABC, a lados iguales se oponen ángulos iguales. Basta considerar el triángulo dado y el mismo invertido AC B para ver que al estar superpuestos coinciden los ángulos de la base: el ángulo B con el C y el C con el B.

Teorema 3

Teorema. "Dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados respectivamente iguales".

En las figuras 130, 131 y 132 vemos que:

Hipótesis : $\overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{BC} = \overline{B'C'}; \overline{CA} = \overline{C'A'}$

Tesis : $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$

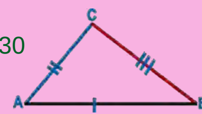


Figura 130

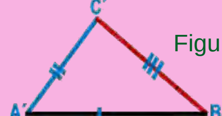


Figura 131

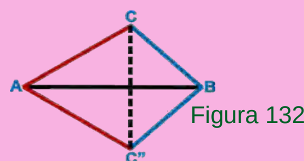


Figura 132

Construcción auxiliar. Llevemos el $\Delta A'B'C'$ sobre el Δ ABC, de manera que coincida con $\overline{AB}$ y el vértice C' en el semiplano opuesto al que contiene a C . Sea C'' la posición del vértice C'. Los lados $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ ocuparán las posiciones $\overline{AC''}$ y $\overline{BC''}$ respectivamente. Uniendo C con C'', se formarán $\Delta ACC'$ y $\Delta BCC''$;ambos isósceles, ya que $\overline{AC} = \overline{AC''}$ y $\overline{BC} = \overline{BC''}$ por hipótesis;entonces $ACC''=\angle ACC''$ $\angle AC''C$ y $\angle BCC''=\angle BC''C$ por ser ángulos en la base de triángulos isósceles.

Demostración:

$\angle ACC''=\angle AC''C$ Construcción;

$\angle BCC'' =\angle BC''C$ Construcción;

$\angle ACC''+\angle BCC'' =\angle AC''C+\angle BC''C$ (1)

Sumando miembro por miembro

Pero:

$\angle ACC''+\angle BCC''=\angle C$ (2) Suma de ángulos;

y $\angle AC''C + \angle BC''C = \angle C'' = \angle C'$ (3) Suma de ángulos;

Sustituyendo (2) y (3) en (1) Axioma; tenemos:

$\angle C = C'$

$\therefore$ $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ Hipótesis:

$\overline{BC} = \overline{B'C'}$ Hipótesis:

$\angle C = \angle C'$ Demostrado;

$\therefore$ $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ Por el segundo caso

IGUALDAD DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Todos los **triángulos rectángulos** tienen un elemento **igual**, el ángulo recto ; por lo que basta que se cumplan sólo dos condiciones para que se dé la igualdad.

Respecto de la igualdad de triángulos rectángulos, observemos los siguientes casos:

1) La hipotenusa y un ángulo agudo iguales (Figs. 133 y 134):

$\angle A = \angle A' = 1R$

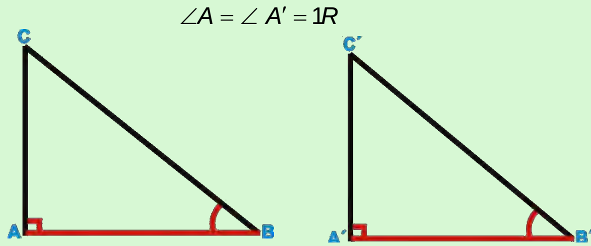


Figura 133 Figura 134

Si $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ y $\angle B = \angle B'$ entonces $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ porque al ser iguales los ángulos $\angle B$ y $\angle B'$ también lo son $\angle C$ y $\angle C'$, que son complementos de ángulos iguales. De este modo, los dos triángulos tienen iguales un lado y los dos ángulos adyacentes.

2) Un cateto y un ángulo agudo iguales.

a) Un cateto y el ángulo adyacente (Figs. 135 y 136):

$\angle A = \angle A' = 1R$

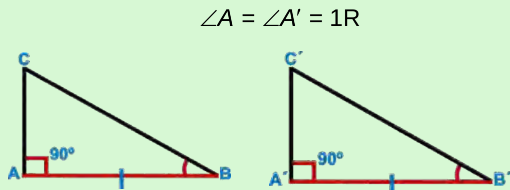


Figura 135 Figura 136

Si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\angle B = \angle B'$ entonces $\Delta\, ABC = \Delta\, A'B'C'$ por tener un lado igual y los dos ángulos adyacentes iguales.

b) Un cateto y el ángulo opuesto (Figs. 137 y 138):

$\angle A = \angle A' = 1R$

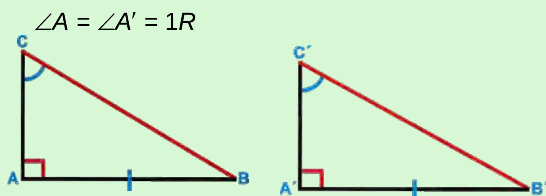


Figura 137 Figura 138

Si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\angle C = \angle C'$ entonces $\Delta\, ABC = \Delta\, A'B'C'$ porque al ser iguales los ángulos $\angle C$ y $\angle C'$ también lo son $\angle B$ y $\angle B'$, que son sus complementos. Así que los dos triángulos tienen iguales un lado y los dos ángulos adyacentes.

3) Los dos catetos iguales (Figs. 139 y 140):

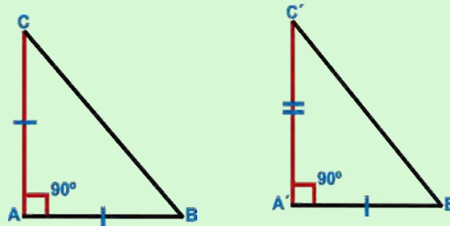


Figura 139 Figura 140

Si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ entonces $\Delta\, ABC = \Delta\, A'B'C'$ por tener dos lados iguales e igual el ángulo comprendido, ya que $\angle A = \angle A' = 1R$.

4) La hipotenusa y un cateto iguales (Figs. 141 y 142):

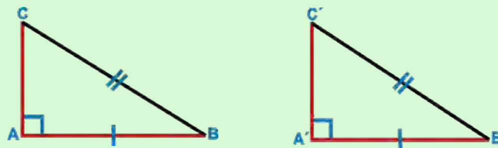


Figura 141 Figura 142

Si $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ y $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ entonces $\Delta ABC = \Delta A'B'C$. Cuando lleguemos al Teorema de Pitágoras veremos que si dos triángulos rectángulos tienen iguales la hipotenusa y un cateto, también es igual el otro cateto, de lo que resulta que los dos triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen sus tres lados iguales y, por lo tanto, son iguales.

APLICACIONES DE LA IGUALDAD DE LOS TRIÁNGULOS

1) Para demostrar que dos segmentos son iguales suele corroborarse que se oponen a ángulos iguales en triángulos iguales.

2) Para demostrar que dos ángulos son iguales suele corroborarse que dichos ángulos se oponen a lados iguales en triángulos iguales.

EJERCICIOS

1. Si $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AB}$; demostrar que: $\Delta ABD = \Delta ABC$.

2. Si $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$; demostrar que: $\Delta\, ABD = \Delta\, ABC$.

3. Si $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\angle C = \angle D$; demostrar que: $\Delta\, ABD = \Delta\, ABC$.

4. Si $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\angle 1 = \angle 2$; demostrar que: $\Delta\, ABD = \Delta\, ABC$.

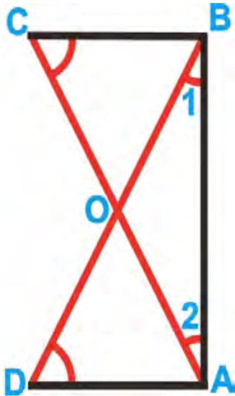


Figura 143 (Ejercs. 1-4)

5. Si $\angle 1 = \angle 2$ y $\angle 3 = \angle 4$, demostrar que: $\Delta\, ABC = \Delta\, ABD$.

6. Si $\overline{AC} = \overline{AD}$ y $\angle 1 = \angle 2$; demostrar que: $\Delta\, ABC = \Delta\, ABD$.

7. Si $\overline{AC} = \overline{AD}$ y $\overline{BC} = \overline{BD}$; demostrar que: $\Delta ABC = \Delta ABD$.

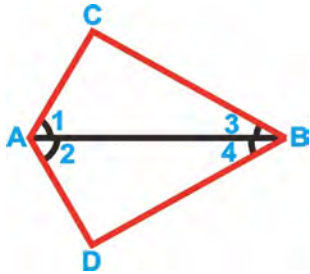


Figura 144 (Ejercs. 5 a 7)

8. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overline{AB} = \overline{CD}$; demostrar que: Δ AOB = Δ COD .

9. Si O es el punto medio de $\overline{AD}$ y de $\overline{BC}$, demostrar que: $\Delta AOB = \Delta COD$.

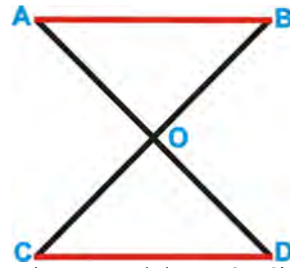


Figura 145 (Ejercs. 8 y 9)

10. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$; demostrar que: $\Delta ACD = \Delta ACB$.

11. Si $\overline{CD} = \overline{AB}$ y $\angle 1 = \angle 3$; demostrar que: $\Delta ACD = \Delta ACB$ y $\overline{BC} = \overline{AD}$.

12. Si $\overline{AD} = \overline{BC}$ y $\overline{CD} = \overline{AB}$; demostrar que $\Delta ACD = \Delta ACB$ y $\angle D = \angle B$.



Figura 146 (Ejercs. 10 a 12)

13. ΔABC es isósceles; D y F son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Demostrar que: $\overline{AF} = \overline{BD}$ y $\angle 1 = \angle 2$.

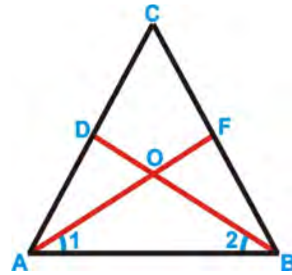


Figura 147 (Ejerc. 13)

14. ΔABC es isósceles; D y F son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Demostrar que: $\overline{AO} = \overline{BO}$, $\overline{DO} = \overline{FO}$ y $\angle 3 = \angle 4$.

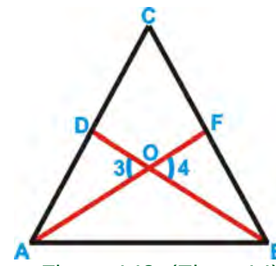


Figura 148 (Ejerc. 14)

15. Si $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$, $\angle 1 = \angle 2$ y $\overline{AD} = \overline{CD}$; demostrar que : $\Delta ABD = \Delta CBD$.

16. Si $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ y $\angle A = \angle C$; demostrar que $\Delta ABD = \Delta CBD$.

17. Si $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ y $\angle 1 = \angle 2$; demostrar que: $\Delta ABD = \Delta CBD$; $\overline{AD} = \overline{CD}$; $\angle A = \angle C$.

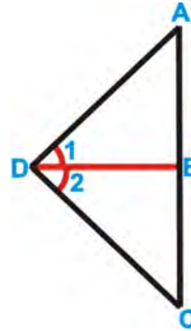


Figura 149 (Ejercs. 15 a 17)

18. Si $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ y B es el punto medio de $\overline{AC}$; demostrar que: $\angle 1 = \angle 2$.

19. Si $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ y $\overline{AD} = \overline{CD}$; demostrar que $\overline{AB} = \overline{BC}$.

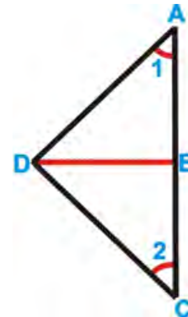
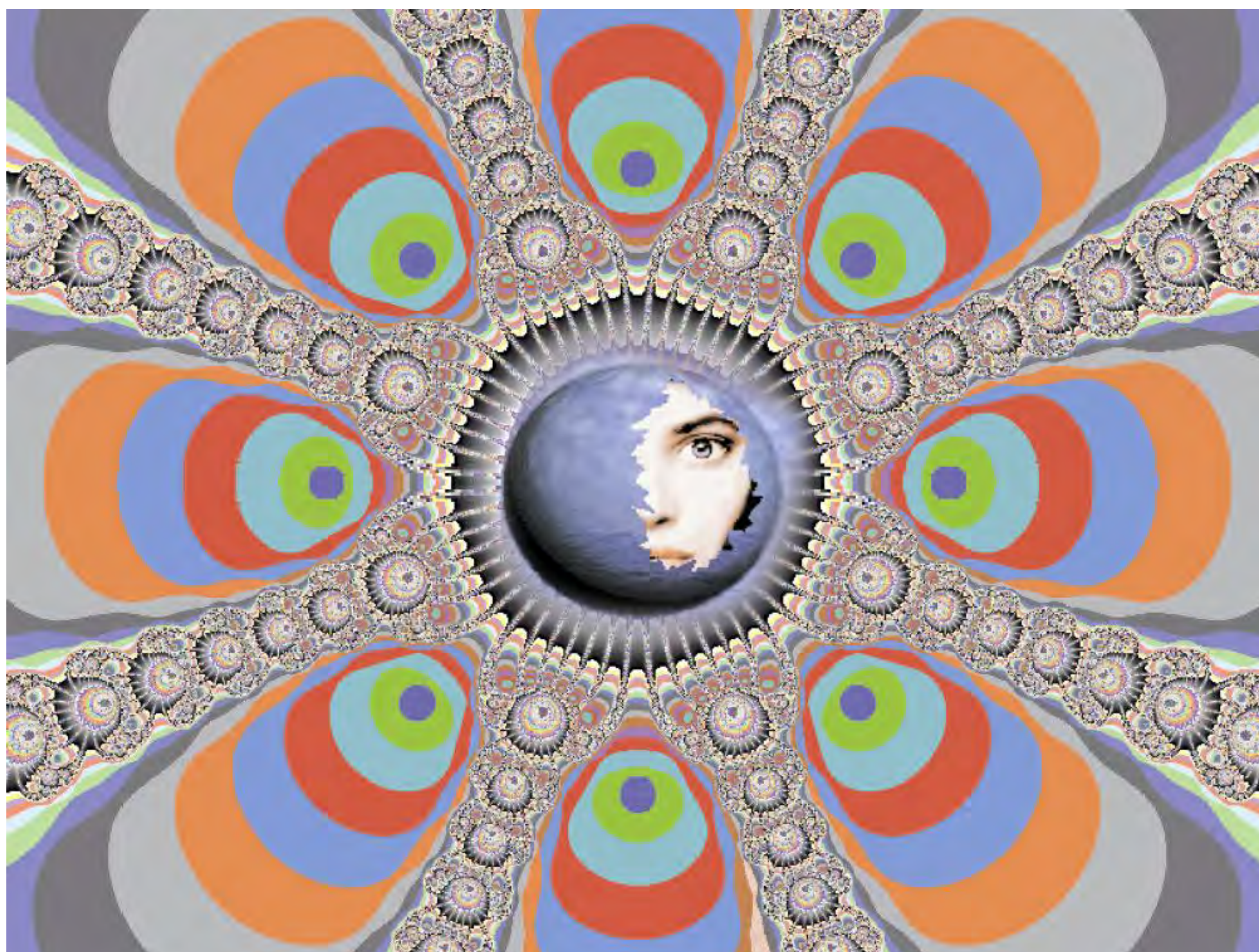


Figura 150 (Ejercs. 18 y 19)



Platón sostenía la idea de que Dios dio a todas las cosas la mayor perfección posible componiendo sus elementos (fuego, tierra, aire y agua) por medio de los cuerpos geométricos más perfectos: tetraedro, octaedro, icosaedro y cubo.

CAPÍTULO VIII

POLÍGONOS

Los polígonos son aquellas figuras planas limitadas por rectas, cuando sus lados y sus ángulos son iguales, se denominan regulares. El triángulo y el cuadrado son polígonos regulares: 3 y 4 lados respectivamente. Los ángulos externos de un polígono regular de n lados son iguales a la n ª parte de cuatro rectos.

Algunas propiedades de los triángulos se extienden a los polígonos convexos, algunas de ellas nos indican que: en todo polígono convexo la suma de los ángulos internos es igual a tantas veces dos rectos cuantos lados tiene el polígono menos dos; en todo polígono convexo la suma de los ángulos externos es igual a cuatro rectos; en todo polígono convexo un lado es menor que la suma de los demás.

DEFINICIONES

Un polígono es la porción de plano limitada por una curva cerrada que se llama línea poligonal misma que puede ser convexa (Fig. 151) o cóncava (Fig. 152).

Los lados y vértices de la poligonal son los mismos del **polígono**, cuyos ángulos internos o interiores están formados por cada dos lados consecutivos, y los ángulos exteriores o externos son los adyacentes a los interiores, obtenidos al prolongar los lados en un mismo sentido.

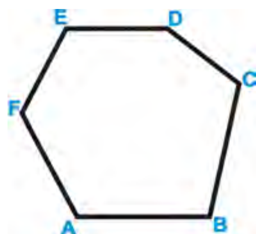


Figura 151

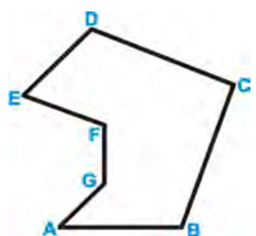


Figura 152

La figura 153 nos muestra:

Ángulos internos: $\left\{ \begin{array}{l} \angle ABC \ \angle DEF \\ \angle BCD \ \angle EFA \\ \angle CDE \ \angle FAB \end{array} \right.$

Ángulos externos: $\left\{ \begin{array}{l} \angle 1 \ \ \angle 4 \\ \angle 2 \ \ \angle 5 \\ \angle 3 \ \ \angle 6 \end{array} \right.$

Los lados del polígono son los mismos de la poligonal ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, etc.) y su número de lados es igual al número de vértices y ángulos. La línea poligonal que limita al polígono se llama contorno y su perímetro se obtiene de la longitud de su contorno, es decir, de la suma de sus lados.

Perímetro =

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA}$$

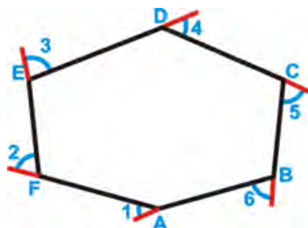


Figura 153

El **polígono regular** (Fig. 154) tiene todos sus lados y ángulos iguales, o sea que es equilátero y equiángulo.

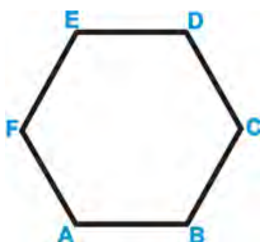


Figura 154

Según el número de lados, los polígonos reciben nombres especiales, como vemos en esta lista:

N° de lados	Nombre
tres	triángulo
cuatro	cuadrilátero
cinco	pentágono
seis	hexágono
siete	eptágono
ocho	octágono
nueve	eneágono
diez	decágono
once	undecágono
doce	dodecágono
quince	pentedecágono

Los polígonos de 13, 14, 16, 17, 18, 19 lados, etc. no tienen un nombre especial.

DIAGONAL

La **diagonal** es un segmento determinado por dos vértices no consecutivos; por ejemplo, en la figura 155 los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales.

Teorema

"La suma de los ángulos interiores (S_i) de un polígono convexo es igual a tantas veces dos ángulos rectos como lados menos dos tiene el polígono".

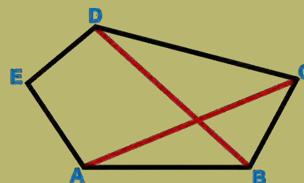


Figura 155

Hipótesis: $\angle A, \angle B, \angle C$, etc., son los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados.

Tesis: $S_i = \angle A + \angle B + \cdots = 2R$ (n-2)

Construcción auxiliar: Desde un vértice cualquiera, tracemos todas las diagonales que partan de él.
Este polígono quedará descompuesto en *n - 2* triángulos.

Demostración: La suma de los ángulos interiores de los *n - 2* triángulos es igual a la suma de los ángulos interiores del polígono.

La suma de los ángulos interiores de cada triángulo vale dos rectos, es decir *2R.*

Como el número de triángulos en que se ha descompuesto el polígono de n lados es *n - 2*, resulta:

S_i = Suma de los ángulos interiores del polígono = *2R (n - 2).*

Aplicando la fórmula al polígono de la figura 156, tenemos:

$$S_i = 2R\,(6-2) = 8R$$

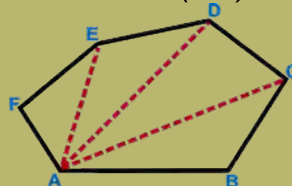


Figura 156

VALOR DE UN ÁNGULO INTERIOR DE UN POLÍGONO REGULAR

Dado que el polígono regular tiene todos sus ángulos interiores iguales, hallaremos el valor "*i* " de uno de ellos dividiendo la suma entre el número "n " de ángulos.

$$i = \frac{S_i}{n}$$

Y como $S_i = 2R\,(n-2)$, resulta:

$$i = \frac{2R(n-2)}{n}$$

Teorema

"La suma de los ángulos exteriores (S_e) de todo polígono convexo es igual a cuatro ángulos rectos" (Fig. 157).

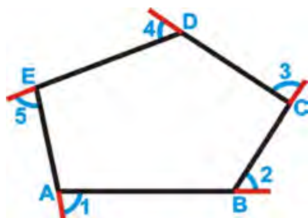


Figura 157

Hipótesis : $\angle 1$, $\angle 2$, etc. · · · son los ángulos exteriores de un polígono convexo de *n* lados.

Tesis : $S_e = \angle 1 + \angle 2 + \cdots = 4R$

Demostración: El ángulo exterior y el ángulo interior en cada vértice suman dos rectos, por ser adyacentes. Al multiplicar este valor por el número de vértices "n ", tendremos la suma de todos los ángulos interiores, más la suma de todos los ángulos exteriores, es decir:

$$S_i + S_e = 2R \cdot n$$

de donde $S_e = 2R \cdot n - S_i$; (1)

pero: $S_i = 2R\,(n-2)$ (2)

Sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$S_e = 2Rn - 2R\,(n-2);$

$S_e = 2Rn - 2Rn + 4R$; $\therefore\ S_e = 4R$

VALOR DE UN ÁNGULO EXTERIOR DE UN POLÍGONO REGULAR

Como todos los ángulos interiores de un polígono regular son iguales, los exteriores también lo serán. Para hallar el valor "*e* " de un ángulo exterior, dividimos la suma de todos ellos entre el número de ángulos, es decir:

$$e = \frac{Se}{n}$$

y como $S_e = 4R$, resulta:

$$e = \frac{4R}{n}$$

Teorema

"El número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice es igual al número de lados menos tres".

Hipótesis: ABC · · · es un polígono de n lados; d = número de diagonales desde un vértice.

Tesis: $d = n - 3$

Demostración: Si desde un vértice cualquiera se trazan todas las diagonales posibles, siempre habrá tres vértices a los cuales no se puede trazar diagonal: el vértice desde el cual se trazan y los dos contiguos.
Como el número de vértices es igual al número de lados n, resulta:

$$d = n - 3$$

Aplicamos la fórmula al pentágono de la figura 158: *d* = número de diagonales desde un vértice = 5-3=2.

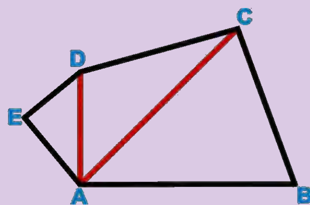


Figura 158

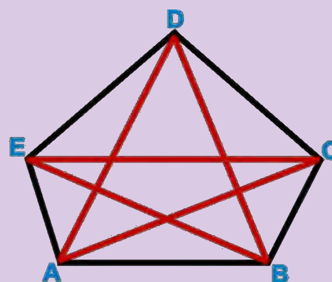


Figura 159

Teorema

"Si n es el número de lados del polígono, el número total de diagonales *D* que pueden trazarse desde todos los vértices está dado por la fórmula $D = \frac{n(n-3)}{2}$

Hipótesis: ABC · · · es un polígono de *n* lados.

D = número total de diagonales

Tesis : $D = \frac{n(n-3)}{2}$

Demostración: Desde un vértice pueden trazarse *n - 3* diagonales.

Como hay n vértices, el número de diagonales será n (*n - 3*). Pero como cada diagonal une dos vértices, contamos doble número de diagonales, por tanto:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Si aplicamos la fórmula al pentágono de la figura 159 tendremos:

$$D = \frac{5(5-3)}{2} = 5$$

Teorema

"Dos polígonos son iguales si pueden descomponerse en igual número de triángulos respectivamente iguales y dispuestos del mismo modo".

Hipótesis: *ABCDE* y *A 'B 'C 'D 'E '* (Figs. 160 y 161) son dos polígonos tales que:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$
$\Delta ACD = \Delta A'C'D'$
$\Delta ADE = \Delta A'D'E'$

Tesis: $ABCDE = A'B'C'D'E'$

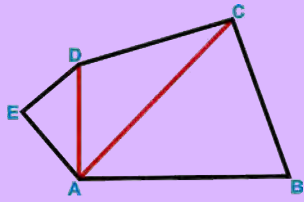


Figura 160

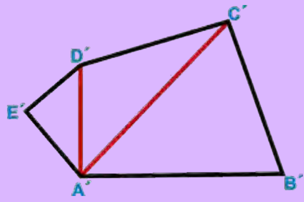


Figura 161

Demostración: Siendo respectivamente iguales los triángulos en que han quedado descompuestos ambos polígonos, resulta:

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$
$\overline{BC} = \overline{B'C'}$
$\overline{CD} = \overline{C'D'}$
$\overline{DE} = \overline{D'E'}$
$\overline{EA} = \overline{E'A'}$
} por ser lados de triángulos iguales

Además:

$\angle B = \angle B'$
$\angle E = \angle E'$
} por oponerse a lados iguales en triángulos iguales

También:

$\angle A = \angle A'$
$\angle C = \angle C'$
$\angle D = \angle D'$
} por sumas de ángulos respectivamente iguales

Por tanto: ABCDE = A 'B 'C 'D 'E ' por tener lados y ángulos respectivamente iguales.

Recíproco: "Si dos polígonos son iguales, se pueden descomponer en igual número de triángulos respectivamente iguales e igualmente dispuestos".

EJERCICIOS

1. Determinar el polígono regular cuyo ángulo exterior vale 60°.
R. Hexágono

2. Determinar el polígono regular cuyo ángulo exterior vale 90°.
R. Cuadrado

3. Calcular el número de diagonales que se pueden trazar desde el vértice de un pentágono.
R. 2

4. Calcular el número de diagonales que se pueden trazar desde el vértice de un octágono.
R. 5

5. Calcular el número de diagonales que se pueden trazar desde el vértice de un decágono.
R. 7

6. ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 3 diagonales, desde un vértice?
R. Hexágono

7. Hallar la suma de los ángulos interiores de un cuadrado.
R. 360°

8. Hallar la suma de los ángulos interiores de un octágono.
R. 1080°

9. Hallar la suma de los ángulos interiores de un pentágono.
R. 540°

10. ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 540°?
R. Pentágono

11. ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 1260°?
R. Eneágono

12. ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 1800°?
R. Dodecágono

13. Hallar el valor de un ángulo interior de un hexágono regular.
R. 120°

14. Hallar el valor de un ángulo interior de un dodecágono regular.
R. 150°

15. Hallar el valor de un ángulo interior de un decágono regular.
R. 144°

16. Determinar el polígono regular cuyo ángulo interior vale 60°.
R. Triángulo

17. Determinar el polígono regular cuyo ángulo interior vale 90°.
R. Cuadrado

18. Determinar el polígono regular cuyo ángulo interior vale 135°.
R. Octágono

19. Hallar la suma de los ángulos exteriores de un eptágono.
R. 360°

20. Hallar el valor de un ángulo exterior de un octágono regular.
R. 45°

21. Hallar el valor de un ángulo exterior de un decágono regular.
R. 36°

22. Hallar el valor de un ángulo exterior de un polígono regular de 20 lados.
R. 18°

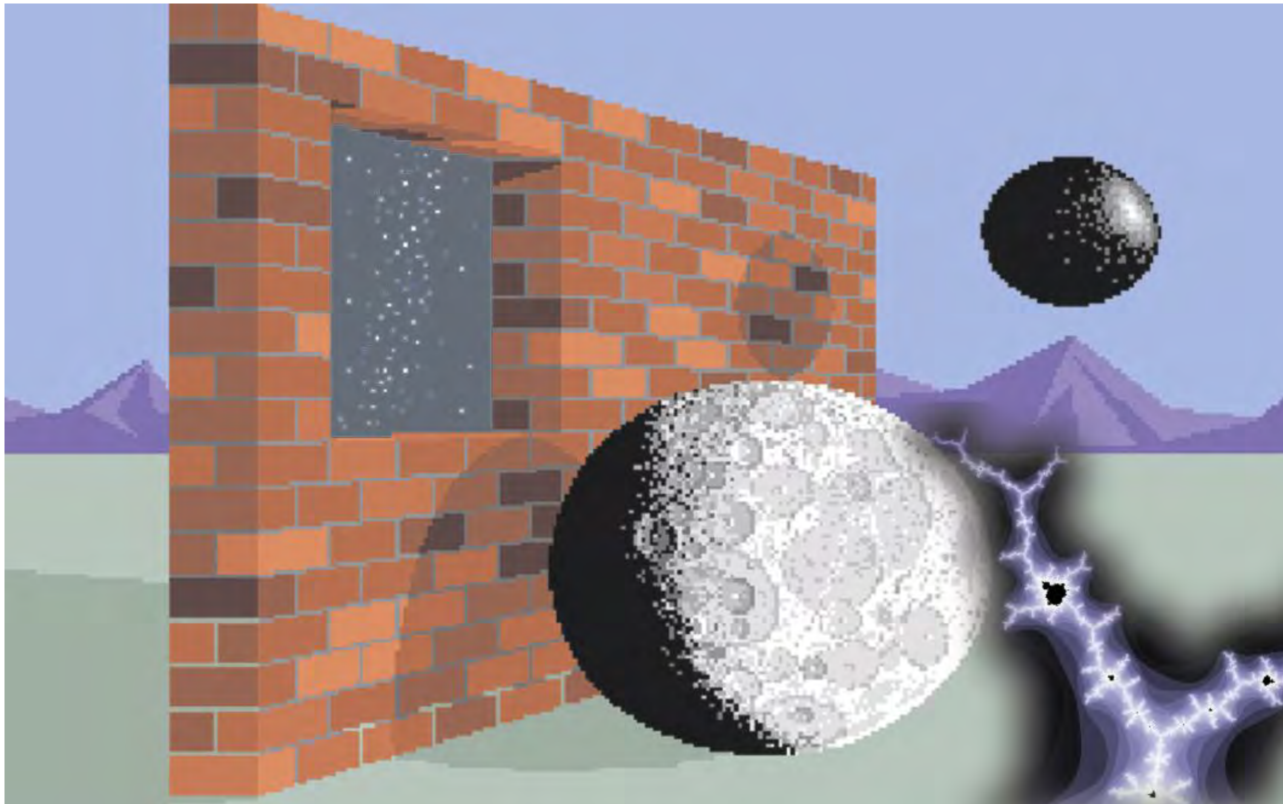
23. ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo exterior vale 120°?
R. Triángulo

24. Calcular el número total de diagonales que se pueden trazar en un octágono
R. 20.

25. Calcular el número total de diagonales que se pueden trazar en un decágono.
R. 35.

26. ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 6 diagonales, desde un vértice?
R. Eneágono

27. ¿Cuál es el polígono en el cual se pueden trazar 20 diagonales en total?
R. Octágono



Hipócrates de Quio sentó las bases del método de "reducción", o sea "transformar un problema en otro ya resuelto", fue el primero en usar las letras en las figuras de Geometría. Logró que la Geometría dejara de ser una técnica, para tomar el rango de "ciencia deductiva".

CAPÍTULO IX

CUADRILÁTEROS

Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados, pueden ser cóncavos o convexos. Entre los cuadriláteros convexos figuran los trapecios y los paralelogramos. Si los vértices de un cuadrilátero no están todos en un plano, el cuadrilátero es alabeado; si están en una esfera y sus lados son arcos de círculos máximos, es un cuadrilátero esférico.

El cuadrilátero completo es una figura plana formada por cuatro rectas, tres de las cuales no concurrentes en un punto, y los seis puntos intersecciones de esas rectas de dos en dos, que son los vértices del cuadrilátero. Las tres rectas que unen los vértices, sin ser lados del cuadrilátero, son las diagonales. La propiedad fundamental del cuadrilátero completo es que en cada diagonal dos vértices son separados armónicamente por otras diagonales. Así el cuadrilátero de lados $x\,x'$, $y\,y'$, $x\,x'$, $t\,t'$ tiene por vértices *A, B, C, D, E, F,* y por diagonales *AC, BD, EF.*

CARACTERÍSTICAS

El **cuadrilátero** es el polígono de cuatro lados. Los **lados opuestos** no tienen ningún vértice común.

En la figura 162, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son pares de lados opuestos

Los **lados consecutivos** sí tienen un vértice común. En la figura 162:

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ $\quad$ $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$

$\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ $\quad$ $\overline{DA}$ y $\overline{AB}$

son pares de lados consecutivos.

Los **vértices opuestos** son los que no pertenecen a un mismo lado, y los **ángulos opuestos** son los que tienen vértices opuestos. En la figura 162 vemos que A y C, B y D son pares de vértices opuestos.

Postulado 1: "La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero vale 4 ángulos rectos".

Demostración: La suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera es:

$S_i = 2R\ (n - 2)$ (1);

En este caso observamos que:

$n = 4$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$S_i = 2R\ (4 - 2) = 4R$

Postulado 2: "Desde un vértice de un cuadrilátero sólo se puede trazar una diagonal".

El número de diagonales desde un vértice, en un polígono, está dado por la fórmula:

$d = n - 3$ (1)

En este caso:

$n = 4$ (2)

Sustituyendo (2) en (1):

$d = 4 - 3 = 1$

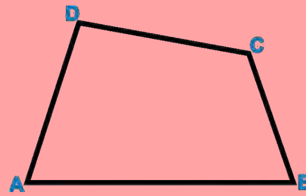


Figura 162

El número total de diagonales que se pueden trazar en un cuadrilátero es 2.

El total de diagonales de un polígono está dado por la fórmula:

$$D = \frac{n(n-3)}{2} \quad (1)$$

Dado que se trata de un cuadrilátero, tenemos:

$n = 4$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$D = \frac{4(4-3)}{2} = \frac{4(1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS

Los **cuadriláteros se clasifican** según el paralelismo de sus lados opuestos, de modo que si éstos son paralelos dos a dos, la figura se llama paralelogramo (Figs. 163, 164, 165, 166).

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

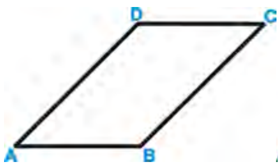


Figura 163

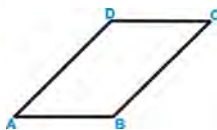


Figura 164

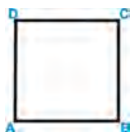


Figura 165

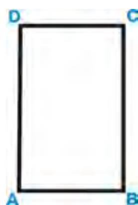


Figura 166

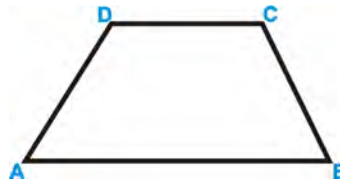


Figura 167

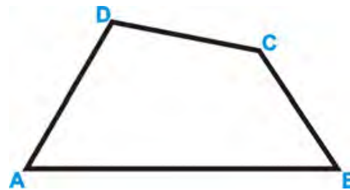


Figura 168

Si sólo hay paralelismo en un par de los lados opuestos, se le llama trapecio (Fig. 167).

Cuando no existe paralelismo alguno, se le llama **trapezoide** (Fig. 168).

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son paralelos. $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ no son paralelos.

CLASIFICACIÓN DE LOS PARALELOGRAMOS

Los paralelogramos se clasifican de la siguiente manera:

1) Rectángulo, que tiene los cuatro ángulos iguales y los lados contiguos desiguales (Fig. 169).

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$

$\overline{AB} \neq \overline{BC}$

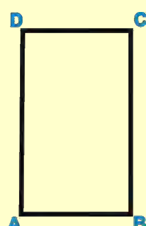


Figura 169

2) Cuadrado, con los cuatro ángulos iguales y los cuatro lados iguales (Fig. 170).

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D \qquad \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

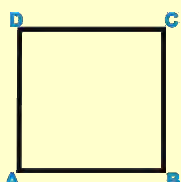


Figura 170

3) Romboide, que tiene los lados y los ángulos contiguos desiguales (Fig. 171).

$\angle A \neq \angle B$

$\overline{AB} \neq \overline{BC}$

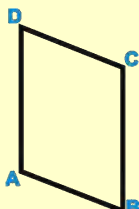


Figura 171

4) Rombo, que tiene los cuatro lados iguales y los ángulos contiguos desiguales (Fig. 172).

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} \qquad \angle A \neq \angle B$

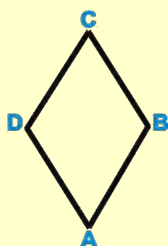


Figura 172

CLASIFICACIÓN DE LOS TRAPECIOS

Por otra parte, los **trapecios** se clasifican en: **rectángulos** (que tienen dos ángulos rectos), **isósceles** (cuyos lados no paralelos son iguales) y **escalenos** (que no son rectángulos ni isósceles).

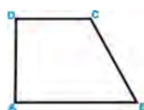


Figura 173

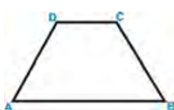


Figura 174

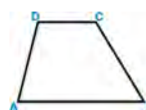


Figura 175

A los lados paralelos de los trapecios se les llama **bases**, y como éstas son desiguales, una es la base mayor y otra la base menor, y la distancia entre éstas, o sea, la perpendicular común, es la **altura** del trapecio.

El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos es la **base media** y tiene la importante propiedad de que es igual a la semisuma de las bases. También se le conoce como **paralela media** (Fig. 176).

$\overline{AB}$ = base mayor

$\overline{DC}$ = base menor

$\overline{DE}$ = altura

$\overline{MN}$ = base media

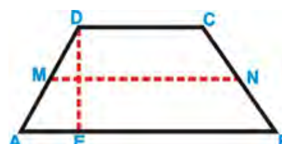


Figura 176

CLASIFICACIÓN DE LOS TRAPEZOIDES

Los **trapezoides** se clasifican en **simétricos** y **asimétricos**. Los simétricos tienen dos pares de lados consecutivos iguales, pero el primer par es diferente del segundo y los asimétricos son aquellos que carecen de simetría.

En los trapezoides simétricos las diagonales son perpendiculares y la que une los vértices donde concurren los lados iguales es bisectriz de los ángulos y eje de simetría de la figura.

Simétrico



Figura 177

Asimétrico



Figura 178

PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

A continuación veremos las propiedades de los paralelogramos:

1. Todo paralelogramo tiene iguales sus lados opuestos.

2. Todo paralelogramo tiene iguales sus ángulos opuestos.

3. Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.

4. En todo paralelogramo las diagonales se dividen mutuamente en partes iguales.

Propiedades particulares del rectángulo:

1. Un ángulo interior de un rectángulo vale un ángulo recto.
Siendo todos los ángulos iguales, el valor de un ángulo interior será:

$$\frac{4R}{4} = 1R$$

2. Un ángulo exterior de un rectángulo vale un ángulo recto. Si la suma de los ángulos exteriores es 360° y en el rectángulo los cuatro ángulos son iguales, que cada uno valdrá:

$$\frac{4R}{4} = 1R$$

3. Las diagonales de un rectángulo son iguales. Esto se demuestra por la igualdad de triángulos.

Propiedades particulares del rombo:

1. Las diagonales del rombo son perpendiculares.
2. Las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

Propiedades particulares del cuadrado:

1. Los ángulos del cuadrado son rectos.
2. Cada ángulo exterior del cuadrado vale un ángulo recto.
3. Las diagonales del cuadrado son iguales.
4. Las diagonales del cuadrado son perpendiculares.
5. Las diagonales del cuadrado son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

Todas estas propiedades permiten construir paralelogramos en una gran cantidad y variedad de casos.

Teorema
"Todo paralelogramo tiene iguales sus lados opuestos".

Hipótesis: ABCD (Fig. 179) es un paralelogramo.

Tesis: $\overline{AB} = \overline{CD}; \overline{BC} = \overline{AD}$

Construcción auxiliar: Se traza la diagonal $\overline{AC}$ y se forman los triángulos $\Delta\ ABC$ y $\Delta\ ADC$ que tienen el lado AC común.

Demostración:



Figura 179

En $\Delta\ ABC$ y $\Delta\ ACD$ tenemos:

$\overline{AC}$ = $\overline{\text{AC}}$ Lado común

También:

$\angle 1 = \angle 4$ Alternos internos entre $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\angle 2 = \angle 3$ Alternos internos entre $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Por tanto:

$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{BC} = \overline{AD}\end{array}\right\}$ Por oponerse a ángulos iguales en triángulos iguales.

Recíproco

"Si cada par de lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, también son paralelos y el cuadrilátero es un paralelogramo".

Hipótesis:

En el cuadrilátero ABCD (Figura 180) se verifica:

$\overline{AB} = \overline{DC}$; $\overline{AD} = \overline{BC}$

Tesis : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Construcción auxiliar:

Se traza la diagonal $\overline{AC}$ formándose los triángulos ΔABC y ΔADC
:

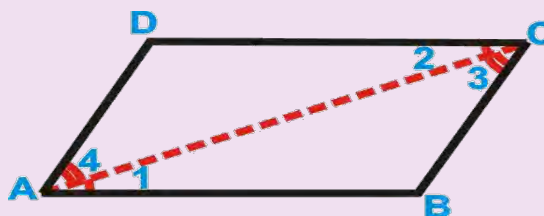


Figura 180

Demostración: En los Δ ABC y Δ ADC :

$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = \overline{DC} \\ \overline{AD} = \overline{BC}\end{array}\right\}$ Hipótesis

$\overline{AC} = \overline{AC}$ Identidad

Luego: $\Delta\ ABC = \Delta\ ADC$ Por tener sus tres lados iguales

Por tanto: $\angle 1 = \angle 2$ y $\angle 3 = \angle 4$ } Por ángulos opuestos a lados iguales en triángulos iguales.

Por tanto: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ } Por formar ángulos alternos-internos iguales con la diagonal $\overline{AC}$

$\therefore ABC$ es un paralelogramo Por definición.

EJERCICIOS

1. Construir un trapecio rectángulo cuyas bases midan 12 cm y 8 cm y la altura 5 cm. Trazar la base media y comprobar, por medición, que es igual a la semisuma de las bases.

2. Averiguar qué figura se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un rectángulo.

3. Averiguar qué figura se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un cuadrado.

4. Si un ángulo agudo de un trapecio isósceles mide 50°, ¿cuánto miden cada uno de los otros tres ángulos?

R. 50^0 , 130^0 , 130^0 .

5. Construir un trapezoide simétrico cuyas diagonales midan 10 cm y 6 cm, y uno de los lados mida 4 cm.

6. Construir un cuadrado de 5 cm de lado, trazar sus diagonales y comprobar, por medición, que son iguales y perpendiculares, que se dividen mutuamente en partes iguales y que son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

7. Construir un romboide con lados de 6 cm y 3 cm formando un ángulo de 120° y comprobar, por medición, que sus lados opuestos y sus ángulos opuestos son iguales y que las diagonales se dividen mutuamente en partes iguales.

8. Construir un rombo cuyo lado mida 6 cm y tenga un ángulo agudo de 60° y comprobar, por medición, que las diagonales son perpendiculares, se dividen mutuamente en partes iguales y son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

9. Construir un rectángulo con lados de 4 cm y 3 cm y trazar sus diagonales. ¿Las diagonales son iguales, son perpendiculares, se dividen mutuamente en partes iguales o son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen? Averiguarlo por medición.

10. Construir un cuadrado cuya diagonal mida 5 cm.

11. Construir un rombo cuyas diagonales midan 8 cm y 4 cm.

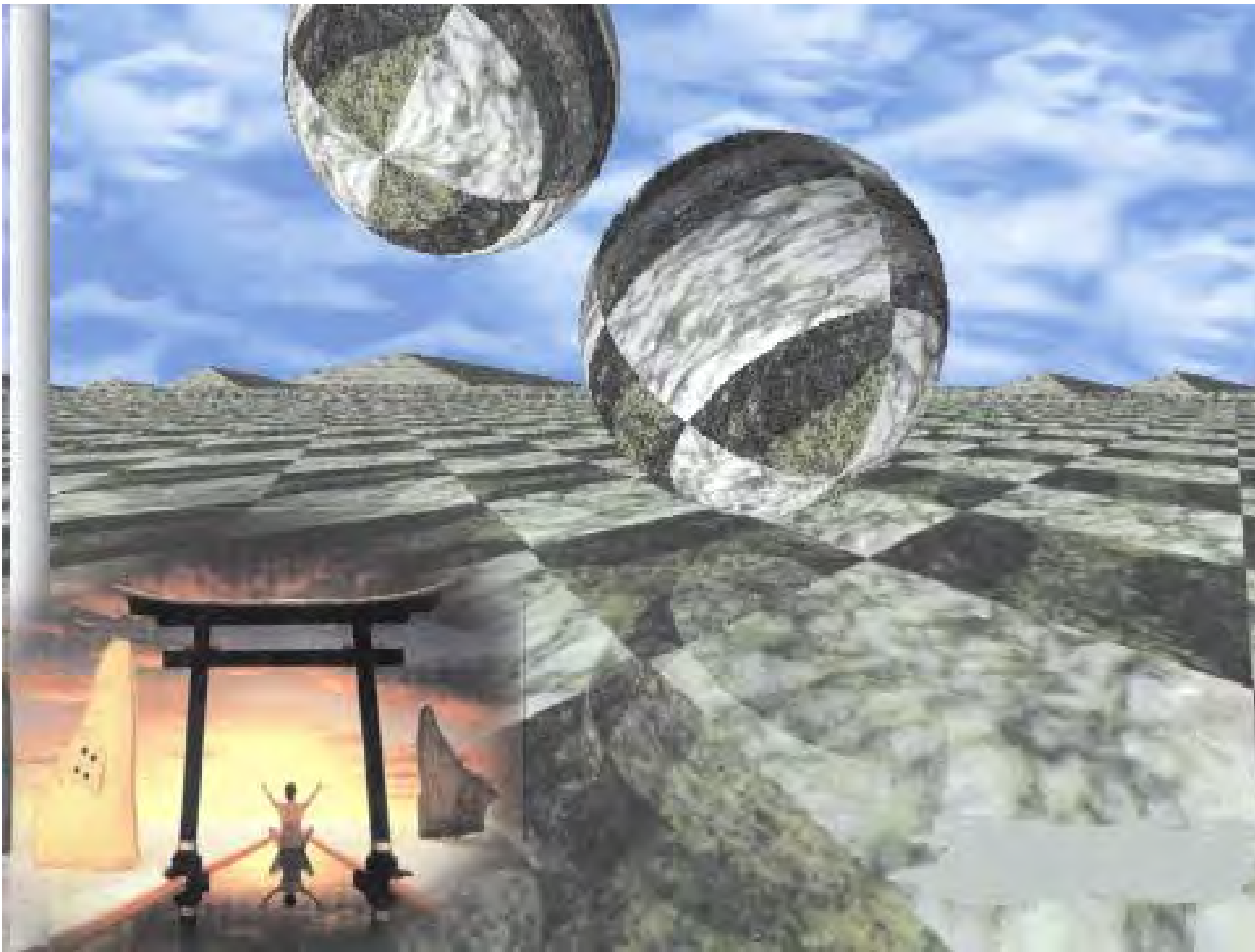
12. Construir un rectángulo que tenga un lado de 7 cm y una diagonal que mida 9 cm.

13. Construir un rombo que tenga un lado de 5 cm y una diagonal que mida 8 cm.

14. Un ángulo de un romboide mide 36°. ¿Cuánto mide cada uno de los otros tres?

R. 36^0, 144^0, 144^0.

15. Construir un trapecio cuyas bases midan 10 cm y 6 cm. Trazar la paralela o base media y comprobar, por medición, que su longitud es igual a la semisuma de las bases.



La Geometría griega alcanza uno de sus niveles más importantes gracias a Euclides. Sus Elementos fueron el punto de partida para que hiciera su aparición la Geometría Analítica.

CAPÍTULO X

SEGMENTOS PROPORCIONALES

"En toda proporción, la suma o diferencia de los antecedentes es a la suma o diferencia de los consecuentes, como cada antecedente es a su consecuente".

$$SI\ \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\ \text{también}\ \frac{a\pm a'}{b\pm b'}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

"En una proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos".

$$SI\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \text{también}\ ad=bc$$

REPASO DE LAS PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

"En toda proporción, la suma o diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es a su antecedente o consecuente, como la suma o diferencia del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su antecedente o consecuente".

$$SI\ \frac{a}{b} = \frac{a´}{b´}\ \text{también}\ \frac{a \pm b}{a} = \frac{a´ \pm b´}{a´}\ y\ \frac{a \pm b}{b} = \frac{a´ \pm b´}{b´}$$

"En una proporción un medio es igual al producto de los extremos dividido entre el otro medio" y "un extremo es igual al producto de los medios dividido entre el otro extremo".

$$SI\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ \text{también}\ a\frac{bc}{d}, b = \frac{ad}{c}, c = \frac{ad}{b}, d = \frac{bc}{a},$$

Se llama **cuarta proporcional** de tres cantidades a, b y c, a un valor x que cumple la condición:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Se llama **tercera proporcional** de dos cantidades a y b, a un valor x que cumple la condición:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Se llama **media proporcional** de dos cantidades a y b, a un valor x que cumple la condición:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

SERIE DE RAZONES IGUALES

Dada una serie de razones iguales:

$$\frac{a}{a´} = \frac{b}{b´} = \frac{c}{c´} = \frac{d}{d´} = ...$$

Se cumple que: la suma de todos los antecedentes es a la suma de todos los consecuentes, como un antecedente cualquiera es a su consecuente:

$$\frac{a}{a´} = \frac{b}{b´} = \frac{c}{c´} = \frac{d}{d´} = ... =$$

$$\frac{a}{a´} = \frac{b}{b´} = \frac{c}{c´} = \frac{d}{d´} = ...$$

RAZÓN DE DOS SEGMENTOS

La **razón de dos segmentos** es el cociente de sus medidas con la misma unidad.

Siendo los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (Figs. 181 y 182) y siendo u la unidad de medida

Si $\overline{AB}$=5u,el número 5 es la medida de $\overline{AB}$ con la unidad u.

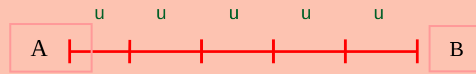


Figura 181

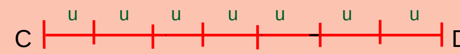


Figura 182

Si $\overline{CD}$=7u,el número 7 es la medida de $\overline{CD}$con la unidad u.

La razón de $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ es $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{5}{7}$;

y la razón de $\overline{CD}$ a $\overline{AB}$ es: $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{5}{7}$

La razón de dos segmentos es independiente de la unidad que se adopte para medirlos, siempre y cuando se use la misma unidad para ambos.

Asimismo, la razón puede ser un número entero o fraccionario, y en estos casos se dice que los dos segmentos son conmensurables entre sí.

Cuando la razón es un número irracional, los dos segmentos son inconmensurables entre sí.

La razón $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{5}{7}$

es inversa de la razón $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{5}{7}$, y viceversa .

Si a los segmentos a y b corresponden los segmentos a ' y b ', de tal manera que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a´}{b´}$$

se dice que son proporcionales.

DIVIDIR UN SEGMENTO EN OTROS DOS QUE ESTÉN EN UNA RAZÓN DADA

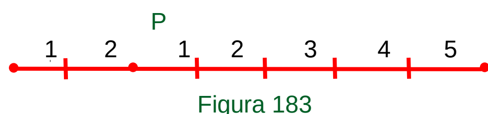


Figura 183

Siendo $\overline{AB}$ (Fig. 183) el segmento que se quiere dividir en una razón razón dada, por ejemplo $\frac{2}{5}$ dividimos el segmento $\overline{AB}$ en 2 + 5 = 7 partes iguales y vemos que el punto P lo divide en dos partes: $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, de modo que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{2}{5} \qquad (1)$$

¿Existirá otro punto P' que divida el segmento $\overline{AB}$ en la misma razón $\frac{2}{5}$?

En caso afirmativo se cumpliría

$$\frac{\overline{AP'}}{\overline{P'B}} = \frac{2}{5} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2) tenemos:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{P'B}}$$

Aplicando la propiedad de la suma de antecedentes y consecuentes en (1) y (2) tenemos:

$$\frac{\overline{AP}+\overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{2+5}{2}; \qquad \therefore \frac{\overline{AP}+\overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{7}{2}; \qquad (3)$$

$$\text{y} \quad \frac{\overline{AP'}+\overline{P'B}}{\overline{AP'}} = \frac{2+5}{2}; \qquad \therefore \frac{\overline{AP'}+\overline{P'B}}{\overline{AP'}} = \frac{7}{2} \qquad (4)$$

Comparando (3) y (4) tenemos:

$$\frac{\overline{AP}+\overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP'}+\overline{P'B}}{\overline{AP'}} \qquad (5)$$

Pero: $\overline{AP}+\overline{PB} = \overline{AP'}+\overline{P'B} = \overline{AB}$ (6)

Sustituyendo (6) en (5) tenemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP'}}; \qquad \therefore \overline{AP} = \frac{\overline{AB} \bullet \overline{AP'}}{\overline{AB}} = \overline{AP'}$$

Esta igualdad nos dice que P y P' coinciden, es decir, son el mismo punto. Por tanto sólo existe un punto que divide $\overline{AB}$ en la razón $\frac{2}{5}$.

.

Teorema 1

"Si varias paralelas determinan segmentos iguales en una de dos transversales, determinarán también segmentos iguales en la otra transversal"
(Fig. 184).

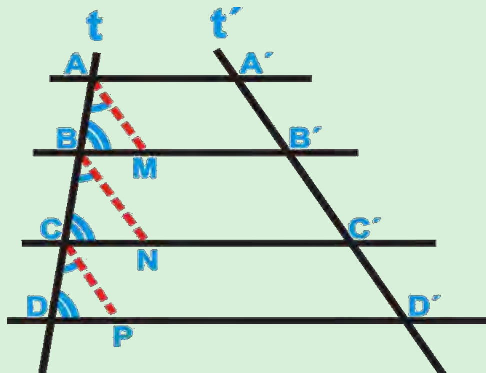


Figura 184

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'} \parallel \overleftrightarrow{DD'}$; t y t ' son dos transversales y

Tesis: $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'}$

Construcción auxiliar: Tracemos $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{BN}$ y $\overleftrightarrow{CP}$ paralelas a t '. Se forman los triángulos ABM, BCN y CDP, que son iguales por tener $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$

por hipótesis y los ángulos marcados del mismo modo por correspondientes.

Demostración:

En los Δ ABM , Δ BCN y Δ CDP :

$\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP}$ (1) Lados homólogos de triángulo iguales.

También:

$\overline{AM} = \overline{A'M'}$ (2)
$\overline{BN} = \overline{B'C'}$ (3)
$\overline{CP} = \overline{C'D'}$ (4)
} Lados opuestos de paralelogramos.

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1) tenemos:

$\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'}$ Que es lo que se quería demostrar.

TEOREMA 2

Teorema de Tales

"Si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales" (Fig. 185).

Hipótesis:

$\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$; t y t' transversales;
$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ segmentos correspondientes de t y $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ segmentos correspondientes de t'.

Tesis : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$

Construcción auxiliar : Llevemos una unidad cualquiera "u" sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ Su pongamos que $\overline{AB}$ la contiene m veces y $\overline{BC}$ la contiene n veces; entonces $\overline{AB} = mu$ y $\overline{BC} = nu$

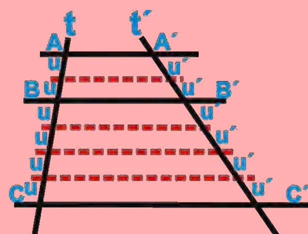


Figura 185

Tracemos paralelas por los puntos de unión de las unidades "u". Los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ quedarán divididos en los segmentos u' (iguales al teorema anterior) de manera que: $\overline{A'B'} = mu'$ y $\overline{B'C'} = nu'$

Demostración:

$\overline{AB} = mu$ (1) Construcción
y $\overline{BC} = nu$ (2) auxiliar

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{m}{n}$ (3)

La razón de dos segmentos es el cociente de sus medidas con la misma unidad.

Análogamente:

$\overline{A'B'} = mu'$ (4)

y $\overline{B'C'} = nu'$ (5)

$\therefore \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{m}{n} =$ (6)

Comparando (3) y (6):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

(carácter transitivo).

El teorema que acabamos de demostrar es absolutamente general y se verifica para cualquier número de paralelas así como para cualquier posición de las transversales (Fig. 186).

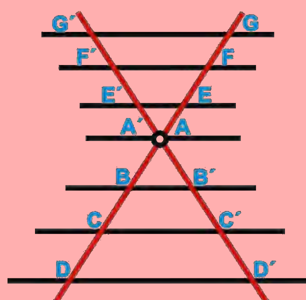


Figura 186

Si $\overleftrightarrow{GG'} \parallel \overleftrightarrow{FF'} \parallel \overleftrightarrow{EE'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'} \parallel \overleftrightarrow{DD}$

se cumple que:

$$\frac{\overline{GF}}{\overline{G'F'}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{F'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} =$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$$

Este teorema también es aplicable para los segmentos conmensurables o inconmensurables entre sí.

TEOREMA 3

"Toda paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales".

Hipótesis: En el Δ ABC (Fig. 187):
$\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

Tesis : $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$

Construcción auxiliar: Por C tracemos

RS $\parallel$ MN $\parallel$ AB

Demostración:

Como:

$\overleftrightarrow{RS} \parallel \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ Construcción

y $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son transversales, tenemos:

$\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$ Teorema de Tales

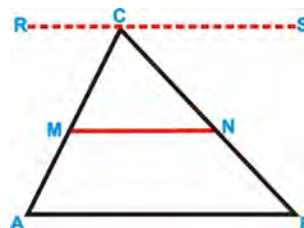


Figura 187

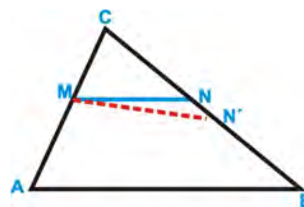


Figura 188

RECÍPROCO

"Si una recta, al cortar dos lados de un triángulo, los divide en segmentos proporcionales, dicha recta es paralela al tercer lado".

Hipótesis: En el ΔABC (Fig. 188): $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$

Tesis: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

Demostración: Si no fuera $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, por M podríamos trazar $\overleftrightarrow{MN'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y entonces tendríamos:

$\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN'}}{\overline{N'B}}$ (1) Propiedad dela paralela a un lado de un triángulo
.

Pero:

$\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$ (2) Por hipótesis.

Comparando (1) y (2) tenemos:

$\dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = \dfrac{\overline{CN'}}{\overline{N'B}}$ Carácter transitivo.

Esto es absurdo, ya que los dos puntos N y N ' no pueden dividir a $\overline{CB}$ en la misma razón. Entonces N y N coinciden y $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

Corolario

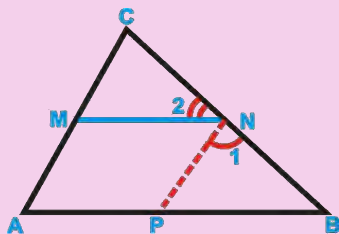
"El segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad".

Hipótesis: En el ΔABC (Fig. 189): M y N son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Tesis: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$

Figura 189



Construcción auxiliar:

Por N tracemos $\overleftrightarrow{PN} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, formándose el ΔBNP .

Demostración:

$\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1$ (1) $\overline{CM} = \overline{MA}$ por ser M el punto medio por hipótesis.

$\dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = 1$ (2) $\overline{CN} = \overline{NB}$ por ser N el punto medio por hipótesis.

Comparando (1) y (2) tenemos:

$\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$ Carácter transitivo.

$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{AB}$ Cuando una recta al cortar dos lados de un triángulo los divide en segmentos proporcionales, la recta es al tercer lado.

En los $\Delta\, CMN$ y $\Delta\, NPB$:

$\angle C = \angle 1$, $\angle B = \angle 2$ Correspondientes.

$\overline{CN} = \overline{NB}$ Por ser N punto medio. .

$\therefore \Delta\, CMN = \Delta\, NPB$

$\therefore \overline{MN} = \overline{PB}$ Lados homólogos de triángulos iguales.

Por otra parte:

$\overline{MN} = \overline{AP}$ Lados opuestos de un paralelogramo.

y $\overline{MN} = \overline{PB}$ Demostrado.

Sumando:

$2\overline{MN} = \overline{AP} + \overline{PB}$ (3)

y como

$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB}$ (4) Suma de segmentos

Sustituyendo (4) en (3):

$2\overline{MN} = \overline{AB} \therefore \overline{MN} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$ Que es lo que queríamos demostrar.

.

TEOREMA 4

(Propiedad de la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo): "La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados".

Hipótesis: En el $\Delta\, ABC$, $\overline{CD}$ es la bisectriz del $\angle C$ y $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ son los segmentos determinados por $\overline{CD}$ sobre $\overline{AB}$ (Fig. 190).

Tesis: $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$

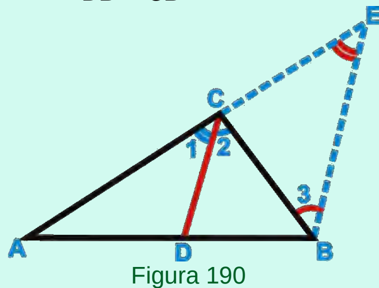


Figura 190

Construcción auxiliar: Por B tracemos $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y prolonguemos el lado $\overline{AC}$ hasta que corte a $\overline{BE}$ en E formándose el Δ BCE.

Demostración:

En el $\Delta\, ABE$:

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$ (1) Por ser $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{BE}$ por construcción.

Pero: $\angle E = \angle 1$ (2) Correspondientes;

$\angle 1 = \angle 2$ (3) Por hipótesis ($\overline{CD}$ es bisectriz).

Comparando (2) y (3):

$\angle E = \angle 2$ (4) Carácter transitivo;

y como $\angle 2 = 3$ (5) Alternos internos entre paralelas;

De (4) y (5): $\angle E = \angle\, 3$ Carácter transitivo;

$\therefore\ \overline{CE} = \overline{CB}$ (6) Por ser el $\Delta\, BCE$ isósceles.

Sustituyendo (6) en (1):

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ Que es lo que se quería demostrar.

Problema

Dados los tres lados de un triángulo, calcular los segmentos determinados en uno de sus lados por la bisectriz del ángulo opuesto (Fig. 191).

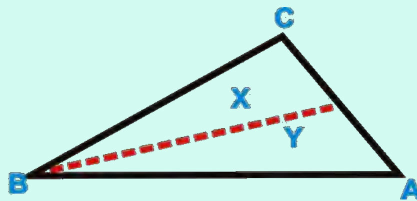


Figura 191

Siendo el Δ ABC cuyos lados miden a = 27 cm, b = 18 cm y c = 35 cm. Calcular los segmentos determinados en el lado b por la bisectriz del ángulo opuesto.

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{27}{35}$; Por el teorema anterior;

$\therefore\ \dfrac{x+y}{x} = \dfrac{27+35}{27}$; Aplicando una propiedad de las proporciones

Pero x + y = b = 18 cm;

$\therefore\ \dfrac{18}{x} = \dfrac{62}{27}$; Sustituyendo;

$\therefore\ x = \dfrac{18 \times 27}{62}$; Despejando x .

$\therefore\ x = \dfrac{486}{62} = 7\dfrac{52}{62} = 7\dfrac{26}{31}$

Análogamente:

$\dfrac{x+y}{y} = \dfrac{27+35;}{35}$

$\therefore\ \dfrac{18}{y} = \dfrac{62}{35}$;

$\therefore\quad y = \dfrac{18 \times 35}{62} = \dfrac{630}{62} = \dfrac{315}{31} = 10\dfrac{5}{31}$

Comprobación

x + y = b

$7\dfrac{26}{31} + 10\dfrac{5}{31} = 18$

PROBLEMAS GRÁFICOS SOBRE SEGMENTOS PROPORCIONALES

Dividir un segmento en partes proporcionales a otros segmentos:

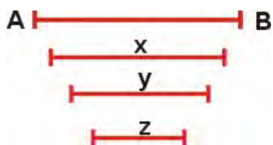


Figura 192

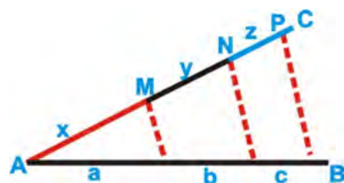


Figura 193

Siendo $\overline{AB}$ el segmento que se quiere dividir en partes proporcionales a los segmentos *x* , *y* , *z*.

A partir de un extremo del segmento $\overline{AB}$ (Figs.192 y 193), por ejemplo *A*, se traza la semirrecta $\overrightarrow{AC}$ que forma un ángulo con $\overline{AB}$. Sobre $\overrightarrow{AC}$ y a partir de *A* se llevan los segmentos consecutivos $\overline{AM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, iguales a *x* , *y* , *z*.

Unimos el extremo *P* de *z* con *B* y tenemos $\overline{PB}$ Trazando paralelas a $\overleftrightarrow{PB}$ por los puntos *M* y *N* determinamos sobre $\overline{AB}$ los segmentos *a*, *b*, *c* , que son los segmentos buscados.

Cuando se trata de más segmentos se procede análogamente.

DIVIDIR UN SEGMENTO EN PARTES PROPORCIONALES A VARIOS NÚMEROS

Dividir un segmento de 6 cms (Fig. 194) en partes proporcionales a 2, 3 y 4.

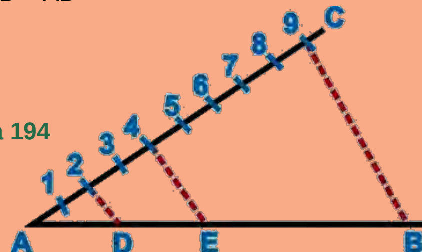
Sobre el extremo *A* del segmento $\overline{AB}$ que se va a dividir se traza la semirrecta $\overrightarrow{AC}$, sobre la cual se llevan 2 + 3 + 4 = 9 divisiones iguales cualesquiera. Se une el extremo 9 de la última con *B* y por 2 y 5, se trazan paralelas a la recta $\overleftrightarrow{9B}$, quedando $\overline{AB}$ dividido en los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EB}$ que son proporcionales a 2, 3 y 4, es decir, se cumple que:

$$\frac{\overline{AD}}{2}=\frac{\overline{DE}}{3}=\frac{\overline{EB}}{4}$$

y además:

$$\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EB}=\overline{AB}$$

Figura 194



HALLAR LA CUARTA PROPORCIONAL A TRES SEGMENTOS DADOS

Hallar la cuarta proporcional a tres segmentos dados *a*, *b*, *c* (Figs. 195 y 196).

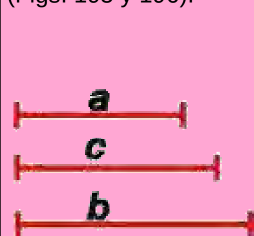


Figura 195

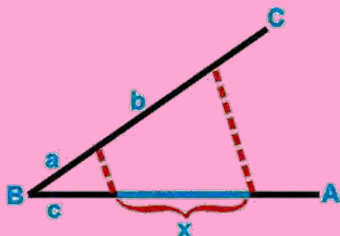


Figura 196

Se traza un ángulo cualquiera que llamaremos *ABC* , y sobre uno de sus lados, que puede ser el $\overrightarrow{BC}$, llevamos consecutivamente los segmentos *a* y *b*.

Sobre el lado $\overrightarrow{BA}$ llevamos el segmento *c* . Unimos el extremo de *a* con el de *c* y trazando por el extremo de *b* una paralela a dicho segmento, determinamos sobre $\overrightarrow{BA}$ el segmento *x* .

Se cumple que $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, donde x es la cuarta proporcional a los segmentos dados.

Hallar la tercera proporcional a dos segmentos dados, *a* y *b* (Fig. 197).



Figura 197

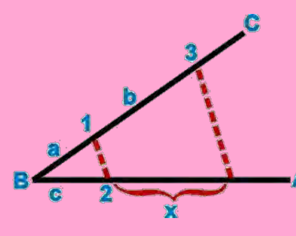


Figura 198

Se traza el ángulo *BAC* y sobre el lado $\overrightarrow{AC}$ se llevan consecutivamente los segmentos *a* y *b* . Sobre el lado $\overrightarrow{AB}$, y a partir de *A*, se lleva el segmento *b* . Unimos el punto 1 con el 2 y tenemos el segmento $\overline{1-2}$. Trazando por el punto 3 una recta paralela a $\overline{1-2}$ determinamos en $\overrightarrow{AB}$ el segmento *x* .

Se cumple: $\frac{a}{b}=\frac{b}{x}$ donde *x* es la tercera proporcional a los segmentos dados.

EJERCICIOS

Calcular los segmentos determinados por la bisectriz sobre el lado mayor de los triángulos cuyos lados a, b y c miden:

1. a = 24, b = 32, c = 40 **R.** $17\frac{1}{7} y 22\frac{6}{7}$

2. a = 20, b = 16, c = 12 **R.** $8\frac{4}{7} y 11\frac{3}{7}$

3. a = 8, b = 10, c = 6 **R.** $4\frac{2}{7} y 5\frac{5}{7}$

Calcular en cada uno de los triángulos siguientes, de lados a, b y c , los determinados por la bisectriz sobre el lado menor:

4. a = 6, b = 10, c = 14 **R.** $2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$

5. a = 8, b = 12, c = 16 **R.** $3\frac{3}{7}, 4\frac{4}{7}$

6. a = 10, b = 16, c = 18 **R.** $5\frac{5}{17}, 4\frac{12}{17}$

Encuentra las razones directas e inversas de los segmentos a y b, sabiendo que:

7. a = 18 m, b = 24 m **R.** $\frac{a}{b} = 0.75; \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

8. a = 3 dm, b = 9 dm **R.** $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}; \frac{b}{a} = 3$

9. a = 2.5 dm, b = 50 cm **R.** $\frac{a}{b} = 0.5; \frac{b}{a} = 2$

10. a = 3 km, b = 6 Hm **R.** $\frac{a}{b} = 5; \frac{b}{a} = \frac{1}{5}$

11. a = 5 Hm, b = 3 Dm **R.** $\frac{a}{b} = 16\frac{2}{3}; \frac{b}{a} = \frac{3}{50}$

Encuentra los dos segmentos, conociendo su suma (S) y su razón (r):

12. S = 6, r = $\frac{1}{2}$ **R.** 2 y 4

13. S = 8, r = $\frac{3}{5}$ **R.** 3 y 5

14. S = 12, r = $\frac{1}{2}$ **R.** 4 y 8

Encuentra los dos segmentos, conociendo su diferencia (D) y su razón (r):

15. D = 12, r = $\frac{5}{2}$ **R.** 20 y 8

16. D = 24, r = 5 **R.** 30 y 6

17. D = 10, r = 3 **R.** 15 y 5

Hallar la cuarta proporcional a los números a, b y c .

18. a = 2, b = 4, c = 8 **R.** 16

19. a = 3, b = 6, c = 9 **R.** 18

20. a = 4, b = 8, c = 10 **R.** 20

Hallar la tercera proporcional a los números a y b.

21. a = 4, b = 16 **R.** 64

22. a = 2, b = 12 **R.** 18

23. a = 8, b = 18 **R.** 40.5

Hallar la media proporcional a los números a y b.

24. a = 2, b = 4 **R.** $2\sqrt{2}$

25. a = 4, b = 6 **R.** $2\sqrt{6}$

26. a = 4, b = 8 **R.** $4\sqrt{2}$

Calcular los lados de un triángulo sabiendo cuál es su perímetro (P) y que los lados son proporcionales a los números dados.

27. P = 84 y lados proporcionales a 5, 7, 9 **R.** 20,28,36

28. P = 75 y lados proporcionales a 3, 5, 7 **R.** 15,25,35

29. P = 90 y lados proporcionales a 1, 3, 5 **R.** 10,30,50

Dividir gráficamente en partes proporcionales a 2, 3 y 5:

30. Un segmento de 10 cm

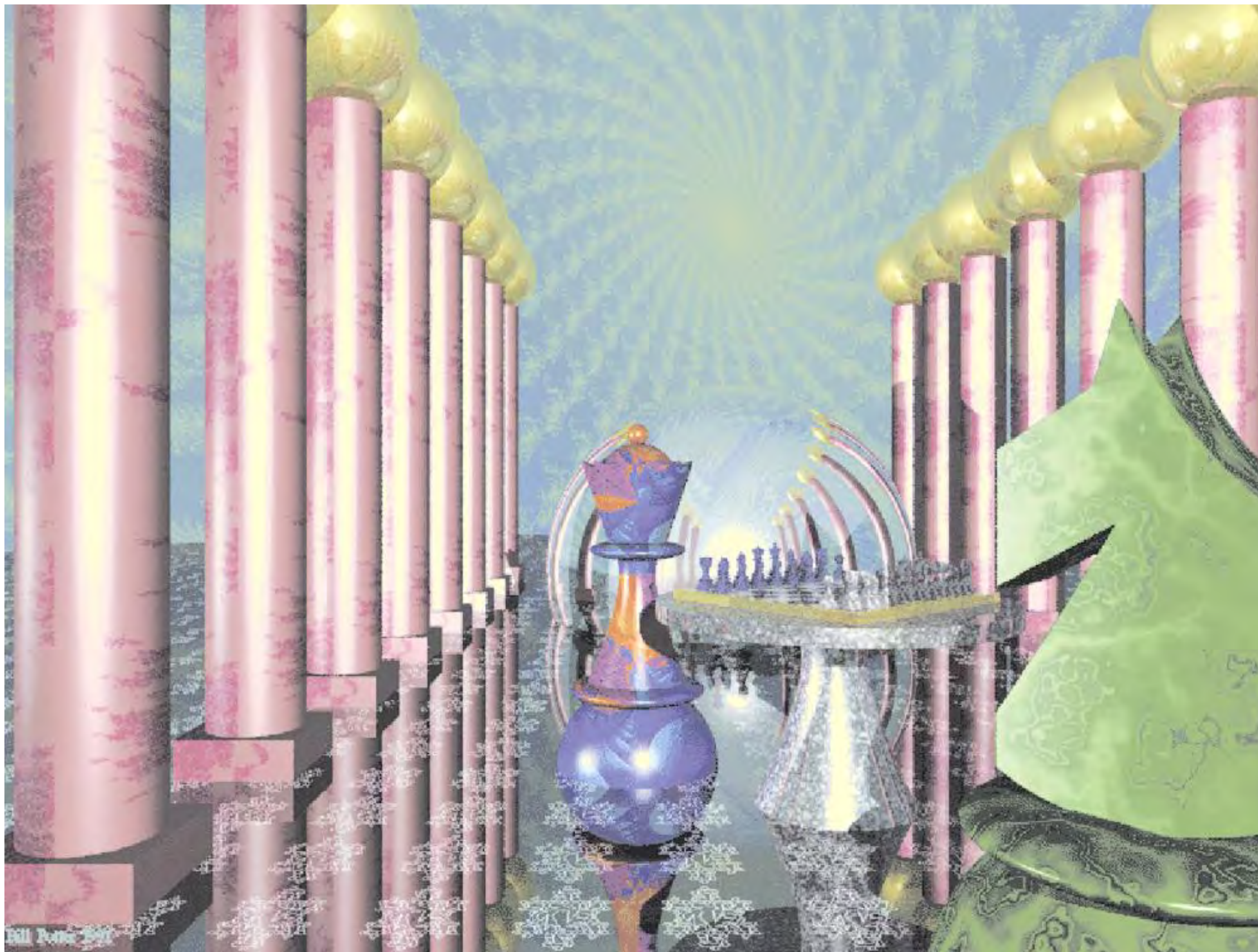
31. Un segmento de 5 pulgadas

32. Un segmento de 7.5 cm

Hallar gráficamente la cuarta proporcional a segmentos que miden:

33. 2, 3 y 4 cm

34. 4, 6 y 7 cm



El punto de partida de los estudios de Arquímedes fue la Naturaleza, se enfocó al estudio de las áreas curvilíneas y los volúmenes de los cuerpos limitados por superficies curvas que aplicó al círculo, segmento parabólico, segmento esférico, cilindro, cono, etc.

CAPÍTULO XI

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados proporcionales. El signo de semejanza es ~.

Si $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$ y $\dfrac{\overline{AB}}{A'B'} = \dfrac{\overline{BC}}{B'C'} = \dfrac{\overline{CA}}{C'A'}$

entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Para verificar la semejanza de dos triángulos no es necesario comprobar todas estas condiciones pues, como veremos más adelante, el hecho de tener algunas determina todas las demás, con las diferencias que cada caso implique.

LADOS HOMÓLOGOS

Lados homólogos son aquellos que se oponen a los ángulos iguales. En las figuras 199 y 200, $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$; $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$; $\overline{CA}$ y $\overline{C'A'}$ son lados homólogos.

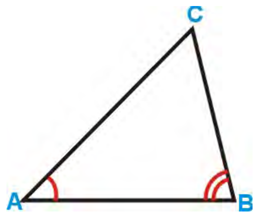


Figura 199

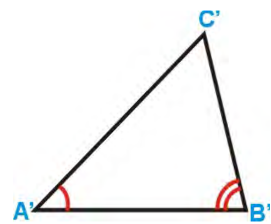


Figura 200

CARACTERES DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Las características de la semejanza de triángulos son:

1) Idéntico: todo triángulo es semejante a sí mismo.

$$\Delta ABC \sim \Delta ABC$$

2) Recíproco: Si un triángulo es semejante a otro, éste es semejante al primero.

Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ también

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

3) Transitivo: Dos triángulos semejantes a un tercero, son semejantes entre sí.

Si $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$ y $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$

entonces: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

RAZÓN DE SEMEJANZA

La **razón de semejanza** implica dos lados homólogos.

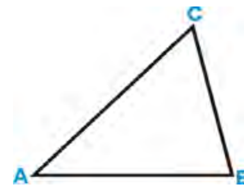


Figura 201

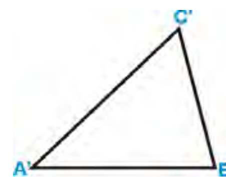


Figura 202

Si $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A'B'C'$ (Figs. 201 y 202), la razón de semejanza es una de las razones iguales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

MODO DE ESTABLECER LA PROPORCIONALIDAD DE LOS LADOS

Ahora veremos el procedimiento para establecer la proporcionalidad de los lados:

1) Determinamos la igualdad de los ángulos:

$$\angle A = \angle A'; \angle B = \angle B'; \angle C = \angle C'$$

2) Preparamos las igualdades:

$$____ = _____ = ______$$

En la parte superior escribimos los ángulos de uno de los triángulos, en un orden cualquiera. Por ejemplo, tomando el $\triangle ABC$,

$$\frac{\angle A}{} = \frac{\angle B}{} = \frac{\angle C}{}:$$

4) En la parte inferior escribimos los ángulos correspondientes iguales a los de la parte superior:

$$\frac{\angle A}{\angle A'} = \frac{\angle B}{\angle B'} = \frac{\angle C}{\angle C'}$$

5) A cada ángulo le asociamos su lado opuesto:

$$\frac{(\angle A)\overline{BC}}{(\angle A')\overline{B'C'}} = \frac{(\angle B)\overline{AC}}{(\angle B')\overline{A'C'}} = \frac{(\angle C)\overline{AB}}{(\angle C')\overline{A'B'}}$$

6) Suprimimos los ángulos y tenemos la proporción:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE EXISTENCIA DE TRIÁNGULOS SEMEJANTES

"Toda paralela a un lado de un triángulo forma con los otros dos lados de un triángulo otro semejante al primero"

Hipótesis: En el ΔABC $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ (Fig. 203)

Tesis: $\Delta CMN \sim \Delta ABC$

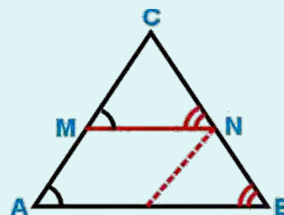


Figura 203

Construcción auxiliar:

Por el punto N trazamos $\overline{ND} \parallel \overline{AC}$, formándose el $\Delta\ BND$

Demostración:

En los $\Delta\ CMN$ y $\Delta\ ABC$:

$\angle C = \angle C$ Común;
$\angle M = \angle A$ Correspondientes;
$\angle N = \angle B$ Correspondientes;

Por otra parte:

$\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}}$ (1) Por ser $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ (hipótesis).

También:

$\frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ (2) Por ser $\overline{ND} \parallel \overline{CA}$ por construcción.

Comparando (1) y (2) tenemos:

$\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ (3) Carácter transitivo.

Pero:

$\overline{AD} = \overline{MN}$ (4) ADMN es un paralelogramo.

Sustituyendo (4) en (3):

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}$$

Hemos demostrado:

$\angle C = \angle C$

$\angle M = \angle A$ y $\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}$

$\angle N = \angle B$

$\therefore \ \Delta CMN \sim \Delta ABC$

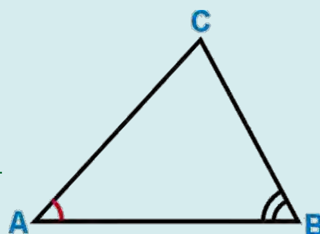


Figura 204

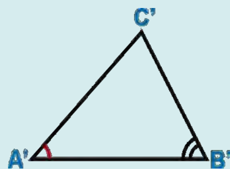


Figura 205

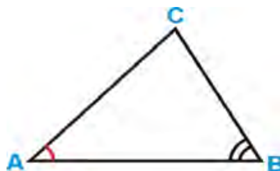
Recíproco: "Todo triángulo semejante a otro es igual a uno de los triángulos que pueden obtenerse trazando una paralela a la base de éste" (Figs. 204 y 205).

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS. CASO 1

Dos triángulos son semejantes en los siguientes casos:
Si tienen dos ángulos respectivamente iguales (Figs. 206 y 207).

Si $\angle A = \angle A'$ y $\angle B = \angle B'$; entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Teorema
"Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales".



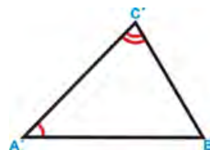


Figura 206 Figura 207

Hipótesis: $\angle A = \angle A'; \angle C = \angle C'$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Construcción auxiliar: Tomemos $\overline{CM} = \overline{C'A'}$ y tracemos $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, formándose el ΔCMN.

Demostración:

En el $\Delta\ CMN$ y $\Delta\ A'B'C'$:

$\overline{CM} = \overline{C'A'}$ Por construcción
$\angle C = \angle C'$ Por hipótesis
$\angle M = \angle A$ Correspondientes entre $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

y $\angle A = \angle A'$ Hipótesis

$\therefore \ \angle M = \angle A'$ Carácter transitivo

$\therefore \ \Delta CMN = \Delta A'B'C'$ (1) Por tener iguales un lado y los dos ángulos adyacentes.

Pero: $\Delta ABC \sim \Delta CMN$ (2) Teorema fundamental de existencia.

Comparando (1) y (2) tenemos:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ Carácter transitivo.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS. CASO 2

Si tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido (Figs. 208 y 209).

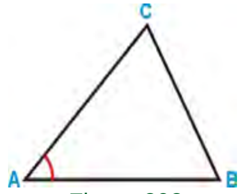


Figura 208

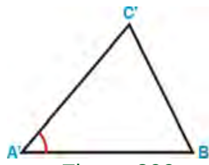


Figura 209

SI $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ y $\angle A = \angle A'$;

entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Teorema

"Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido" (Figs. 210 y 211).

Hipótesis: $\angle C = \angle C'$; $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$

Tesis: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Construcción auxiliar: Tomemos $\overline{CM} = \overline{C'A'}$ y tracemos $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, formándose el $\Delta CMN \sim \Delta ABC$.

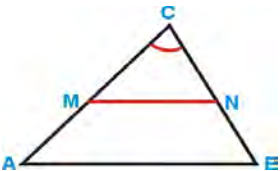


Figura 210

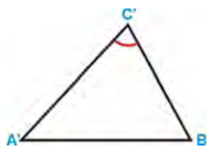


Figura 211

Demostración:

En ΔCMN y $\Delta A'B'C'$:

$\overline{CM} = \overline{A'C'}$ (1) Construcción.

$\angle C = \angle C'$ Por hipótesis;

En los $\Delta\ ABC$ y $\Delta\ CMN$:

$\frac{\overline{AC}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CN}}$ (2) Por ser $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ por construcción;

sustituyendo (1) en (2):

$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CN}}$ (3)

pero $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ (4) Hipótesis.

Comparando (3) y (4):

$\frac{\overline{BC}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ Carácter transitivo.

Despejando $\overline{CN}$: $\overline{CN} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \overline{B'C'}$

$\therefore\ \angle CMN = \angle A'B'C'$ Por tener dos lados iguales e igual el ángulo comprendido;

y como $\Delta ABC \sim \Delta CMN$ Teorema fundamental de existencia;

y $\Delta CMN \sim \Delta A'B'C'$ Carácter idéntico;

resulta $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ Carácter transitivo.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS. CASO 3

Si tienen sus tres lados proporcionales (Figs. 212 y 213).

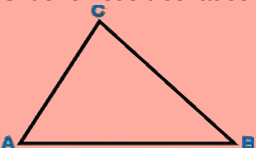


Figura 212

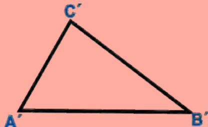


Figura 213

SI $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$; entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Teorema

"Dos triángulos son semejantes cuando tienen proporcionales sus tres lados" (Figs. 214 y 215).

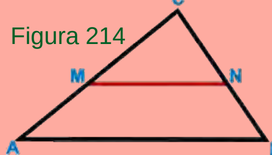


Figura 214

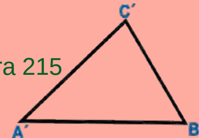


Figura 215

Hipótesis: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

Tesis : $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Construcción auxiliar : Tomemos $\overline{CM} = \overline{A'C'}$ y tracemos $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, formándose $\Delta CMN \sim \Delta ABC$

Demostración:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CM}} \quad (1)$$

$\Delta ABC \sim \Delta CMN$ por construcción.

Pero $\overline{CM} = \overline{A'C'}$ (2) Construcción.

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \quad (3)$$

Pero:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$ (4) Por hipótesis.

Comparando (3) y (4):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$ Carácter transitivo.

Tomando la 1a. y 3a. razones:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

Despejando $\overline{MN}$: $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \overline{A'B'}$

Tomando la 3a. y 4a. razones:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Despejando $\overline{CN}$: $\overline{CN} = \dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \overline{B'C'}$

Entonces: $\overline{MN} = \overline{A'B'}$ Demostrado;

$\overline{CN} = \overline{B'C'}$ Demostrado;

y $\overline{CM} = \overline{A'C'}$ Construcción:

$\therefore$ $\Delta CMN = \Delta A'B'C'$ Por tener sus tres lados iguales.

y como $\Delta ABC \sim \Delta CMN$ Teorema fundamental;

y $\Delta CMN \sim \Delta A'B'C'$ Carácter idéntico;

resulta $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ Carácter transitivo.

CASOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Debido a que todos los triángulos rectángulos tienen un ángulo igual (el ángulo recto), veremos que en los tres casos anteriores dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen:

1) Un ángulo agudo igual (Figs. 216 y 217).

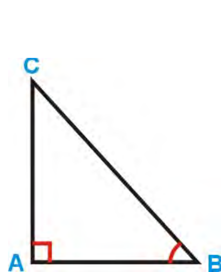


Figura 216

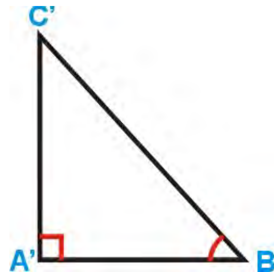


Figura 217

Si $\angle B = \angle B'$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$\angle A = \angle A' = 1R$$

2) Los catetos proporcionales (Figs. 218 y 219).

$SI \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ entonces

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. $\angle A = \angle A' = 1R$

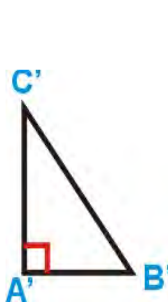


Figura 218

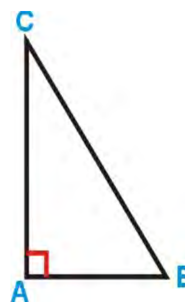


Figura 219

3) La hipotenusa y un cateto proporcionales (Figs. 220 y 221).

$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

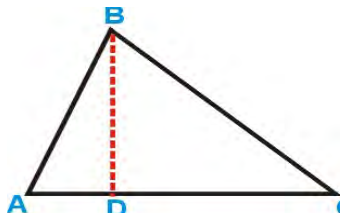


Figura 220

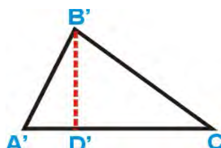


Figura 221

PROPORCIONALIDAD DE LAS ALTURAS DE DOS TRIÁNGULOS SEMEJANTES

"Las alturas correspondientes de dos triángulos semejantes son proporcionales a sus lados".

Los triángulos ABD y $A'B'D'$ son semejantes porque son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual ($\angle A = \angle A'$).

Luego $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{B'D'}}$ que es lo que se quería demostrar.

EJERCICIOS

1. Si $CA \perp AD$ y $AB \perp CD$, demostrar que $\Delta ABD \sim \Delta ACD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos (Fig. 222).

2. Si tenemos: $\angle A = \angle 1 = \angle 2 = 1R$, demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos (Fig. 222).

3. $SI \angle A = 1R$ y $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ demostrar que $\Delta ABD \sim \Delta ABC$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos (Fig. 222).

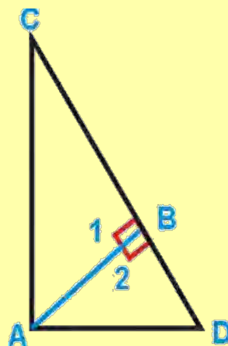


Figura 222

4. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{ED}$, demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta ECD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos.

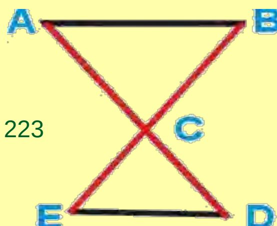


Figura 223

5. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, demostrar que $\Delta ABE \sim \Delta CED$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos.

SI $\overline{CD} = 3m$,
$\overline{EC} = 4m$ y
$\overline{EB} = 12m$;
calcular $\overline{AB}$
R. $\overline{AB}$ = 9 m

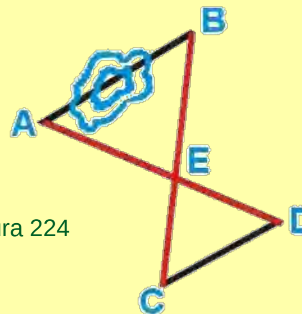


Figura 224

6. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$, demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta DCE$.

SI $\overline{AC} = 3$,
$\overline{AD} = 2$ y
$\overline{AB} = 4$;
calcular $\overline{DE}$
R. $\overline{DE}$ = 6.67

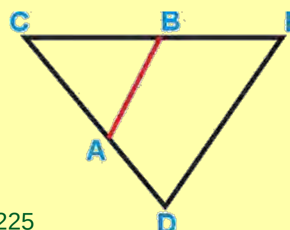


Figura 225

7. Si $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{QR} \parallel \overleftrightarrow{AC}$; demostrar que $\Delta PCQ \sim \Delta RQB$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos.

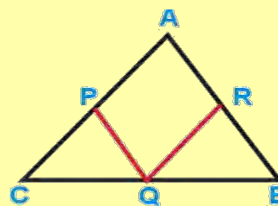


Figura 226

8. $\angle A = 1R, \angle B = \angle C$
Demostrar que $\Delta ABE \sim \Delta ACD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homòlogos.

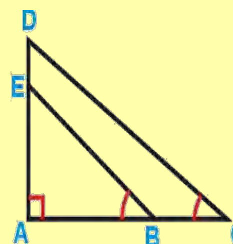


Figura 227

9. Si $\overleftrightarrow{EA} \perp \overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AC}$, demostrar que $\Delta ABE \sim \Delta CDB$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos.

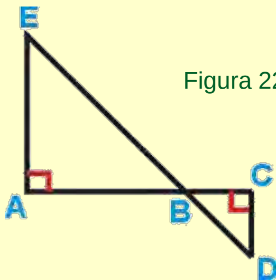


Figura 228

10. *SI* $\overline{AB} = 8m, \overline{AC} = 12m, \overline{ED} = \overline{DB} = 3m, \overline{AE} = 10m,$ $\overline{CD} = 5m;$ demostrar que $\Delta ABE \sim \Delta CBD$ y establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos.

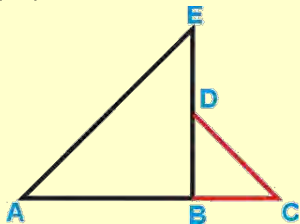


Figura 229

11. Si $\overleftrightarrow{EB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overline{AB} = 2m; \overline{BC} = 18m$ y $\overline{BE} = 3m;$ calcular $\overline{CD}$.
R. $\overline{CD} = 30$ m

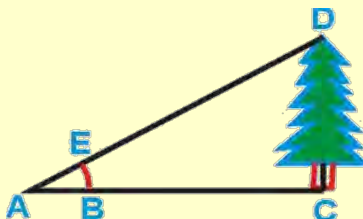


Figura 230

12. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{ED}$; $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$; $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{BD}$; $\overline{DE} = 4m$; $\overline{CD} = 2m$; $\overline{BC} = 6m$. Hallar $\overline{AB}$.
R. $\overline{AB} = 12$ m

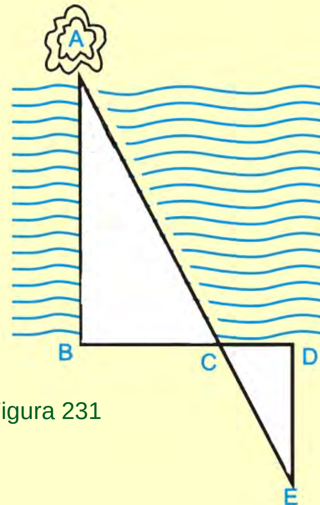


Figura 231

13. Si $\overleftrightarrow{EB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overline{AB} = 9m; \overline{EB} = 6m$ y $\overline{CD} = 80m$.
Calcular $\overline{BC}$ (Fig. 232).
R. $\overline{BC} = 111$ m.

14. Si $\overleftrightarrow{EB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overline{AB} = 12m; \overline{EB} = 8m$ y $\overline{CD} = 120m$.
Calcular $\overline{BC}$ (Fig. 232).
R. $\overline{BC} = 168$ m

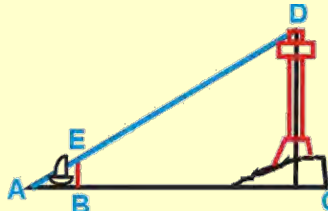


Figura 232

Después de los grandes geómetras griegos de la Edad de Oro, la Geometría es relegada a segundo término y se da más importancia a otra ciencia, "la Astronomía".

CAPÍTULO XII

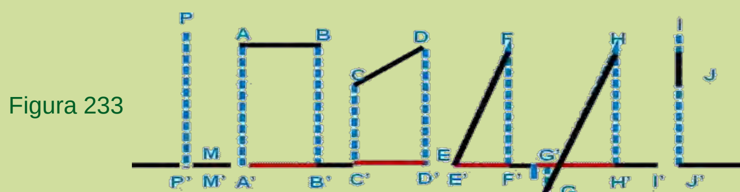
PROYECCIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

Se denomina **proyección de un punto** *P* sobre una recta al pie *P* ' a la perpendicular bajada a la recta desde el punto. Dicha perpendicular es la **proyectante** (Fig. 233).

Por ejemplo, si un punto *M* está sobre la recta, su proyección *M* ' es el mismo punto *M*.

La proyección de un segmento sobre una recta es el segmento cuyos extremos son las proyecciones de los extremos de dicho segmento. Cuando el segmento es paralelo a la recta, su proyección es igual a él, pero si es perpendicular a la recta, la proyección es un punto.

Figura 233



PROYECCIONES DE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO

Veamos de los lados de un triángulo. Siendo los triángulos *ABC* (Figs. 234 y 235).

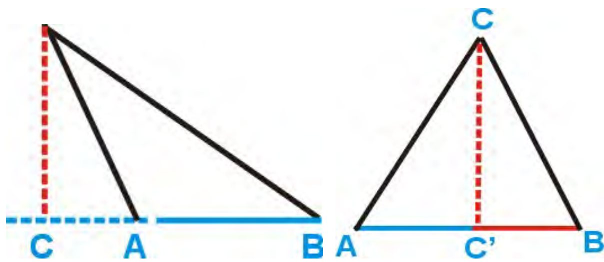


Figura 234 Figura 235

En las figuras vemos las proyecciones de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de los triángulos ΔABC , sobre el lado $\overline{AB}$, mismas que se expresan de la siguiente manera:

Proyec. $_{AB}\overline{AC} = \overline{AC'}$ Proyec. $_{AB}\overline{BC} = \overline{BC'}$

Teorema 1

Si en un triángulo rectángulo se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, se puede verificar que:

1) Los triángulos rectángulos resultantes son semejantes entre sí y semejantes al triángulo dado.

2) La altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que la divide.

3) La altura correspondiente a la hipotenusa es cuarta proporcional entre la hipotenusa y los catetos.

4) Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

5) La razón de los cuadrados de los catetos es igual a la razón de los segmentos que determina la altura en la hipotenusa.

Tesis:

1) $\Delta ADC \sim \Delta ABC$; (Fig. 236) $\Delta ADB \sim \Delta ABC$;

$\Delta ADC \sim \Delta ADB$.

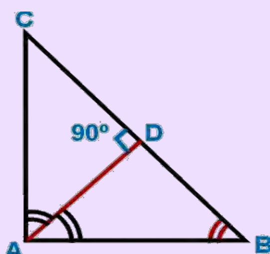


Figura 236

2) $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$

3) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$

4) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}; \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$

5) $\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$

Hipótesis : El ΔABC es rectángulo en $\angle A$. $\overline{AD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa.

Demostración 1a : Comparemos los ΔADC y ΔABC:

$\angle D = \angle A$ Rectos

$\angle C = \angle C$ Común

$\therefore \Delta ADC \sim \Delta ABC$ (1) Por rectángulos con un ángulo agudo igual.

En ΔABD y ΔABC:

$\angle D = \angle A$ Rectos

$\angle B = \angle B$ Común

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta ABC$ (2) Por rectángulos con un ángulo agudo igual.

Comparando (1) y (2) tenemos:

$\Delta ADC \sim \Delta ADB$ Carácter transitivo.

Demostración 2a : Al escribir la proporcionalidad existente entre los lados homólogos de los triángulos que según la demostración anterior son semejantes, $\Delta ADC \sim \Delta ABD$, obtenemos que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

Demostración 3a : Al plantear la proporcionalidad entre los lados homólogos de los triángulos semejantes ΔADC y ΔABC tenemos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$$

Demostración 4a : Si escribimos la proporcionalidad entre los lados homólogos de los triángulos ΔADC y ΔABC y entre los lados homólogos de los triángulos ΔADB y ΔABC resulta:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

Demostración 5a : $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$ Demostración 4a;

$\therefore \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CD}$ (1) Producto de medios igual a producto de extremos.

$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$ Demostración 4a;

$\therefore \overline{AB}^2 = \overline{BC} \bullet \overline{BD}$ (2) Producto de medios igual a producto de extremos.

Dividiendo miembro por miembro (1) y (2) tenemos:

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} \bullet \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$$

$\therefore \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$ = Simplificando

TEOREMA DE PITÁGORAS

"En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos" (Fig. 237).

Hipótesis: ΔABC es rectángulo en $\angle A$

$\overline{BC} = a$ es la hipotenusa.

$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = c \\ \overline{AC} = b\end{array}\right\}$ catetos

Tesis: $a^2 = b^2 + c^2$

Construcción auxiliar:

Tracemos la altura $\overline{AD}$ = h, correspondiente a la hipotenusa.

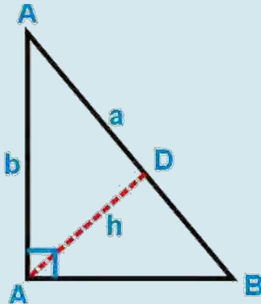


Figura 237

Demostración:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\overline{CD}} \text{ y } \frac{a}{c} = \frac{c}{\overline{DB}}$$

Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

Despejando los catetos:

$b^2 = a \bullet \overline{CD}$ (1)

$c^2 = a \bullet \overline{DB}$ (2)

Sumando (1) y (2) tenemos:

$b^2 + c^2 = a \bullet \overline{CD} + a \bullet \overline{DB}$

$\therefore\ b^2 + c^2 = a\,(\overline{CD} + \overline{DB})$ (3) Factorizando.

Pero: $\overline{CD} + \overline{DB} = a$ (4) Suma de segmentos

Sustituyendo (4) en (3):

$b^2 + c^2 = a\,(a)$

$\therefore\ b^2 + c^2 = a^2$ Efectuando operaciones

Corolario 1: "En todo triángulo rectángulo, la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos".

De la igualdad: $a^2 = b^2 + c^2$, sacando raíz cuadrada en ambos miembros,

$$\therefore a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Corolario 2: "En todo triángulo rectángulo, cada cateto es igual a la raíz cuadrada del cuadrado de la hipotenusa, menos el cuadrado del otro cateto".

De la igualdad:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

despejando los catetos:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

extrayendo raíz cuadrada:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

"En todo triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble del producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él" (Fig. 238).

Hipótesis: En el ΔABC el $\angle A < 90°$

Proyec.$_c$ $b = \overline{AD}$

Tesis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \bullet \overline{AD}$

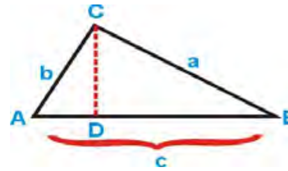


Figura 238

Demostración: En el ΔCDB :

$a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$ (1) Teorema de Pitágoras.

En el ΔCDA:

$\overline{CD}^2 = b^2 - \overline{AD}^2$ (2) Corolario del teorema de Pitágoras.

En el segmento AB:

$\overline{DB} = c - \overline{AD}$ (3) Resta de segmentos.

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos:

$a^2 = b^2 - \overline{AD}^2 + (C - \overline{AD})^2$

De donde:

$a^2 = b^2 - \overline{AD}^2 + c^2 - 2c \bullet \overline{AD} + \overline{AD}^2$ Desarrollando el cuadrado;

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2c \bullet \overline{AD}$ Simplificando.

TEOREMA 2

"En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el doble del producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él" (Fig. 239).

Hipótesis: En el ΔABC el $\angle A > 90°$

$\overline{AD}$ = Proyec. $_c$ b

Tesis: $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \bullet \overline{AD}$

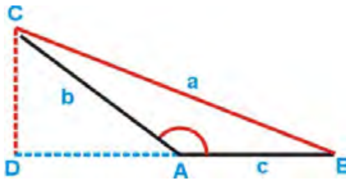


Figura 239

Demostración:

En el ΔCDB :

$a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$ (1) Teorema de Pitágoras.

En el ΔCDA:

$\overline{CD}^2 = b^2 - \overline{AD}^2$ (2) Corolario del teorema de Pitágoras.

En el segmento $\overline{BD}$:

$\overline{DB} = c + \overline{AD}$ (3) Suma de segmentos.

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos:

$a^2 = b^2 - \overline{AD}^2 + (c + \overline{AD})^2$

De donde:

$a^2 = b^2 - \overline{AD}^2 + c^2 + 2c \bullet \overline{AD} + \overline{AD}^2$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 + 2c \bullet \overline{AD}$ Simplificando.

CLASIFICACIÓN DE UN TRIÁNGULO CONOCIENDO LOS TRES LADOS

Del teorema de Pitágoras y de su generalización, hemos visto que:

Cuando $\angle A = 1R$

$a^2 = b^2 + c^2$

Cuando $\angle A < 1R$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \bullet \overline{AD}$;

$\therefore a^2 < b^2 + c^2$

Cuando $\angle A > 1R$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \bullet \overline{AD}$;

$\therefore a^2 > b^2 + c^2$

Es decir: "Un triángulo es rectángulo, acutángulo u obtusángulo, cuando el cuadrado del lado mayor es igual, menor o mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados".

Ejemplos

1) Clasificar el triángulo cuyos lados miden: a = 50 cm, b = 40 cm y c = 30 cm.

Cuadrado del lado mayor: $a^2 = 50^2 = 2500$

Cuadrado de los otros dos lados: $b^2 = 40^2 = 1600$

$c^2 = 30^2 = 900$

Sumando: $b^2 + c^2 = 2500$

Vemos que se cumple: $a^2 = b^2 + c^2$ $\therefore$ El triángulo es rectángulo.

2) Clasificar el triángulo cuyos lados valen a = 12 cm, b = 10 cm y c = 8 cm

Cuadrado del lado mayor: $a^2 = 12^2 = 144$

Cuadrado de los otros dos lados: $b^2 = 10^2 = 100$

$c^2 = 8^2 = 64$

Suma = 164

Vemos que se cumple: $a^2 < b^2 + c^2$ $\therefore$ El triángulo es acutángulo.

3) Clasificar el triángulo cuyos lados valen a = 30 cm, b = 24 cm y c = 16 cm

Cuadrado del lado mayor: $a^2 = 30^2 = 900$

Cuadrado de los otros dos lados: $b^2 = 24^2 = 576$

$c^2 = 16^2 = 256$

Suma = 832

Vemos que se cumple: $a^2 > b^2 + c^2$ \ El triángulo es obtusángulo.

CÁLCULO DE LA PROYECCIÓN DE UN LADO SOBRE OTRO

De acuerdo con la generalización del teorema de Pitágoras, sabemos que:

$a^2 = b^2 + c^2 + 2c$ Proyección $_c\, b$,

cuando *a* se opone a un ángulo obtuso. Y

$a^2 = b^2 + c^2 - 2c$ Proyección $_c\, b$,

cuando *a* se opone a un ángulo agudo.

Despejando la proyección tenemos: en el primer caso,

$$\text{Proyección }_c\, b = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$$

y en el segundo caso,

$$\text{Proyección }_c\, b = \frac{a^2 + c^2 - ^2}{2c}$$

Análogamente se calcula la proyección de cualquier lado sobre otro.

CÁLCULO DE LA ALTURA DE UN TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE LOS LADOS

Siendo el $\Delta\, ABC$

Tenemos: $\overline{CD}^2 = b^2 - \overline{AD}^2$ (1)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2c\,\overline{AD}$ (2)

De (2), despejando $\overline{AD}$ resulta: $\overline{AD} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ (3)

De (1) y (3): $\overline{CD}^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2$; (4)

$$\overline{CD}^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right); \quad (5)$$

$$\overline{CD}^2 = \left(b^2 + \frac{2bc + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2c}\right); \quad (6)$$

$$\overline{CD}^2 = \frac{\left[(b+c)^2 - a^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right]}{4c^2} \quad (7)$$

$$\overline{CD}^2 = \frac{(b+c-a)\ (b+c-a)\ (a+b-c)\ (a-b+c)}{4c^2}; \quad (8)$$

y como *a* + *b* + *c* = 2*p* (perímetro), resulta:

$$\overline{CD})^2 = \frac{4p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}{c^2}; \quad (9)$$

$$\therefore\quad \overline{CD} = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (10)$$

EJERCICIOS

Clasificar los triángulos cuyos lados *a*, *b*, *c* valen:

1. *a* = 5 m, *b* = 4 m, *c* = 2 m
R. Obtusángulo

2. *a* = 10 m, *b* = 12 m, *c* = 8 m
R. Acutángulo

3. *a* = 15 cm, *b* = 20 cm, *c* = 25 cm
R. Rectángulo

4. *a* = 3 cm, *b* = 4 cm, *c* = 2 cm
R. Obtusángulo

5. *a* = 1 m, *b* = 2 m, *c* = 3 m
R. Obtusángulo

Basándose en la figura 240, calcular lo que se pide:

6. Si *x* = 4, *y* = 9. Calcular *h* .
R. *h* = 6

7. Si *a* = 5, *b* = 3, *c* = 4. Calcular *h*.
R. *h* = 2.4

8. Si *a* = 10, *b* = 6. Calcular *x* .
R. *x* = 3.6

9. Si *a* = 10, *c* = 8. Calcular *y* .
R. *y* = 6.4

10. Si *b* = 3, *c* = 4, *x* = 2 Calcular *y* .
R. *y* = 3

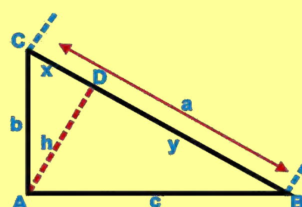


Figura 240

Si *a* es la hipotenusa, *b* y *c* los catetos de un triángulo rectángulo, calcular el lado que falta:

11. *b* = 10 cm, *c* = 6 cm

R. a = $2\sqrt{34}$ cm

12. b = 30 cm, c = 40 cm
R. a = 50 cm

13. a = 32 m, c = 12 m
R. b = $4\sqrt{55}$

14. a = 32 m, c = 20 m
R. b = $4\sqrt{39}$ m

15. a = 100 km, b = 80 km
R. c = 60 km

Hallar la hipotenusa (h) de un triángulo rectángulo isósceles sabiendo que el valor del cateto es:

16. c = 4 m
R. h =$4\sqrt{2}$ m

17. c = 6 m
R. h = $6\sqrt{2}$ m

18. c = 15 cm
R. h =$15\sqrt{2}$ m

19. c = 9 cm
R. h = $9\sqrt{2}$ m

20. c = 11 cm
R. h = $11\sqrt{2}$ m

Hallar la altura (h) de un triángulo equilátero sabiendo que el lado vale:

21. l = 12 cm
R. h = $6\sqrt{3}$ cm

22. l = 8 cm
R. h = $4\sqrt{3}$ cm

23. l = 4 cm
R. h = $2\sqrt{3}$ cm

24. l = 10 m
R. h = $5\sqrt{3}$ m

25. l = 30 m
R. h = $10\sqrt{3}$ m

Hallar la diagonal (d) de un cuadrado cuyo lado vale:

26. l = 3 m
R. d = $3\sqrt{2}$ m

27. l = 5 m
R. d = $5\sqrt{2}$ cm

28. l = 15 cm
R. d = $15\sqrt{2}$ m

29. l = 9 cm
R. d = $9\sqrt{2}$ cm

30. l = 7 cm
R. d = $7\sqrt{2}$ cm

Hallar la diagonal (d) de un rectángulo si se sabe que los lados a y b tienen los siguientes valores:

31. a = 2 m, b = 4 m
R. d = $2\sqrt{6}$ m

32. a = 4 m, b = 8 m
R. d = 10 m

33. a = 6 m, b = 6 m
R. d = $\sqrt{61}$ m

34. a = 7 m, b = 9 m
R. d = $\sqrt{130}$ m

35. a = 10 m, b = 12 m
R. d = $2\sqrt{61}$ m

36. Hallar los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son números consecutivos.
R. 3,4 y 5

37. Hallar los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son números pares consecutivos.
R. 6,8 y 10

38. Hallar los lados de un triángulo cuadrado sabiendo que se diferencian en 4 unidades.
R. 12,16,20

39. La diagonal de un cuadrado vale $5\sqrt{2}$ m. Hallar el lado del cuadrado.
R. l = 5 m

40. En la figura 241: AE = BD = 30 cm; ED = 40 cm. Calcular AB .
R. AB = $10\sqrt{34}$ cm

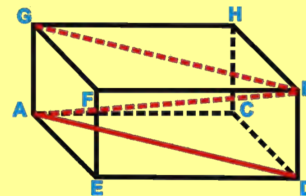


Figura 241



Blas Pascal logró concebir las cónicas de forma muy distinta a la establecida por Apolonio de Perga, con ello, Pascal modernizó los métodos geométricos hasta entonces utilizados.

CAPÍTULO XIII

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de un punto mismo. Ese punto es el centro de la circunferencia y la distancia constante es el radio. La circunferencia es una curva cerrada con un centro de simetría: su centro, y con ejes infinitos de simetría.

Un punto del plano se dice que es interior, que pertenece, o que es exterior a la circunferencia según que su distancia al centro sea menor, igual o mayor que el radio. De la misma manera una recta del plano se dice secante, tangente o exterior a una circunferencia según que su distancia al centro sea menor, igual o mayor que el radio.

DEFINICIÓN

La **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto que es el **centro**. En la figura 242 vemos una circunferencia cuyo centro es *O*.

En esta misma figura, *A*, *B*, *C* son **puntos** de la circunferencia, y los segmentos:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r$$

se llaman **radios**.

Las circunferencias se denominan por su centro mediante una letra mayúscula y su radio. Así, en la figura 242 la circunferencia es *O* y el radio *r*.

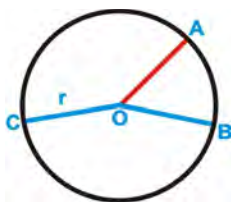


Figura 242

CÍRCULO

Por otra parte, el círculo es el conjunto de todos los puntos de la circunferencia y de los interiores a la misma (Fig. 244).

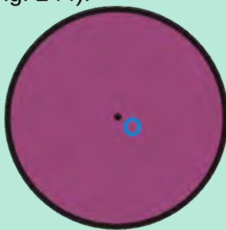


Figura 244

Las **circunferencias iguales** son aquellas que tienen **radios iguales**, y el **arco** es una porción de la circunferencia, como vemos en la figura 245, donde el arco *AC* se representa por $\overset{\frown}{OAC}$.

La cuerda es el segmento determinado por dos puntos de la circunferencia : $\overline{CD}$.

De los dos arcos que determina una cuerda en una circunferencia, el menor de ellos es el arco correspondiente a la cuerda *N* .

El diámetro es toda cuerda que pasa por el centro; en la figura 245 es $\overline{AB}$. Asimismo, el diámetro es igual a la suma de dos radios:

$$\overline{AB} = \overline{AO} = \overline{OB} = r + r = 2r$$

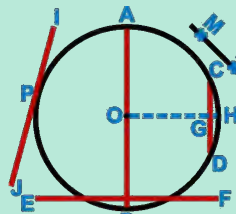


Figura 245

Una recta como $\overleftrightarrow{EF}$ (Fig. 245) que tiene dos puntos comunes con la circunferencia es **secante**, pero si sólo tiene un punto común con la circunferencia, como la $\overleftrightarrow{IJ}$, es **tangente**, y en este caso *P* es el punto de tangencia o punto de contacto.

Si la recta no tiene ningún punto común con la circunferencia, como la $\overleftrightarrow{MN}$, es **exterior**.

PUNTOS INTERIORES Y PUNTOS EXTERIORES

La circunferencia divide el plano en dos regiones, una **exterior** y otra **interior.**

$$\overline{OM} > r ; \overline{ON} < r ; \overline{OP} = r$$

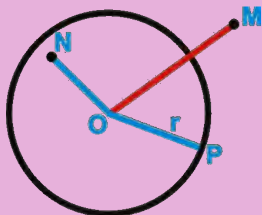


Figura 243

De tal modo, puntos como *M*, cuya distancia al centro es mayor que el radio, son los **puntos exteriores**, y los que, como *N*, distan del centro menos que el radio son los **puntos interiores**. Y si, como en el caso del punto *P*, su distancia al centro es igual al radio, entonces pertenecen a la circunferencia (Fig. 243).

FIGURAS EN EL CÍRCULO

La parte del círculo limitada entre una cuerda y su arco se llama **segmento circular** (Fig. 246) y la parte limitada por dos radios y el arco comprendido se llama **sector circular** (Fig. 247).



Figura 246



Figura 247

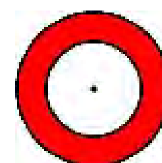


Figura 248

La **corona circular** es la porción de plano limitada por dos circunferencias concéntricas (Fig. 248).

El **trapecio circular** es la porción de plano limitada por dos circunferencias concéntricas y dos radios (Fig. 249).



Figura 249

ÁNGULOS CENTRALES Y ARCOS CORRESPONDIENTES

Un **ángulo central** es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia (Fig. 250):

$\angle AO\ B$

Y un arco correspondiente es el comprendido entre los lados del ángulo central: *OAB* es correspondiente del $\angle AO\ B$.

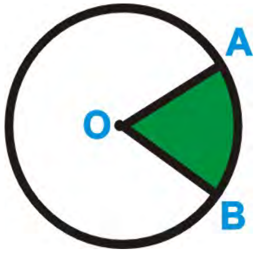


Figura 250

En una misma circunferencia o en circunferencias iguales a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales. De tal forma, si la circunferencia O es igual a la circunferencia *O* ' y$\angle AOB = \angle A'O'B'$ (Figs. 251 y 252), entonces también $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$

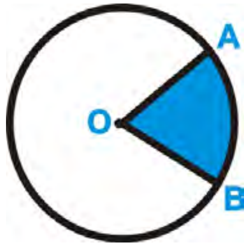


Figura 251

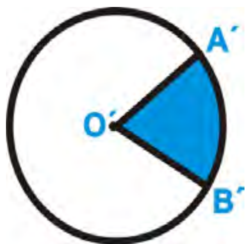


Figura 252

De manera recíproca, si la circunferencia O = circunferencia O ' y $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$, $\angle AOB = A'O'B'$.

DESIGUALDAD DE ÁNGULOS Y ARCOS

En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, a mayor ángulo central le corresponde mayor arco (Figs. 253 y 254).

Si la circunferencia O = circunferencia *O* ' y $\angle AOB < \angle A'O'B'$ entonces:

$\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{A'B'}$

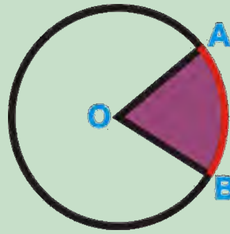


Figura 253

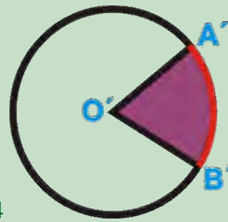


Figura 254

ARCOS CONSECUTIVOS, SUMA Y DIFERENCIA DE ARCOS

Dos arcos son consecutivos cuando lo son también sus ángulos centrales.

$\angle AOB$ y $\angle BOC$ son consecutivos, por tanto *OAB* y *OBC* también son consecutivos (Figs. 255).

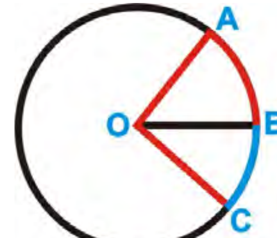


Figura 255

En una circunferencia, la **suma de dos arcos** consecutivos es el arco cuyo ángulo central es la suma de los ángulos centrales correspondientes a los arcos dados.

Por otra parte, dados dos arcos desiguales de una circunferencia, la diferencia de ambos es el arco que sumado al menor (sustraendo) da el mayor (minuendo).

Teorema 1

"El diámetro es la mayor cuerda de la circunferencia" (Fig. 256).

Hipótesis : En la circunferencia *O* : $\overline{CD}$ = diámetro y $\overline{AB}$ = cuerda.
Tesis : $\overline{CD} > \overline{AB}$

Construcción auxiliar : Unimos *A* y *B* con *O* para formar el ΔAOB

Demostración: $\triangle$ En el *AOB*

$\overline{AO} + \overline{OB} > \overline{AB}$ (1) Postulado de la menor distancia entre dos Puntos.

Pero: $\overline{AO} = \overline{CO}$ (2) Radios;

y $\overline{OB} = \overline{OD}$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$\overline{CO} + \overline{OD} > \overline{AB}$ (4)

Pero: $\overline{CO} + \overline{OD} = \overline{CD}$ (5) Suma de segmentos.

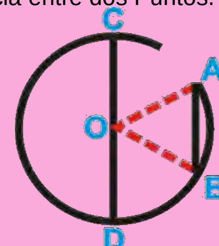


Figura 256

Sustituyendo (5) en (4):

$\overline{CD} > \overline{AB}$ Que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA 2 (PROPIEDADES DEL DIÁMETRO)

"Un diámetro divide a la circunferencia y al círculo en dos partes iguales".

Hipótesis : $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia *O* (Fig. 257).

Tesis : $\frown APB = \frown AP'B$

Parte *APB* del círculo = Parte *AP 'B*

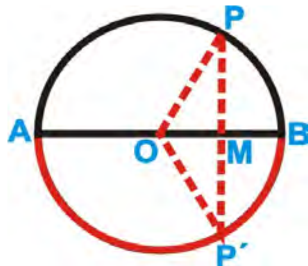


Figura 257

Construcción auxiliar : Tomemos un punto cualquiera P, en uno de los arcos en que $\overline{AB}$ divide a la circunferencia ; tracemos por *P* la perpendicular al diámetro, que lo cortará en *M* y a la circunferencia en *P* ', formándose así los triángulos $\triangle OMP$ y $\triangle OMP'$.

Demostración : En $\triangle OMP$ y $\triangle OMP'$:

$\overline{OM} = \overline{OM}$ Común

$\overline{OP} = \overline{OP'}$ Radios

$\angle OMP = \angle OMP' = 90°$ Por construcción

$\therefore \triangle OMP = \triangle OMP'$ Por tener iguales la hipotenusa y un cateto

$\therefore \overline{MP} = \overline{MP'}$

Si doblamos la figura por $\overline{AB}$ hasta que el semiplano que contiene a P coincida con el que contiene a P ', veremos que $\overline{MP}$ coincidirá con $\overline{MP'}$. $\overline{MP} = \overline{MP'}$

Entonces, *P* coincidirá con el punto *P* '.

Como esto se verifica para todos los puntos de $\frown APB$, resulta $\frown APB = \frown AP'B$. Al mismo tiempo coinciden las porciones de plano comprendidas entre los arcos y el diámetro.

SEMICIRCUNFERENCIAS

Los arcos iguales determinados por el diámetro son las semicircunferencias, y las porciones de plano limitadas por las semicircunferencias y el diámetro son los semicírculos.

Teorema 3

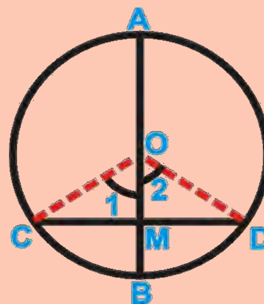
"Todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a esa cuerda y a los arcos subtendidos en partes iguales".

Hipótesis : En la circunferencia *O* : $\overline{CD}$= cuerda; $\overline{AB}$ = diámetro y $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ (Fig. 258).

Tesis : $\overline{CM} = \overline{MD}$; $\frown CB = \frown BD$ y $\frown AC = \frown AD$

Construcción auxiliar : Unamos *C* y *D* con *O* para formar los triángulos rectángulos $\triangle COM$ y $\triangle DOM$.

Figura 258



Demostración:

En $\triangle COM$ y $\triangle DOM$:

$\overline{OM} = \overline{OM}$ Común

$\overline{OC} = \overline{OD}$ Radios

además: $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ Hipótesis

$\therefore \triangle COM = \triangle DOM$ Triángulos rectángulos que tienen iguales la hipotenusa y un cateto

$\therefore \overline{CM} = \overline{MD}$ Lados homólogos de triángulos iguales

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ Por oponerse a lados iguales en triángulos iguales

$\therefore \frown CB = \frown BD$ (1) Por arcos correspondientes a ángulos centrales iguales. Por otra parte:

$\frown ACB = \frown ADB$ (2) Por semicircunferencias.

Restando (1) de (2) tenemos:

$\frown ACB - \frown OCB = \frown ADB - \frown BD$

$\therefore \frown AC = \frown AD$ Que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA 4

Relaciones entre las cuerdas y los arcos correspondientes

"En una misma circunferencia, o en circunferencias iguales, a arcos iguales corresponden cuerdas iguales, y si dos arcos son desiguales (menores que una semicircunferencia), entonces a mayor arco corresponde mayor cuerda".

1a. Parte:

Hipótesis : En la circunferencia O : $\frown AB = \frown CD$ (Fig. 259).

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuerdas correspondientes.

Tesis : $\overline{AB} = \overline{CD}$

Construcción auxiliar : Unimos A, B, C y D con O para formar los triángulos ΔAOB y ΔCOD.

Demostración:

En $\angle AOB$ y $\angle COD$:

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ Radios

$\angle AOB = \angle COD$ Ángulos centrales cuyos arcos correspondientes son iguales por hipótesis

$\therefore$ Δ $AOB = \Delta COD$ Por tener iguales dos lados con su ángulo

$\therefore$ $AB = CD$ Lados homólogos de triángulos iguales

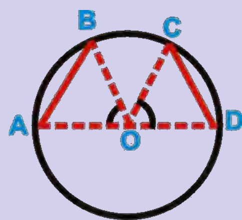


Figura 259

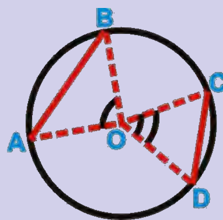


Figura 260

2a. Parte

Hipótesis : En la circunferencia O $\frown AB > \frown CD$ y ambos menores que una semicircunferencia (Fig. 260).

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuerdas correspondientes.

Tesis : $\overline{AB} > \overline{CD}$

Construcción auxiliar : Unimos A, B, C y D con O para formar los triángulos Δ AOB y Δ COD.

Demostración:

En Δ AOB y Δ COD :

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ Radios

$\Delta AOB > \Delta COD$ $\frown AB > \frown CD$ hipótesis

$\therefore$ $\overline{AB} > \overline{CD}$ En dos triángulos que tienen dos lados respectivamente iguales y desigual el ángulo comprendido, a mayor ángulo se opone mayor lado.

Recíproco: "En una circunferencia, o en circunferencias iguales, a cuerdas iguales corresponden arcos iguales, y si dos cuerdas son desiguales, a la mayor corresponde mayor arco (considerando arcos menores que una semicircunferencia).

TEOREMA 5

Relaciones entre las cuerdas y sus distancias al centro

"En una circunferencia, o en circunferencias iguales, cuerdas iguales equidistan del centro, y de dos cuerdas desiguales, la mayor dista menos del centro".

1a. Parte:

Hipótesis : $\overline{AB} = \overline{CD}; \overline{OM} \perp \overline{AB}; \overline{ON} \perp \overline{CD}$ (Fig. 261):

Tesis : $\overline{OM} = \overline{ON}$

Construcción auxiliar : Unimos B y C con O para formar los triángulos rectángulos ΔOMB y ΔONC .

Demostración : En los ΔOMB y ΔONC :

$\overline{OB} = \overline{OC}$ Radios

$\overline{MB} = \overline{NC}$ Mitades de cuerdas iguales

$\therefore \Delta OMB = \Delta ONC$ Rectángulos que tienen iguales la hipotenusa y un cateto

$\therefore \overline{OM} = \overline{ON}$ Lados homólogos de triángulos iguales

2a. Parte:

Hipótesis : $\overline{AB} > \overline{CD}; \overline{OM} \perp \overline{AB}; \overline{ON} \perp \overline{CD}$ (Fig. 262).

Tesis : $\overline{OM} < \overline{ON}$

Construcción auxiliar : Con una abertura del compás igual a la cuerda CD, y a partir de A, marquemos el punto E en este arco, y tendremos $\overline{AE} = \overline{CD}$; siendo $\overline{ON'} \perp \overline{AE}$ su distancia al centro.

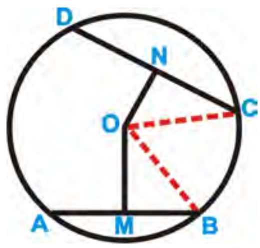


Figura 261

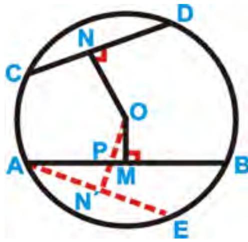


Figura 262

Demostración:

$\frown AE = \frown CD$	A cuerdas iguales corresponden arcos iguales.
Pero: $\frown AB > \frown CD$	$\overline{AB} > \overline{CD}$ por hipótesis
$\therefore \frown AB > \frown AE$	Carácter transitivo

$\therefore$ El punto E es un punto interior del $\frown AB$

N' es el punto medio de $\overline{AE}$;	Todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta y al arco subtendido en partes iguales.
$\therefore$ El segmento $\overline{ON'}$ corta AB por estar *O* y *N*' en semiplanos distintos respecto de *AB*; siendo *P* el punto de intersección de $\overline{ON'}$ y $\overline{AB}$.	Postulado de la separación del plano
$\overline{OM} < \overline{OP}$	$\overline{OM}$ es la perpendicular y $\overline{OP}$ oblicua
y $\overline{OP} < \overline{ON}$	Por ser $\overline{OP}$ parte de $\overline{ON'}$
$\therefore \overline{OM} < \overline{ON'}$ (1)	Carácter transitivo
y como: $\overline{ON'} = \overline{ON}$ (2)	1a. parte

De (2) y (1): $\overline{OM} < \overline{ON}$ Que es lo queríamos demostrar

Recíproco: "En una circunferencia o en circunferencias iguales las cuerdas equidistantes del centro son iguales, y de dos cuerdas que no equidistan del centro, la que menos dista es la mayor".

TANGENTE A LA CIRCUNFERENCIA

Como ya hemos dicho, la tangente a la circunferencia es una recta que tiene un solo punto común con la circunferencia (Fig. 263), *P*, que es el "punto de tangencia" o "punto de contacto".

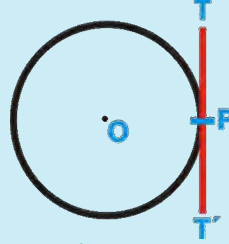


Figura 263

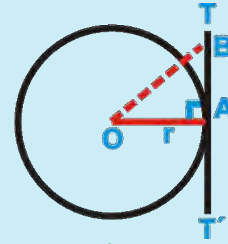


Figura 264

Teorema

(Propiedad de la tangente en el punto de contacto): "La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto".

Hipótesis: $\overleftrightarrow{TT'}$ es tangente en *A* a la circunferencia (Fig. 264).

$\overline{OA}$ es el radio en el punto de contacto.

Tesis: $\overleftrightarrow{TT'} \perp \overline{OA}$

Demostración: Si $\overline{OA}$ no fuere perpendicular a $\overleftrightarrow{TT'}$ sería oblicua y, en este caso, habría otra oblicua $\overline{OB}$ que sería igual a $\overline{OA}$ (la que se apartará igual que OA del pie de la perpendicular). Si $\overline{OB} = \overline{OA}$ entonces *B* sería un punto de la circunferencia y la recta $\overleftrightarrow{TT'}$ no sería tangente porque tendría dos puntos comunes con la circunferencia.

Recíproco: "Si una recta es perpendicular a un radio en su extremo, es tangente a la circunferencia".

Hipótesis: $\overleftrightarrow{TT'} \perp \overline{OA}$, en *A* (Fig. 265).

Tesis: $\overleftrightarrow{TT'}$ es tangente a la circunferencia *O*.

Demostración: La recta $\overleftrightarrow{TT'}$ sólo tiene el punto *A* en común con la circunferencia, porque cualquier otro punto *B* es exterior por ser $\overline{OB} > \overline{OA}$ ya que OA es la perpendicular y $\overline{OB}$ es oblicua.

Por tanto: $\overleftrightarrow{TT'}$ es tangente por tener un solo punto común con la circunferencia.

Corolario: Por cada punto de una circunferencia pasa una tangente y sólo una.

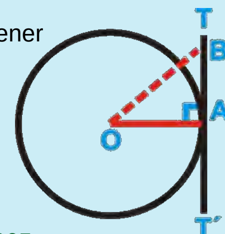


Figura 265

NORMAL A UNA CIRCUNFERENCIA

La **normal a una circunferencia** es la perpendicular a la tangente en el punto de contacto. En la figura 266 la normal en *A* es:

$$\overleftrightarrow{NN'} \perp \overleftrightarrow{TT'}$$

Dado que la tangente y el radio son perpendiculares en el punto de contacto, la normal en cada punto de la circunferencia pasa por el centro.

Para trazar la normal a una circunferencia que pase por un punto dado, interior o exterior, basta con trazar la recta que pasa por dicho punto y el centro de la circunferencia.

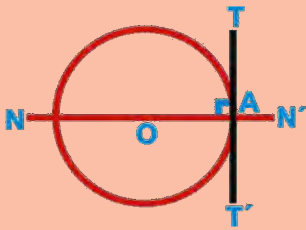


Figura 266

Así, la normal a la circunferencia *O* que pasa por *M* (Fig. 267) es $\overleftrightarrow{OM}$ y la que pasa por *N* es $\overleftrightarrow{ON}$.

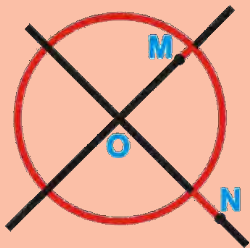


Figura 267

Teorema (Distancia de un punto a una circunferencia)

"La distancia mínima de un punto a una circunferencia es el menor de los dos segmentos de normal comprendidos entre el punto y la circunferencia".

1er. caso. El punto es interior

Hipótesis: *P* es un punto interior de la circunferencia *O*

$\overleftrightarrow{AB}$ es la normal que pasa por *P*.

$\overline{PC}$ distancia de P a un punto cualquiera de la circunferencia (Fig. 268).

Tesis: $\overline{PA} < \overline{PC}$

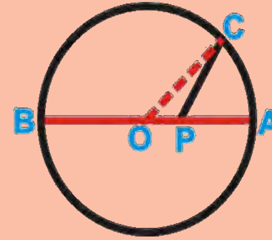


Figura 268

Construcción auxiliar:

Unimos *O* con *C* para formar el ΔOCP

Demostración: En el $\Delta\, OCP$:

$\overline{OC} < \overline{OP} + \overline{PC}$ (1) Postulado de la distancia mínima

Pero: $\overline{OC} = \overline{OA} = \overline{OP} + \overline{PA}$ (2) Radios; suma de segmentos.

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$\overline{OP} + \overline{PA} < \overline{OP} + \overline{PC}$

$\therefore\ \overline{PA} < \overline{PC}$ Simplificando.

2o. caso. El punto es exterior

Hipótesis: *P* es punto exterior a la circunferencia *O* (Fig. 269).

$\overline{AB}$ normal que pasa por *P*.

$\overline{PC}$ distancia de P a un punto cualquiera de la circunferencia.

Tesis: $\overline{PA} < \overline{PC}$

Construcción auxiliar:

Unimos O con C para formar el $\Delta\, OCP$.

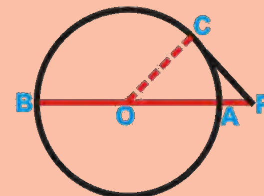


Figura 269

Demostración: En el $\Delta\, OCP$:

$\overline{PA} + \overline{OA} < \overline{PC} + \overline{OC}$ (1) Un lado es menor que la suma de los otros dos.

Pero: $\overline{OA} = \overline{OC}$ (2) Radios.

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$\overline{PA} + \overline{OA} < \overline{PC} + \overline{OA}$

$\therefore \overline{PA} < \overline{PC}$ Simplificando.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

En un plano dos circunferencias pueden tener varias **posiciones relativas** y de acuerdo con ellas se cumplen varias propiedades.

En las circunferencias **exteriores** los puntos de cada una son exteriores a la otra (Fig. 270).

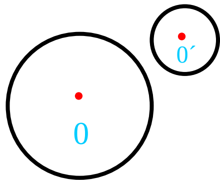


Figura 270

Las circunferencias **tangentes exteriormente** tienen un punto común y los demás puntos de cada una son exteriores a la otra (Fig. 271).

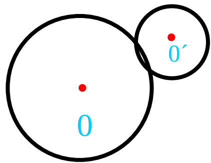


Figura 271

Las circunferencias son **secantes** cuando tienen dos puntos comunes (Fig. 272).

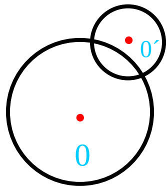


Figura 272

Son circunferencias **tangentes interiormente** cuando tienen un punto común y todos los puntos de una de ellas son interiores a la otra (Fig. 273).

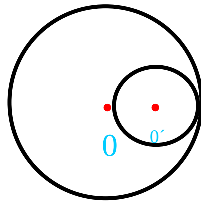


Figura 273

Son circunferencias **interiores** cuando todos los puntos de una de ellas son interiores de la otra (Fig. 274).

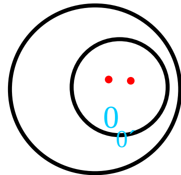


Figura 274

Las circunferencias **concéntricas** tienen el mismo centro (Fig. 275).

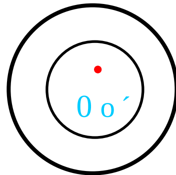


Figura 275

PROPIEDADES DE LAS CIRCUNFERENCIAS

Propiedad de dos circunferencias exteriores: La distancia de los centros es mayor que la suma de los radios (Fig. 276).

$$\overline{OO'} = d = r + r' + \overline{MN} \therefore d > r + r'$$

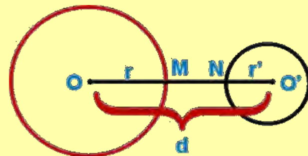


Figura 276

Propiedad de dos circunferencias tangentes exteriormente: la distancia de los centros es igual a la suma de los radios (Fig. 277).

$$d = \overline{OO'} = r + r';\ \backslash\ d = r + r'$$

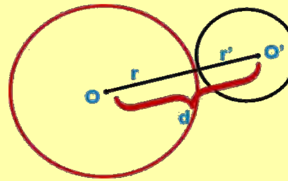


Figura 277

Propiedad de dos circunferencias secantes: La distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia (Fig. 278). En el $\Delta OPO'$:

$$\overline{OO} = d < r + r' \therefore \quad d < r + r'$$

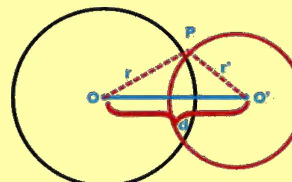


Figura 278

Propiedad de dos circunferencias tangentes interiormente: La distancia de los centros es igual a la diferencia de los radios (Fig. 279).

$$\overline{OO'} = d = r - r' \quad \therefore d = r - r'$$

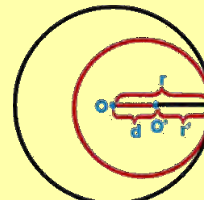


Figura 279

Propiedad de dos circunferencias interiores: La distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios (Fig. 280).

$$d = \overline{OO'}\ \overline{OB} - \overline{O'B} \qquad (1)$$

Pero: $\overline{O'B} = \overline{O'A} + \overline{AB} = r' + \overline{AB}$ (2)

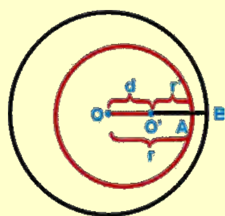


Figura 280

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$d = \overline{OO'} = \overline{OB} - (r' + \overline{AB})$

$\therefore\ d = \overline{OB} - r' - \overline{AB}$

$\therefore\ d = r - r' - \overline{AB}$

$\therefore d < r - r'$

Propiedad de dos circunferencias concéntricas: La distancia de los centros es igual a cero (Fig. 281), y dado que los centros coinciden, entonces $d = O$.

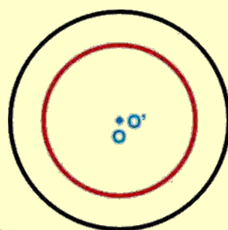


Figura 281

Teorema 1

Dadas dos circunferencias situadas en un mismo plano, se verifica lo siguiente:

1) Si son exteriores, la distancia entre sus centros es mayor que la suma de los radios.

2) Si son tangentes exteriormente, la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios.

3) Si son secantes, la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.

4) Si son tangentes interiormente, la distancia entre los centros es igual a la diferencia de los radios.

5) Si son interiores, la distancia entre los centros es menor que la diferencia de los radios.

6) Si son concéntricas, la distancia entre los centros es nula.

Recíproco. Si d es la distancia entre los centros de dos circunferencias de radios r y r', se verifica lo siguiente:

1) Si $d > r + r'$ Las circunferencias son exteriores.

2) Si $d = r + r'$ Las circunferencias son tangentes exteriormente.

3) Si $d < r + r'$ y $d > r - r'$ Las circunferencias son secantes.

4) Si $d = r - r'$ Las circunferencias son tangentes interiormente.

5) Si $d < r - r'$ Las circunferencias son interiores.

6) Si $d = O$ Las circunferencias son concéntricas.

Teorema 2

"Los arcos de una circunferencia comprendidos entre paralelas son iguales".

Primer caso. Las paralelas son secantes

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son secantes y $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (Fig. 282).

Tesis : $\frown AC = \frown BD$

Construcción auxiliar: Tracemos el diámetro $MN \perp \overleftrightarrow{AB}$ que también será perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$ ya que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

Demostración:

$\frown CM = \frown DM$ (1)

y $\frown AM = \frown BM$ (2) Todo diámetro perpendicular a una cuerda, divide a ésta y al arco subtendido en partes iguales.

Restando (2) de (1):

$\frown CM - \frown AM = \frown DM - \frown BM$ (3)

Pero: $\frown CM - \frown AM = \frown AC$ (4) Resta de arcos; y $\frown DM - \frown BM = \frown BD$ (5)

Sustituyendo (4) y (5) en (3) tenemos:

$\frown AC = \frown BD$

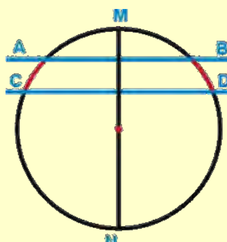


Figura 282

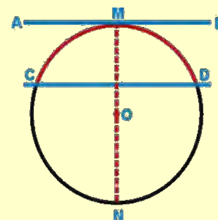


Figura 283

Segundo caso. Una de las paralelas es secante y la otra tangente

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente, $\overleftrightarrow{CD}$ secante y $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (Fig. 283).

Tesis : $\frown CM = \frown DM$

Construcción auxiliar : Tracemos el diámetro $\overline{MN}$ en el punto de contacto M.

Demostración : $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ El diámetro es $\perp$ a la tangente en el punto de contacto.

$\therefore\ \overline{MN} \perp \overline{CD}$ Porque $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ por hipótesis.

$\therefore\ \frown CM = \frown DM$ Todo diámetro $\perp$ a una cuerda divide a ésta y a los arcos subtendidos en partes iguales.

Tercer caso. Las 2 paralelas son tangentes

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente en M ,$\overleftrightarrow{CD}$ es tangente en N y $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

Tesis : $\frown MEN = \frown MFN$

Construcción auxiliar. Tracemos la secante $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, que será también $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

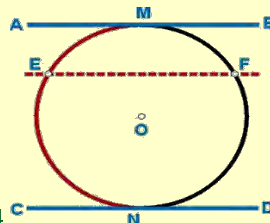


Figura 284

Demostración:

$\frown EM = \frown FM$ (1) Por el segundo caso.

$\frown EN = \frown FN$ (2)

Sumando ordenadamente (1) y (2) tenemos:

$\frown EM + \frown EN = \frown FM + \frown FN$ (3)

Pero: $\frown EM + \frown EN = \frown MEN$ (4) Suma de arcos, y $\frown FM + \frown FN = \frown MFN$ (5)

Sustituyendo (4) y (5) en (3):

$\frown MEN = \frown MFN$

EJERCICIOS

1. Un punto dista dos centímetros del centro de una circunferencia de 6 cm de diámetro. Hallar la menor distancia del punto a la circunferencia.
R. $d = 1$ cm

2. Expresar la menor distancia (x) de un punto a una circunferencia, en función de la distancia del punto al centro (d) y del radio (r) de la circunferencia. Sabiendo que $d < r$.
R. $x = r - d$

3. Si $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, demostrar que $\angle AOC = \angle BOD$.

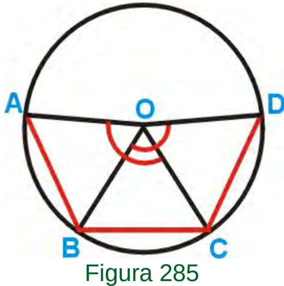


Figura 285

4. Los radios de dos circunferencias son 10 y 16 cm. Hallar la distancia de los centros si las circunferencias son:

a) tangentes interiores **R.** 6 cm
b) tangentes exteriores. **R.** 26 cm

5. Si $\overline{AD} = \overline{DB}$, demostrar que $\frown AE = \frown EB$

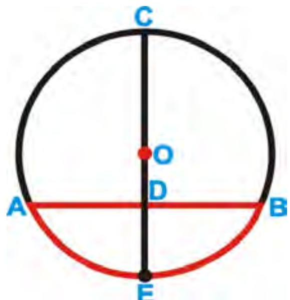


Figura 286

6. Si $\frown AM = \frown MB$, demostrar que $CM \parallel AB$.

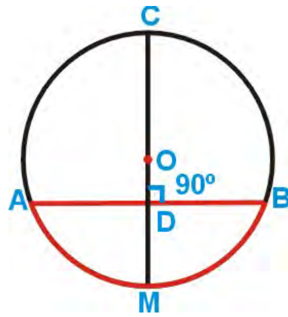


Figura 287

7. Si $\overline{AB} = \overline{BC}$, demostrar que $\Delta ABC = \Delta CBO$.

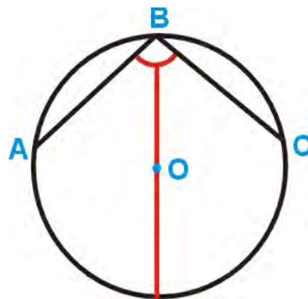


Figura 288

8. Si C es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\frown AD = \frown DB$, demostrar que: $CD \perp AB$

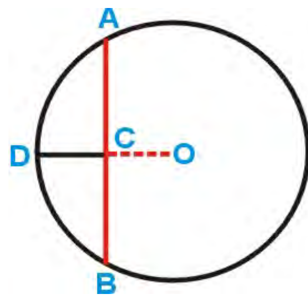


Figura 289

9. Si $\angle 1 = \angle 2$, demostrar que $\overline{AB} = \overline{CD}$.

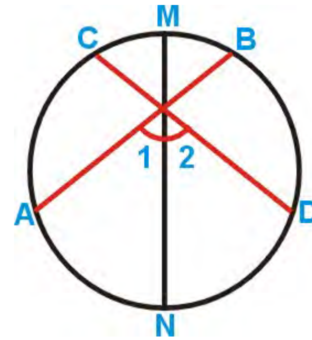


Figura 290

10. Demostrar que en dos circunferencias concéntricas, los segmentos tangentes a la circunferencia menor son cuerdas iguales de la mayor.

11. Si $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ y O es el punto medio de AB, demostrar que $\overline{AC} = \overline{BD}$

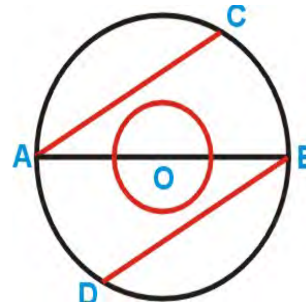
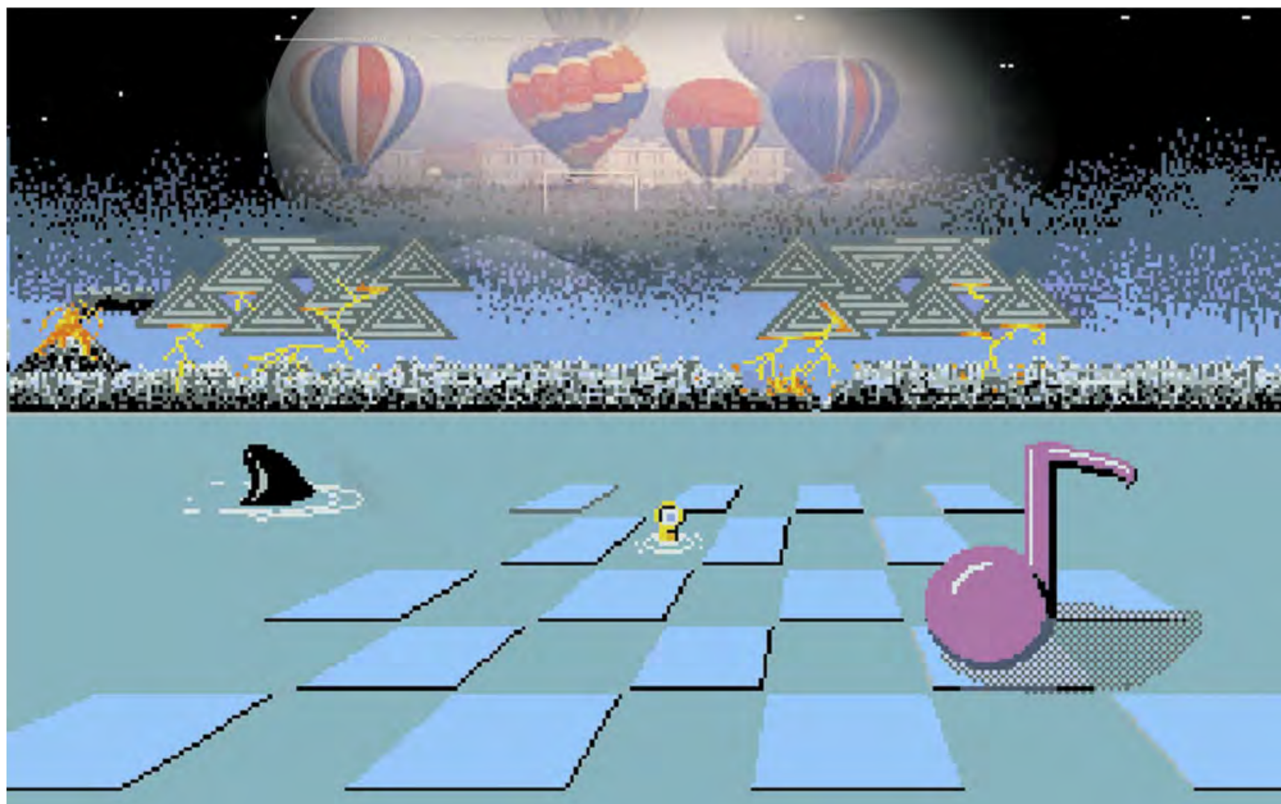


Figura 291

12. Un punto dista tres centímetros del centro de una circunferencia de 4 cm de diámetro. Calcular la menor y la mayor distancia de dicho punto a la circunferencia.
R. menor = 1 cm
mayor = 5 cm



La Geometría Analítica nace de la fusión que Renato Descartes hace del Álgebra utilizada en el siglo XVI con el antiguo análisis geométrico; este trabajo quedó compilado en su obra "Geometría". Se considera a Descartes el padre de la Geometría Analítica.

CAPÍTULO XIV

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Los ángulos de la circunferencia se dividen en ángulo inscrito, ángulo semi-inscrito, ángulo ex-inscrito, ángulo interior, ángulo exterior y ángulo central.

El ángulo central es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia, como sucede en el $\angle AOB$ (Fig. 292).

En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, los ángulos centrales son proporcionales a sus arcos correspondientes. Siendo *O* y *O* ' circunferencias iguales (Figs. 293 y 294) tenemos que:

$$\frac{\angle AOB}{\angle BOC} = \frac{\frown AB}{\frown BC} \text{ y también: } \frac{\angle AOB}{\angle MO'N} = \frac{\frown AB}{\frown MN}$$

MEDIDA DEL ÁNGULO CENTRAL

Si adoptamos como unidad de ángulos el ángulo central correspondiente al arco unidad, la **medida de un ángulo central** será igual a la de su arco correspondiente.

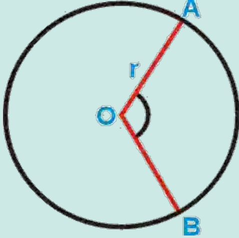


Figura 292

La proporción $\frac{\angle AOB}{\angle MO'N} = \frac{\frown AB}{\frown MN}$, nos dice que si tomamos como unidad de ángulos el $\angle MO'N$ (Figs. 293 y 294) y como unidad de arcos al $\frown OMN$, la medida del $\angle AOB$ será la misma que la del $\frown AB$ (lo que quiere decir que si el $\angle MO'N$ cabe dos veces, por ejemplo,en el $\angle AOB$, nos dice también el $\frown MN$ cabe dos veces en el $\frown AB$).

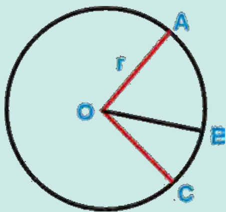


Figura 293

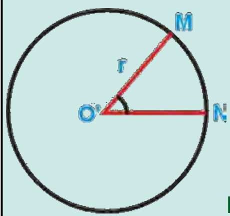


Figura 294

Y dado que resulta más fácil comparar arcos que ángulos, la medida de ángulos es indirecta y se efectúa comparando arcos mediante los transportadores o semicírculos graduados. En este sentido, la medida de un arco no es de longitud; esto significa que dos arcos pueden tener la misma medida de arco, pero diferentes longitudes.

ÁNGULO INSCRITO

El **ángulo inscrito** tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes (Fig. 295).

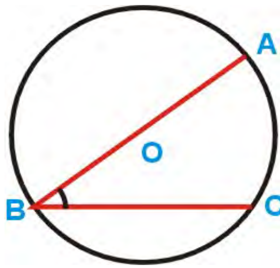


Figura 295

ÁNGULO SEMI-INSCRITO

Un **ángulo semi-inscrito** (Fig. 296) es aquel que tiene su vértice en la circunferencia, uno de sus lados es una tangente y el otro una secante.

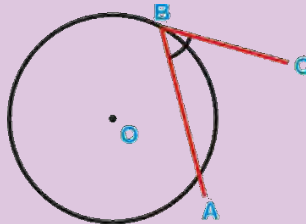


Figura 296

ÁNGULO EX-INSCRITO

Por otra parte, un **ángulo ex-inscrito** es el adyacente a un ángulo inscrito (Fig. 297).

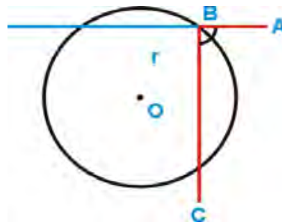


Figura 297

TEOREMA DEL ÁNGULO INSCRITO

"La medida de todo ángulo inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados".

Primer caso. El centro está en uno de los lados del ángulo

Hipótesis: El $\angle ABC$ (Fig. 298) es inscrito y O es el centro de la circunferencia.

Tesis: Medida del $\angle B = \frac{\frown AC}{2}$

Construcción auxiliar: Tracemos el radio $\overline{OC}$ para formar el ΔBOC, que es isósceles.

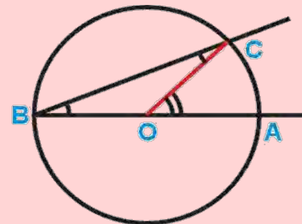


Figura 298

Demostración: En el ΔBOC:

$\angle B = \angle C$ (1) Se oponen a radios iguales.

Pero: $\angle B + \angle C = \angle AOC$ (2)
Por ser el $\angle AOC$ un ángulo exterior.

Sustituyendo (1) en (2) tenemos:

$\angle B + \angle B = \angle AOC$

$\therefore$ $2\ \angle B = \angle AOC$ Sumando;

$\therefore\ \angle B = \frac{\angle AOC}{2}$ (3) Despejando.

Pero $\frown AC$ es medida del $\angle AOC$ (4) Central.

Sustituyendo (4) en (3) tenemos:

medida del $\angle B = \frac{\frown AC}{2}$

Segundo caso. El centro está en el interior del ángulo.

Hipótesis : El $\angle ABC$ es inscrito y O es interior del $\angle ABC$ (Fig. 299).

Tesis : Medida del $\angle B = \frac{\frown AC}{2}$

Construcción auxiliar : Tracemos el diámetro $\overline{BD}$ para formar los ángulos inscritos $\angle ABD$ y $\angle CBD$.

Demostración:

$\angle B = \angle ABD + \angle CBD$ (1) Suma de ángulos.

Pero: $\angle ABD = \frac{\frown AD}{2}$ (2)

y $\angle CBD = \frac{\frown DC}{2}$ (3)

} Por el primer caso.

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos:

medida del $\angle B = \frac{\frown AD}{2} + \frac{\frown DC}{2} = \frac{\frown AC}{2}$ Suma de arcos

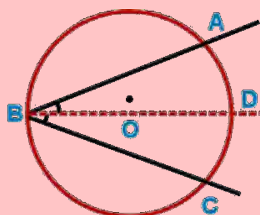


Figura 299

Tercer caso. El centro es exterior al ángulo.

Hipótesis : El $\angle ABC$ es inscrito y O es exterior al $\angle ABC$ (Fig. 300).

Tesis : Medida del $\angle ABC = \frac{\frown AC}{2}$

Construcción auxiliar : Tracemos el diámetro $\overline{BD}$ para formar el $\angle ABD$ y $\angle CBD$, ambos inscritos.

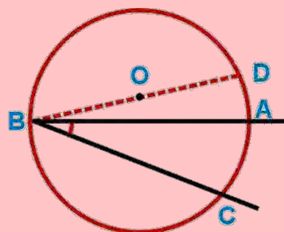


Figura 300

Demostración:

$\angle ABC = \angle CBD - \angle ABD$ (1) Diferencia de ángulos .

Pero: medida del $\angle CBD = \frac{\frown CD}{2}$ (2)

y medida del $\angle ABD = \frac{\frown AD}{2}$ (3)

} Primer caso.

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos:

$\angle ABC = \frac{\frown CD}{2} - \frac{\frown AD}{2} = \frac{\frown AC}{2}$ Diferencia de arcos

Corolario 1: Todos los ángulos inscritos en el mismo arco son iguales, por tanto en la figura 301 tenemos:

$\angle ABC = \angle ADC = \frac{\frown AEC}{2}$

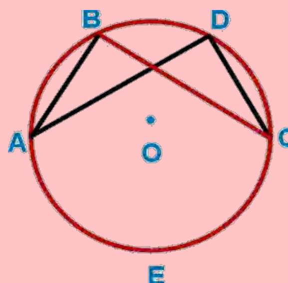


Figura 301

Corolario 2: Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia (Fig. 302) es recto.

$\angle ABC = \angle ADC = \frac{\frown AC}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

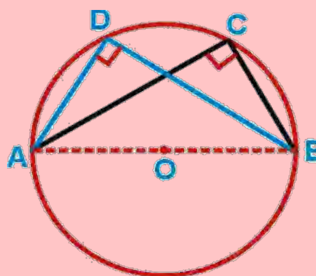


Figura 302

ARCO CAPAZ DE UN ÁNGULO

Ya vimos que todos los ángulos inscritos en el mismo arco son iguales. A ese arco se le llama **arco capaz** de dichos ángulos. En la figura 301 el arco capaz de los ángulos iguales $\angle ABC$, $\angle ADC$, etc., es el $\frown AEC$.

TEOREMA DEL ÁNGULO SEMI-INSCRITO

"La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados".

Primer caso. El centro está en uno de los lados del ángulo.

Hipótesis: El $\angle ABC$ es semi-inscrito y O es el centro de la circunferencia (Fig. 303).

Tesis: Medida del $\angle ABC = \dfrac{\frown BC}{2}$

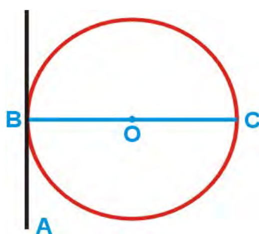


Figura 303

Demostración:

$\angle ABC = 90°$ (1) La tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto.

$\frown BC = 180°$ (2) Por ser $\frown BC$ una semicircunferencia.

Comparando (1) y (2) tenemos:

medida del $\angle ABC = \dfrac{\frown BC}{2}$

Segundo caso. El centro está en el interior del ángulo.

Hipótesis: El $\angle ABC$ es semi-inscrito y O es interior del $\angle ABC$ (Fig. 304).

Tesis: Medida del $\angle ABC = \dfrac{\frown BC}{2}$

Construcción auxiliar: Tracemos por B el diámetro $\overline{BD}$ con lo que queda el $\angle ABC$, dividido en $\angle ABD$ y $\angle DBC$ de , manera que:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$

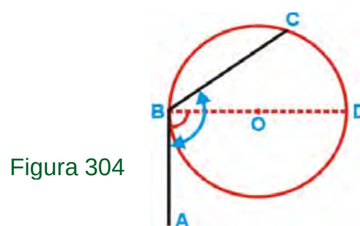


Figura 304

Demostración:

Medida del $\angle ABD = \dfrac{\frown BD}{2}$ (1)

medida del $\angle DBC = \dfrac{\frown DC}{2}$ (2)

} Primer caso

Sumando (1) y (2) tenemos:

medida del $(\angle ABD + \angle DBC) = \dfrac{\frown BD}{2} + \dfrac{\frown DC}{2}$

Efectuando operaciones tenemos:

medida del $\angle ABC = \dfrac{\frown BC}{2}$

Tercer caso. El centro es exterior al ángulo (Fig. 305).

Hipótesis: El $\angle ABC$ es semi-inscrito y O es exterior al ángulo.

Tesis: Medida del $\angle ABC = \dfrac{\frown BC}{2}$

Construcción auxiliar:

Tracemos el diámetro $\overline{BD}$ para formar el $\angle CBD$, que es semi-inscrito.

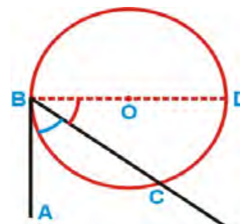


Figura 305

Demostración:

$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD$ (1) Resta de ángulos.

Pero: medida del $\angle ABD = \dfrac{\frown DC}{2}$ (2) Primer caso;

y medida del $\angle CBD = \dfrac{\frown DC}{2}$ (3) Primer caso.

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

medida del $\angle ABC = \dfrac{\frown BC - \frown DC}{2} = \dfrac{\frown BC}{2}$

TEOREMA DEL ÁNGULO EX-INSCRITO

"La medida del ángulo ex-inscrito es igual a la semisuma de los arcos que tienen su origen en el vértice y sus extremos en uno de los lados y en la prolongación del otro".

Hipótesis : El $\angle ABC$ es ex-inscrito (Fig. 306).

Tesis : Medida del $\angle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{BD}}{2}$

Construcción auxiliar : Unimos C con D para formar el ΔBCD.

Demostración:

$\angle ABC = \angle C + \angle D$ (1) Ángulo externo

Pero: medida del $\angle C = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2}$ (2) Inscrito

y medida del $\angle D = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ (3) Inscrito

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos:

medida del $\angle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{BC}}{2}$

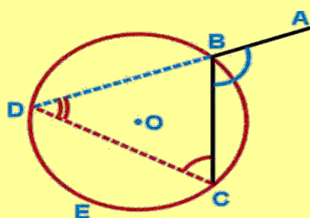


Figura 306

ÁNGULO INTERIOR

En el **ángulo interior** el vértice es un punto interior de la circunferencia. Los $\angle ABC$, $\angle EBD$, $\angle ABE$ y $\angle CBD$. (Fig. 307) son interiores.

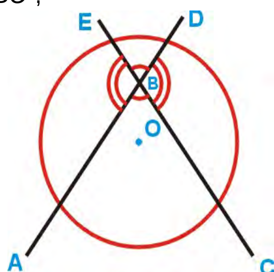


Figura 307

ÁNGULO EXTERIOR

En el **ángulo exterior** el vértice es un punto exterior de la circunferencia.

El $\angle ACE$ (Fig. 308) es exterior.

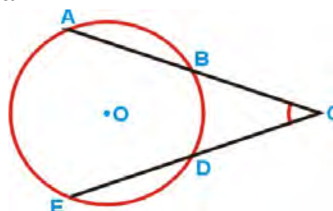


Figura 308

TEOREMA DEL ÁNGULO INTERIOR

"La medida del ángulo interior es igual a la semisuma de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados y por sus prolongaciones".

Hipótesis : El $\angle AED$ es un ángulo interior (Fig. 309)

$\overset{\frown}{AD}$ y $\overset{\frown}{BC}$ son los arcos comprendidos por los lados y las prolongaciones.

Tesis : Medida del $\angle E = \dfrac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}}{2}$

Construcción auxiliar: Unimos A con C para formar el ΔAEC.

Demostración: En el ΔAEC tenemos:

$\angle E = \angle A + \angle C$ (1) Por ser $\angle E$ un ángulo exterior del ΔABC

Pero: medida del $\angle A = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ (2) Inscrito

y medida del $\angle C = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ (3) Inscrito

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos:

Medida del $\angle E = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}}{2}$

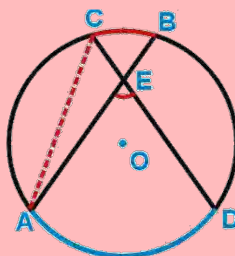


Figura 309

TEOREMA DEL ÁNGULO EXTERIOR

"La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados".

Hipótesis: El $\angle A$ es exterior (Fig. 310).

Tesis: Medida del $\angle A = \dfrac{\frown CD - \frown BE}{2}$

Construcción auxiliar: Unimos C con E para formar el ΔAEC.

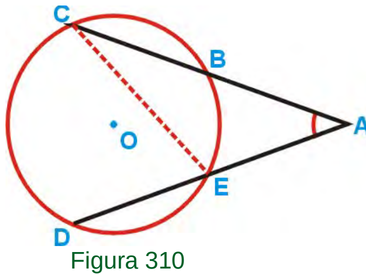


Figura 310

Demostración:

En el ΔACE tenemos:

$\angle E = \angle A + \angle C$ Ángulo exterior del ΔACE

Despejando A:

$\angle A = \angle E - \angle C$ (1)

Pero: medida del $\angle E = \dfrac{\frown CD}{2}$ (2) Inscrito

y medida del $\angle C = \dfrac{\frown BE}{2}$ (3) Inscrito

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos:

medida del $\angle A = \dfrac{\frown CD}{2} - \dfrac{\frown BE}{2} = \dfrac{\frown CD - \frown BE}{2}$

CASO ESPECIAL

Un **caso particular** del ángulo exterior es el ángulo circunscrito, formado por dos tangentes a la circunferencia.

Su medida es también la semidiferencia de los arcos limitados por los puntos de contacto.

EJERCICIOS

1. Si $\frown AE = 80°$ y $\frown BD = 40°$, hallar el $\angle DCB$

R. 20^0

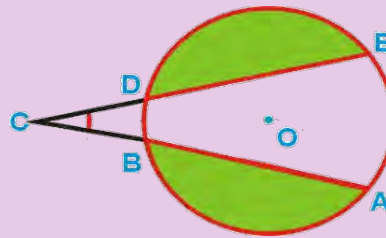


Figura 311

2. Si $\frown PQ = 10°$ y $\angle QSP = 40°$, hallar el $\frown MN$

R. 90^0

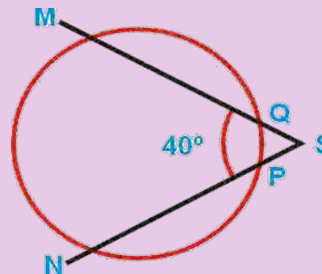


Figura 312

3. Si $\frown BD = 10°$ y $\angle ABE = 40°$, hallar el $\angle BCD$

R. 35^0

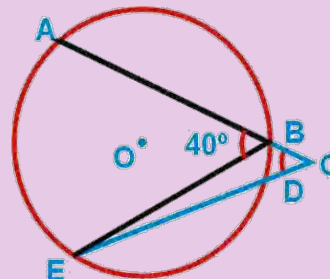


Figura 313

4. Si $\overset{\frown}{AC} = 100°$, hallar el $\angle ABC$

R. 50^0

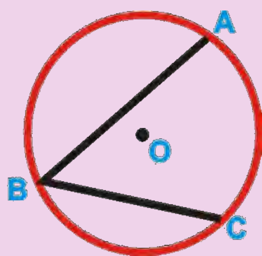


Figura 314

5. Si $\overset{\frown}{AB} = 200°$, hallar el $\angle ABC$

R. 100^0

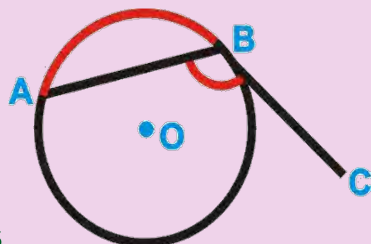


Figura 315

6. Si $\overset{\frown}{AOB} = 80°$, hallar el $\angle ACB$

R. 40^0

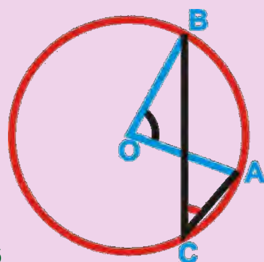


Figura 316

7. Si $\overset{\frown}{AOC} = 70°$, hallar el $\angle ABC$

R. 35^0

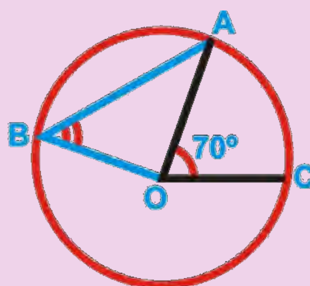


Figura 317

8. Si $\overset{\frown}{DC} = 40°$ y $\overset{\frown}{AE} = 80°$, hallar el $\angle ABE$

R. 60^0

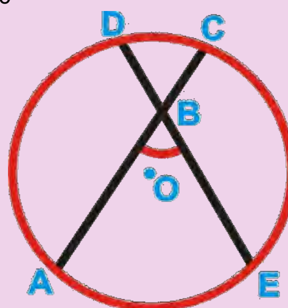
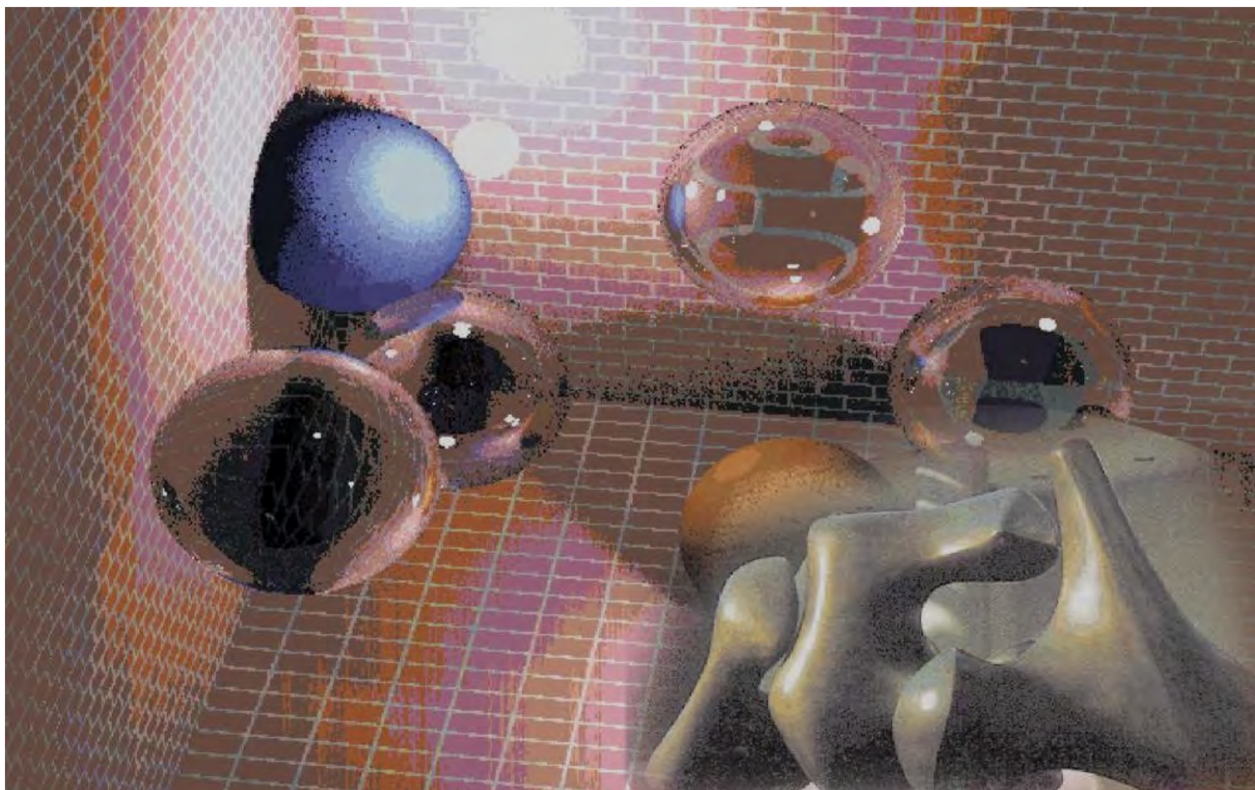


Figura 318



Nicolás Lobatschewski rompe drásticamente con la geometría euclideana con su obra "Pangeometría". Su trabajo fue ignorado hasta que en 1837 fue traducido al francés, y posteriormente al alemán.

CAPÍTULO XV

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

Para construir tangentes en una circunferencia, si se conoce el punto de tangencia sólo bastará trazar la perpendicular al radio que pasa por ese punto. En cambio si se da un punto exterior desde el cual deban trazarse las tangentes se describe una circunferencia cuyo diámetro es el segmento *MO*, siendo *O* el centro de la circunferencia. Ambas circunferencias serán secantes.

Para conocer la cantidad de tangentes comunes se deben conocer las posiciones relativas de las circunferencias. Si las circunferencias son interiores no hay solución. Si son tangentes interiormente, hay una sola solución: la tangente en el punto común. Si son secantes, hay dos soluciones: las llamadas tangentes comunes exteriores. Si son tangentes exteriormente hay tres soluciones: las dos anteriores más la tangente en el punto común. Si son exteriores hay cuatro soluciones: las dos tangentes comunes exteriores y las dos tangentes comunes interiores.

TEOREMA DE LAS RELACIONES ENTRE LAS CUERDAS DE LA CIRCUNFERENCIA

"Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan, el producto de los dos segmentos determinados en una cuerda es igual al producto de los dos segmentos determinados en la otra".

Hipótesis : $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas que se cortan en Q .

$\overline{QA}$ y $\overline{QB}$ son los segmentos determinados en $\overline{AB}$

$\overline{QC}$ y $\overline{QD}$ son los segmentos determinados en $\overline{CD}$ (Fig. 319).

Tesis : $\overline{QA} \bullet \overline{QB} = \overline{QC} \bullet \overline{QD}$

Construcción auxiliar: Unimos A con D y B con C para formar los triángulos $\Delta\,BCQ$ y $\Delta\,ADQ$.

Demostración:

En los $\Delta\,BCQ$ y $\Delta\,ADQ$:

$\angle A = \angle C$ (inscritos en el mismo arco $\frown BD$)

$\angle B = \angle D$ (inscritos en el mismo arco $\frown AC$)

$\therefore\ \Delta BCQ \sim \Delta ADQ$ (por tener dos ángulos iguales)

Al establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos tenemos:

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{QD}}{\overline{QB}}$$

$$\therefore\quad \overline{QA} \bullet \overline{QB} = \overline{QC} \bullet \overline{QD}$$

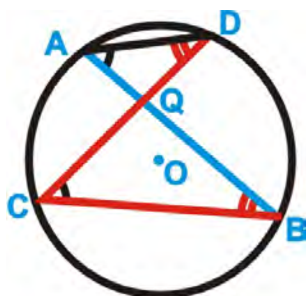


Figura 319

(por ser el producto de los medios igual al producto de los extremos).

TEOREMA SOBRE LAS RELACIONES ENTRE SECANTES DE UNA CIRCUNFERENCIA

"Si por un punto exterior de una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de una secante por su segmento exterior es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior".

Hipótesis : $\overline{QA}$ y $\overline{QC}$ secantes; $\overline{QB}$ y $\overline{QD}$ segmentos exteriores (Fig. 320).

Tesis : $\overline{QA} \bullet \overline{QB} = \overline{QC} \bullet \overline{QD}$

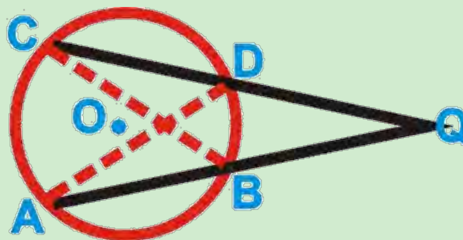


Figura 320

Construcción auxiliar:

Unimos A con D y B con C para formar los triángulos $\Delta\,Q\,DA$ y $\Delta\,Q\,BC$.

Demostración:

En los $\Delta\,Q\,DA$ y $\Delta\,Q\,BC$:

$\angle Q = \angle Q$ Común

$\angle A = \angle C$ Inscritos en $\frown BD$

$\therefore\ \Delta Q\ DA \sim \Delta Q\ BC$ Por tener dos ángulos iguales.

Al establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos, se tiene la siguiente igualdad:

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{QD}}{\overline{QB}}$$

$$\therefore\quad \overline{QA} \bullet \overline{QB} = \overline{QC} \bullet \overline{QD}$$

Por ser el producto de los medios igual al producto de los extremos.

TEOREMA SOBRE LA PROPIEDAD DE LA TANGENTE Y LA SECANTE TRAZADAS DESDE UN PUNTO EXTERIOR A UNA CIRCUNFERENCIA

"Si por un punto exterior de una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento exterior".

Hipótesis: $\overline{QT}$ y $\overline{QA}$ son tangente y secante de la circunferencia O (Fig. 321).

Tesis: $\frac{\overline{QA}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{QB}}$

Construcción auxiliar: Unimos T con A y con B para formar los triángulos $\Delta\ QTA$ y $\Delta\ QTB$.

Demostración:

En los $\Delta\ QTA$ y $\Delta\ QTB$:

$\angle Q = \angle Q$ Común

$\angle A = \angle T$ Inscrito y semi-inscrito en el $\frown BT$

$\therefore\ \Delta QTA \sim \Delta QTB$ Por tener dos ángulos iguales

Al establecer la proporcionalidad entre los lados homólogos:

$\frac{\overline{QA}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{QB}}$

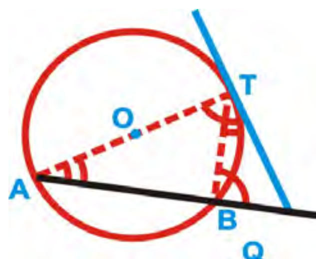


Figura 321

DIVISIÓN AUREA

La división áurea de un segmento $\overline{AB}$ en media y extrema razón consiste en dividirlo en dos segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$ tales que:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$



Figura 322

Es decir que el segmento $\overline{AM}$ es la media proporcional entre $\overline{AB}$ y $\overline{MB}$ y se le conoce como segmento áureo; se considera que esta división es la más proporcionada que se puede hacer de un segmento.

Cálculo analítico del segmento áureo. Siendo $\overline{AB}$ = a (Fig. 323) un segmento cualquiera y siendo $\overline{AP}$ = x su segmento áureo:

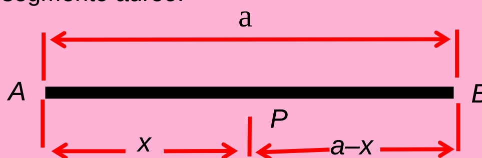


Figura 323

Tendremos:

$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ Por definición

$\therefore\ x^2 = a(a-x)$ Producto de medios igual a producto de extremos

$x^2 = a^2 - ax$ Efectuando;

$x^2 + ax - a^2 = 0$ Trasponiendo y ordenando.

Resolviendo esta ecuación de segundo grado:

$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2}$ Aplicando la fórmula

$x = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$ Efectuando

$x = \frac{a(-1 \pm a\sqrt{5})}{2}$ Sacando a del radical

$x = \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$ Sacando factor común a

$x = \frac{a - 1 + \sqrt{5}}{2}$ Considerando solamente el valor positivo

$x = a\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ Separando y ordenando

Ejemplos

1) Hallar el segmento áureo de un segmento de 12 cm.

Fórmula: $x = \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

$x = 12\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] = 6(\sqrt{5}-1)$

x = 6(2.24 _ 1) = 6(1.24) = 7.44 cm

2) Hallar el segmento cuyo segmento áureo vale 6.2 centímetros.

De la fórmula $x = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ al sustituir valores resulta:

$6.2 = a\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

2(6.2) = a ($\sqrt{5}$- 1); 12.4 = a (2.24 - 1)

12.4 = 1.24 a

$\therefore\ a = \frac{12.4}{1.24} = 10$ cm

DIVISIÓN ÁUREA DE UN SEGMENTO(solución gráfica)

Siendo $AB = a$ el segmento (Fig.324).

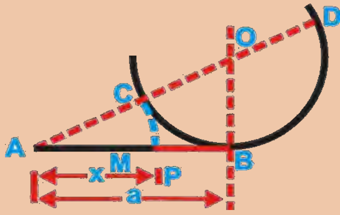


Figura 324

Construcción

1. En el extremo B, levantamos $\overline{OB} \perp \overline{AB}$

2. Trazamos $\overline{OB} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = \overline{AM}$

3. Con centro en O y con radio $\overline{OB} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$

trazamos una circunferencia.

4. Unimos A con O y determinamos el punto C.

5. Con centro en A y con radio igual a $\overline{AC}$ determinamos el punto P.

6. El segmento $\overline{AP} = x$ es el segmento áureo.

JUSTIFICACIÓN DEL MÉTODO GRÁFICO

Prolonguemos $\overline{AO}$ hasta que corte a la circunferencia en D, con lo que tendremos la tangente $\overline{AB}$ y la secante $\overline{AD}$.

Entonces: $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ (1)

Pero: $\overline{AP} = \overline{AC} = x$ (2)

$x + \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} = x + a$ (3)

$\overline{AB} = a$ (4)

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1) tenemos:

$$\frac{x+a}{a} = \frac{a}{x}$$
$$x(x+a) = a^2$$
$$x^2 + ax = a^2$$
$$x^2 = a^2 - ax$$
$$x^2 = a(a-x)$$

o sea, $$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

Por tanto, el punto P divide $\overline{AB}$ en media y extrema razón.

EJERCICIOS

1. Hallar gráficamente el segmento áureo de un segmento de 9 cm.

2. Comprobarlo efectuando la medida.
R. 5.6 cm

3. Buscar qué ancho debe tener un rectángulo de 20 cm de largo, para que sus dimensiones sean lo más proporcionadas posibles.
R. 12.4 cm

4. Hallar algebraicamente el segmento áureo de un segmento de 30 cm
R. 18.6 cm

5. Demostrar que el segmento áureo es aproximadamente el 62% del segmento total.

6. Si $\overline{AP} = 3$, $\overline{PB} = 5$ y $\overline{PC} = 4$; hallar $\overline{PD}$ (Fig.325)
R. $\overline{PD} = 3.75$

7. Si $\overline{AB} = 8$, $\overline{PC} = 3$ y $\overline{PD} = 4$; hallar AP y PB (Fig. 325)
R. $\overline{AP} = 2$ y $\overline{PB} = 6$

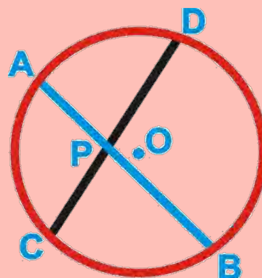


Figura 325

8. Si $\overline{PB} = 2\overline{AP}$, $\overline{PC} = 4$ y $\overline{CD} = 12$; hallar $\overline{AB}$ (Fig. 325) **R.** $\overline{AB} = 12$

9. Si $\overline{AB} = 11$, $\overline{AP} = 3$ y $\overline{PD} = 2\overline{PC}$; hallar $\overline{PC}$ (Fig. 325) **R.** $\overline{PC} = 2\sqrt{3}$

10. Si $\overline{CD} = 15$, $\overline{PD} = 6$ y $\overline{PB} = 3\overline{PA}$; hallar $\overline{PA}$ (Fig. 325) **R.** $\overline{PA} = 3\sqrt{2}$

11. Si $\overline{QB} = 12$, $\overline{QA} = 4$ y $\overline{QD} = 10$; hallar $\overline{QC}$ (Fig. 326) **R.** $\overline{QC} = 4.8$

12. Si $\overline{QB} = 70$, $\overline{QA} = 8$ y $\overline{QC} = 6$; hallar $\overline{QD}$ (Fig. 326)
R. $\overline{QD} = 93\frac{1}{3}$

13. Si $\overline{QB} = 14$, $\overline{AB} = 8$ y $\overline{CD} = 10$; hallar $\overline{QC}$ (Fig. 326) **R.** $\overline{QC} = 5.4$

14. Si $\overline{QA} = 8$, $\overline{AB} = 12$ y $\overline{CD} = 10$; hallar $\overline{QC}$ (Fig. 326) **R.** $\overline{QC} = 8.6$

15. Si $\overline{QA} = \overline{AB}$, $\overline{QC} = 8$ y $\overline{CD} = 14$; hallar $\overline{QB}$ (Fig. 326)
R. $\overline{QB} = 4\sqrt{11}$

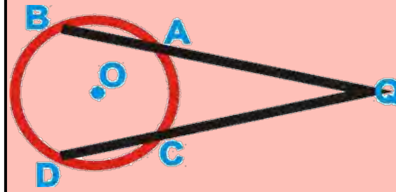


Figura 326

16. Si $\overline{QA} = 9$ y $\overline{QB} = 4$; hallar $\overline{QT}$ (Fig. 327) **R.** $\overline{QT} = 6$

17. Si $\overline{QA} = 8$ y $\overline{BA} = 4$; hallar $\overline{QT}$ (Fig. 327) **R.** $\overline{QT} = 4$

18. Si $\overline{QT} = 8$ y $\overline{QA} = 20$; hallar $\overline{QB}$ (Fig. 327) **R.** $\overline{QB} = 3.2$

19. Si $\overline{QT} = 14$ y $\overline{QB} = 8$; hallar la medida correspondiente a $\overline{QA}$

(Fig. 327) **R.** $\overline{QA} = 24.5$

20. Si $\overline{QT} = \dfrac{\overline{QA}}{2}$ y $\overline{QB} = 9$; hallar $\overline{QT}$

(Fig. 327) **R.** $\overline{QT} = 18$

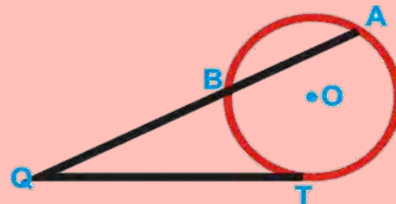
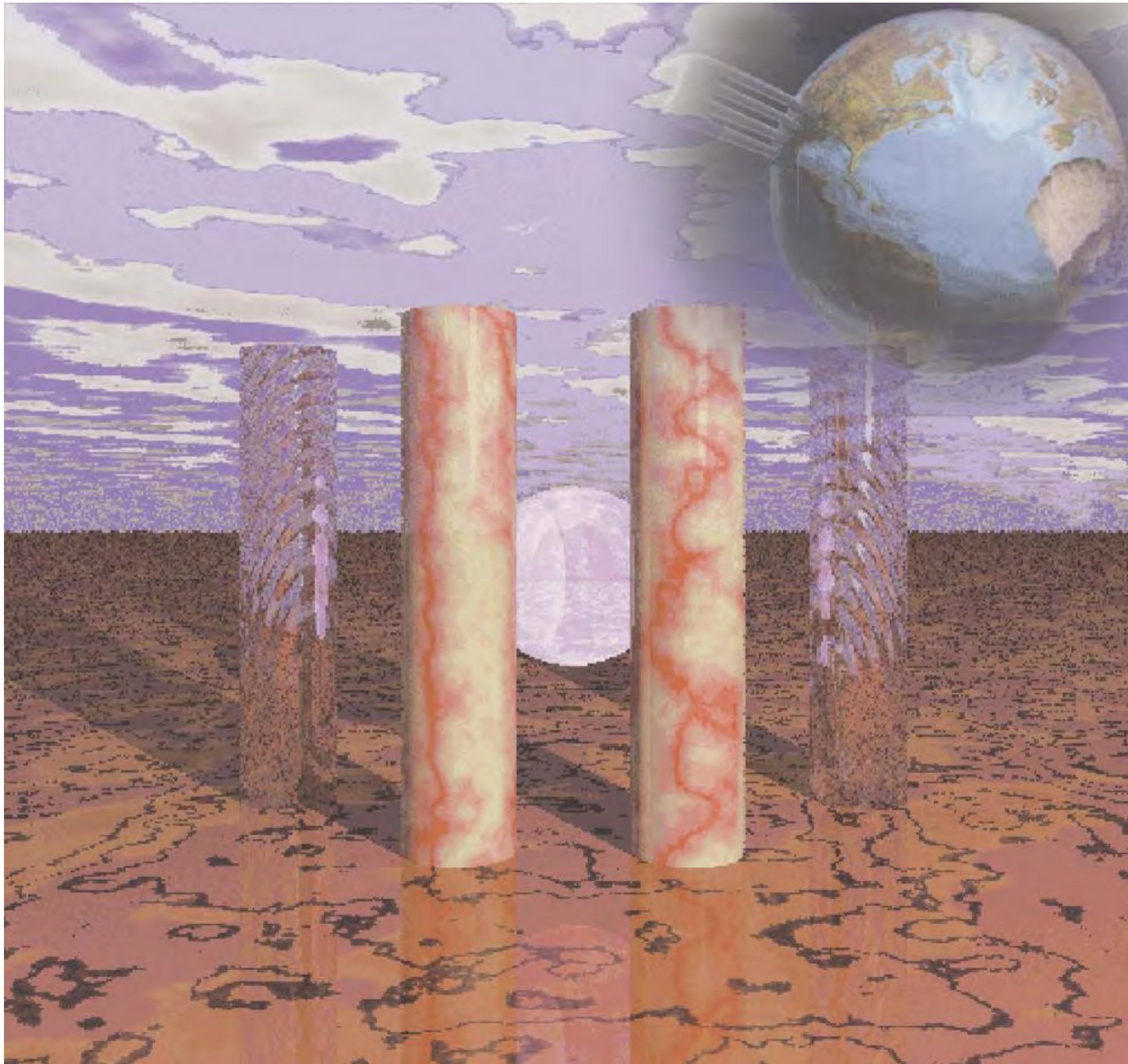


Figura 327



Riemann estudia la Geometría de una superficie curva cuyas geodésicas desempeñan el papel de las rectas euclídeas en el plano; y la Geometría de un espacio cuya curvatura puede cambiar el carácter de tal "Geometría". Su mérito radica en haber extendido al espacio la noción de la curvatura.

CAPÍTULO XVI

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS POLÍGONOS REGULARES

Un polígono regular queda descompuesto por todos sus ángulos centrales en tantos triángulos iguales como lados tenga dicho polígono.

Para encontrar su área bastará hallar la de uno de los triángulos y multiplicarla por el número de ellos *n*. Como la altura *a* de cada triángulo es la apotema del polígono, se tiene:

$$\frac{l \times a}{2} \times n = \frac{l \times n \times a}{2}$$

POLÍGONOS

Los **polígonos regulares** tienen los lados y los ángulos iguales (Fig. 328).

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F$

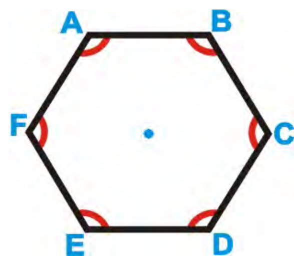


Figura 328

Un **polígono inscrito** tiene todos sus vértices sobre una circunferencia (Fig. 329).

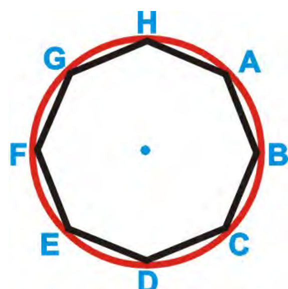


Figura 329

Cuando el polígono está inscrito, se dice que la circunferencia está **circunscrita** al polígono.

El **polígono circunscrito** tiene sus lados tangentes a la circunferencia (Fig. 330).

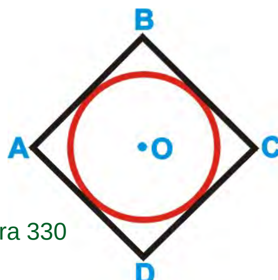


Figura 330

Cuando el polígono está circunscrito, se dice que la circunferencia está **inscrita**.

El radio de un polígono regular es el de la circunferencia circunscrita. En la Fig. 331, $\overline{OD} = \overline{OE}$ son radios del polígono.

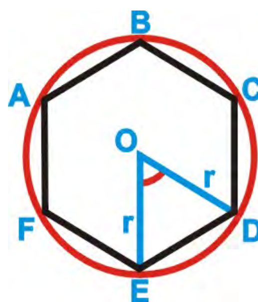


Figura 331

El ángulo central de un polígono regular está formado por dos radios que corresponden a los extremos de un mismo lado. En la figura 331 el $\angle EOD$ es un ángulo central del polígono.

$\therefore \quad \angle A = \angle B = \angle C = \ldots$

Inscritos en arcos iguales

$\therefore ABCDEF$ es regular

Por tener iguales sus lados y sus ángulos.

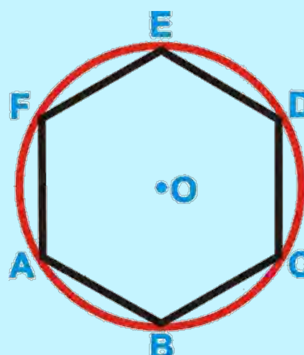


Figura 332

Corolario:

Si unimos el punto medio de cada uno de los arcos subtendidos por los lados de un polígono regular inscrito con los dos vértices más próximos, se formará un polígono regular inscrito de doble número de lados que el polígono dado.

Como los nuevos arcos $\frown AH$, $\frown HB$, $\frown BI$ etc. (Fig. 333) son iguales entre sí, por ser mitades de arcos iguales, el nuevo polígono será regular de acuerdo con este teorema.

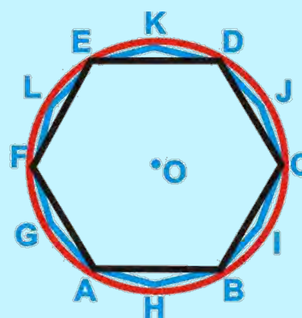


Figura 333

TEOREMA 1

"Si se divide una circunferencia en tres o más arcos iguales, las cuerdas que unen los puntos sucesivos de división formarán un polígono regular inscrito".

Hipótesis: En la circunferencia O (Fig. 332) $\frown AB = \frown BC = \frown CD = \ldots\ldots$ son los arcos;

y $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \ldots\ldots$ son sus cuerdas correspondientes.

Tesis: $ABCD$ es regular.

Demostración:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \ldots:$

Por ser $\frown AB = \frown BC = \frown CD$: : : por hipótesis

TEOREMA 2

"Si se divide una circunferencia en tres o más arcos iguales, las tangentes trazadas a la circunferencia por los puntos de división o por los puntos medios de dichos arcos formarán un polígono regular circunscrito".

Si dividimos, por ejemplo, la circunferencia en seis arcos iguales y trazamos por los puntos de división tangentes a dicha circunferencia, dichas tangentes formarán el hexágono circunscrito *ABCDEF* (Fig. 334), que es regular por tener sus ángulos iguales, además de ser exteriores que abarcan arcos iguales, y sus lados también son iguales por ser sumas de segmentos iguales.

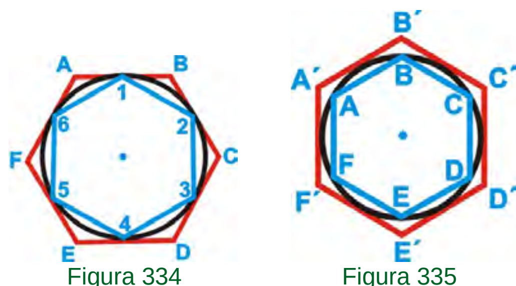


Figura 334 Figura 335

Análogamente, si trazamos las tangentes por los puntos medios de cada uno de los 6 arcos iguales en que ha sido dividida la circunferencia *O*, se forma el hexágono circunscrito *A'B'C'D'E'F'* (Fig. 335) que también es regular y sus lados son respectivamente paralelos a los lados del hexágono inscrito formado al unir los puntos de división.

En ambos casos, los polígonos inscritos y circunscritos tienen el mismo número de lados.

APOTEMA

La apotema de un polígono regular es el segmento de una perpendicular trazada desde el centro del polígono a uno cualquiera de sus lados. En la figura 337 $\overline{OM}$ es la apotema.

La apotema se designa con la letra "*a*" acompañada de un subíndice que indica el número de lados del polígono al que pertenece, por ejemplo:
a_4 representa la apotema del cuadrado

a_5 representa la apotema del pentágono

a_6 representa la apotema del hexágono, etc.

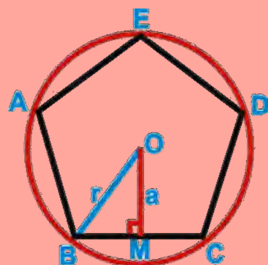


Figura 337

TEOREMA 3

"Todo polígono regular puede ser inscrito en una circunferencia".

Hipótesis: *ABCDEF* es un polígono regular (Fig. 336).

Tesis: *ABCDEF* es inscribible.

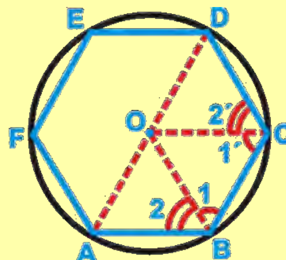


Figura 336

Construcción auxiliar : Construyamos la circunferencia *O* que pasa por tres de los vértices *A*, *B* y *C*. Trazamos los radios $\overline{OA}, \overline{OB}$ y $\overline{OC}$ y unimos *O* con *D* para formar los triángulos $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ y $\triangle OCD$.

Demostración:

$\angle ABC = \angle BCD$ (1) El polígono *ABCDEF* es regular por hipótesis

$\angle 1 = \angle 1'$ (2) Por ser el $\triangle OBC$ isósceles.

En los $\triangle$ *OAB* y $\triangle$ *OCD*:

$\angle 2 = \angle 2'$ Restando (2) de (1)

Además: $\overline{AB} = \overline{CD}$ El polígono *ABCDEF* es regular por hipótesis

y $\overline{OB} = \overline{OC}$ Radios de la misma circunferencia

$\therefore \triangle OAB = \triangle OCD$ Por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido

$\therefore \overline{OA} = \overline{OD}$ Elementos homólogos de triángulos iguales.

La circunferencia *O* pasa por *D*. Análogamente probaríamos que la circunferencia *O* pasa por *E*, por *F*, etc. Por ser $\overline{OD} = \overline{OA}$ = radio

$\therefore$ *ABCDEF* es inscribible Por tener todos sus vértices sobre la circunferencia *O*.

CÁLCULO DE LA APOTEMA EN FUNCIÓN DEL LADO Y DEL RADIO

Cálculo de la apotema en función del lado y del radio (Fig. 338):

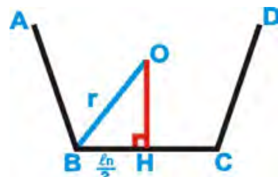


Figura 338

Siendo $\overline{BC} = l_n$ (lado de un polígono regular de *n* lados)

$\overline{OH} = a_n$ (apotema)

$\overline{OB} = r$ (radio)

En el $\Delta\, OBH$:

$\overline{OB}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{BH}^2$ (1) Teorema de Pitágoras

Pero: $\overline{BH} = \dfrac{\overline{BC}}{2} = \dfrac{l_n}{2}$ (2)

$\overline{OH} = a_n$ (3)

$\overline{OB} = r$ (4)

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1) tenemos:

$$r^2 = a_n^2 + \left[\frac{I_n^2}{2}\right]$$

Despejando a_n^2: $$a_n^2 = r^2 - \left[\frac{l_n}{2}\right]^2$$

Efectuando operaciones: $$a_n^2 = \frac{r^2 - l_n^2}{4};$$

$$a_n^2 = \frac{4r^2 - I_n^2}{4}$$

Extrayendo raíz cuadrada: $$a_n = \sqrt{\frac{4r^2 - l_n^2}{4}};$$

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - I_n^2}$$

CÁLCULO DEL LADO DEL POLÍGONO REGULAR INSCRITO DE DOBLE NÚMERO DE LADOS

A continuación obtendremos una fórmula que nos permitirá, sabiendo el valor del lado de un polígono regular cualquiera, calcular el valor del lado del polígono con doble número de lados, inscrito en la misma circunferencia (Fig. 339):

Siendo $\overline{BC} = l_n$ (1)

$\overline{OH} = a_n$ (2)

$\overline{EC} = l_{2n}$ (3)

$\overline{OC} = \overline{OE} = r$ (4)

En el $\Delta\, OCE$:

$\overline{EC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OE}^2 - 2\overline{OE} \bullet \overline{OH}$ (5) (cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo).

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (5) tenemos:

$l_{2n}^2 = r^2 - 2r \bullet a_n$ (6)

Pero: $a_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$ (7)

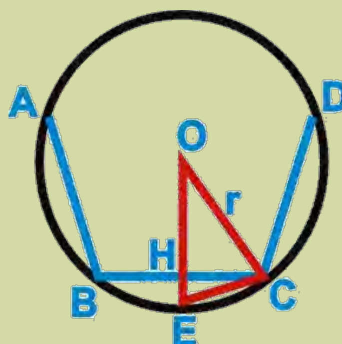


Figura 339

$$\therefore\ I_{2n^2} = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - I_{n^2}}$$

$$\therefore\ I_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - I_{n^2}}}$$

CÁLCULO DEL LADO DEL POLÍGONO CIRCUNSCRITO

Siendo $\overline{AB} = l_n$, $\overline{A'B'} = L_n$

Construcción auxiliar : Tracemos el radio $\overline{OH'} \perp \overline{A'B'}$. Siendo H el punto donde $\overline{OH'}$ corta a AB ., Como $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ entonces $\overline{OH}$ será la apotema del el polígono inscrito. Unimos O con A' y con B' para formar $\Delta OA'B'$ y ΔOAB (Fig. 340).

$\angle OA'B' = \angle OAB$, por ser $\overline{AB} \parallel A'B'$

$\therefore \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OH'}}{\overline{OH}}$ (1) (Alturas homólogas de triángulos semejantes).

Pero: $\overline{A'B'} = L_n$ (2)

$\overline{AB} = l_n$ (3)

$\overline{OH'} = r$ (4)

$\overline{OH} = a_n$ (5)

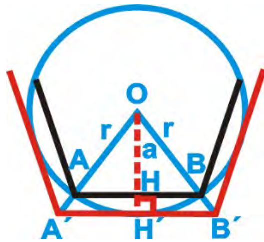


Figura 340

Sustituyendo (2), (3), (4) y (5) en (1) tenemos:

$\dfrac{L_n}{l_n} = \dfrac{r}{a_n}$ (6) Extremo de una proporción

Pero:

$a_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$ (7)

Sustituyendo (7) en (6), tenemos:

$$L_n = \frac{I_n r}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - I_{n^2}}}$$

$$\therefore \; L_n = \frac{2rI_n r}{\sqrt{4r^2 - I_{n^2}}}$$

APLICACIONES

1) Sabiendo que el lado del cuadrado inscrito en una circunferencia de radio r valer $\sqrt{2}$, calcular la apotema y el lado del octágono inscrito en la misma circunferencia.

Cálculo de la apotema:

Dato: $l_4 = r\sqrt{2}$ $a_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$

Fórmulas:

Incógnita: $a_4 = x$ $a_4 = \dfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_{4^2}}$

$$a_4 = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - (r\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - 2r^2}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2r^2} \quad \therefore \quad a_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

Cálculo del lado del octágono:

Fórmula: $l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_{n^2}}}$

$$I_8 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - (r\sqrt{2})^2}}$$

$$I_8 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - 2r^2}}$$

$$I_8 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{2r^2}}$$

$$I_8 = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}}$$

$$I_8 = \sqrt{r^2(2 - \sqrt{2})}$$

$$\therefore \quad I_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

2) Calcular la apotema y el lado de un decágono inscrito en una circunferencia de radio igual a 2 m, sabiendo que el lado del pentágono inscrito en la misma circunferencia vale $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

Cálculo del lado del decágono:

Datos: $r = 2m$, $l_5 = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ Incógnitas: $\begin{cases} l_{10} \\ a_{10} \end{cases}$

Fórmula: $l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_{n^2}}}$

$$I_{10} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - I_{n^2}}}$$

$$I_{10} = \sqrt{2 \bullet 2^2 - 2\sqrt{4 \bullet 2^2 - \left[\sqrt{10 - 2\sqrt{2}}\right]^2}}$$

$$I_{10} = \sqrt{8 - 2\sqrt{16 - 10 - 2\sqrt{5}}}$$

$$I_{10} = \sqrt{8 - 2\sqrt{16 - (10 - 2\sqrt{5})}}$$

$$I_{10} = \sqrt{8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}$$

Cálculo de la apotema:

Fórmula: $a_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_{n^2}}$

$$a_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{4 \bullet 2^2 - \left[\sqrt{8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}\right]^2}$$

$$a_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{16 - \left[\sqrt{8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}\right]^2}$$

$$a_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{16 - 8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}$$

$$a_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}$$

CÁLCULO DEL LADO DEL HEXÁGONO

Ahora demostraremos que el lado del hexágono regular inscrito en una circunferencia es igual al radio. Siendo el hexágono regular *ABCDEF* (Fig. 341) inscrito en la circunferencia *O* de radio *r*.

Siendo $\overline{AB} = l_6$ *y* $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ (demostraremos que l 6 =r)

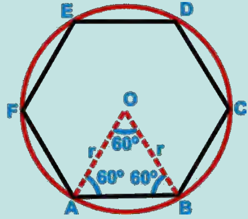


Figura 341

Demostración: En el ΔAOB :

$\angle A + \angle B + \angle O = 180°$ (1) Suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Pero: $\angle O = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ (2) Ángulo central

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$\angle A + \angle B + 60° = 180°$

$\therefore$ $\angle A + \angle B = 180° - 60°$ Trasponiendo

$\angle A + \angle B = 120°$ (3) Efectuando operaciones

Pero: $\angle A = \angle B$ (4) Por oponerse a lados iguales, ya que $\overline{OA} = \overline{OB} = r$

Sustituyendo (4) en (3) tenemos:

$\angle A + \angle A = 120°$, $\angle B + \angle B = 120°$

$2\angle A = 120°$, $2\angle B = 120°$

$\angle A = \frac{120^\circ}{2}, \angle B = \frac{120^\circ}{2}$

$\angle A = 60°$ (5)

$\angle B = 60°$ (6)

Como $\angle A = \angle B = \angle O = 60°$, resulta: Comparando (2), (5) y (6) con ángulos iguales, se oponen lados iguales.

$\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$

$\therefore$ $l_6 = r$

En consecuencia para construir un hexágono regular inscrito en una circunferencia dada se toma el radio y se lleva seis veces como cuerda.

CÁLCULO DEL LADO DEL TRIÁNGULO EQUILÁTERO

Siendo el triángulo equilátero Δ *ABC* (Fig. 342), inscrito en la circunferencia *O*, construido dividiendo la circunferencia en seis partes iguales y uniendo de dos en dos.

Si *D* es el punto medio del *OAC*, el diámetro $\overline{BD}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{AC}$.

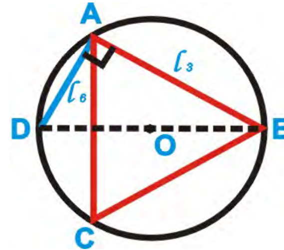


Figura 342

En el ΔDAB :

$\Delta A = 90°$ Inscrito en una semicircunferencia

$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$ (1) Teorema de Pitágoras

Pero: $\overline{BD} = 2r$ (2) Por ser diámetro

$\overline{AD} = l_6$ (3)
$\overline{AB} = l_3$ (4) } Construcción

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1):

$(2r)^2 = l_3^2 + l_3^2$

$\therefore 4r^2 = l_3^2 + l_6^2$ (5) Efectuando operaciones

Pero: $l_6 = r$ (6) Por lado del hexágono

Sustituyendo (6) en (5):

$4r^2 = l_3^2 + r^2$

$\therefore 4r^2 - r^2 = l_3^2$ Despejando

$\therefore l_3^2 = 3r^2$

Extrayendo la raíz cuadrada

$\therefore\ l_3 = \sqrt{3r^2}$

$\therefore\ l_3 = r\sqrt{3}$ Simplificando

LADO DEL CUADRADO

Siendo el cuadrado *ABCD*, inscrito en la circunferencia *O* (Fig. 343).

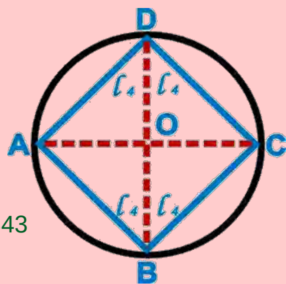


Figura 343

En el ΔAOB

$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$ (1) Teorema de Pitágoras

Pero: $\overline{AB} = l_4$ (2)

y $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos:

$l_4{}^2 = r^2 + r^2$

$\therefore \quad l_{4^2} = 2r^2$ Efectuando operaciones

$\therefore \quad l_4 = r\sqrt{2}$

$\therefore \quad l_{4^2} = \sqrt{2r^2}$ Sacando la raíz cuadrada

Teorema (propiedad del lado del decágono regular)

"El lado del decágono regular inscrito en una circunferencia es igual al segmento áureo del radio".

Hipótesis: En la circunferencia *O* de radio *r* siendo $\overline{AB} = l_{10}$(figura 344).

Tesis : $\frac{r}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{r - l_{10}}$

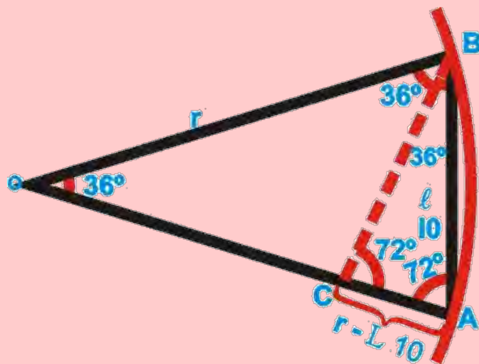


Figura 344

Construcción auxiliar:

Tracemos los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ para formar el Δ *OAB*. Tracemos la bisectriz $\overline{BC}$ del $\angle B$, con lo que se formarán los ΔBCO y ΔBCA .

Demostración: En el ΔOAB :

$\frac{\overline{OB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}}$ (1) Propiedad de la bisectriz.

Pero: $\overline{OB} = r$ (2)

$\overline{BA} = l_{10}$ (3)

$\overline{CA} = r - \overline{OC}$ (4)

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1):

$\frac{r}{l_{10}} = \frac{\overline{OC}}{r - \overline{OC}}$ (5)

Pero: $\angle O = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ (6) Ángulo central

Además:

$\angle CBO = \frac{\angle B}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$ *BC* es bisectriz del $\angle B$ por construcción;

$\angle BCA$ = 36° + 36° = 72° Ángulo exterior

En el $\Delta\ OCB$:

$\overline{OC} = \overline{BC}$ (7) Por oponerse a ángulos iguales

En el $\Delta\ ABC$:

$\therefore BC = AB$ (8) Por oponerse a ángulos iguales.

Comparando (7) y (8) tenemos:

$\overline{OC} = \overline{AB} = l_{10}$ (9) Carácter transitivo.

Sustituyendo (9) en (5), tenemos:

$$\frac{r}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{r - l_{10}}$$

CÁLCULO DEL LADO DEL DECÁGONO REGULAR INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

Aplicando el teorema anterior:

$\frac{r}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{r - l_{10}}$ Demostrado

$\therefore \; l_{10}^2 = r(r - l_{10})$ Producto de medios igual a producto de extremos

$\therefore \; l_{10}^2 = r^2 - rl_{10}$

$\therefore \; l_{10}^2 + r\,l_{10} - r^2 = 0$ Trasponiendo y ordenando.

Resolviendo esta ecuación literal de segundo grado:

$$l_{10} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}}{2}$$

$$= \frac{-r \pm \sqrt{5r^2}}{2} = \frac{-r \pm r\sqrt{5}}{2}$$

$= \frac{r(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$ Sacando factor común r

$\therefore \; l_{10} = \frac{r(\pm\sqrt{5} - 1)}{2}$ Ordenando

$\therefore \; l_{10} = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{2}$ Tomando el valor positivo

$\therefore \; l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ Separando

Teorema (propiedad del lado del pentágono regular)

"El lado del pentágono regular inscrito en una circunferencia es igual a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el lado del hexágono y el lado del decágono inscrito en dicha circunferencia".

Hipótesis : En la circunferencia O (Fig. 345):
$\overline{AB} = l_5;\; \overline{OA} = r = l_6 \;\; y \;\; \overline{AC} = l_{10}$

Tesis: l_5 es la hipotenusa, l_6 y l_{10} son los catetos de un triángulo rectángulo.

Construcción auxiliar: Prolonguemos l_{10} por el extremo C, hasta un punto D, de manera que $\overline{AD} = \overline{AO}$ = r Desde el punto D, tracemos $\overline{DE}$ tangente a la circunferencia O en E. Tracemos el radio $\overline{OE}$, que será perpendicular a la tangente $\overline{DE}$. Unimos O con D para formar el ΔOED, rectángulo en E. $\overline{OD}$ es la hipotenusa y $\overline{OE}$ y $\overline{ED}$, los catetos de este triángulo. Tracemos los radios $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$

Demostración:

En el $\Delta\, OAD$ y $\Delta\, OAB$:

$\overline{OA} = \overline{OA} = r$ Común

$\overline{AD} = \overline{OB} = r$ Construcción

además:

$\angle OAD = 72^\circ$ OAD = 72° (1) Porque $\angle AOC = 36°$ y ser el $\Delta\, AOC$ isósceles

y $\angle AOB = 72°$ (2) Ángulo central del pentágono.

Comparando (1) y (2) tenemos:

$\angle OAD = \angle AOB$ Carácter transitivo

$\therefore \; \Delta\, OAD = \angle AOB$ Por tener dos lados iguales e igual el ángulo comprendido

$\therefore OD = AB = l_5$ Elementos homólogos de triángulos iguales

Además:

$\overline{AC}^2 = \overline{AD} \bullet \overline{CD}$ (3) $\overline{AC} = l_{10}$ es el segmento áureo del radio

y $\overline{DE}^2 = \overline{AD} \bullet \overline{CD}$ (4) Propiedad de la tangente y la secante

Comparando (3) y (4) tenemos:

$\overline{AC}^2 = \overline{DE}^2$ Carácter transitivo;

$\therefore \; \overline{AC} = \overline{DE}$ Extrayendo la raíz cuadrada;

$\therefore \; \overline{DE} = l_{10}$ Porque por hipótesis es $\overline{AC} = l_{10}$;

y $\overline{OE} = l_6$ Por ser $\overline{OE}$ un radio.

Por lo tanto, en el $\Delta\, OED$ se cumple que es rectángulo Porque $\overleftrightarrow{OE} \perp \overleftrightarrow{ED}$

$\overline{OD} = l_5$ = hipotenusa

$\overline{OE} = l_6$ = cateto

$\overline{ED} = l_{10}$ = cateto

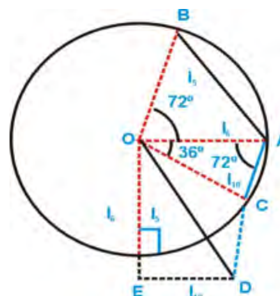


Figura 345

CÁLCULO DEL LADO DEL OCTÁGONO REGULAR INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

El lado del polígono regular de doble número de lados está dado por la fórmula:

$$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_{n}^{2}}}, \qquad (1)$$

y como el lado del cuadrado es:

$$l_4 = r\sqrt{2} \qquad (2)$$

sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$l_8 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - (r\sqrt{2})^2}}$$

$$l_8 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - 2r^2}}$$

$$l_8 = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}}$$

$$l_8 = \sqrt{r^2(2 - \sqrt{2})}$$

y finalmente

$$l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

CÁLCULO DEL LADO DEL DODECÁGONO REGULAR INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

La fórmula que da el lado del polígono regular de doble número de lados es:

$$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_{n}^{2}}} \qquad (1)$$

y como el lado del hexágono es:

$$l_6 = r \qquad (2)$$

sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$l_{12} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - r^2}}$$

$$l_{12} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{3r^2}}$$

$$l_{12} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{3}}$$

$$l_{12} = \sqrt{r^2(2 - \sqrt{3})}$$

y finalmente

$$l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

CÁLCULO DEL LADO DEL PENTÁGONO REGULAR INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

Aplicando el teorema anterior tenemos:

$$l_5^2 = l_6^2 + l_{10}^2 \qquad (1)$$

y como $l_6 = r$ (2)

y $l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$

sustituyendo resulta:

$$l_5^2 = r^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]^2$$

$$\therefore\ l_5^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2$$

$$\therefore\ l_5^2 = \frac{r^2 + r^2}{4}(5 - 2\sqrt{5} + 1)$$ Elevando al cuadrado

$$= r^2 + \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})$$ Reduciendo

$$= \frac{4r^2 + r^2(6 - 2\sqrt{5})}{4}$$ Sumando

$$= \frac{4r^2 + 6r^2 - 2r^2\sqrt{5}}{4}$$ Multiplicando

$$= \frac{10r^2 - 2r^2\sqrt{5}}{4}$$ Reduciendo

$$= \frac{r^2(10 - 2\sqrt{5})}{4}$$ Sacando factor común

$$= \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})$$ Separando

$$\therefore\ l_5 = \sqrt{\frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})}$$ Extrayendo raíz cuadrada

$$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

RESUMEN DE LAS FÓRMULAS DE LOS POLÍGONOS REGULARES

Apotema

$$\partial_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$$

Lado del polígono de doble número de lados

$$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

Lado del polígono circunscrito

$$l_n = \frac{2r\, l_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

Triángulo equilátero

$$l_3 = r\sqrt{3}$$

Cuadrado

$$l_4 = r\sqrt{2}$$

Pentágono

$$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Hexágono

$$l_6 = r$$

Octágono

$$l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Decágono

$$l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Dodecágono

$$l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

EJERCICIOS

Construye lo siguiente:

1. Un triángulo equilátero.

2. Un cuadrado.

3. Un pentágono regular.

4. Un hexágono regular.

5. Un eptágono regular.

6. Un octágono regular.

7. Un eneágono regular.

8. Un decágono regular.

9. Un dodecágono regular.

10. Un pentedecágono regular.

11. Calcular la apotema de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 3 m de radio, si el lado del cuadrado mide $3\sqrt{2}$ m

R. $a_4 = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ m

12. Calcular la apotema de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 5 m de radio, si el lado del triángulo mide $5\sqrt{3}$ m

R. $a_3 = 2.5$ m

13. Sabiendo que el lado del octágono regular inscrito en una circunferencia de 6 m de radio vale $6\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ m, hallar el lado del polígono regular de16 lados inscrito en la misma circunferencia
.

R. $l_{16} = 6\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ m

14. Sabiendo que el lado del decágono regular inscrito en una circunferencia de 2 m de radio vale $\sqrt{5}$-1 calcular el lado del polígono regular de veinte lados inscrito en la misma circunferencia.

R. $l_{20} = \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

15. Sabiendo que el lado del hexágono regular inscrito en una circunferencia de 9 m de radio vale 9 m, hallar el lado del hexágono regular circunscrito a la misma circunferencia.

R. $l_6 = 6\sqrt{3}$ m

16. Sabiendo que el lado del cuadrado inscrito en una circunferencia de 7 m de radio vale $7\sqrt{2}$ m, hallar el lado del cuadrado circunscrito a la misma circunferencia.

R. 14 m

17. Calcular el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 8 m de radio.

R. $l_3 = 8\sqrt{3}$ m

18. El lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia mide $2\sqrt{3}$metros. Hallar el radio.

R. *r* = 2 m

19. Calcular el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 12 cm de radio.

R. $l_4 = \sqrt{2}$ cm

20. El perímetro de un cuadrado inscrito en una circunferencia es $20\sqrt{2}$ cm. Hallar el diámetro de dicha circunferencia.
R. *d* = 10 cm

21. Calcular el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

R. $l_5 = 5\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ cm

22. Sabiendo que el perímetro de un hexágono regular inscrito en una circunferencia vale 48 cm, calcular el diámetro de dicha circunferencia.
R. *d* = 16 cm

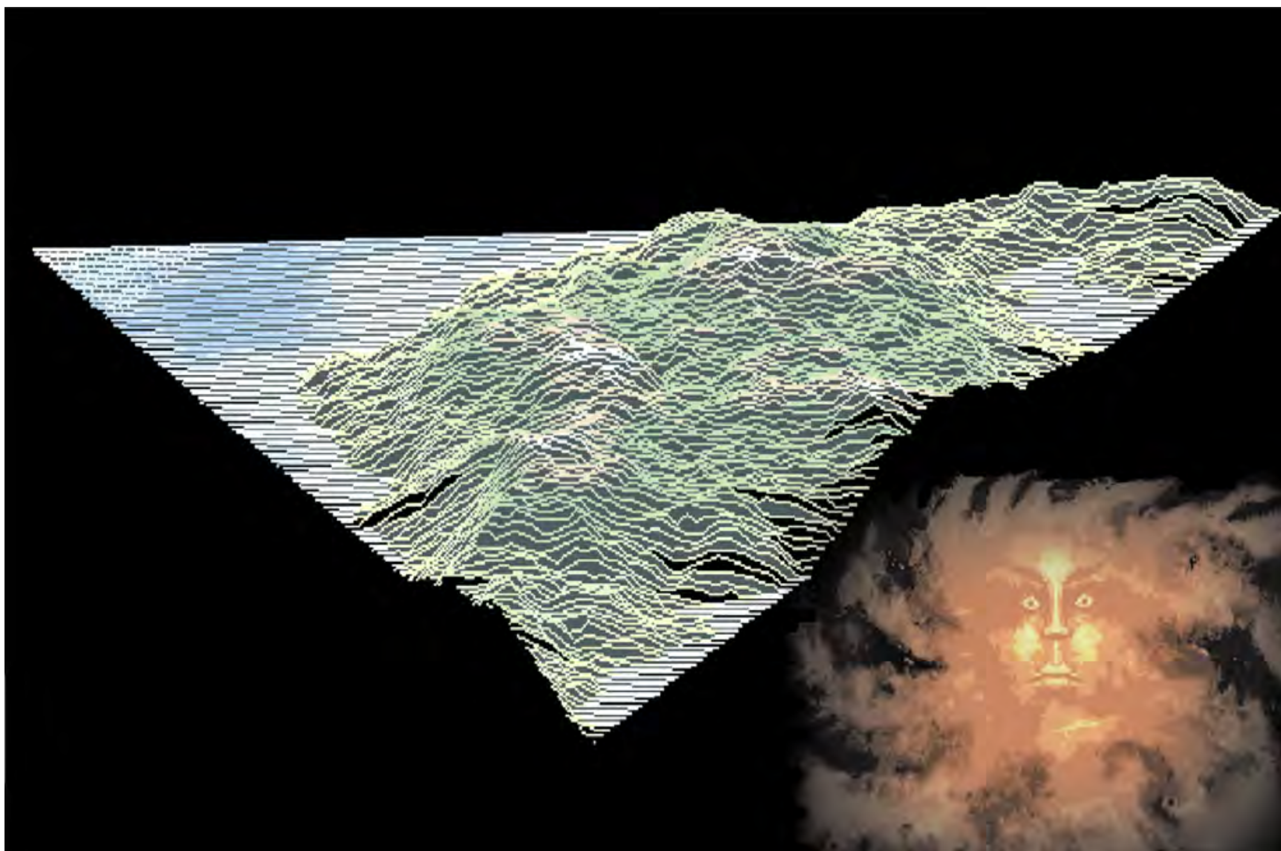
23. Calcular el lado de un octágono regular inscrito en una circunferencia cuyo radio vale $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$m

R. $l_8 = \sqrt{2}$ m

24. Calcular el lado del decágono regular inscrito en una circunferencia cuyo diámetro mide 2+2 $\sqrt{5}$ m
R. $l_{10} = 2$ m

25. Calcular el lado del dodecágono regular inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 2 +$\sqrt{3}$ cm

R. $l_{12} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ cm



En diversas ciencias y sus ramas como Geoquímica, la Sismografía, la Oceanografía, el uso de imágenes geométricas es muy frecuente, un ejemplo de esto serían los silicatos que conforman la arquitectura terrestre.

CAPÍTULO XVII

POLÍGONOS SEMEJANTES; MEDIDA DE LA CIRCUNFERENCIA

Algunas de las propiedades de los triángulos se extienden a los polígonos convexos. Dados *n* puntos *ABCD*. . . *L* en ese orden y tales que las rectas que unen cada par de puntos consecutivos deja todos los demás puntos en un mismo semiplano, se llama polígono *ABCD. . . L* la porción de plano común a los ángulos *ABC*, *BCD*.... Se definen igualmente lados, vértices, ángulos internos y externos, igualdad, etc.

Los polígonos cuyos lados y cuyos ángulos son todos iguales se llaman regulares. El triángulo equilátero y el cuadrado son los polígonos regulares de 3 y 4 lados, respectivamente. Los ángulos externos de un polígono regular de *n* lados son iguales a la *n* ª parte de cuatro rectos. En todo polígono convexo la suma de los ángulos internos es igual a tantas veces dos rectos cuantos lados tiene el polígono menos dos.

POLÍGONOS SEMEJANTES

Se dice que dos polígonos como *ABCDE* y *A'B'C'D'E'* (Figs. 346 y 347) son semejantes cuando se cumple lo siguiente:

$$\angle A = \angle A'; \ \angle B = \angle B'$$
$$\angle C = \angle C'; \ \angle D = \angle D'; \ \angle E = \angle E'$$

y además:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}}$$

Es decir: "Dos polígonos son semejantes cuando tienen sus ángulos ordenadamente iguales y sus lados homólogos proporcionales".

En dos polígonos semejantes los lados homólogos son aquellos que unen los vértices correspondientes a ángulos iguales.

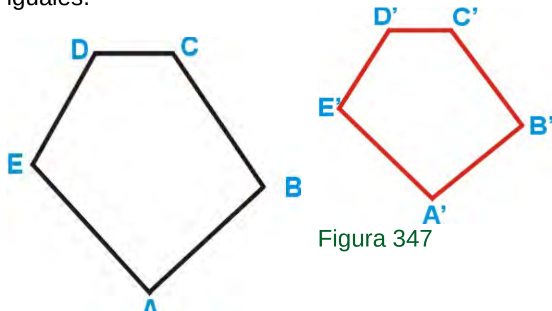


Figura 346

Figura 347

Es muy importante señalar la diferencia que hay entre la semejanza de triángulos y la de polígonos en general: en los polígonos no basta que los ángulos de uno sean ordenadamente iguales a los ángulos del otro y tampoco es suficiente que tengan sus lados proporcionales. **Es necesario que se cumplan las dos condiciones**.

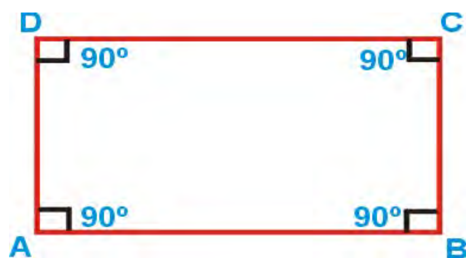


Figura 348

Ejemplos

1) El rectángulo *ABCD* y el cuadrado *MNPQ* (Figs. 348 y 349) tienen sus ángulos respectivamente iguales (todos son rectos) pero sus lados no son proporcionales, por tanto **no son semejantes.**

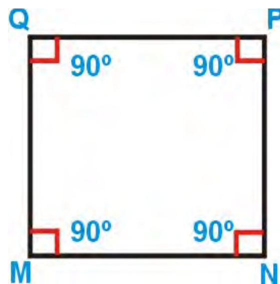


Figura 349

2) El rectángulo *ABCD* y el paralelogramo *EFGH* (Figs. 350 y 351) tienen sus lados proporcionales, ya que:

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{EH}} = \frac{3}{2} = 1.5 \qquad \text{y} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Sin embargo no tienen sus ángulos respectivamente iguales, por tanto **no son semejantes**.

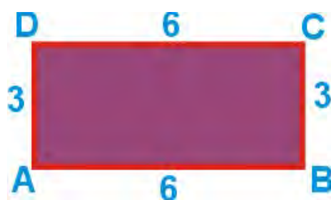


Figura 350

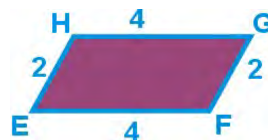


Figura 351

En consecuencia, para que dos polígonos sean semejantes es necesario que se cumplan dos condiciones:

1) Que tengan sus ángulos respectivamente iguales.
2) Que sus lados sean proporcionales.

Teorema

"Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes".

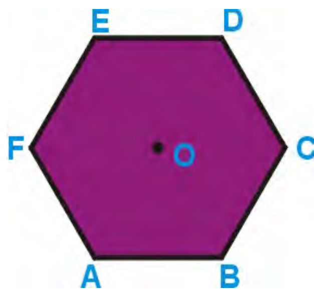


Figura 352

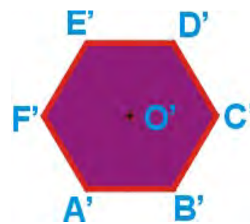


Figura 353

Hipótesis: *ABC* · · · y *A'B'C'* (Figs. 352 y 353) son polígonos regulares de *n* lados.

Tesis: $ABC \cdots \sim A'B'C' \cdots$

Demostración:

$\angle A = \angle B = \angle C = \cdots$ (1) El polígono $ABC \cdots$ es regular por hipótesis

$\angle A' = \angle B' = \angle C' = \cdots$ (2) El polígono $A'B'C' \cdots$ es regular por hipótesis

Pero: $\angle A = \angle A' = \dfrac{2R(n-2)}{n}$ (3) Valor del ángulo interior de un polígono regular de *n* lados

Comparando (1), (2) y (3) tenemos:

$\angle A = \angle A' = \angle B = \angle B' = \angle C = \angle C'$ Carácter transitivo

Además: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \cdots$ (4) El polígono $ABC \cdots$ es regular por hipótesis

y $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} \cdots$ (5) El polígono $A'B'C' \cdots$ es regular por hipótesis

Dividiendo ordenadamente (4) y (5):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \cdots$$

Por tanto: $ABC \cdots \sim A'B'C' \cdots$ Que es lo que queríamos demostrar.

RELACIÓN ENTRE LAS APOTEMAS, LOS RADIOS Y LOS LADOS DE LOS POLÍGONOS REGULARES DEL MISMO NÚMERO DE LADOS

"La razón de los lados de dos polígonos regulares del mismo número de lados es igual a la razón de sus radios y a la razón de sus apotemas".

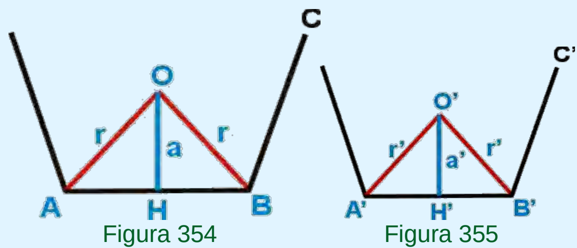


Figura 354 Figura 355

Hipótesis: $ABC \cdots$ y $A'B'C' \cdots$ (Figs. 354 y 355), son polígonos regulares de *n* lados.

$\dfrac{\overline{AB} = l}{\overline{A'B'} = l'}$ lados $\dfrac{\overline{OH} = \partial}{\overline{O'H'} = \partial'}$ apotemas $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O'A'}}$ radios

Tesis: $\dfrac{l}{l'} = \dfrac{r}{r'} = \dfrac{\partial}{\partial'}$

Construcción auxiliar: Tracemos los radios $\overline{OB}$ y $\overline{OB}$ para formar los ΔOAB y $\Delta O'A'B'$.

Demostración: En los ΔOAB y $\Delta O'A'B'$:

$\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O'A'}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{O'B'}}$ (1), (2) Radios de una misma circunferencia

Dividiendo (1) entre (2) tenemos:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{O'A'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{O'B'}}$$

Además: $\angle O = \angle O'$ Ángulos centrales de polígonos regulares del mismo número de lados

$\therefore \Delta OAB \sim \Delta O'A'B'$ Por tener un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman

$\therefore \dfrac{l}{l'} = \dfrac{r}{r'}$ (3) Lados homólogos de triángulos semejantes.

$\therefore \dfrac{l}{l'} = \dfrac{\partial}{\partial'}$ (4) Alturas homólogas de triángulos semejantes.

Comparando (3) y (4) tenemos:

$\dfrac{l}{l'} = \dfrac{r}{r'} = \dfrac{\partial}{\partial'}$ Que es lo que queríamos demostrar.

Corolario: La razón entre el perímetro de un polígono regular y el radio (o el diámetro) de la circunferencia circunscrita es constante para todos los polígonos regulares del mismo número de lados.

Hipótesis: $ABC \cdots$ y $A'B'C' \cdots$ son polígonos regulares de *n* lados.

Tesis: $\dfrac{P}{r} = \dfrac{P'}{r'}; \dfrac{P}{d} = \dfrac{P'}{d}$

Demostración:

$\dfrac{l}{l'} = \dfrac{r}{r'}$ Teorema anterior

$\therefore \dfrac{nl}{nl'} = \dfrac{r}{r'}$ (1) Multiplicando por n los términos de la 1a. razón

Pero: $nl = P$ (2)

y $nl' = P'$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$\frac{P}{P'} = \frac{r}{r'}$$

$\therefore \quad \frac{P}{P'} = \frac{2r}{2r'}$ (4) Multiplicando por 2 los términos de la segunda razón

$\therefore \quad \frac{P}{2r'} = \frac{P'}{2r'}$ (5) Intercambiando los medios

Pero: 2*r* = *d* (6)

2*r* ' = *d* ' (7)

Sustituyendo (6) y (7) en (5):

$\frac{P}{d} = \frac{P'}{d'}$ Que es lo que queríamos demostrar.

TEOREMA 1

"En una circunferencia el perímetro de un polígono regular inscrito de 2*n* lados es mayor que el perímetro del polígono re-gular inscrito de *n* lados.

Hipótesis: *ABCDEF* (Fig. 356) es un polígono regular de *n* lados inscrito en la circunferencia *O* .

AMBNCPDQ · · · · · · es el polígono regular de 2*n* lados inscrito en la circunferencia *O* .

Tesis : $\overline{AM} + \overline{MB} + \overline{BN} + \cdots > \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \cdots$

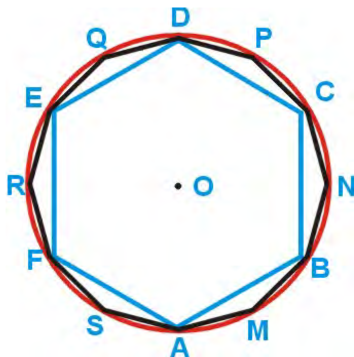


Figura 356

Para la demostración del teorema, recuerde que: "la menor distancia entre dos puntos es el segmento que los une".

TEOREMA 2

"El perímetro de un polígono regular circunscrito de 2*n* lados es menor que el perímetro del polígono regular de *n* lados circunscrito a la misma circunferencia".

Hipótesis: *ABCD* · · · (Fig.357) es un polígono regular de *n* lados circunscrito a la circunferencia *O* .

Tesis : $\overline{MN} + \overline{NO} + \overline{OP} + \overline{PQ} + \cdots \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \cdots$

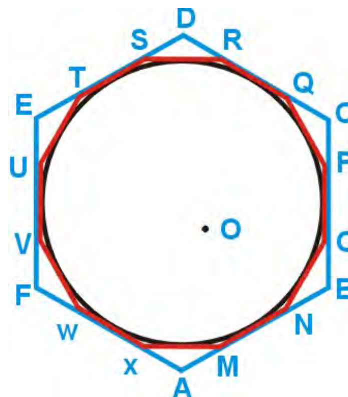


Figura 357

Para la demostración del teorema, recuerde que: "la menor distancia entre dos puntos es el segmento que los une".

RELACIÓN ENTRE LA APOTEMA Y EL RADIO

En la figura 358 a medida que se duplica el número de lados de un polígono inscrito, la apotema se va haciendo cada vez mayor y acercándose indefinidamente al valor del radio. El radio del polígono no varía y siempre es igual al de la circunferencia circunscrita.

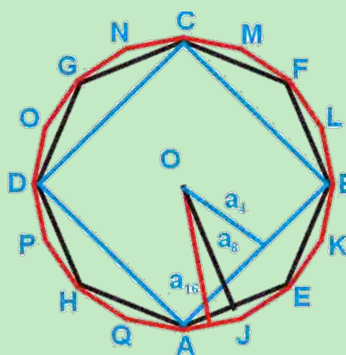


Figura 358

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

Al duplicar el número de lados, el perímetro de un polígono regular inscrito en una circunferencia aumenta y el perímetro disminuye cuando el polígono es circunscrito.

Ejemplo

Siendo el triángulo inscrito ΔABC (Fig. 359) y el circunscrito $\Delta A'B'C'$ a la misma circunferencia.

El perímetro del triángulo inscrito P_3 es menor que el del triángulo circunscrito P'_3es decir: $P_3 < P'_3$

Si duplicamos el número de lados de ambos polígonos tendremos un hexágono inscrito y otro circunscrito, de donde resultará:

$$P_6 < P'_6$$

Nótese que P ha aumentado ($P_6 > P_3$) y P' ha disminuido ($P'_6 < P'_3$), lo que expresado matemáticamente y restando ordenadamente nos daría:

$$P' > P'_6$$
$$P_3 < P_6$$
$$\therefore P'_3 = P_3 > P'_6 - P_6$$

Análogamente resultaría:

$P'_6 - P_6 > P'_{12} - P_{12}$

$P'_{12} - P_{12} > P'_{24} - P_{24}$

$P'_{24} - P_{24} > P_{48'}$

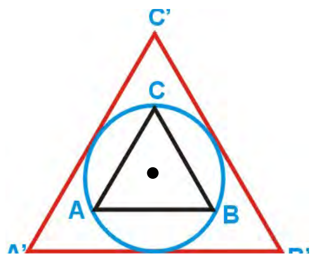


Figura 359

Esto significa que a medida que se va duplicando el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos, la diferencia entre sus perímetros se hace cada vez más pequeña, tanto como se quiera.

Si el número de lados de estos polígonos continúa duplicándose indefinidamente, la diferencia entre ambos perímetros tiende a cero. En matemáticas se dice que ambas sucesiones $P_3, P_6, P_{12} \cdots$ y $P'_3, P'_6, P'_{12} \cdots$ de perímetros tienen un límite común conocido como longitud de la circunferencia.

PROPORCIONALIDAD ENTRE LAS LONGITUDES DE CIRCUNFERENCIAS Y SUS RADIOS O DIÁMETROS

"La razón de las longitudes de dos circunferencias cualesquiera es igual a la razón de sus radios y de sus diámetros".

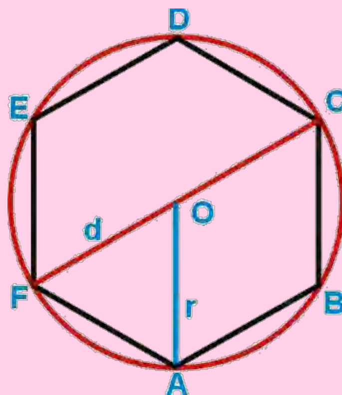


Figura 360

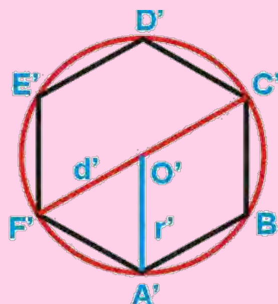


Figura 361

Hipótesis: Siendo C y C' las longitudes de las circunferencias O y O' (Figs. 360 y 361) de radios r y r' y diámetros d y d'.

Tesis: $\frac{C}{C'} = \frac{r}{r'} = \frac{d}{d'}$

Construcción auxiliar: En cada una de esas dos circunferencias inscribimos un polígono regular, ambos con el mismo número de lados. Siendo $ABCDEF$ y $A'B'C'D'E'F'$ los polígonos P y P' sus perímetros.

Demostración:

$\frac{P}{P'} = \frac{r}{r'}$ Porque la razón de los perímetros de dos polígonos regulares del mismo número de lados es igual a la razón de sus radios (por ser los polígonos semejantes).

$\frac{\text{lím } p}{\text{lím } p'} = \frac{r}{r'}$ (1) Porque la proporcionalidad anterior se cumple sin importar el número de lados del polígono.

Pero: lím $P = C$ (2) Por definición de longitud de circunferencia.

y lím $P' = C'$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos:

$\frac{C}{C'} = \frac{r}{r'}$ (4)

Multiplicando por 2 ambos términos de la segunda razón:

$\frac{C}{C'} = \frac{2r}{2r'}$ (5)

Pero: $2r = d$ (6)

y $2r' = d'$ (7)

Sustituyendo (6) y (7) en (5) tenemos:

$\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'}$ (8)

Comparando (4) y (8):

$\frac{C}{C'} = \frac{r}{r'} = \frac{d}{d'}$

Corolario: "La razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es una cantidad constante".

Hipótesis: Siendo C y C' las longitudes de las circunferencias O y O' de diámetros d y d'.

Tesis: $\frac{C}{d} = \frac{C'}{d'}$

Demostración:

$\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'}$ Teorema anterior

$\therefore \frac{C}{d} = \frac{C'}{d'}$ Intercambiando los medios

EL NÚMERO π

El valor constante de la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro se representa por la letra griega π (pi). Es decir:

$$\frac{C}{d} = \pi$$

π es un número irracional, es decir que no se puede expresar por ningún número en-tero o fraccionario, por lo que se ha calculado con muchas cifras decimales, y unos cuantos valores aproximados son los siguientes:

$\pi = \frac{22}{7}$

$\pi = 3.14$

$\pi = 3.1416$

$\pi = \frac{355}{133}$

$\pi = 3,1415926535 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

Generalmente se usa el valor 3.14 ó 3.1416.

Corolario: "La longitud de una circunferencia es igual al doble de π multiplicado por el radio".

Demostración:

$\frac{C}{d} = \pi$ Por definición

$\therefore C = \pi d$ (1) Despejando C

y como: $d = 2r$ (2) Definición

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$C = \pi (2r) \therefore C = 2\pi r$

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA

Hallar la longitud de una circunferencia cuyo radio vale 6 cm.

Fórmula: $C = 2 \pi r$

$C = 2 \times 3.14 \times 6$

$C = 12 \times 3.14$

$C = 37.68$ cm

Longitud de un arco de circunferencia de n °: Si C = 2 p r es la longitud de la circunferencia (360°), entonces la longitud del arco de 1° será $\frac{2 \pi r}{360}$, porque 1° es $\frac{1}{360}$ de una circunferencia (Fig. 362).

Y la longitud, l, de un arco de $n°$ será:

$$l = \frac{2 \pi r n^o}{360^o}$$

$l = \frac{\pi r n^o}{180^o}$ Simplificando

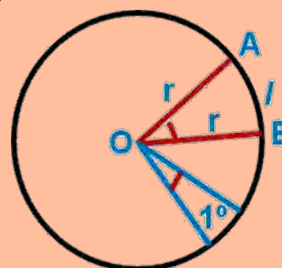


Figura 362

CÁLCULO DE VALORES APROXIMADOS DE π

Tomando $r = 1$, calculemos los perímetros de los hexágonos regulares inscrito y circunscrito.

Inscrito $r = 1$, $l_6 = r$, $l_6 = 1$ ∴ $P_6 = 6\, l_6$, $P_6 = 6 \times 1 = 6$

Circunscrito $L_n = \dfrac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$

$$\therefore\ L_6 = \frac{2 \times 1 \times 1}{\sqrt{4 \times 1^2 - 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.1547$$

$\therefore P' = 6L_6 = 6 \times 1.1547 = 6.9282$

Valores aproximados de π:

$$\frac{p}{d} = \frac{6}{2} = 3 \quad y \quad \frac{p'}{d} = \frac{6.9282}{2} = 3.4641$$

Si duplicamos el número de lados de dichos polígonos obtendremos para el dodecágono:

Fórmula:

$$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - \sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

$$l_{12} = \sqrt{2 \times 1^2 - 1\sqrt{4 \times 1^2 - 1^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}}$$

$$l_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{2 - 1.7321} = \sqrt{0.2679}$$

$l_{12} = 0.5176$

∴ $P_{12} = 12 \times 0.5176 = 6.2116$

Análogamente, para el circunscrito tendremos:

$P'_{12} = 12 \times L_{12} = 12 \times 0.5358 = 6.4307$

Valores aproximados de π:

$$\frac{p}{d} = \frac{6.2116}{2} = 3.1058 \quad y \quad \frac{p'}{d} = \frac{6.4307}{2} = 3.2153$$

Siguiendo con este proceso podemos formar el siguiente cuadro:

Numero de lados	Polígono inscrito			Polígono circunscrito		
	l_n	P	$\frac{P}{d}$	L_n	P	$\frac{P'}{d}$
6	1	6	3	1.1547	6.9282	3.464
12	0.5176	6.2116	3.1058	0.5358	6.4307	3.2153
24	0.2610	6.2652	3.1326	0.2633	6.3193	3.1596
48	0.1308	6.2787	3.1393	0.1310	6.2921	3.1460
96	0.0654	6.2820	3.1410	0.0654	6.2854	3.1427
192	0.0327	6.2829	3.1414	0.0327	6.2837	3.1418
384	0.0163	6.2831	3.1415	0.0163	6.2833	3.1416
768	0.0081	6.2831	3.1415	0.0081	6.2832	3.1416

Las razones $\frac{p}{d}$ y $\frac{p'}{d}$ tienden al valor de π.

Comparando las tres primeras y tomando las cifras comunes obtenemos el valor π = 3.

Comparando las tres siguientes tenemos π = 3.1.

Comparando las razones correspondientes a los polígonos de 96 lados obtenemos π = 3.14.

Continuando con este proceso podemos obtener el valor de p con la aproximación que se desee, en lo que se conoce como el "método de los perímetros", el cual, como puede observarse, resulta muy laborioso.

MÉTODO GRÁFICO PARA RECTIFICAR APROXIMADAMENTE UNA CIRCUNFERENCIA

Para rectificar una circunferencia se obtiene un segmento rectilíneo cuya longitud sea igual a la de la curva.

1) Tracemos un diámetro $\overline{AB}$ (Fig. 363).

2) Por *A*, tracemos la tangente.

3) Sobre dicha tangente y a partir de *A* tomamos tres diámetros, para obtener el punto *E*.

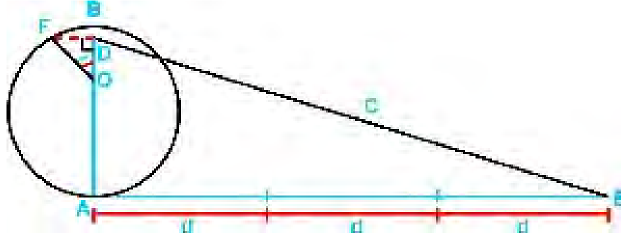


Figura 363

4) Tracemos $\angle BOF = 30°$.

5) Bajemos $\overline{FD} \perp \overline{OB}$

6) Unamos *D* con *E*. *DE* es la solución del problema.

Justificación de la construcción anterior

En el ΔAED:

$(\overline{DE})^2 = (\overline{EA})^2 + (\overline{AD})^2$ (1) Teorema de Pitágoras

Pero: $\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD}$ (2) Suma de segmentos

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$(\overline{DE})^2 = (\overline{EA})^2 + (\overline{AO} + \overline{OD})^2$ (3)

Pero: $\overline{EA} = 3d = 6r$ (4) Construcción

$\overline{AO} = r$ (5) Construcción

$\overline{OD} = a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ (6) Apotema de un hexágono inscrito; $\angle DOF = 30°$

Sustituyendo (4), (5) y (6) en (3) tenemos:

$$(\overline{DE})^2 = (6r)^2 + \left[r + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right]^2$$

$$= 36r^2 + r^2 + r^2\sqrt{3} + \frac{3r^2}{4}$$

$$= r^2(36+1)\sqrt{3} + \frac{3}{4}$$ Sacando r^2 en factor común

$$= r^2(36 + 1 + 1.73 + 0.75)$$

$$= r^2(39.48)$$

$$= 39.48\, r^2$$

$$\therefore DE^2 = \sqrt{39.48\,r^2}$$

$$= \sqrt{39.48} \bullet r$$

$$= 6.28\, r$$

$$= 2 \times 3.14 \times r = 2\pi r$$

EJERCICIOS

1. Los lados de dos polígonos están en la relación 2:7. ¿Se puede afirmar que son semejantes? ¿Por qué?
R. No, porque falta la igualdad de los ángulos.

2. Dos eptágonos son equiángulos. ¿Se puede afirmar que son semejantes? ¿Por qué?
R. No, porque falta la proporcionalidad de los lados.

3. Dos rectángulos son semejantes. Los anchos respectivos son 16 y 24 metros y el primero tiene 30 m de largo. ¿Cuál es el largo del segundo?
R. 45 m

4. Los lados de dos decágonos regulares miden 3 y 5 m. Hallar las razones de:
a) sus lados; **b)** sus perímetros; **c)** sus radios; **d)** sus diámetros; **e)** sus apotemas
R. $\frac{l}{l'} = \frac{p}{p'} = \frac{r}{r'} = \frac{d}{d'} = \frac{a}{a'} = \frac{3}{5}$

5. En una circunferencia de 10 m de diámetro, el lado del polígono regular de 48 lados, inscrito en la misma, mide 1.3 m. Calcular el lado de otro polígono regular del mismo número de lados, inscrito en una circunferencia de 12.5 m de radio.
R. 325 m

6. El perímetro de un polígono regular de 96 lados mide 31.2 m y su radio 10 m. Calcular el radio de otro polígono regular del mismo número de lados, si uno de estos lados mide 4.5 metros.
R. 1382 m

7. Hallar la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 9 centímetros.
R. 5654 cm

8. La longitud de un arco que pertenece a una circunferencia de 4 m de radio, es igual a la longitud de un arco que pertenece a una circunferencia de 10 m de radio. Si el primer arco es de 36°, ¿cuántos grados tiene el segundo arco?
R. 14° 30'

9. El arco $\frown BC$ se ha trazado haciendo centro en *A*. El arco $\frown CD$ se ha trazado haciendo centro en *B*. Si *AB* = 5 cm, calcular la longitud de la curva *BCD*
R. 15 π cm

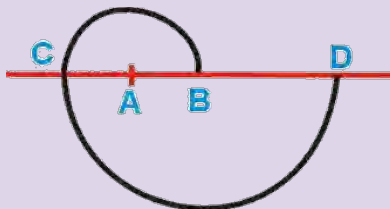


Figura 364

10. Si el radio de la circunferencia *O* es *r*, ¿cuál es el perímetro de la "lúnula" *ABCD*?

R. $P = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\pi\, r$

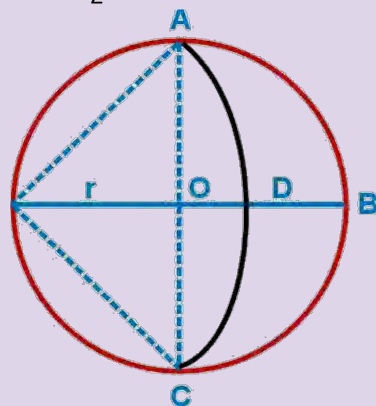


Figura 365

11. Hallar la longitud de una circunferencia cuyo diámetro mide 15 centímetros.
R. 4712 cm

12. Hallar el radio de una circunferencia cuya longitud es 628 centímetros.
R. 1 m

13. Hallar el diámetro de una circunferencia cuya longitud es 424 metros.
R. 13496 m

14. Hallar el radio de una circunferencia cuya longitud es igual a la suma de las longitudes de dos circunferencias cuyos radios miden 6 metros y 12 metros.
R. 18 m

15. Hallar la longitud de una circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero de 36 m de perímetro.

R. $8\sqrt{3}\,\pi$ m

16. Hallar la longitud de una circunferencia inscrita en un cuadrado de 20 cm de lado.
R. 62.8 cm

17. Hallar la longitud de una circunferencia circunscrita a un cuadrado de 20 cm de lado.

R. $20\sqrt{2}\,\pi$ cm

18. Hallar la longitud de un arco cuya amplitud es de 30°, que pertenece a una circunferencia de 10 cm de diámetro.

R. $\frac{5}{6}\pi$ cm

19. ¿Cuál es la amplitud del arco cuya longitud es 5.23 cm si pertenece a una circunferencia de 20 cm de radio?
R. 15°

20. Calcular el radio de un arco cuya amplitud es de 20°, si su longitud es de 2.79 cm.
R. 8 cm

21. Hallar la longitud de un arco de 3° 20' que pertenece a una circunferencia de 10 m de radio.
R. 0.58 m

22. Hallar la longitud de un arco de 5° 2' 8" que pertenece a una circunferencia de 2 m de radio.
R. 17.5 cm

23. Hallar el perímetro del segmento circular limitado por el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.
R. 15.3 cm

24. Hallar el perímetro del segmento circular limitado por el lado del cuadrado inscrito en una circunferencia de 3 cm de radio.
R. 8.94 cm

25. Hallar el perímetro del segmento circular limitado por el lado del hexágono regular inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio.
R. 10.23 cm



Las figuras que se presentan en los diferentes minerales y las rocas, nos presentan formas geométricas perfectamente definidas, pueden presentarse simples o combinadas.

CAPÍTULO XVIII

ÁREAS

La **superficie** se refiere a la forma. Hay superficies rectangulares, cuadradas, circulares, etc.

El **área** es la medida de una superficie y se refiere al tamaño.

Para medir una superficie se toma como unidad un cuadrado que tenga por lado la unidad de longitud.

En la práctica, el cálculo del área de una figura se efectúa indirectamente, es decir, midiendo la longitud de algunos elementos de la figura y realizando ciertas operaciones con dichas medidas.

SUMA Y DIFERENCIA DE ÁREAS

El área de una figura que sea suma de otras dos es igual a la suma de las áreas de estas otras. Por ejemplo, el área, *A*, del trapecio *ABCD* (Fig. 366) que es suma de los triángulos ΔABC y ΔACD es igual a la suma de las áreas A_1 y A_2 de los dos triángulos:

$$A = A_1 + A_2$$

Análogamente, si una figura es igual a la diferencia de otras dos, su área es igual a la diferencia de las áreas de estas otras. Por ejemplo, en la figura anterior:

$$A_1 = A - A_2$$

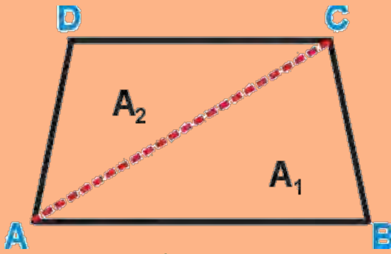


Figura 366

FIGURAS EQUIVALENTES

Las **figuras equivalentes** son iguales o pueden obtenerse como suma o diferencia de figuras iguales, y todas tienen igual área. Recíprocamente, si dos figuras tienen igual área se dice son equivalentes.

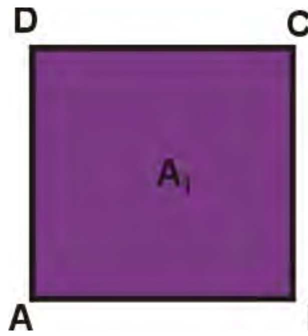


Figura 367

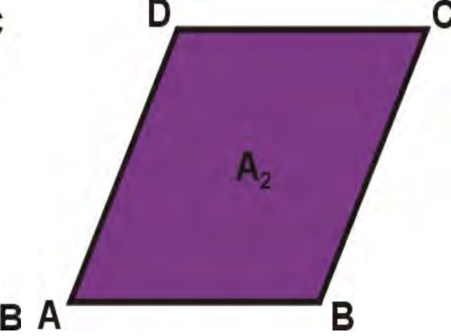


Figura 368

Ejemplo

Siendo A_1 el área de la superficie *ABCD*

Siendo A_2 el área de la superficie *A'B'C'D'*

Si $A_1 = A_2$, las dos figuras son equivalentes.

CARACTERES DE LA EQUIVALENCIA DE FIGURAS

La equivalencia de figuras posee los tres caracteres generales de las igualdades, a saber:

1) Carácter idéntico: *A* es equivalente a *A* .

2) Carácter recíproco: Si A_1 es equivalente a A_2, entonces A_2 es equivalente a A_1.

3) Carácter transitivo: Si A_1 es equivalente a *A* y *A* es equivalente a A_2 entonces A_1 es equivalente a A_2.

TEOREMA DEL ÁREA DEL RECTÁNGULO

"Si dos rectángulos tienen igual base e igual altura, son iguales".

Hipótesis: *ABCD* y *A'B'C'D'* (Figs. 369 y 370) son rectángulos.

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$ bases; $\overline{AD} = \overline{A'D'}$ alturas.

Tesis: *ABCD* = *A'B'C'D'*



Figura 369



Figura 370

Demostración:

Llevemos el rectángulo *A'B'C'D'* sobre el rectángulo *ABCD,* de manera que $\overline{A'B'}$ coincida con su igual $\overline{AB}$ coincidiendo *A'* con *A* y *B'* con *B*. (Postulado del movimiento).

$\overline{A'D'}$ seguirá la dirección de $\overline{AD}$. (Por ser $\angle A = \angle A' = 90°$ por hipótesis).

(D' coincidirá con D. $\overline{A'D'} = \overline{AD}$ por hipótesis).

$\overline{D'C'}$ seguirá la dirección de $\overline{DC}$ y $\overline{B'C'}$ seguirá la dirección de $\overline{BC}$. (Por los puntos *B* y *D* solamente puede pasar una perpendicular a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ respectivamente).

Por tanto: *C'* coincidirá con *C* . (Dos rectas sólo se cortan en un punto).

$\therefore$ *ABCD* = *A'B'C'D'*. (Porque superpuestos coinciden).

TEOREMA 1

"Si dos rectángulos tienen iguales las bases, sus áreas son proporcionales a las alturas".

Hipótesis: *ABCD* y *A'B'C'D'* (Figs. 371 y 372) son rectángulos de áreas *A* y *A'*; bases $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y alturas $\overline{AD}$ y $\overline{A'D'}$

Tesis : $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}$

Demostración:

Supongamos que los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{A'D'}$ admiten una unidad común de medida "*u*" (considerando solamente el caso con-mensurable). Supongamos que esta unidad está contenida *m* veces en $\overline{AD}$ y *n* veces en $\overline{A'D'}$. Entonces tendremos:

$\overline{AD} = mu$ (1)

$\overline{A'D'} = nu$ (2)

$\therefore \dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \dfrac{m}{n}$ (3)

Por los puntos de división tracemos paralelas en ambos rectángulos a $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$

Los rectángulos *ABCD* y *A'B'C'D'* quedarán divididos en *m* y *n* rectángulos iguales, respectivamente. Siendo *r* el área de es-tos rectángulos tendremos:

$A = mr$ (4) y $A' = nr$ (5)

$\therefore \dfrac{A}{A'} = \dfrac{m}{n}$ (6)

Comparando (3) y (4):

$$\frac{A}{A'} = \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}$$

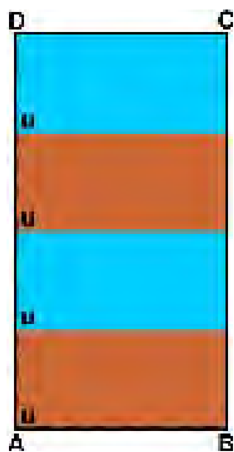


Figura 371

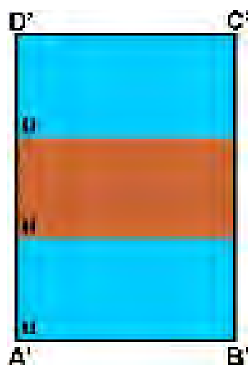


Figura 372

TEOREMA 2

"Si dos rectángulos tienen las alturas iguales, sus áreas son proporcionales a las bases".

La demostración para este teorema es análoga a la anterior.

TEOREMA 3

"Las áreas de dos rectángulos son proporcionales a los productos de sus bases por sus alturas".



Figura 373

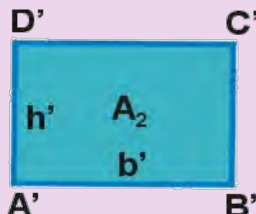


Figura 374

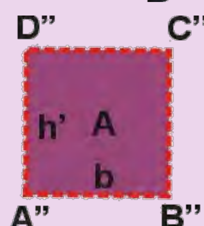


Figura 375

Hipótesis: *ABCD* y *A'B'C'D'* (Figs. 373, 374, 375), son rectángulos de áreas A_1 y A_2, y bases $\overline{AB}$ = b y $\overline{A'B'}$ = b' y $\overline{AD}$ = h y $\overline{A'D'}$= h'

Tesis : $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{bh}{b'h'}$

Construcción auxiliar : Construyamos el rectángulo A''B''C''D'' de manera que $\overline{A''B''} = \overline{AB} = b$ y $\overline{A''D''} = \overline{A'D'} = h'$.Llamamos A a su área.

Demostración: Comparando *ABCD* y *A''B''C''D''*

$\dfrac{A_1}{A} = \dfrac{h}{h'}$ (1) Por tener bases iguales por construcción

Comparando *A'B'C'D'* y *A''B''C''D''*

$\dfrac{A_2}{A} = \dfrac{b'}{b}$ (2) Por tener alturas iguales por construcción

Dividiendo ordenadamente (1) y (2) tenemos:

$$\frac{\frac{A_1}{A}}{\frac{A_2}{A}} = \frac{\frac{h}{h'}}{\frac{b'}{b}}$$

$$\therefore \frac{A_1 A}{A_2 A} = \frac{bh}{b'h'} \qquad \therefore \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{bh}{b'h'}$$

TEOREMA 4

"El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura".

Hipótesis: Siendo *A* el área del rectángulo *ABCD* (Figs. 376 y 377) de base *b* y altura *h* .

Tesis: $A = b\,h$

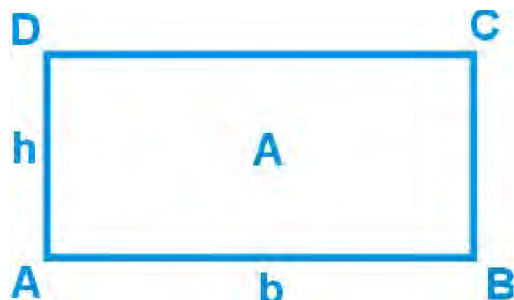


Figura 376

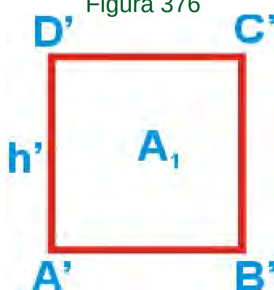


Figura 377

Construcción auxiliar: Construyamos el cuadrado *A* '*B* '*C* '*D* ' cuyo lado mide la unidad de longitud; es decir $b' = h' = 1$. Este cuadrado será la unidad de área, es decir $A_1 = 1$.

Demostración:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{bh}{b'h'} \quad (1)$$

porque las áreas de dos rectángulos son proporcionales a los productos de las bases por las alturas.

Pero: $A_1 = 1$; $b' = 1$; $h' = 1$ (por construcción)
Sustituyendo estos valores en (1):

$$\frac{A}{1} = \frac{bh}{1 \times 1}$$

$\therefore A = b\,h$

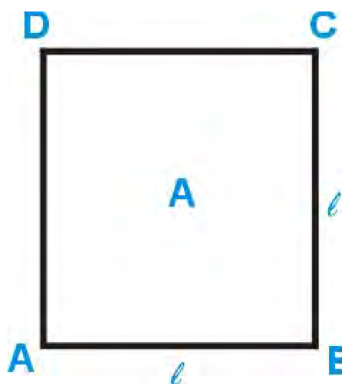


Figura 378

Corolario: "El área del cuadrado es igual al cuadrado del lado".

Hipótesis: *ABCD* es un cuadrado (Fig. 378) de lado *l* .

Tesis: $A = l^2$

Demostración:

$A = l \times l$ (1) Por ser el cuadrado un rectángulo.

$\therefore A = l^2$

TEOREMA DEL ÁREA DEL PARALELOGRAMO

"El área de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura".

Hipótesis: *ABCD* (Fig. 379) es un paralelogramo
$\overline{AB} = \overline{DC}$ b = base, $\overline{DE} = h$ = altura

Tesis: $A = b\,h$

Construcción auxiliar:

Prolonguemos $\overrightarrow{AB}$ y tracemos las perpendiculares $\overline{CF}$ y $\overline{DE}$ con lo que se formarán los triángulos rectángulos ΔAED, ΔBFC y el cuadrilátero *EFCD*.

Demostración:

$A_{ABCD} = A_{DEFC} + A_{AED} - A_{BFC}$ (1) Por suma y resta de áreas.

En *DEFC* :

$\overline{DE} \parallel \overline{CF}$ Por ser ambas perpendiculares a *AB.*

$\therefore$ *DEFC* es un rectángulo Por definición

Pero: $\overline{EF} = \overline{DC} = b$

y $DE = h$

$\therefore A_{DEFC} = b\,h$ (2) Área del rectángulo.

En ΔAED y ΔBFC :

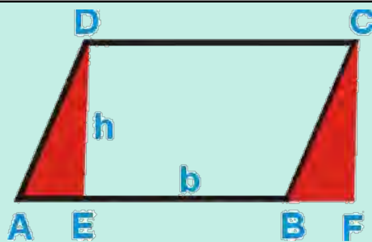


Figura 379

$\angle E = \angle F = 1R$ Por construcción

$\overline{DA} = \overline{CB}$ Lados opuestos de un paralelogramo

$\overline{DE} = \overline{CF}$ Paralelas entre paralelas

$\therefore \Delta AED = \Delta BFC$ Por tener iguales la hipotenusa y un cateto

$\therefore A_{AED} = A_{BFC}$ (3) Las figuras iguales son equivalentes

$\therefore A_{ABCD} = bh + A_{BFC} - A_{BFC}$

$\therefore A = b \bullet h$

TEOREMA DEL ÁREA DEL TRIÁNGULO

"El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura".

Hipótesis: Δ ABC (Fig. 380) es un triángulo de base $\overline{AB} = b$ y altura $\overline{CD} = h$

Tesis: $A = \dfrac{b \bullet h}{2}$

Construcción auxiliar: Por el vértice *C* tracemos una paralela a $\overline{AB}$ y por el vértice *B* una paralela a $\overline{AC}$. Siendo *E* el punto en que se cortan dichas paralelas, se forma el cuadrilátero *ABEC* y el Δ *ECB*. Tracemos la altura $\overline{BF}$ del Δ *ECB*.

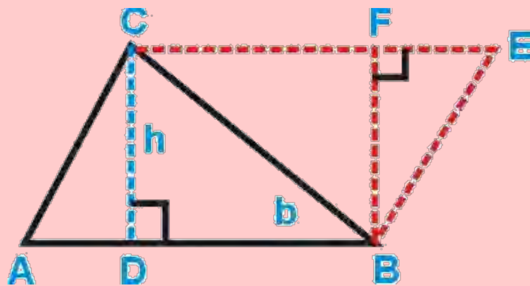


Figura 380

Demostración:

$A_{ABC} = A_{ABEC} - A_{ECB}$ (1) Diferencia de áreas

ABEC es un paralelogramo $CE \parallel AB$ y $BE \parallel AC$ por construcción

y $\overline{AB}$ = b Por hipótesis

$\overline{CD}$ = h

$\therefore A_{ABEC} = b \bullet h$ (2)

Además:

En los triángulos ΔECB y ΔABC:

$\overline{BC} = \overline{BC}$ Lado común

$\overline{AC} = \overline{EB}$ Lados opuestos de un paralelogramo

$\overline{AB} = \overline{EC}$

$\therefore \Delta ECB = \Delta ABC$ Por tener los tres lados iguales

$\therefore A_{ABC} = A_{ABC}$ (3) Figuras iguales tienen áreas iguales

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$A_{ABC} = bh - A_{ABC}$

$\therefore A_{ABC} + A_{ABC} = bh$ Trasponiendo

$\therefore 2A_{ABC} = b \bullet h$ Sumando

$\therefore A_{ABC} = \dfrac{bh}{2}$ Despejando

$\therefore A = \dfrac{bh}{2}$ Llamando A el área del Δ ABC

Colorario 1: "Las áreas de dos triángulos son proporcionales a los productos de las bases por las alturas".

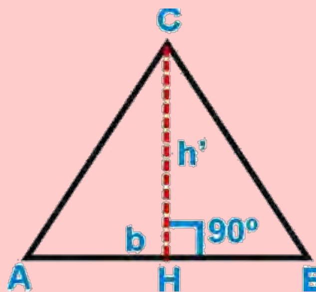


Figura 381

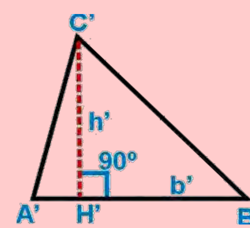


Figura 382

Hipótesis: ABC y $A'B'C'$ (Figs. 381 y 382) son dos triángulos de bases b y b' y alturas h y h'

Tesis : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{bh}{b´h´}$

Demostración : Las áreas de los ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son:

$$A_1 = \frac{bh}{2} \quad (1) \qquad A_2 = \frac{b´h´}{2} \quad (2)$$

Dividiendo (1) y (2):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{bh}{2}}{\frac{b´h´}{2}} = \frac{bh}{b´h´}$$

Corolario 2: "Las áreas de dos triángulos cuyas bases son iguales, son proporcionales a sus alturas, y si las alturas son iguales, son proporcionales a las bases".

a) Si $b = b'$, de la igualdad:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{bh}{b´h´}$ 1er. Corolario

se deduce:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{h}{h´}$ Simplificando

b) Si $h = h'$, de la igualdad:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{bh}{b´h´}$ 1er. Corolario

se deduce:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{b}{b´}$ Simplificando

Corolario 3: "Si dos triángulos tienen igual base e igual altura son equivalentes".

De la igualdad:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{bh}{b´h´}$ 1er. Corolario

si $b = b'$ y $h = h'$, resulta

$\frac{A_1}{A_2} = 1$ Simplificando

$\therefore A_1 = A_2$ Trasponiendo

TEOREMA 1

"Si dos triángulos tienen un ángulo igual, sus áreas son proporcionales a los productos de los lados que forman dicho ángulo".

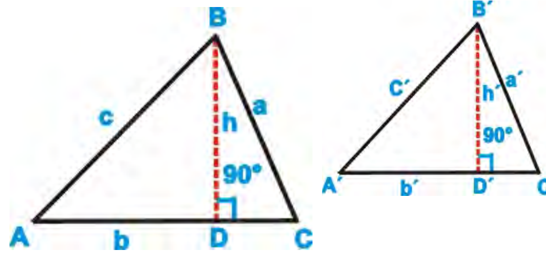


Figura 383

Figura 384

Hipótesis: En los triángulos ABC y $A'B'C'$ (Figs. 383 y 384) se verifica que $\angle A = \angle A´$

Tesis : $\frac{A_{ABC}}{A_{A´B´C´}} = \frac{b\,c}{b´c´}$

Construcción auxiliar: Tracemos las alturas $\overline{BD} = h$ y $\overline{B´D´} = h´$ para formar los triángulos rectángulos $\Delta\, ADB$ y $\Delta\, A´D´B´$

Demostración:

$\frac{A_{ABC}}{A_{A´B´C´}} = \frac{bh}{b´h´}$ Porque las áreas de dos triángulos son proporcionales a los productos de las bases por las alturas

$\frac{A_{ABC}}{A_{A´B´C´}} = \frac{b}{b´} \times \frac{h}{h´}$ (1) Descomponiendo la segunda razón.

En los $\Delta\, ADB$ y $\Delta\, A´D´B´$

$\angle D = \angle D´ = 1R$ Por construcción

y $\angle A = \angle A´$ Por hipótesis

$\therefore \Delta\, ADB \sim \Delta\, A´D´B´$ Por ser rectángulos y tener un ángulo agudo igual

$\therefore \frac{h}{h´} = \frac{c}{c´}$ (2) Comparando los catetos h y h' y las hipotenusas

Sustituyendo (2) en (1):

$$\frac{A_{ABC}}{A_{A´B´C´}} = \frac{b}{b´} \times \frac{c}{c´}$$

$\therefore \frac{A_{ABC}}{A_{A´B´C´}} = \frac{b\,c}{b´c´}$ Efectuando operaciones

TEOREMA 2

"Si dos triángulos son semejantes, sus áreas son proporcionales a los cuadrados de sus lados homólogos".

Hipótesis: Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes (Figs. 385 y 386).

Tesis: $$\frac{A_{ABC}}{A_{A'B'C'}}=\frac{(\overline{CA})^2}{(\overline{C'A'})^2}$$

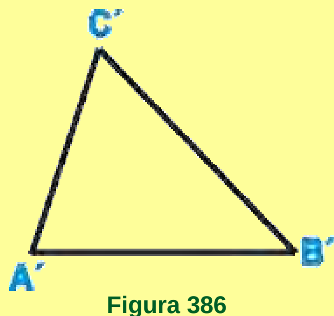


Figura 386

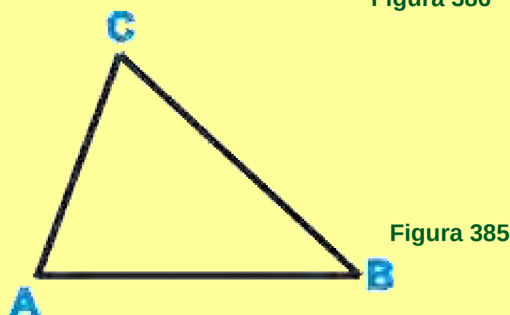


Figura 385

Demostración:

En los ΔABC y $\Delta A'B'C'$ se verifica:

$$\frac{A_{ABC}}{A_{A'B'C'}}=\frac{\overline{CA}\bullet\overline{CB}}{\overline{C'A'}\bullet\overline{C'B'}}$$ Teorema anterior

$$\therefore \frac{A_{ABC}}{A_{A'B'C'}}=\frac{\overline{CA}\bullet\overline{CB}}{\overline{C'A'}\bullet\overline{C'B'}}$$ (1) Descomponiendo la segunda razón

Pero: $$\frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}}$$ (2) Ya que $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$ por hipótesis.

Sustituyendo (2) en (1):

$$\frac{A_{ABC}}{A_{A'B'C'}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}\times\frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

$$\therefore \frac{A_{ABC}}{A_{A'B'C'}}=\frac{(\overline{CA})^2}{(\overline{C'A'})^2}$$ Efectuando operaciones

TEOREMA DEL ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE SUS LADOS. FÓRMULA DE HERÓN

"El área de un triángulo en términos de sus lados a, b y c, está dada por la fórmula:

$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde p es el semiperímetro del triángulo".

Hipótesis: Siendo el ΔABC (Fig. 387) de área A.

Tesis: $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

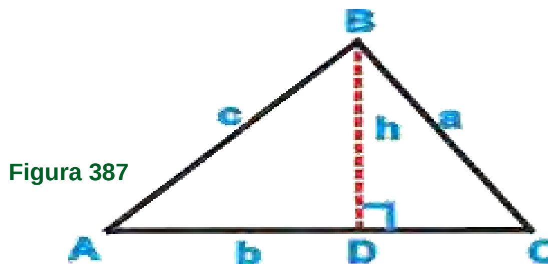


Figura 387

Demostración:

$$A=\frac{1}{2}bh$$ (1) Área de un triángulo

Pero:

$$h=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ (2) Altura de un b triángulo en función de sus lados

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$A=\frac{1}{2}b\times\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\therefore \quad A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ Efectuando operaciones y simplificando.

TEOREMA DEL ÁREA DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO EN FUNCIÓN DEL LADO

"El área A, de un triángulo equilátero de lado l está dada por la fórmula:

$$A=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Demostración:

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ (1) Fórmula de Herón

Pero: $p = \frac{a+b+c}{2}$ (2) Semiperímetro

y $a = b = c = l$ (3) Por ser el triángulo equilátero

Sustituyendo (3) en (2):

$$p = \frac{l+l+l}{2} = \frac{3l}{2} \quad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (1):

$$A = \sqrt{\frac{3l}{2}\left(\frac{3l}{2}-l\right)\left(\frac{3l}{2}-l\right)\left(\frac{3l}{2}-l\right)} \quad (5)$$

Pero: $\frac{3l}{2} - l = \frac{3l-2l}{2} = \frac{l}{2}$ (6) Efectuando operaciones

Sustituyendo (6) en (5):

$$A = \sqrt{\frac{3l}{2} \bullet \frac{l}{2} \bullet \frac{l}{2} \bullet \frac{l}{2}}$$

$$\therefore \quad A = \sqrt{\frac{3l^4}{16}}$$

$$\therefore \quad A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$ Efectuando operaciones y simplificando

TEOREMA DEL ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE SUS LADOS Y DEL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA INSCRITA

"El área de un triángulo es igual al producto de su semiperímetro por el radio de la circunferencia inscrita".

Hipótesis: Siendo el ΔABC (Fig. 388), r el radio de la circunferencia inscrita y p el semiperímetro.

Tesis: $A = p\,r$

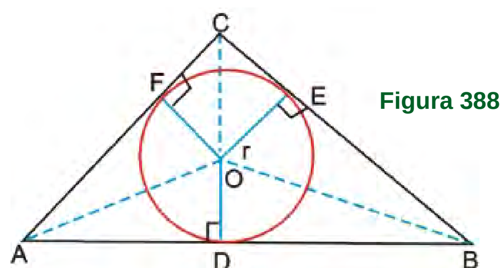


Figura 388

Construcción auxiliar. Unimos el centro O de la circunferencia inscrita con los vértices A, B y C. El ΔABC quedará descompuesto en ΔAOB ΔBOC y , ΔCOA. Tracemos las alturas $\overline{OD}, \overline{OE}$ y $\overline{OF}$ de estos tres triángulos.

Demostración:

$$A_{ABC} = A_{AOB} + A_{BOC} + A_{COA}$$ (1) Suma de áreas

y $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = r$ Por ser perpendiculares a los lados tangentes

Pero:

$$A_{AOB} = \frac{1}{2}\overline{AB} \bullet \overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{AB} \bullet r$$
$$A_{BOC} = \frac{1}{2}\overline{BC} \bullet \overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{BC} \bullet r$$
$$A_{COA} = \frac{1}{2}\overline{CA} \bullet \overline{OF} = \frac{1}{2}\overline{CA} \bullet r$$

(2) Por área del triángulo

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \bullet r + \frac{1}{2}\overline{BC} \bullet r + \frac{1}{2}\overline{CA} \bullet r$$

$$\therefore \quad A_{ABC} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}\right) r$$ (3) Sacando factor común

Pero: $\frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}\right) = p$ (4)

Sustituyendo (4) en (3): $A = p \bullet r$

TEOREMA DEL ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE SUS LADOS Y DEL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA

"El área de un triángulo es igual al producto de sus lados divididos por el cuádruple del radio de la circunferencia circunscrita".

Hipótesis: Siendo el Δ ABC (Fig. 389), R el radio de la circunferencia circunscrita y A el área del triángulo.

Tesis: $A = \frac{abc}{4R}$

Construcción auxiliar: Tracemos la altura $\overline{\quad} = h$ y el diámetro $\overline{BE}$, que pasa por B. Siendo E el otro punto donde el diámetro corta a la circunferencia O. Unimos A con E para formar los triángulos ΔBAE y ΔBCD.

Demostración:

$A = \frac{1}{2}bh$ (1) Área del triángulo

Pero: En los ΔBDC y ΔBAE :

$\angle D = \angle A = 1R$ Por construcción y por inscrito en una semicircunferencia

y $\angle C = \angle E$ Por abarcar el mismo arco $\frown AB$

$\therefore \Delta BDC \sim \Delta BAE$ Por rectángulos y tener un ángulo agudo igual.

$\therefore \frac{h}{c} = \frac{a}{\overline{BE}}$ Comparando dos catetos homólogos y la hipotenusa

$\therefore h = \frac{ac}{\overline{BE}}$ (2) Despejando h

Pero: $\overline{BE} = 2R$ (3) Por ser BE un diámetro

Sustituyendo (3) en (2):

$h = \frac{ac}{2R}$ (4)

Sustituyendo (4) en (1):

$A = \frac{abc}{4R}$ Efectuando operaciones.

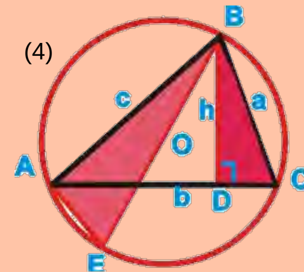


Figura 389

TEOREMA DEL ÁREA DEL ROMBO

"El área del rombo es igual a la mitad del producto de sus diagonales".

Hipótesis: *ABCD* (Fig. 390) es un rombo.

$\left.\begin{array}{l}\overline{AC} = d´ \\ \overline{BD} = d\end{array}\right\}$ diagonales

Tesis: $A = \frac{dd´}{2}$

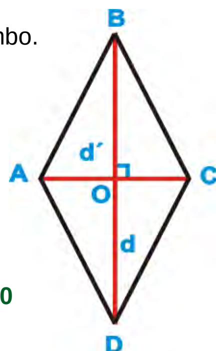


Figura 390

Demostración:

$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD}$ (1) Suma de áreas

Pero: $A_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC} \bullet \overline{BO}$ (2) Área del triángulo

$A_{ACD} = \frac{1}{2}\overline{AC} \bullet \overline{OD}$ (3) Área del triángulo

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$A_{ABCD} = \frac{1}{2}\overline{AC} \bullet \overline{BO} + \frac{1}{2}\overline{AC} \bullet \overline{OD}$

$\therefore A_{ABCD} = \frac{1}{2}\overline{AC}\left(\overline{BO} + \overline{OD}\right)$ (4) Sacando factor común

Y como: $\overline{AC} = d´$ (5) Por hipótesis

y $\overline{BO} + \overline{OD} = d$ (6) Suma de segmentos.

Sustituyendo (5) y (6) en (4):

$A_{ABCD} = \frac{1}{2}dd´ = \frac{dd´}{2}$

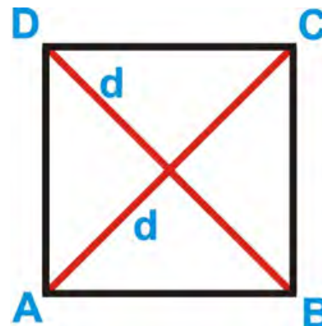


Figura 391

Corolario: "El área de un cuadrado es igual a la mitad del cuadrado de la diagonal".

Hipótesis: *ABCD* (Fig. 391) es un cuadrado de diagonal.

$\overline{AC} = \overline{BD} = d$

Tesis: $A = \frac{d^2}{2}$

Demostración:

$A = \frac{\overline{AC} \bullet \overline{BD}}{2}$ (1) Área del rombo

Pero: $\overline{AC} = \overline{BD} = d$ (2)

Sustituyendo (2) en (1):

$A = \frac{d \bullet d}{2} = \frac{d^2}{2}$ Efectuando operaciones

TEOREMA DEL ÁREA DEL TRAPECIO

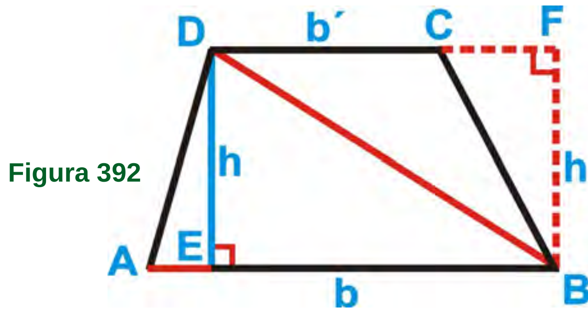
"El área de un trapecio es igual a la semisuma de sus bases multiplicada por su altura".

Hipótesis: *ABCD* (Fig. 392) es un trapecio de base mayor $\overline{AB} = b$, base menor $\overline{DC} = b'$ y altura $\overline{DE} = h$

Tesis : $A = \dfrac{(b + b')\ h}{2}$

Construcción auxiliar. Tracemos la diagonal $\overline{BD}$, con lo que se forma el ΔABD de base *b* y altura *h* y el ΔDBC de base b' y altura *h*.

Figura 392



Demostración:

$A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{DBC}$ (1) Suma de áreas

Pero: $A_{ABD} = \frac{1}{2} b \bullet h$ (2)

y $A_{DBC} = \frac{1}{2}\ b' \bullet h$ (3)

(2) y (3): Área del triángulo

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}\ bh + \frac{1}{2}\ b'h$$

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}\ h\,(b + b') \quad \text{Sacando factor común}$$

$$\therefore \quad A = \frac{h\,(b + b')}{2}$$

TEOREMA DEL ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

"El área de un polígono regular es igual al producto de su semiperímetro por su apotema".

Hipótesis: *ABCD* · (Fig. 393) es un polígono regular de

n lados

l = lado; *a* = apotema; *p* = semiperímetro.

Tesis: $A_{ABC} \cdots = p \bullet a$

Construcción auxiliar: Tracemos la circunferencia circunscrita al polígono y unamos el centro *O* con cada uno de los vértices, con lo que se formarán triángulos de base *l* (lado) y altura *a* (apotema).

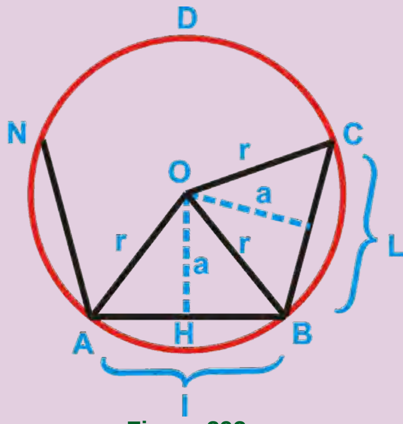


Figura 393

Demostración:

$A_{ABC} \cdots = A_{AOB} + A_{BOC} + \cdots$ (1) Suma de áreas

Pero: $A_{AOB} = \frac{1}{2}\ la$ (2)

$A_{ABOC} = \frac{1}{2}\ la$ (3)

y así sucesivamente.

Sustituyendo (2), (3), etc. en (1):

$$A_{ABC} \cdots = \frac{1}{2}\ la + \frac{1}{2}\ la + \cdots (n \text{ veces})$$

$$\therefore \quad A_{ABC} \cdots = \frac{1}{2}\ la \bullet n$$

$$A_{ABC} \cdots = \frac{n\,l\,a}{2} \quad (4)$$

y como:

$$\frac{nl}{2} = p \quad (5) \text{ Por definición}$$

Sustituyendo (5) en (4):

$$A = p \bullet a$$

TEOREMA 1

"El área de un círculo es igual al producto de p por el cuadrado del radio".

Hipótesis: Siendo la circunferencia de centro *0* y radio *r* (Fig. 394)

Construcción auxiliar: Inscribamos en la circunferencia *0* , de longitud *C* , un polígono regular $ABC\cdots$. Siendo $P = 2p$ su perímetro y *a* su apotema.

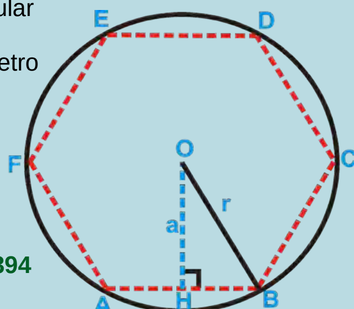


Figura 394

Tesis: $A = \pi r^2$

Demostración:

$$A_{ABC}\cdots = pa = \frac{pa}{2}$$ (1) Área del polígono regular.

Si duplicamos indefinidamente el número de lados del polígono, resulta:

$$\text{lím } A_{ABC}\cdots = \frac{\text{lím } P \times \text{lím } a}{2}$$ (2) Porque la relación (1) es cierta para cualquier número de lados del polígono

$$\text{pero: lím } A_{ABC}\cdots = A$$ (3) El límite de la sucesión de áreas de los polígonos es el área del círculo

$$\text{lím } P = C$$ (4) Porque el límite de la sucesión de perímetros de los polígonos inscritos es la longitud de la circunferencia

$$\text{lím } a = r$$ (5) El límite de la sucesión de apotemas de los polígonos es el radio

Sustituyendo (3), (4) y (5) en (2):

$$A = \frac{C \bullet r}{2}$$ (6)

$$\text{pero: } C = 2\pi r$$ (7) Longitud de la circunferencia.

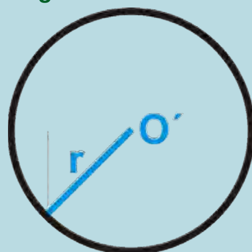
Sustituyendo (7) en (6):

$$A = \frac{(2\pi r)r}{2} \qquad \therefore \quad A = \frac{2\pi r^2}{2}$$

$$\therefore \quad A = \pi r^2$$ Efectuando operaciones y simplificando

Corolario: "Las áreas de dos círculos son proporcionales a los cuadrados de sus radios o a los cuadrados de sus diámetros".

Figura 395



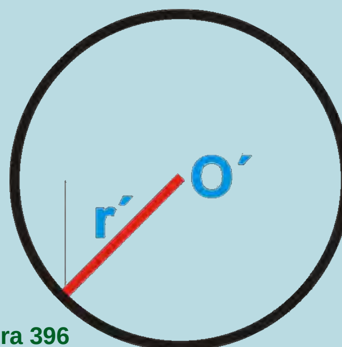


Figura 396

Hipótesis: *0* y *0*' (Figs.395 y 396) son dos circunferencias de radios *r* y *r* ', diámetros *d* y *d* ' y áreas *A* y *A* '.

Tesis: $$\frac{A}{A'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{d^2}{d'^2}$$

Demostración:

$$A = \pi r^2 \quad (1)$$
$$A' = \pi r'^2 \quad (2)$$
Área del círculo

Dividiendo (1) entre (2) tenemos:

$$\frac{A}{A'} = \frac{\pi r^2}{\pi r'^2}$$

$$\therefore \quad \frac{A}{A'} = \frac{r^2}{r'^2} \quad (3)$$ Simplificando

y como: $$r = \frac{d}{2} \quad (4)$$

y $$r' = \frac{d'}{2} \quad (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (3):

$$\frac{A}{A'} = \frac{\frac{d^2}{4}}{\frac{d'^2}{4}}$$ Efectuando operaciones

$$\therefore \quad \frac{A}{A'} = \frac{d^2}{d'^2}$$ (6) Simplificando

Comparando (3) y (6):

$$\frac{A}{A'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{d^2}{d'^2}$$ Carácter transitivo

TEOREMA 2

"El área de una corona circular de radios R y r es igual al producto de p por la diferencia de los cuadrados de dichos radios".

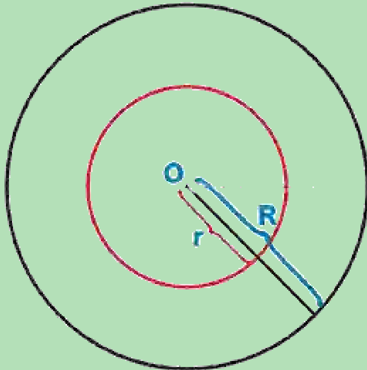


Figura 397

Hipótesis: Siendo la corona circular de la figura 397, de radios r y R, designamos por A_1, A_2 y A las áreas de los círculos de radios R y r, y de la corona circular.

Tesis: $A = \pi\left(R^2 - r^2\right)$

Demostración:

$A = A_1 - A_2$ (1) Diferencia de áreas

Pero: $A^1 = \pi R^2$ (2) Área del círculo

y $A^2 = \pi r^2$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$A = \pi R^2 - \pi r^2$

$\therefore$ $A = (R^2 - r^2)$ Sacando factor común

TEOREMA DEL ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

"El área de un sector circular es igual a la mitad del producto de la longitud de su arco por el radio".

Hipótesis: Siendo la circunferencia de radio r (Fig. 398) y AOB un sector circular de $n°$, designamos por l la longitud del OAB.

Tesis: $A_{AOB} = \frac{1r}{2}$

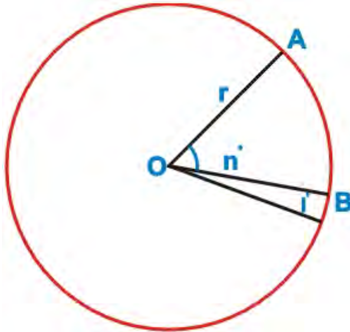


Figura 398

Demostración:

El área del círculo, limitada por la circunferencia completa (360°), es igual a πr^2 — Área del círculo

Un sector cuya amplitud sea de 1°, tendrá un área de $\frac{\pi r^2}{360}$ — Por ser dicho sector $\frac{1}{360}$ del círculo

Por tanto, el área de un sector de amplitud $n°$ será:

$A_{AOB} = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ}$ — Por n veces mayor

$\therefore$ $A_{AOB} = \frac{1}{2}\frac{\pi\, r\, n^\circ}{180^\circ} \bullet r$ (1) Ley disociativa

y como: $\frac{\pi\, r\, n^\circ}{180^\circ} = l$ (2) Longitud de un arco de $n°$

Sustituyendo (2) en (1), resulta:

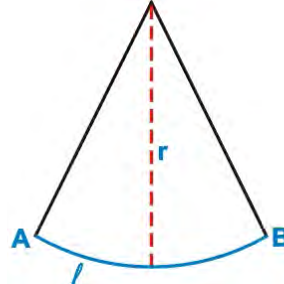
$A_{AOB} = \frac{l\,r}{2}$ Efectuando operaciones

Corolario: "El área de un sector circular es equivalente a la de un triángulo que tenga por base la longitud del arco que limita al sector y por altura el radio de la circunferencia".

Área del sector de arco l y radio r (Figs. 399 y 400) $= \frac{l\,r}{2}$

Área del triángulo de base l y altura r $= \frac{l\,r}{2}$

Figura 399



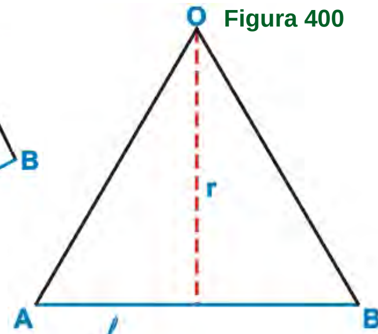


Figura 400

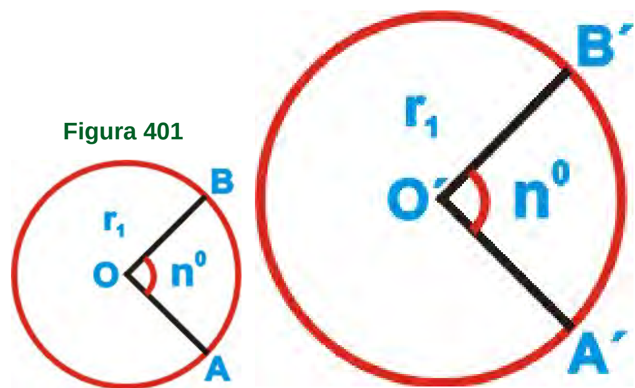
DOS SECTORES CIRCULARES SEMEJANTES

Son como los *AOB* y *A 'O 'B '* (Figs. 401 y 402) de igual amplitud *n* ° pero que pertenecen a círculos distintos (de radio r_1 y r_2).

Teorema

"Las áreas de dos sectores semejantes son proporcionales a los cuadrados de sus radios".

Figura 401



Hipótesis: Los sectores *AOB* y *A 'O 'B '* (Figs. 403 y 404) son semejantes, siendo r_1 y r_2 los radios y A_1, A_2 las áreas.

Tesis : $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{r_1{}^2}{r_2{}^2}$

Demostración:

$A_1 = \dfrac{\pi\, r_1^2 n^\circ}{360^\circ}$ (1)

Área del sector circular

$A_2 = \dfrac{\pi\, r_2^2 n^\circ}{360^\circ}$ (2)

Dividiendo (1) entre (2):

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\dfrac{\pi\, r_1^2 n^\circ}{360^\circ}}{\dfrac{\pi\, r_1^2 n^\circ}{360^\circ}}$ $\quad\therefore\quad$ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$ Simplificando

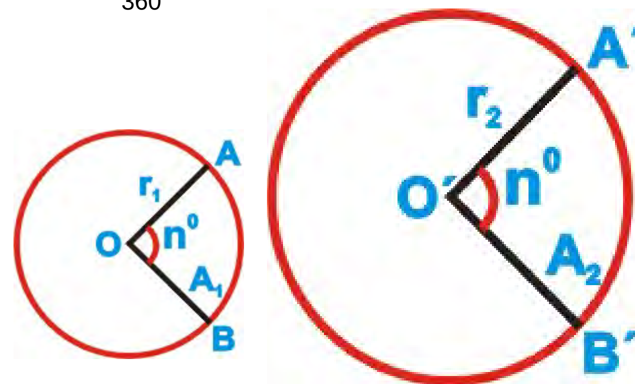


Figura 403 Figura 404

TEOREMA DEL ÁREA DE UN TRAPECIO CIRCULAR

El área de un trapecio circular limitado por dos arcos de radios *R* y *r* , y por dos radios que forman un ángulo central de *n*°, está dada por la fórmula:

$$\frac{\pi\, n^\circ \left(R^2 - r^2\right)}{360^\circ}$$

Hipótesis: *ABCD* (Fig. 405) es un trapecio circular de radios *R* y *r* y amplitud *n* °. Designemos por:

A el área del trapecio;
L la longitud del $\frown AB$ y
l la longitud del $\frown CD$

Tesis: $A = \dfrac{\pi\, n^\circ}{360^\circ}\left(R^2 - r^2\right)$

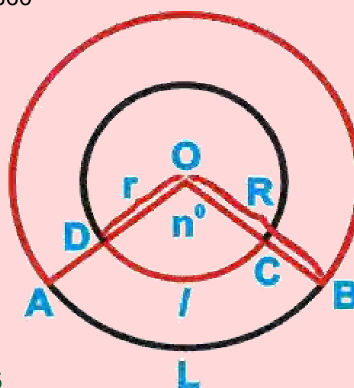


Figura 405

Demostración:

$A = A_{AOB} - A_{COD}$ (1) Diferencia de áreas

Pero: $A_{AOB} = \dfrac{\pi\, R^2 n^\circ}{360^\circ}$ (2)

y $A_{COD} = \dfrac{\pi\, R^2 n^\circ}{360^\circ}$ (3)

Área del sector circular

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$A = \dfrac{\pi\, R^2 n^\circ}{360^\circ} - \dfrac{\pi\, r^2 n^\circ}{360^\circ}$

$\therefore\quad A = \dfrac{\pi\, R^2 n^\circ - \pi\, r^2 n^\circ}{360^\circ}$ Efectuando operaciones

$\therefore\quad A = \dfrac{\pi\, n^\circ \left(R^2 - r^2\right)}{360^\circ}$ Sacando factor común

Corolario: "El área de un trapecio circular es equivalente a la de un trapecio rectilíneo que tenga por bases los arcos rectificados que limitan al trapecio circular y por altura la diferencia de los radios".

En las figuras 406 y 407 tenemos:

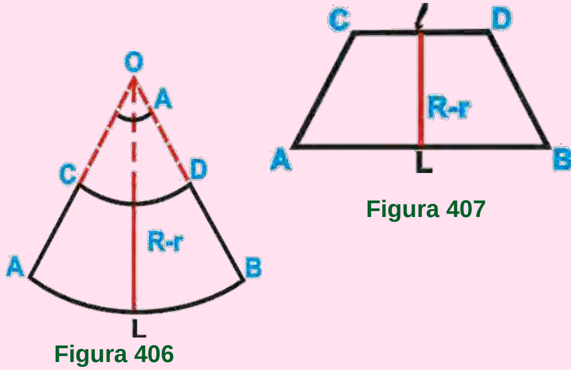


Figura 406

Figura 407

$$A = \text{(Área trapecio circular)} = \frac{\pi\, n^\circ}{360^\circ}\left(R^2 - r^2\right)$$

$$\therefore\; A = \frac{\pi\, n^\circ}{360^\circ}(R+r)\;(R-r)$$ Descomponiendo la diferencia de cuadrados

$$\therefore\; A = \frac{\pi\, n^\circ (R+r)}{360^\circ}(R-r)$$

$$\therefore\; A = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi\, Rn^\circ}{180^\circ} + \frac{\pi\, r\, n^\circ}{180^\circ}\right](R-r)$$ (1) Efectuando operaciones y descomponiendo

Pero: $\frac{\pi\, Rn^\circ}{180^\circ} = L$ (2)

y: $\frac{\pi\, r\, n^\circ}{108^\circ} = l$ (3)

(2) y (3): Longitud de un arco

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$A = \frac{1}{2}(L+l)(R-r) = \left(\frac{L+l}{2}\right)(R-r) \quad (4)$$

En las mismas figuras 406 y 407:

$$\text{Área trapecio rectilíneo} = \left(\frac{L+l}{2}\right)(R-r) \quad (5)$$

Comparando (4) y (5) resulta:

Área sector circular = Área trapecio rectilíneo

ÁREA DEL SEGMENTO CIRCULAR

Para encontrar el área de un segmento circular (Fig. 408) debe encontrarse el área del sector circular *OACB* y restársele el área del triángulo *AOB*.

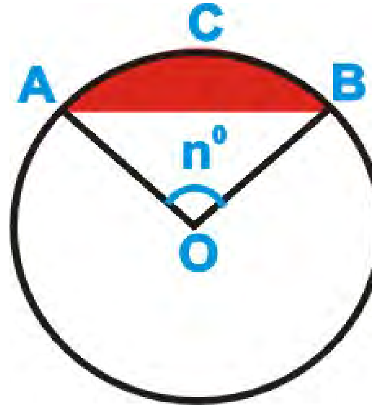


Figura 408

Ejemplo

Hallar el área de un segmento circular *ACB* (Fig. 409) limitado por el lado del hexágono regular inscrito en una circunferencia de 8 m de radio.

$\overline{AO} = \overline{OB} = 8m$; $\overline{AB} = l_6 = r = 8m$; $\angle AOB = n^\circ = 60^\circ$

Sector: $A = \frac{\pi\, r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\, 8^2 \bullet 60}{360} = \frac{64\pi}{6} = \frac{32\pi}{3}$

Triángulo: $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$

Segmento: $A = \frac{32\pi}{3} - 16\sqrt{3} = 33.49 - 27.71 = 5.78m^2$

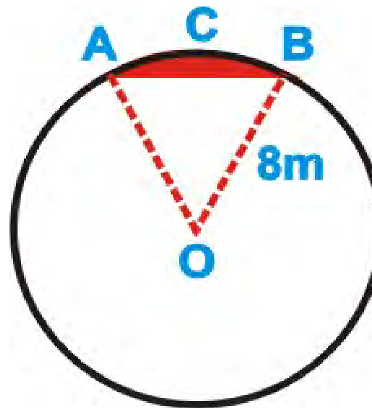


Figura 409

EJERCICIOS

1. *ABCD* es un cuadrado. *OA* = 4 m (Fig. 410) **R.** 18.26 m²

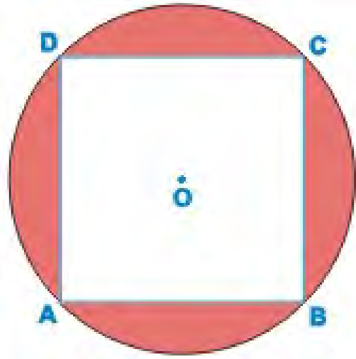


Figura 410

2. *ABCD* es un cuadrado. $\overline{AB}$ =10 cm (Fig. 411) **R.** 21.46 cm²

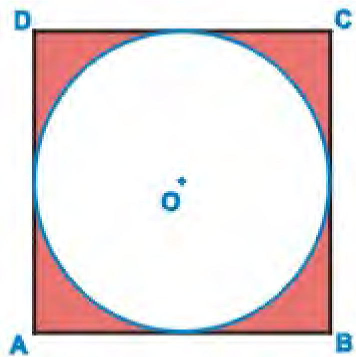


Figura 411

3. *ABCD* es un cuadrado. $\overline{AB}$ = 12 cm (Fig. 412) **R.** 30.90 cm²

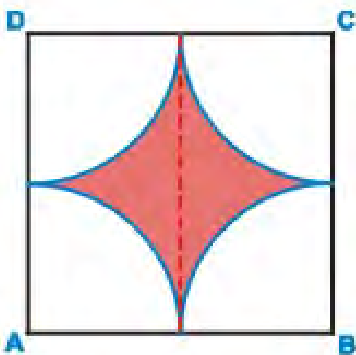


Figura 412

4. *ABCD* es un cuadrado. $\overline{OA}$ = 5 cm (Fig. 413) **R.** 24 cm²

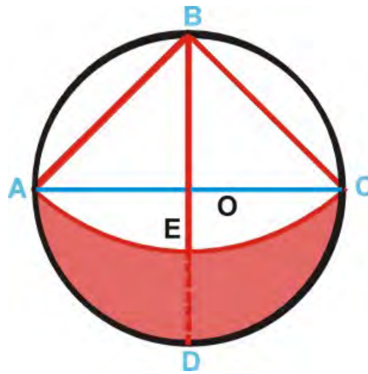


Figura 413

5. *ABCD* es un cuadrado. $\overline{AB}$ = 8 m (Fig. 414) **R.** 27.47 m²

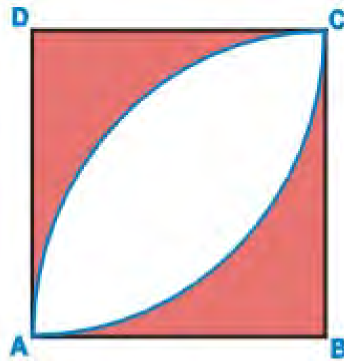


Figura 414

6. *ABCD* es un cuadrado. $\overline{AB}$ = 6 cm (Fig. 415) **R.** 7.72 cm²

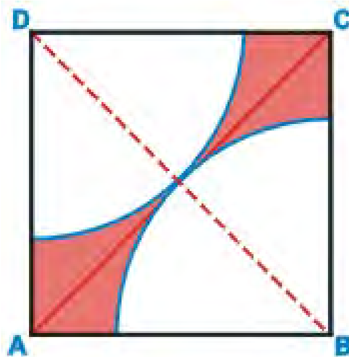


Figura 415

7. *ABC* es un equilátero. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 10$ cm. *P*, *M y N* son los puntos medios de los lados (Fig. 416) **R.** 4.03 cm²

8. *ABC* es un equilátero. $\overline{OA}$ = 12 cm (Fig. 417) **R.** 265.32 cm²

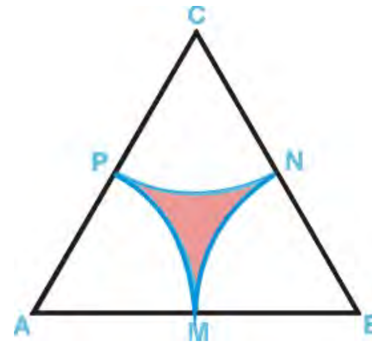


Figura 416

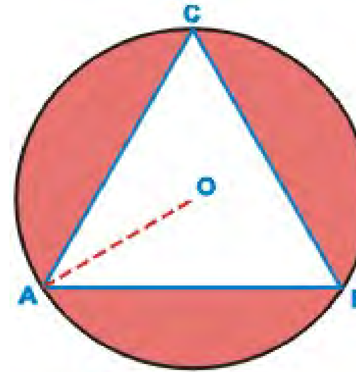


Figura 417

9. *ABCDEF* es un hexágono regular. $\overline{OB}$ = 2 m (Fig. 418) **R.** 2.18 m²

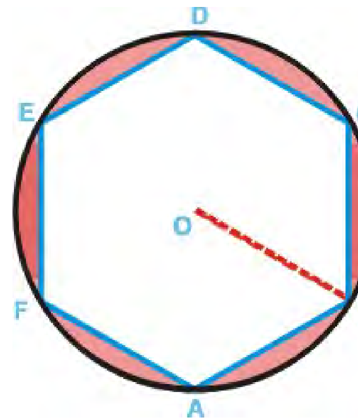


Figura 418

10. Hallar el área de un rectángulo sabiendo que su base mide 15.38 m y su altura 3.5 m. **R.** 53.83 m²

11. Un rectángulo tiene 96 m² de área y 44 m de perímetro. Hallar sus dimensiones. **R.** h = 6 m, b = 16 m



En los seres vivos, principalmente en los microscópicos existen diversas semejanzas con las figuras geométricas; por ejemplo, las formas de las algas microscópicas tienen gran similitud con triángulos, círculos y rombos.

CAPÍTULO XIX

RECTAS Y PLANOS

Un plano está determinado por alguna de estas características:

- Por dos rectas que se cortan.
- Por tres puntos no situados en línea recta.
- Por una recta y un punto exterior a ella.
- Por dos rectas paralelas.

Dos planos pueden cortarse, pues tienen una recta común que es la intersección de los dos planos; asimismo, pueden ser paralelos, que es cuando no tienen ningún punto común, y de acuerdo con esto, si dos planos tienen un punto común, tienen una recta común.

POSICIONES DE UN PLANO

Dos planos pueden ocupar las siguientes posiciones:

1. Cortarse, en cuyo caso tienen una recta común que es la intersección de los dos planos.

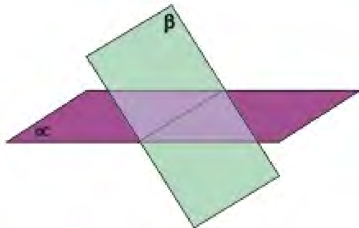


Figura 419

2. Ser paralelos, que es cuando no tienen ningún punto común, y de acuerdo con esto, si dos planos tienen un punto común, tienen una recta común.



Figura 420

POSICIONES DE UNA RECTA Y UN PLANO

Una **recta** y un **plano** pueden ocupar las siguientes posiciones:

1. Estar en la recta *a* en el plano.

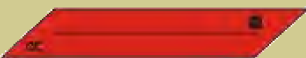


Figura 421

2. Cortarse, en cuyo caso tienen un punto *A* común.

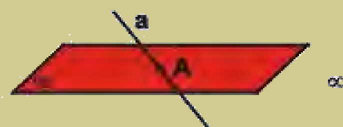


Figura 422

3. Ser paralelas, cuando no tienen ningún punto común.

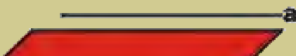


Figura 423

POSICIONES DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

Dos rectas **en el espacio** pueden ocupar las siguientes posiciones (Fig. 424):

1. **Cortarse.** En este caso $\overline{AB}$ y $\overline{BE}$ tienen un punto común *B* .
2. **Ser paralelas**, cuando están en un mismo plano y no tienen ningún punto común, por ejemplo $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
3. **Cruzarse**, cuando no están en un mismo plano, y en este caso no tienen ningún punto común ni son paralelas, por lo que se dice que son **alabeadas**, por ejemplo $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$.

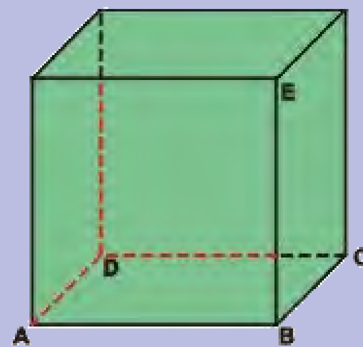


Figura 424

TEOREMA 1

"Las intersecciones *a* y *b* de dos planos paralelos α y β con un tercer plano g son rectas paralelas".

En efecto, si las rectas *a* y *b* se cortaran, el punto de intersección pertenecería a los planos α y β y en este caso no serían paralelos, lo que iría contra la hipótesis.

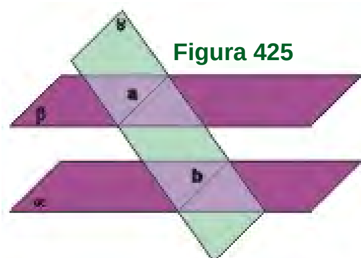


Figura 425

TEOREMA 2

"Si dos rectas *a* y *b* son paralelas, todo plano α que pase por una de ellas *b* es paralelo a la otra".

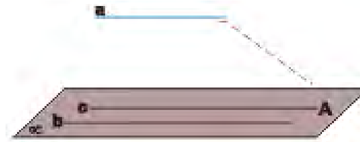


Figura 426

En efecto, si la recta α cortara el plano α en el punto *A*, trazando por este punto una paralela *c* a la recta *b*, tendríamos por *A* dos paralelas a una misma recta, contrario al postulado de Euclides.

Corolario:

Si una recta $\overline{AB}$ es paralela a un plano α, la intersección $\overline{MN}$ del plano α con otro cualquiera que pase por la recta es paralela a la recta (Fig. 427).

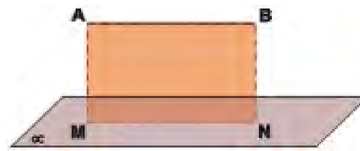


Figura 427

TEOREMA 3

"Si dos rectas *a* y *b* que se cortan son paralelas a un plano α, el plano que determinan es también paralelo al plano α".

En efecto, si el plano de las rectas *a* y *b* cortara al plano en la recta $\overline{MN}$, las rectas *a* y *b* serían paralelas a $\overline{MN}$ y habría dos rectas paralelas a una recta por un mismo punto *P*, contrario al postulado de Euclides.

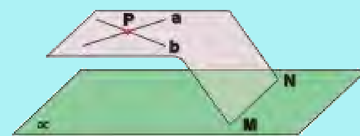


Figura 428

TEOREMA 4

"Si un plano α corta a una de dos rectas *a* y *b* paralelas, corta también a la otra".

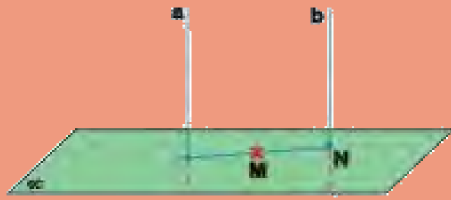


Figura 429

En efecto, el plano determinado por las dos rectas *a* y *b* corta al plano α en la recta $\overline{MN}$. Si esta recta corta a b deberá cortar también a *a* y, por tanto, el plano α corta a la recta *a*.

Corolarios:

1. Si una recta corta a uno de dos planos paralelos, corta también al otro.

2. Si un plano corta a uno de dos planos paralelos, corta también al otro.

3. Si dos planos son paralelos a un mismo plano, son paralelos entre sí.

TEOREMA 5

"Dos rectas *b* y *c* paralelas a una tercera *a* son paralelas entre sí".

En efecto, tracemos el plano α determinado por *b* y un punto *M* de la recta *c*. Este plano debe contener a *c*, porque si la cortara debería cortar también a *b* y la contiene. Si contiene a *c*, las rectas *c* y *b* no pueden cortarse porque entonces por el punto de intersección habría dos paralelas a una misma recta *a*, contrario al postulado de Euclides.

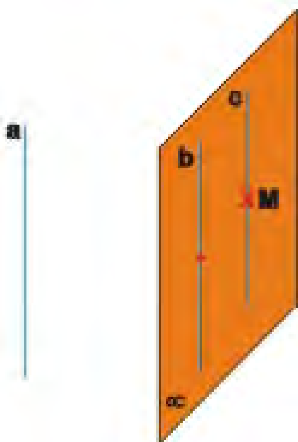


Figura 430

TEOREMA 6

"Si dos ángulos $\angle BAC$ y $\angle FGH$, no situados en un mismo plano, tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son iguales".

Construcción auxiliar : Se toman $\overline{AB} = \overline{FG}$ y $\overline{AC} = \overline{GH}$ y se unen *A* con *G* , *B* con *F* y *C* con *H* .

Si aplicamos los teoremas anteriores demostraremos que los triángulos *ABC* y *GFH* son iguales y, por tanto, los ángulos *A* y *G* también son iguales.

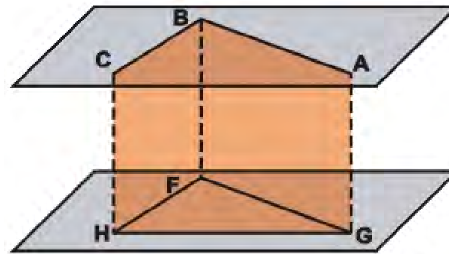


Figura 431

Análogamente se demuestra que si los ángulos tienen los lados paralelos y dirigidos en sentido contrario también son iguales, y si tienen un par de lados dirigidos en un sentido y un par en sentido contrario, son suplementarios.

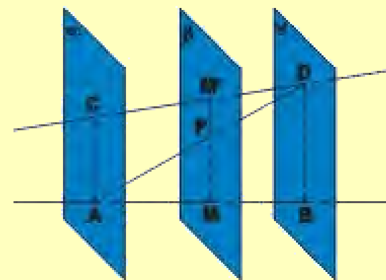
TEOREMA 7

"Si se cortan dos rectas por un sistema de planos paralelos, los segmentos correspondientes son proporcionales".

Siendo las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cortadas por los planos α, β, γ, demostraremos que:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CM'}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{M'D}}$$

En el plano *ADC* , por ser paralelas las



rectas $\overline{M'P}$ y $\overline{AC}$, se verifica $\frac{\overline{CM'}}{\overline{M'D}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}$

Figura 432

y en el plano *BAD* se verifica: $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$

De estas igualdades se deduce, por la propiedad transitiva, que:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CM'}}{\overline{M'D}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{CM'}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{M'D}}$$,que es lo que se quería demostrar.

Corolario: Si dos planos paralelos se cortan por un haz de rectas concurrentes, los segmentos correspondientes son proporcionales.

RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

Se dice que **una recta es perpendicular a un plano** cuando es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por la intersección, y el punto de intersección es el pie de la perpendicular.

Dado que es imposible comprobar que una recta sea perpendicular a todas las que pasan por su pie, sí se puede demostrar que si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano que pasan por su pie, entonces es perpendicular a todas.

De aquí que para construir un plano perpendicular a una recta en uno de sus puntos sea suficiente trazar dos rectas perpendiculares a la dada que pasen por el punto.

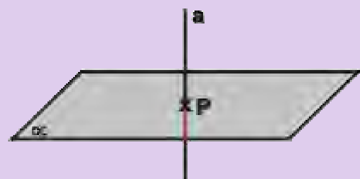


Figura 433

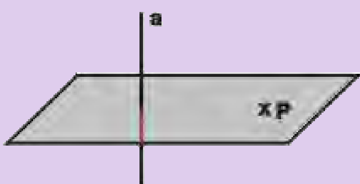


Figura 434

Por un punto *P* pasa un plano perpendicular a una recta *a* y solamente uno. El punto puede estar en la recta o fuera de ella.

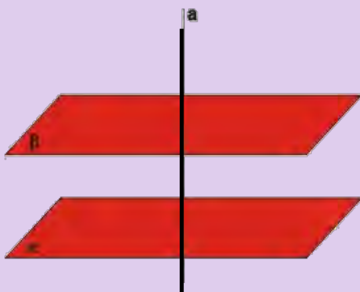


Figura 435

Si tenemos dos planos paralelos, α y β, y una recta *a* es perpendicular a uno de ellos, también es perpendicular al otro.

Por un punto *P* de un plano pasa una recta perpendicular al plano y solamente una.

Por un punto *P* exterior a un plano α pasa una recta $\overline{PM}$ perpendicular al plano α y solamente una.

DISTANCIA DE UN PUNTO *P* A UN PLANO α

Es el segmento $\overline{PM}$ de perpendicular trazada del punto al plano, llamado así por ser menor que cualquier otro segmento $\overline{PN}$ que une el punto con cualquier otro punto del plano, pues basta observar que el segmento oblicuo $\overline{PN}$ es hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que la distancia $\overline{PM}$ es un cateto.

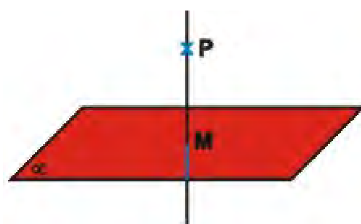


Figura 436

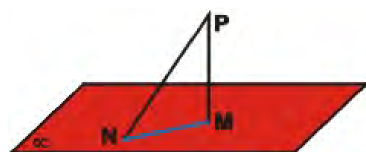


Figura 437

Análogamente a lo que vimos en la **Geometría plana**, dos oblicuas que se apartan igualmente del pie de la perpendicular son iguales, y de dos oblicuas que se apartan desigualmente del pie de la perpendicular, es mayor la que más se aparta.

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Si de dos rectas paralelas *a* y *b*, una (*a*) es perpendicular a un plano, la otra (*b*) también lo es.

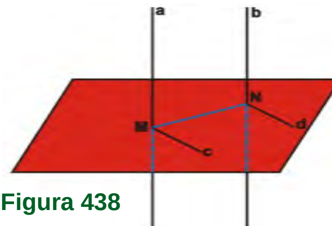


Figura 438

Unamos *M* con *N* ; por ser *a* perpendicular al plano, será perpendicular a $\overline{MN}$; y como b es paralela a *a* , también será perpendicular a $\overline{MN}$. Para demostrar que es perpendicular al plano tendremos que demostrar que es perpendicular a otra recta del plano. Si trazamos por *M* y *N* dos rectas *c* y *d* paralelas veremos que los ángulos *M* y *N* son iguales por lados paralelos dirigidos en el mismo sentido, y como el ángulo *M* es recto, también lo será el *N* .

Recíprocamente, dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas.

Dados dos planos paralelos, si una recta es perpendicular a uno de ellos, también es perpendicular al otro.

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS α Y β PARALELOS

Es el segmento $\overline{MN}$ de perpendicular comprendido entre los dos planos. También es la distancia de un punto cualquiera *M* de uno de ellos al otro.

Postulados

1. Dado un plano, existen puntos fuera de él.
2. Un plano divide al espacio en dos regiones llamadas semiespacios.

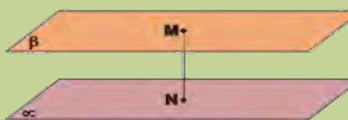


Figura 439

ÁNGULO DIEDRO

Un **ángulo diedro**, o simplemente **diedro**, es la porción de espacio comprendida entre dos semiplanos con un borde común situados en planos distintos.

Los semiplanos *MAB* y *NAB* (Fig. 440) con el borde común *AB* son las caras del diedro, y la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es la arista del diedro.

Al diedro se le nombra colocando las letras de los extremos de la arista entre las letras que designan los semiplanos; así, el diedro de la figura 440 se designa *MABN*.

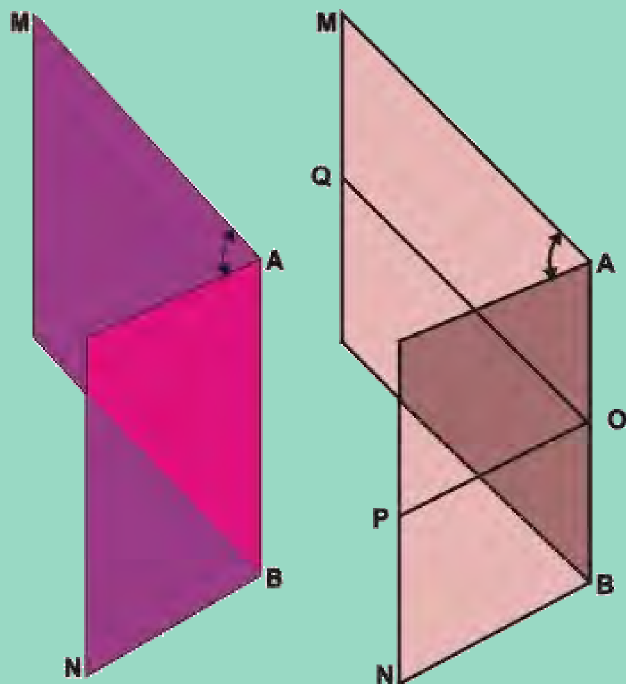


Figura 440 Figura 441

El ángulo rectilíneo correspondiente a un **diedro,** o la **medida de un ángulo diedro,** es el ángulo formado por dos rectas $\overleftrightarrow{OP}$ y $\overleftrightarrow{OQ}$ (Fig. 441) perpendiculares a la arista $\overleftrightarrow{AB}$ en un mismo punto *O*, de manera que las rectas estén en caras distintas del diedro.

Si O es un punto de la arista $\overline{AB}$ y $\overline{PO} \perp \overline{AB}$ y $\overline{QO} \perp \overline{AB}$, estando en $\overline{PO}$ en un semiplano y $\overline{QO}$ en el otro semiplano, decimos que el $\angle POQ$ es un ángulo rectilíneo correspondiente del diedro *MABN*.

Obsérvese que todos los ángulos rectilíneos correspondientes de un diedro son iguales, ya que son ángulos de lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

La medida de un ángulo diedro es la medida de un ángulo rectilíneo correspondiente. Si el ángulo rectilíneo es agudo el diedro es agudo, si es recto el diedro es recto, etc.

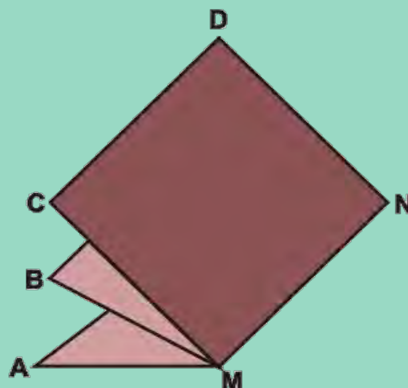


Figura 442

Dos ángulos diedros son **iguales** cuando también lo son sus ángulos rectilíneos correspondientes, y son desiguales cuando lo son sus ángulos rectilíneos correspondientes.

Los **ángulos diedros consecutivos** son los ángulos diedros como *AMNB* y *BMNC* (Fig. 442) que tienen la arista y una cara común que separa a las otras dos.

PLANOS PERPENDICULARES

Son los que forman un ángulo diedro recto.

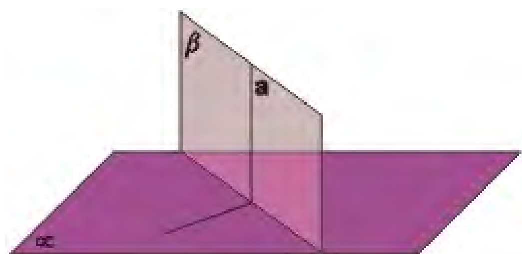


Figura 443

Propiedades

1. Si una recta a es perpendicular a un plano α, entonces cualquier plano β que pase por la recta a será perpendicular al plano α.
2. Si una recta es perpendicular a un plano, entonces cualquier plano paralelo a la recta también será perpendicular al plano.
3. Si dos planos son perpendiculares, cualquier recta de uno de ellos, perpendicular a la intersección de los dos planos será perpendicular al otro.
4. Si dos planos α y β son perpendiculares y desde un punto *M*

de uno de ellos trazamos una recta $\overleftrightarrow{MN}$ perpendicular al otro, dicha recta estará contenida en el plano α .

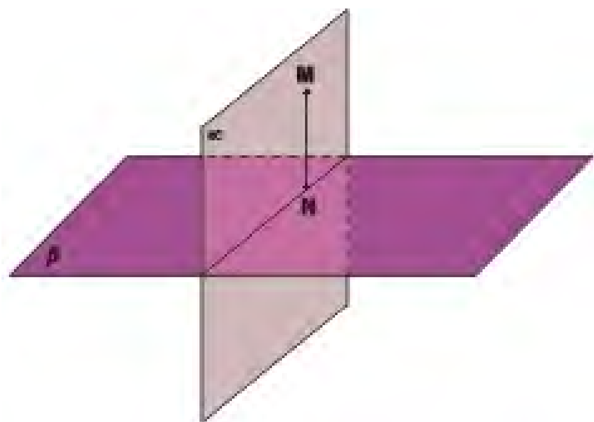


Figura 444

5. Si dos planos α y β que se cortan son perpendiculares a un tercero γ, entonces la recta de intersección $\overleftrightarrow{MN}$ también es perpendicular al plano γ.

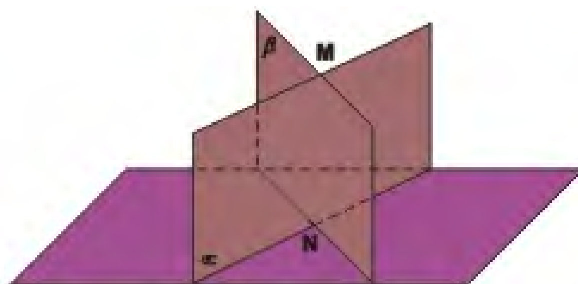


Figura 445

6. Por una recta a oblicua a un plano α pasa un plano β perpendicular a α y solamente uno.

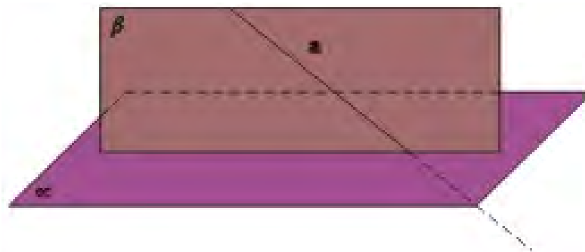


Figura 446

PLANO BISECTOR DE UN ÁNGULO DIEDRO

Es el plano que divide al diedro en dos diedros iguales.

Los puntos del plano bisector equidistan de las caras de diedro y los planos bisectores de dos diedros adyacentes son perpendiculares.

Figura 447



La proyección de un punto *A* sobre un plano a es el pie *A'* de la perpendicular trazada desde el punto al plano.

La proyección de una línea $\overline{AB}$ sobre un plano α es el conjunto $\overline{A'B'}$ formado por las proyecciones de todos los puntos de la línea.

Para obtener la proyección de una recta sobre un plano se traza por la recta un plano perpendicular al dado, y la intersección es la proyección.

Figura 448



DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Es el segmento perpendicular común comprendido entre ambas rectas.

Para trazar esta distancia, *a* y *b* serán las dos rectas. Por un punto *M* de una de ellas (*b*) se traza la recta *c* paralela a la otra (*a*), la cual determina con *b* el plano α **.**

Enseguida trazamos el plano β perpendicular al α , que corta a la recta a en el punto *P*.

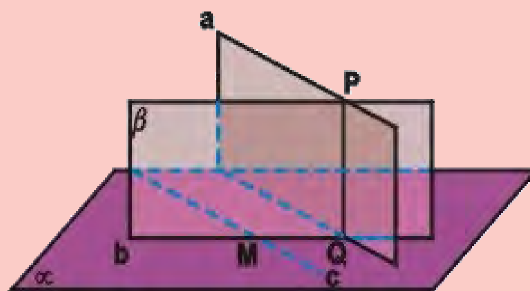


Figura 449

Trazando desde *P* la perpendicular $\overline{PQ}$ al plano α tenemos que $\overline{PQ}$ es la distancia buscada entre las rectas *a* y *b* .

ÁNGULO POLIEDRO CONVEXO

Es la figura formada por tres o más semirrectas $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$, $\overrightarrow{VC}$, etc. (Fig. 450), del mismo origen, y tales que el plano determinado por cada dos consecutivas deja a las demás de un mismo lado (semiespacio) del plano.

El origen *V* de las semirrectas es el **vértice** y las semirrectas $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$, $\overrightarrow{VC}$, etc. son las **aristas**. Los planos (y también los ángulos) *AVB* , *BVC* , *CVD* , *DVE* y *EVA*, son las caras del ángulo poliedro.

Un ángulo poliedro se nombra por el vértice, un guión y las letras de las aristas: en la figura 450 es *V -ABCDE* .

La **sección plana** de un **ángulo poliedro** es el polígono determinado por un plano que corta a todas las aristas del ángulo poliedro.

El ángulo poliedro *V - ABCDE* (Fig. 450), al ser cortado por el plano *Q* , determina el polígono *A 'B 'C 'D 'E* ', que es una sección plana de dicho ángulo poliedro.

Los **ángulos diedros** en un **ángulo poliedro** están formados por cada dos caras consecutivas y se les nombra por su arista.

Con esto (Fig. 450) diremos: **diedro** *VA*, **diedro** *VB*, etc.

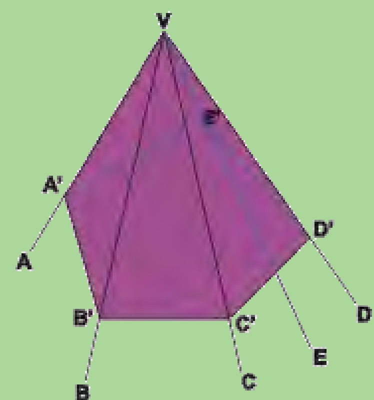


Figura 450

ÁNGULO TRIEDRO

Es el ángulo poliedro formado por tres semirrectas.

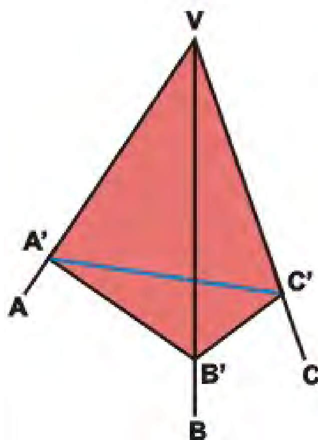


Figura 451

Un ángulo triedro puede tener uno, dos o tres ángulos diedros rectos (rectángulo, birrectángulo o trirrectángulo (figura 452), respectivamente).

Los **triedros isósceles** tienen dos caras iguales.

El **poliedro convexo** es el cuerpo limitado por polígonos llamados **caras,** de manera que el plano de cada cara deja a un mismo lado a la figura.

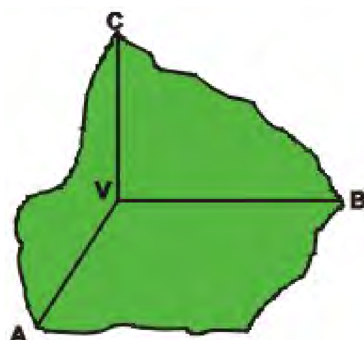


Figura 452

POLIEDROS REGULARES

Un poliedro es **regular** si sus caras son polígonos regulares iguales y los ángulos poliedros tienen el mismo número de caras.

Hay cinco poliedros regulares cuyos nombres se designan por el número de sus caras:

4 caras tetraedro (Figs. 453 y 454)

6 caras hexaedro (Figs. 455 y 456)

8 caras octaedro (Figs. 457, 458 y 459)

12 caras dodecaedro (Fig. 460)

20 caras icosaedro (Figs. 461 y 462)

Tetraedro regular

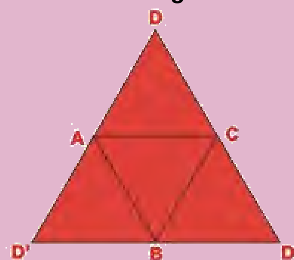


Figura 453

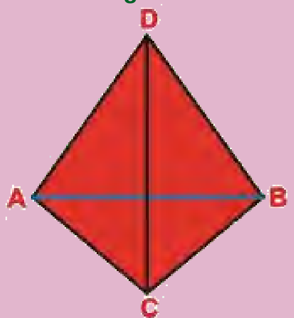


Figura 454

Hexaedro regular o cubo

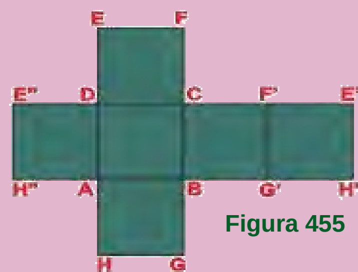


Figura 455

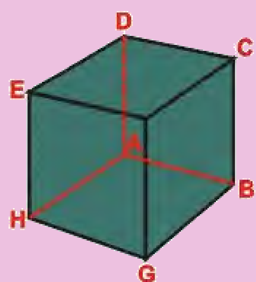


Figura 456

Dodecaedro regular

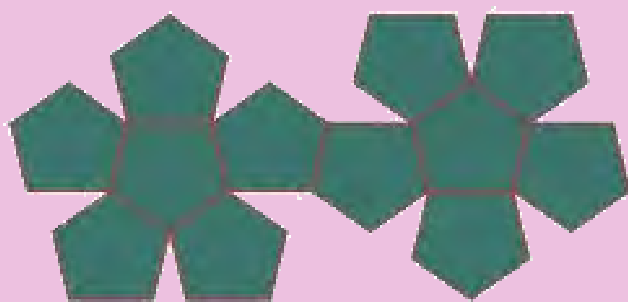


Figura 460

Octaedro regular

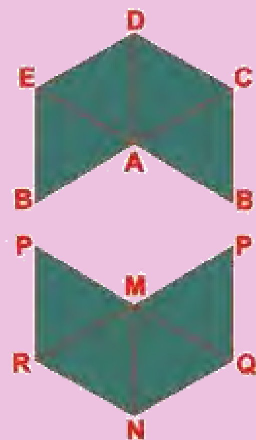


Figura 457

Icosaedro regular

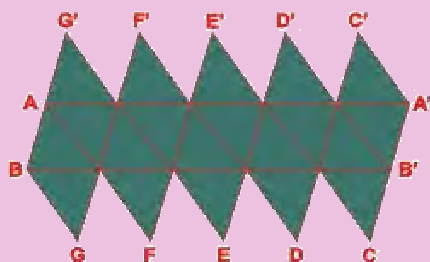


Figura 461

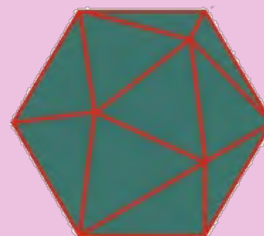


Figura 462

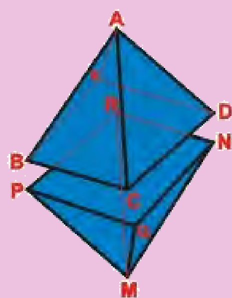


Figura 458

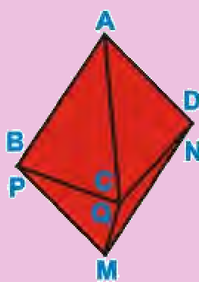


Figura 459

Tan sólo existen cinco poliedros regulares convexos, debido a que la suma de las caras de un ángulo poliedro debe ser menor de 360° (para comprobarlo, basta tratar de construir uno cuyas caras sumen más de 4 ángulos rectos).

Tomando como cara el triángulo equilátero, podremos construir poliedros con:

3 caras concurrentes en un vértice (3 × 60° = 180° < 360°) (tetraedro)

4 caras concurrentes en un vértice (4 × 60° = 240° < 360°) (octaedro)

5 caras concurrentes en un vértice (5 × 60° = 300° < 360°) (icosaedro)

pero ya con 6 caras no será posible porque 6 × 60° = 360°.

Si tomamos el cuadrado como cara podremos construir con:

3 caras concurrentes en un vértice (3 × 90° = 270°) (hexaedro)

y nada más porque 4 caras ya suman 4 × 90° = 360°.

Con pentágonos regulares, cuyo ángulo mide 108° solo se podrá construir uno con:

3 caras concurrentes en un vértice (3 × 108° = 324°) (dodecaedro).

Con hexágonos regulares, cuyo ángulo mide 120° ya no se puede construir ninguno porque:

3 caras concurrentes en un vértice (120 × 3 = 360°).

Y lo mismo ocurre con polígonos regulares de más de seis lados.

EJERCICIOS

1. Sabiendo que el área total de un octaedro regular es $18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ calcular la arista.
R. 3 cm

2. Sabiendo que el área total de un icosaedro regular es $20\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ calcular la arista.
R. 2 cm

3. Hallar el área total de un dodecaedro cuya arista vale 2 cm.
R. $A_T = 68.82$

4. Hallar el área total de un cubo cuya arista vale 7 cm.
R. $A_T = 294\ \text{cm}^2$

5. Hallar la arista de un cubo sabiendo que su área total es 384 centímetros cuadrados.
R. $a = 8$ cm

6. Hallar el área de una cara de un tetraedro regular cuya arista vale 2 cm.

R. $\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

7. Hallar el área de una cara de un octaedro regular cuya arista vale 4 cm.

R. $4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

8. Hallar el área de una cara de un icosaedro regular cuya arista vale 6 cm.

R. $9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

9. Hallar el área total de un tetraedro regular cuya arista vale 2 centímetros.

R. $4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

10. Hallar el área total de un octaedro regular cuya arista vale 6 centímetros.
R. $72\sqrt{3}$ cm

11. Hallar el área total de un icosaedro regular cuya arista vale 4 centímetros.
R. $80\sqrt{3}$ cm

12. Sabiendo que el área total de un tetraedro regular es $16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ calcular la arista.
R. 4 cm



Las figuras geométricas prácticamente abarcan todos los aspectos de la vida humana. En el ámbito de la computación se han desarrollado programas y paquetes que facilitan en gran medida el trazo de dichas figuras en diversas dimensiones.

CAPÍTULO XX

PRISMAS Y PIRÁMIDES

El **prisma** es un poliedro limitado por varios paralelogramos y dos polígonos iguales cuyos planos son paralelos.

Los polígonos iguales y paralelos *ABC* y *DEF* ; *ABCDJ* y *EFGHI* (Figs. 463 y 464) se llaman **bases** del prisma; las demás caras (paralelogramos) forman la superficie lateral del prisma.

Las **aristas laterales** son aquellas que no pertenecen a las bases: *AE*, *BF*, *CD* ; *AG* , *BH* , *C I*, *DE*, *J F* .

El **prisma recto** es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a los planos de las bases, como los de la figuras mencionadas.

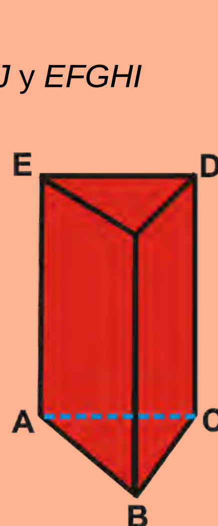


Figura 463

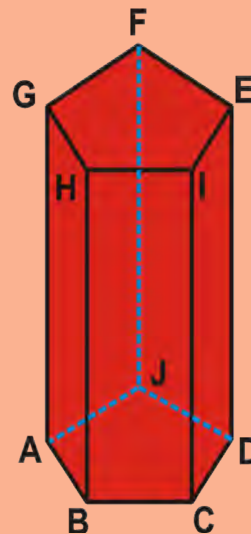


Figura 464

CARACTERÍSTICAS DE LOS PRISMAS

La **altura de un prisma** es la distancia entre los planos de sus bases, y así, en el prisma recto la altura es igual a las aristas laterales.

En el **prisma oblicuo** las aristas laterales no son perpendiculares a los planos de las bases (figura 465), y la altura se obtiene trazando desde un punto de una base la perpendicular $\overline{DH}$ (figura 465) a la otra base.

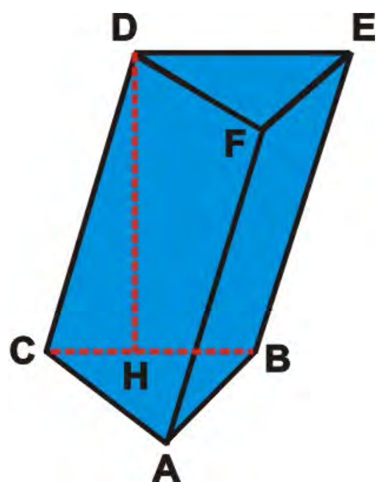


Figura 465

De acuerdo con el número de lados de los polígonos que forman las bases, los prismas pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.

PARALELEPÍPEDO

El paralelepípedo es un prisma cuyas bases son paralelogramos.

En la figura 466, el prisma *ABCDEFGH* es un paralelepípedo.

Dos aristas son opuestas cuando son paralelas y no pertenecen a la misma cara, como $\overline{AH}$ y $\overline{CF}$, $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$, etc

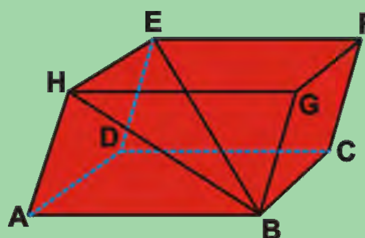


Figura 466

Los vértices que no están situados en la misma cara se llaman opuestos, como *A* y *F*, *B* y *E*.

La diagonal de un paralelepípedo es un segmento, como $\overline{BE}$, que une dos vértices opuestos.

El plano diagonal está determinado por dos aristas opuestas: *BCEH*.

Un paralelepípedo es recto si sus aristas laterales son perpendiculares a las bases. Por otro lado, si las bases de un paralelepípedo recto son rectángulos, se trata de un paralelepípedo recto rectangular u **ortoedro**, cuyas 6 caras son rectángulos.

PIRÁMIDE

Una **pirámide** es un poliedro con una cara llamada base, que es un polígono cualquiera, y las otras caras laterales son triángulos con un vértice común o cúspide de la pirámide.

La pirámide *FABCDE* (Fig. 468) tiene como base el polígono *ABC DE* y el vértice es *F*.

Su altura es la perpendicular $\overline{FH}$ trazada del vértice a la base.

De acuerdo con la clase de polígono de la base, las pirámides pueden ser triangulares, hexagonales, etc.

Las caras laterales de la pirámide son los $\Delta ABF, \Delta BCF, \Delta CDF,$ $\Delta DEF, \Delta EFA$

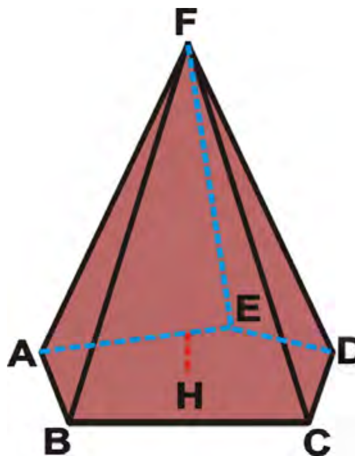


Figura 468

TEOREMA 1

"En todo ortoedro, el cuadrado de la diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las tres aristas que concurren en un mismo vértice".

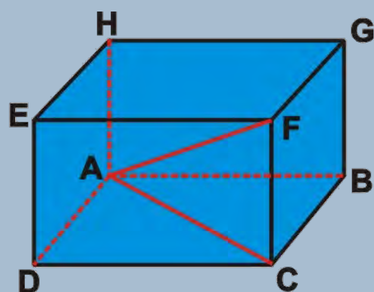


Figura 467

Hipótesis: *ABCDEFGH* es un ortoedro; $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{CF}$ son aristas concurrentes en un vértice; *AF* es una diagonal.

Tesis: $(\overline{AF})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 + (\overline{CF})^2$

Demostración: En el triángulo rectángulo *AC F* tenemos:

$(\overline{AF})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{CF})^2$ (1)

En el ΔABC, también rectángulo:

$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2$ (2)

} Teorema de Pitágoras.

Sustituyendo (2) en (1):

$(\overline{AF})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 + (\overline{CF})^2$ Que es lo que queríamos demostrar.

PIRÁMIDE REGULAR

Una **pirámide regular** tiene como base un polígono regular y el pie de su altura coincide con el centro de este polígono.

En la pirámide regular, las caras laterales son triángulos isósceles iguales y la altura de cada uno de estos triángulos es la **apotema** de la pirámide.

Si se corta una pirámide por un plano paralelo a su base, la sección resultante es un polígono semejante a la base.

Teorema

"La razón entre el área de la base de una pirámide y el área de una sección paralela a ésta, es igual a la razón entre los cuadrados de sus distancias al vértice".

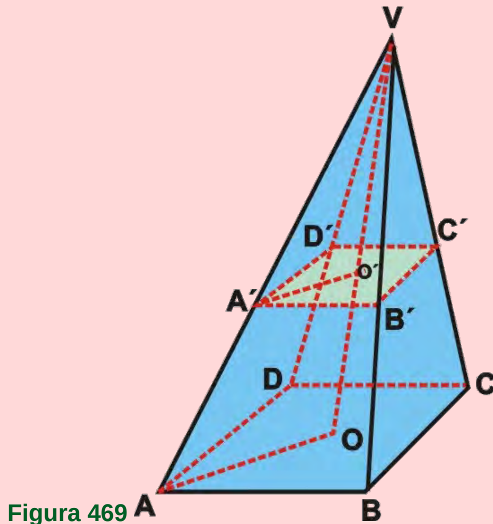


Figura 469

Hipótesis: $V\ ABC\ D$ (Fig. 469) es una pirámide y $A'B'C'D$ es una sección paralela a la base.

$\overline{VO}$ es la distancia del vértice a la base.

$\overline{VO'}$ es la distancia del vértice a la sección paralela.

S = área $ABCD$

S' = área $A'B'C'D'$

Tesis : $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{\overline{VO}^2}{\overline{VO'}^2}$

Construcción auxiliar. Unimos O con A y O' con A' para formar $\Delta VOA \sim \Delta VO'A$ por ser $\overline{OA} \parallel \overline{O'A'}$.

Demostración:

En los $\Delta VOA \sim \Delta VO'A'$:

$\dfrac{\overline{VA}}{\overline{VA'}} = \dfrac{\overline{VO}}{\overline{VO'}}$ (1) Lados homólogos de triángulos semejantes.

Pero: $\Delta VAB \sim \Delta VA'B'$ Por ser $\overline{A'B'}$ $\overline{AB}$

Luego: $\dfrac{\overline{VA}}{\overline{VA'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ (2) Lados homólogos de triángulos semejantes

Comparando (1) y (2):

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{VO}}{\overline{VO'}}$ (3)

Por otra parte:

$\dfrac{S}{S'} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$ (4) La razón en las áreas de dos polígonos semejantes es igual a la razón entre los cuadrados de sus lados homólogos.

Comparando (3) y (4):

$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{VO}^2}{\overline{VO'}^2}$$

CUBO

El **cubo** es el ortoedro que tiene todas sus aristas iguales (Fig. 470) y también se conoce como hexaedro regular.
Las seis caras del cubo son cuadrados.

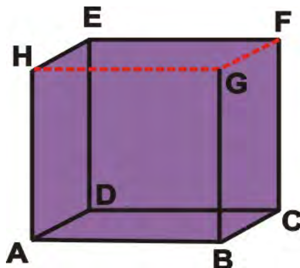


Figura 470

Un **romboedro** es el paralelepípedo cuyas bases son rombos, y es **recto** cuando sus aristas laterales son perpendiculares a las bases.

ÁREAS DE LOS POLIEDROS

El área lateral de un prisma o pirámide es la suma de las áreas de sus caras laterales.

El área total de un prisma o pirámide es la suma del área lateral más las áreas de las bases.

Prisma recto (área lateral): Si suponemos las caras laterales colocadas en un plano, como se ve en las figuras 471 y 472, resultará el rectángulo $AA'J'J$, que es la suma de todas las caras laterales o superficie lateral del prisma.

La base $\overline{AA'}$ de este rectángulo es el perímetro de la base del prisma y la altura del rectángulo $\overline{JA}$ es la altura del prisma.

Este rectángulo constituye el desarrollo de la superficie lateral del prisma.

Dado que el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura, resulta que:

"El área lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de su base por la longitud de la altura o arista lateral".

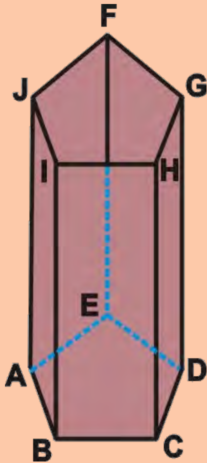


Figura 471

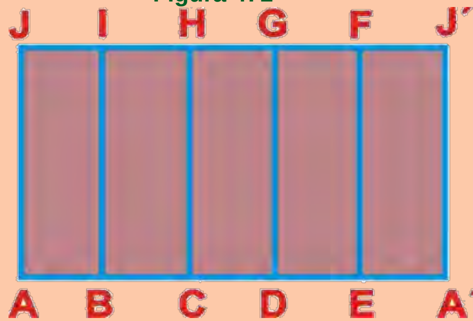


Figura 472

Llamamos A_L al área lateral , P al perímetro y h a la altura, y tenemos:

$$A_L = P \bullet h$$

El **área total** de un prisma recto se obtiene sumando al área lateral el doble del área de la base.

Si llamamos B al área de la base, tenemos:

$$A_T = A_L + 2B\,;$$

$$\therefore \quad A_T = P \bullet h + 2B$$

SECCIÓN RECTA DE UN PRISMA

La **sección recta** de un prisma cualquiera es el polígono determinado por un plano perpendicular a las aristas laterales.

En la figura 473, si el plano *MNPQ* es perpendicular a las aristas *DE*, *AF*, etc., el polígono *MNPQ* es una sección recta del prisma oblicuo *ABCDEFGH.*

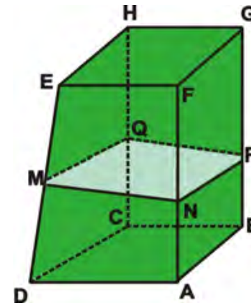


Figura 473

ÁREA LATERAL DE UN PRISMA CUALQUIERA

Como la sección recta es perpendicular a las aristas laterales, éstas son perpendiculares a $\overline{MN}, \overline{NP}, \overline{PQ}$, y $\overline{QM}$.

Por tanto, los paralelogramos *ABGF*, *BGHC*, *CDEH* y *DAFE*, tienen por alturas los segmentos $\overline{NP}, \overline{PQ}, \overline{QM}$ y $\overline{MN}$, respectivamente.

Por tanto:

A_L = Área *ABGF* + Área *BGHC* + Área *CDEH* + Área *DAFE* (1)

Pero: Área $ABGF = \overline{NP} \bullet \overline{BG}$

Área $BGHC = \overline{PQ} \bullet \overline{HC}$

Área $CDEH = \overline{QM} \bullet \overline{ED}$

Área $DAFE = \overline{MN} \bullet \overline{AF}$

Sustituyendo estos valores en (1):

$$A_L = \overline{NP} \bullet \overline{BG} + \overline{PQ} \bullet \overline{HC} + \overline{QM} \bullet \overline{ED} + \overline{MN} \bullet \overline{AF}$$

y como $\overline{BG} = \overline{HC} = \overline{ED} = \overline{AF}$, resulta:

$$A_L = \overline{NP} \bullet \overline{BG} + \overline{PQ} \bullet \overline{BG} + \overline{QM} \bullet \overline{BG} + \overline{MN} \bullet \overline{BG}$$

Sacando el factor común $\overline{BG}$ tenemos:

$$A_L = \overline{BG}\left(\overline{NP} + \overline{PQ} + \overline{QM} + \overline{MN}\right)$$

donde $\overline{BG}$ es la longitud de una arista lateral y el paréntesis representa el perímetro de la sección recta, resultando:

El área lateral de un prisma oblicuo es igual al producto del perímetro de la sección recta por la longitud de la arista lateral".

ÁREA LATERAL DE UNA PIRÁMIDE REGULAR

Las caras de una **pirámide regular** son triángulos isósceles iguales (Figs. 474 y 475) cuya altura es la apotema de la pirámide *VH* y cuyas bases son los lados *AB*, *BC* , etc., del polígono de la base de la pirámide. Obtendremos el área lateral multiplicando el área de un triángulo por el número, *n*, de sus caras (tantos como lados tenga el polígono de la base).

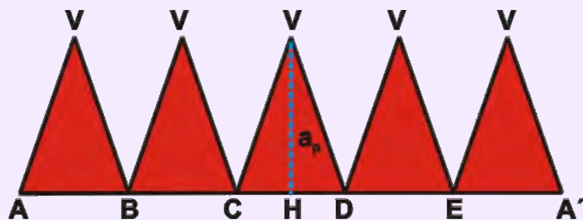


Figura 474

$A_L = n$ por el área de un triángulo.

Si llamamos *l* al lado de la base y a_p a la apotema de la pirámide, el área de un triángulo es:

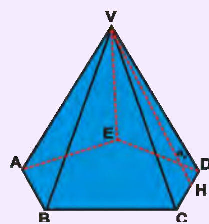


Figura 475

$\frac{1}{2}\, l\, a_P$ y el área lateral: $A_L = n \bullet \frac{1}{2} l \bullet a_p$

o sea, $A_L = \frac{nl}{2} \bullet a_p$

y como nl = perímetro P, resulta: $A_L = \frac{P}{2} \bullet a_p$

Si designamos $\frac{P}{2}$ (semiperímetro) como p , finalmente resulta:

$$A_L = p \bullet a_p$$

"El área lateral de una pirámide regular es igual al producto del semiperímetro de la base por la longitud de la apotema de la pirámide".

Área total de una pirámide regular. Para hallar el área total sumaremos el área de la base al área lateral. Como la base es un polígono regular, tendremos:

$$A_T = A_L + B$$

y como $B = p \bullet a_b$ (llamando a_b a la apotema de la base):

$$A_T = p\ a_p + p\ a_b$$

y sacando el factor común:

$$A_T = p\,(a_p + a_b)$$

TRONCO DE PIRÁMIDE

El **tronco de una pirámide** es la porción *ABC DEE 'A 'B 'C 'D'* (Figs. 476, 477 y 478) de pirámide comprendida entre la base y un plano paralelo que corte a todas las aristas laterales. *V A 'B 'C' D 'E '* es una **pirámide deficiente**.

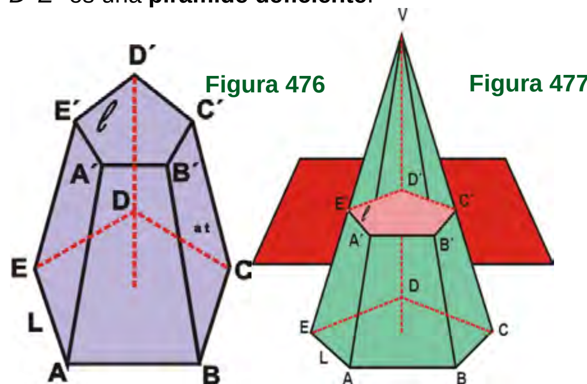


Figura 476 Figura 477

Si el tronco es de una pirámide regular, las caras laterales son trapecios isósceles iguales. La altura de uno de los trapecios se llama apotema del tronco y se designa por a_t :

Área lateral del tronco de pirámide regular. Siendo *L* cada lado de la base mayor y *l* cada lado de la base menor (Figs. 479 y 480), la altura de los trapecios o apotema del tronco es a_t :

Figura 478

área de un trapecio $= \frac{L + l}{2} \bullet a_t$

Como el área lateral está formada por *n* trapecios, tendremos:

$$A_t = n \bullet \frac{(L + l)}{2} a_t$$

$$A_L = \frac{n(L + l)}{2} \bullet a_t = \frac{nL + nl}{2} \bullet a_t$$

Pero $nL = P$ . . . . perímetro de la base mayor.

y $nl = P'$ . . . . perímetro de la base menor.

$\therefore \quad A_L = \frac{P + P'}{2} \bullet a_t$

Figura 480

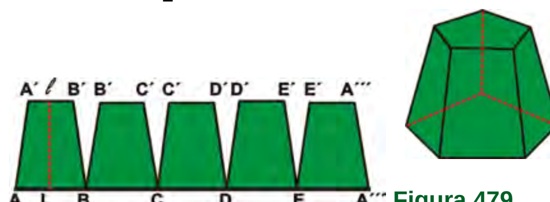


Figura 479

"El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual a la semisuma de los perímetros de sus bases, por la apotema del tronco".

El **área total** de un tronco es igual al área lateral más las áreas de las dos bases.

EJERCICIOS

1. Hallar el área lateral y total de una pirámide regular de base triangular sabiendo que el lado de la base mide 6 cm y la altura de la pirámide 12 cm.

R. $A_L = 9\sqrt{147}$ cm^2; $A_T = 9(\sqrt{3}+\sqrt{147})$ cm^2

2. Hallar el área lateral y el área total de un tronco de pirámide cuadrada si los lados de las bases miden 8 y 20 cm respectivamente y la altura del tronco 8 cm.

R. A_L = 560 cm^2; A_T = 1024 cm^2

3. Hallar el área total de un tronco de pirámide regular triangular si los lados de las bases miden 6 y 8 pulgadas y la altura 10 pulgadas.

R. $A_T = 25(8.48 + \sqrt{3})$ pulgadas cuadradas.

4. Hallar el área total de un tronco de pirámide cuadrada sabiendo que los lados de las bases miden 16 y 4 pulgadas y la arista lateral 10 pulgadas.

R. A_T = 592 pulgadas cuadradas.

5. Las tres aristas que concurren en los vértices de un ortoedro miden 5, 6 y 4 cm. Hallar la diagonal.

R. $\sqrt{77}$ cm

6. Hallar la diagonal de un cubo cuya arista mide 3 cm.

R. $3\sqrt{3}$ cm

7. La diagonal de un cubo mide $2\sqrt{3}$ cm. Hallar la arista.

R. 2 cm

8. La diagonal de la cara de un cubo mide $8\sqrt{2}$ cm. Hallar la diagonal del cubo.

R. $8\sqrt{3}$ cm

9. Dada una pirámide de base cuadrada de 8 cm de lado y 12 cm de altura, hallar la apotema de la base y la apotema de la pirámide.

R. Apotema de la base = 4 cm;

apotema de la pirámide = $4\sqrt{10}$ cm

10. Calcular la diagonal de un cubo en función de su arista *l*.

R. $d = l\sqrt{3}$

11. Dada una pirámide hexagonal de 8 cm de lado y 14 cm de altura, calcular: **a)** apotema de la base, **b)** arista, **c)** apotema de la pirámide.

R. a) $4\sqrt{3}$ cm; **b)** $2\sqrt{65}$ cm; **c)** $2\sqrt{61}$ cm

12. Dados dos hexágonos regulares, el área del menor vale $6\sqrt{3}$ cm^2 y su lado 2 cm. Si el lado del mayor mide 4 cm ¿cuál es el área del mayor?

R. $24\sqrt{3}$ cm^2

13. La razón entre las áreas de dos polígonos regulares es de 2:5. Si el lado del mayor vale 10 cm, hallar el lado del menor.

R. $2\sqrt{10}$ cm

14. En una pirámide de base cuadrada donde el lado de la base mide 8 cm y la altura 20 cm, se traza una sección paralela a la base a 14 cm de ésta. Hallar el área de dicha sección.

R. A = 5.76 cm^2

15. Hallar el área lateral de un prisma recto pentagonal regular, si el lado de la base mide 5 cm y la arista lateral 20 cm.

R. A_L = 500 cm^2

16. Hallar el área lateral de un prisma recto octagonal regular cuyo lado de la base mide 6 cm y la arista lateral 15 cm.

R. A_L = 720 cm^2

17. Hallar el área total de un prisma recto triangular regular, si el lado de la base mide 5 cm y la arista lateral 9 cm.

R. A_T = 156.62 cm^2

18. Hallar el área lateral y total de un prisma recto cuyas bases son hexágonos regulares de 6 cm de lado y 5.2 cm de apotema, si la altura mide 8 cm.

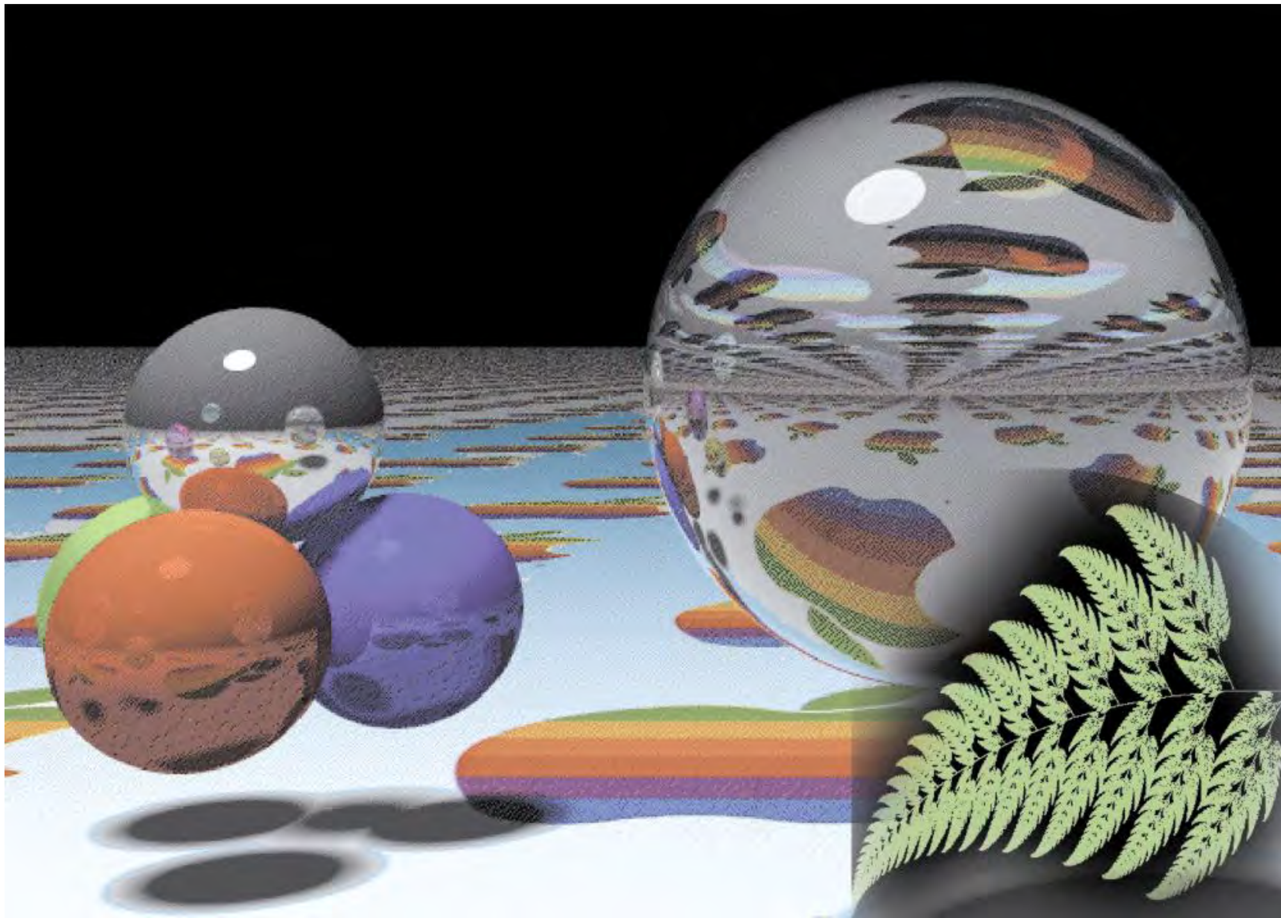
R. A_L = 288 cm^2; A_T = 475.2 cm^2

19. Hallar el área lateral de una pirámide de base cuadrada si el lado de la base mide 6 cm y la altura 4 cm.

R. A_L = 60 cm^2

20. Hallar el área total de una pirámide regular de base hexagonal sabiendo que el lado de la base mide 5 cm y la apotema de la pirámide 4.4 cm.

R. A_T = 130.9 cm^2



La naturaleza vegetal también es un basto muestrario de figuras geométricas, la gran diversidad en las formas de sus plantas, flores y frutos pueden apreciarse y compararse con las formas geométricas.

CAPÍTULO XXI

VOLÚMENES DE LOS POLIEDROS

En general los poliedros son figuras limitadas por planos, tales que cada plano deja a todos los demás puntos de la figura en el mismo semiespacio, es una superficie poliédrica o poliedro. Los polígonos que limitan la figura son las caras del poliedro, los lados y los vértices de las caras son las aristas y los vértices del poliedro, y los ángulos poliedros cuyos vértices y aristas son los vértices y aristas del poliedro son los ángulos poliedros del poliedro.

En general se utilizan las locuciones superficie poliédrica y poliedro como sinónimos, aunque con más propiedad la superficie poliédrica es el conjunto de los puntos de los planos que limitan la figura y el poliedro es sólido, conjunto de los puntos del espacio comunes a todos los ángulos poliedros de la superficie poliédrica.

DEFINICIONES

El volumen de un poliedro es la medida del espacio limitado por el cuerpo, y para medirlo se toma como unidad un cubo de arista igual a la unidad de longitud.

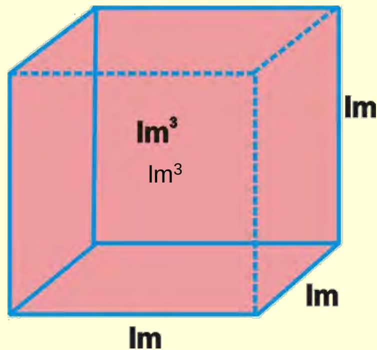


Figura 481

En el sistema métrico decimal la unidad es el metro cúbico (Fig. 481). También se usan como unidades los múltiplos y divisores del metro cúbico.

Dos poliedros (Figs. 482 y 483) que tienen igual volumen se llaman equivalentes.

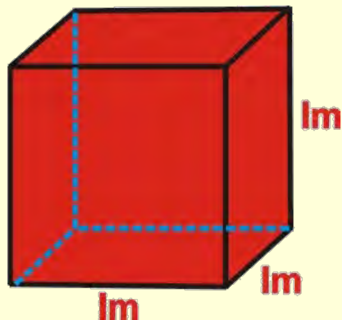


Figura 482

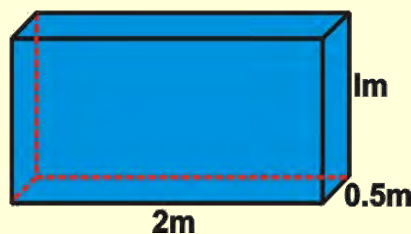


Figura 483

"Dos prismas rectos de bases y alturas iguales, son iguales". Así, por ejemplo, los prismas rectos *ABCDEFGH* y *A'B'C'D'E'F'G'H'* (Figs. 484 y 485), que tienen iguales sus bases *ABCD* y *A'B'C'D'* y sus alturas *AH* y *A'H'* son iguales.

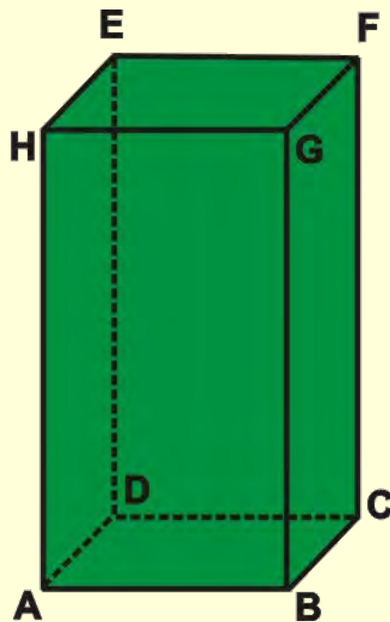


Figura 484

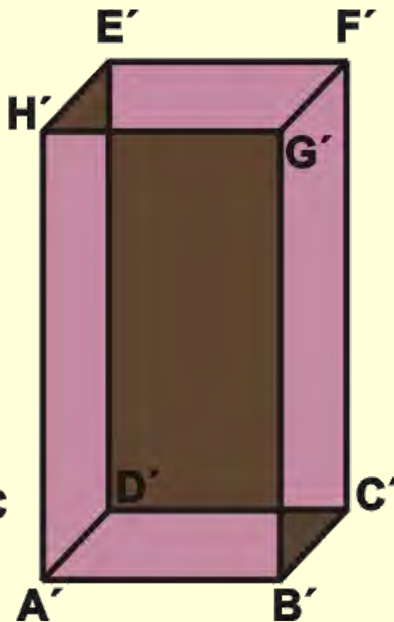
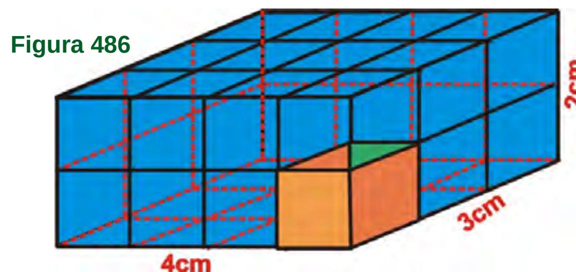


Figura 485

TEOREMA 1

"El volumen de un ortoedro es igual al producto de sus tres dimensiones". Supongamos un ortoedro cuyas dimensiones son 4, 3 y 2 cm respectivamente (Fig. 486).

Figura 486



Si trazamos planos que pasen por los puntos de división, como se aprecia en la figura, encontramos que el ortoedro contiene dos capas, y cada una contiene 4 × 3 = 12 cubos unidad (12 cm^3 en este caso). En total, el ortoedro contendrá: 4 × 3 × 2 = 24 cm^3 y éste será el volumen del cuerpo.

Si las medidas de las dimensiones no fuesen números enteros, el resultado sería el mismo. Imaginemos que las dimensiones del ortoedro son 4, 2 y 2.5 cm respectivamente (Fig. 487). Podemos tomar como unidad de volumen un cubo de 0.5 cm de lado. En este caso el ortoedro estaría formado por 5 capas de 8 × 4 = 32 cubos de lado 0.5 cm, es decir que contendría en total:

$$8 \times 4 \times 5 = 160 \text{ cubos unidad}$$

y éste sería el volumen en la unidad elegida.

Si quisiéramos el volumen en centímetros cúbicos tendríamos que dividir 160 entre el número de cubos unidad que contiene el centímetro cúbico (8 en este caso), con lo que resulta:

$$\text{Volumen en cm}^3 = 160 \div 8 = 20 \text{ cm}^3$$

Si multiplicamos las tres dimensiones expresadas en centímetros tenemos:

$$\text{Volumen del ortoedro} = 4 \times 2 \times 2.5 = 20 \text{ cm}^3$$

Si las dimensiones fuesen números irracionales, entonces se obtienen números racionales cada vez más aproximados y el volumen se va calculando con la aproximación deseada.

De una manera general, si las dimensiones del ortoedro son a, b y c, el volumen V está expresado por la fórmula:

$$V = a \times b \times c$$

Corolario 1: El volumen de un cubo es igual al cubo de la **longitud** de su arista (l). En efecto: el cubo es un ortoedro cuyas tres dimensiones son iguales, luego:

$$V = l \times l \times l = l^3$$

Corolario 2: El volumen de un ortoedro es igual al producto del área de la base por la altura.

En efecto: el producto de dos de las dimensiones (largo por ancho) es precisamente el área de la base, por ser ésta un rectángulo, luego:

$$V = \text{área de la base por la altura}$$

siendo la altura la tercera dimensión.

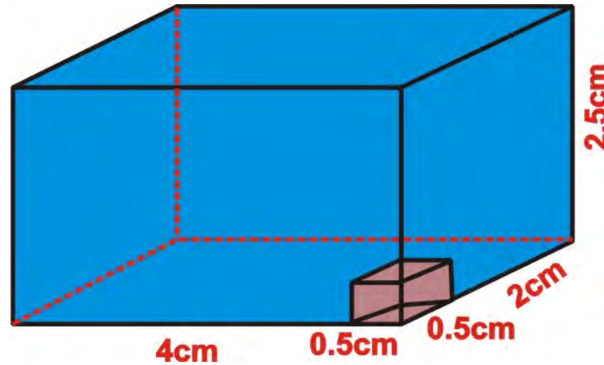


Figura 487

TEOREMA 2

La razón de los volúmenes de dos ortoedros es igual a la razón de los productos de sus tres dimensiones.

Siendo los ortoedros de dimensiones a, b, c y a', b', c' respectivamente (Figs. 488 y 489). Sus volúmenes, según el teorema anterior, son:

$$V = abc; \quad V' = a'b'c'$$

y dividiendo miembro por miembro:

$$\frac{V}{V'} = \frac{abc}{a'b'c'}$$

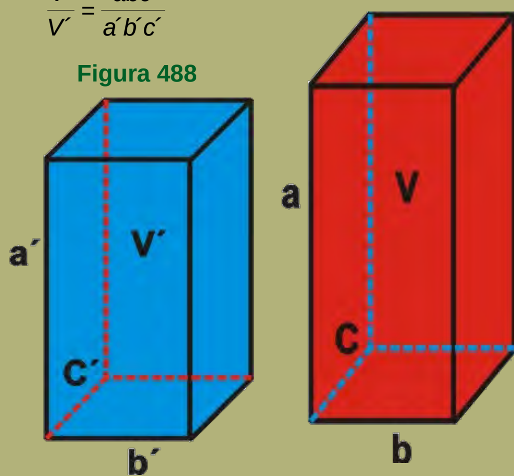


Figura 488

Figura 489

TEOREMA 3

"La razón de los volúmenes de dos ortoedros de igual base es igual a la razón de sus alturas".

Si los dos ortoedros tienen igual base, significa que dos de sus dimensiones, el largo y el ancho, son iguales. Entonces las dimensiones de los ortoedros son a, b, c y a', b, c (Figs. 490 y 491).

Según el teorema anterior tendremos: $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{abc}{a'b'c'}$

y simplificando: $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{a}{a'}$

que es lo que se quería demostrar.

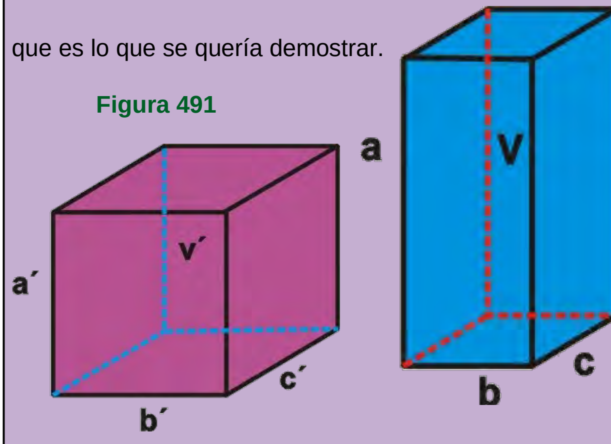


Figura 491

Figura 490

TEOREMA 4

"La razón de los volúmenes de dos ortoedros de igual altura es igual a la razón de las áreas de las bases".

Si los ortoedros tienen igual altura y distintas bases, sus dimensiones son *a*, *b*, *c* y *a*, *b* ', *c* ' (Figs. 492 y 493). Y las áreas de sus bases son *bc* y *b* '*c* ', respectivamente.

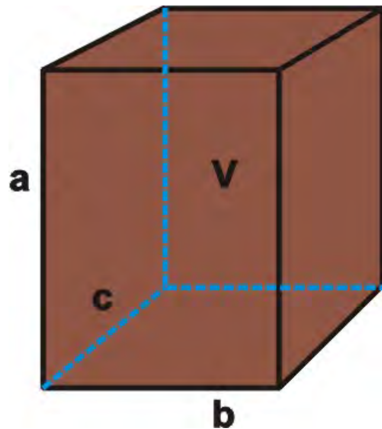


Figura 492

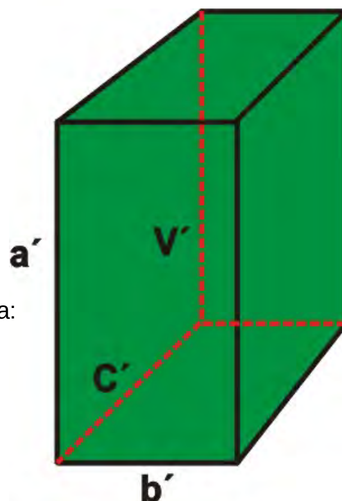


Figura 493

Según el teorema 2 resulta:

$$\frac{V}{V'} = \frac{abc}{a'b'c'}$$

y simplificando:

$$\frac{V}{V'} = \frac{bc}{b'c'} = \frac{\text{área de la base}}{\text{área de la base}}$$

que es lo que se quería demostrar.

Corolario 1: Considerando que la base está formada por dos dimensiones cualesquiera y que la altura es la otra dimensión, los teoremas anteriores pueden enunciarse de la siguiente manera:

1. Si dos ortoedros tienen dos dimensiones respectivamente iguales, los volúmenes son entre sí como la razón de la otra dimensión.

2. Si dos ortoedros tienen una dimensión igual, la razón de los volúmenes es igual a la razón del producto de las otras dos.

PRISMAS IGUALES

Los **prismas iguales** tienen sus caras iguales y en consecuencia sus aristas y sus ángulos diedros también son iguales.

Dos prismas rectos que tienen iguales sus bases y sus alturas son iguales.

En este caso las caras laterales también son iguales, ya que son rectángulos de bases y alturas iguales (las bases son lados homólogos de polígonos iguales y las alturas son iguales por ser las alturas de los prismas).

PRISMA TRUNCADO

Un **prisma truncado** o **tronco de prisma** es la porción de un prisma comprendida entre la base y un plano no paralelo a ella que corte a todas las aristas laterales (figura 494).

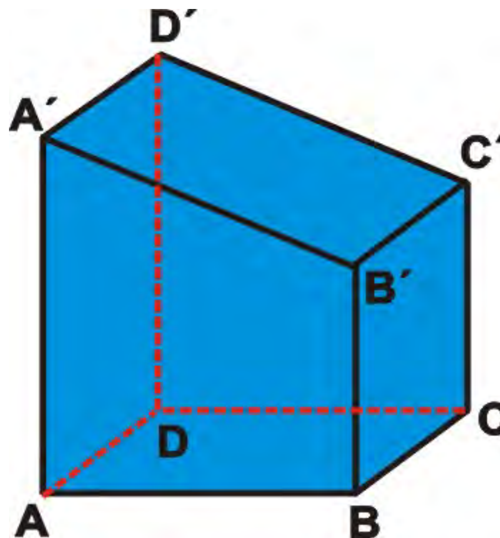


Figura 494

PRISMAS EQUIVALENTES

Los **prismas equivalentes** son la suma o diferencia de poliedros iguales.

Dos prismas equivalentes tienen el mismo volumen y la equivalencia de prismas tiene los caracteres idéntico, recíproco y transitivo, por lo que se considera una especie de igualdad (igualdad de volumen).

TEOREMA 1

"Un prisma oblicuo es equivalente al prisma recto que tenga por base la sección recta del primero y por altura su arista lateral".

Hipótesis: *ABCD* y *A'B'C'D'* (Fig. 495) es un prisma cualquiera y *EFGH* es una sección recta del prisma.

Tesis: *ABCDA'B'C'D'* es equivalente a un prisma recto de base *EFGH* y altura $\overline{AA}$.

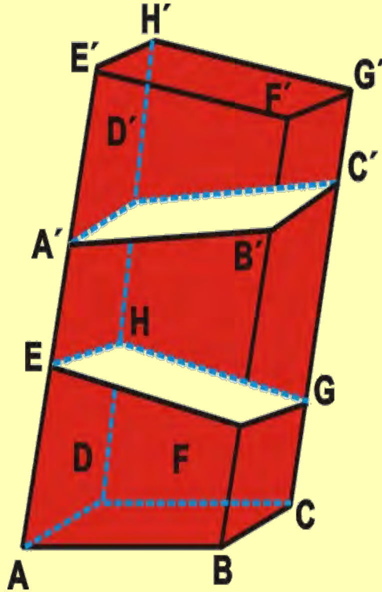


Figura 495

Demostración: Prolonguemos todas las aristas laterales y tomemos $\overline{E'E} = \overline{AA'}$.

Tracemos por *E'* un plano perpendicular a todas las aristas laterales, con lo que queda determinada la sección recta *E'F'G'H'* igual y paralela a *EFGH*.

El prisma *EFGHE'F'G'H'* es recto ya que sus aristas laterales son perpendiculares a las bases. .

Los troncos de prismas *ABCDEFGH* y *A'B'C'D'E'F'G'H'* son iguales ya que sus bases *EFGH* y *E'F'G'H'*, así como sus aristas laterales son iguales, ya que:

$$\overline{EA} = \overline{E'A'} \qquad \overline{GC} = \overline{G'C'}$$
$$\overline{FB} = \overline{F'B'} \qquad \overline{HD} = \overline{H'D'}$$

Por ser diferencias de segmentos iguales.

De lo anterior resulta que los prismas *ABCDA'B'C'D'* y *EFGHE'F'G'H'* se componen de una parte común, *EFGHA'B'C'D'*, y dos troncos iguales. Por tanto, ambos prismas son equivalentes, ya que son la suma de figuras iguales.

TEOREMA DEL VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO RECTO

"El volumen de un paralelepípedo recto es igual al producto del área de la base por la medida de la altura".

Hipótesis: *ABCDG* es un paralelepípedo recto de altura $\overline{AE}$ y cuya base es el paralelogramo *ABCD* de área *B* (Fig. 496).

Tesis: $V = \text{área } ABCD \times \overline{AE} = B \times h$

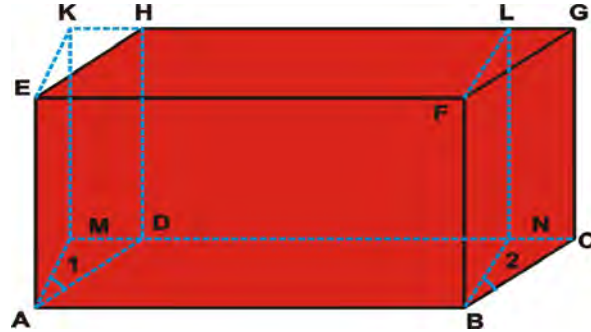


Figura 496

Demostración: Tracemos los planos *BNLF* y *AMKE* perpendiculares a la cara *ABFE* quedando determinado el ortoedro *ABNMKEFL* cuya base es el rectángulo *ABNM* y su altura la misma del paralelepípedo, o sea, $\overline{AE}$.

Entonces: $\angle 1 = \angle 2$ — Lados paralelos y del mismo sentido.

además: $\overline{AM} = \overline{BN}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ — Lados opuestos de un paralelogramo

$\therefore \quad \Delta AMD = \Delta BCN$ — Por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido.

Por tanto, los prismas triangulares *AMDHKE* y *BNCGLF* son iguales (por tener las bases y las alturas iguales).

De donde se deduce que el prisma *ABCDG* y el ortoedro *ABNML* son equivalentes, pues ambos se componen de una parte común: el prisma *ABNDL*, y de prismas triangulares iguales.

Por tanto: Volumen de *ABCDG* = Volumen de *ABNML*
y como: Volumen *ABMNL* = área *ABNM* × *AE*
resulta: Volumen *ABCDG* = área *ABNM* × *AE*

Pero el rectángulo *ABNM* es equivalente al paralelogramo *ABCD* y, por lo tanto.

$$V = ABCD \times \overline{AE} \ \therefore \ V = B \times h$$

TEOREMA DEL VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO CUALQUIERA

"El volumen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto del área de la base por la longitud de la altura".

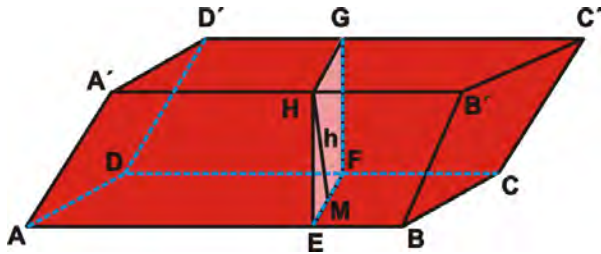


Figura 497

Demostración:

Si $ABCDA'B'C'D'$ (Fig. 497) es un paralelepípedo cualquiera, $EFGH$ su sección recta y $HM = h$, la altura de esta sección (la misma del paralelepípedo), resulta que:

$$V = \text{área sección } EFGH \times \overline{AB} \qquad (1)$$

ya que el paralelepípedo oblicuo equivale al paralelepípedo recto cuya base es la sección recta *EFGH* y su altura la arista *AB* (teorema 1, pág. 810).

Como el área de la sección recta es:

$$\text{área sección } EFGH = \overline{EF} \bullet h \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$V = \overline{EF} \bullet \overline{AB} \bullet h$$

Pero: $\overline{EF} \bullet \overline{AB} =$ área del paralelogramo $ABCD$.

Si llamamos B al área de la base $ABCD$, resulta:

$$V = B \bullet h$$

TEOREMA 2

"Todo paralelepípedo puede descomponerse en dos prismas triangulares equivalentes".

Hipótesis: *ABCDHGFE* es un paralelepípedo (Fig. 498).

Tesis: Los prismas triangulares *ABCGEF* y *ACDHEG* son equivalentes.

Construcción auxiliar: Tracemos el plano diagonal *ACGE*, quedando el paralelepípedo descompuesto en los prismas triangulares *ABCGEF* y *AC DHEG*.

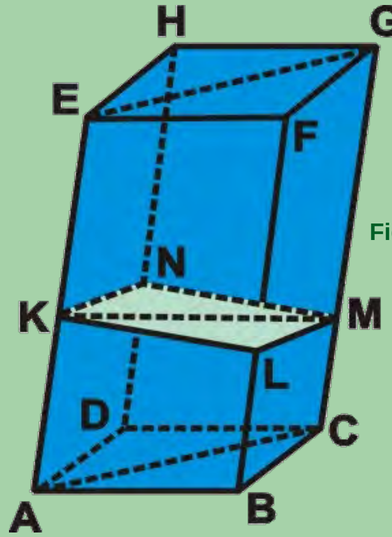


Figura 498

Demostración:

La sección recta *KLMN* es un paralelogramo que quedará descompuesto por el plano diagonal en los ΔKLM y ΔKMN. Pero el prisma oblicuo *ABCGFE* es equivalente al prisma recto que tiene por base el ΔKLM, su sección recta, y por altura su arista lateral $\overline{AE}$. Del mismo modo, el prisma *AC DHEG* es equivalente al prisma recto que tiene por base ΔKMN y por altura su arista $\overline{AE}$. Y como $\Delta KLM = \Delta KMN$, resulta que los dos prismas triangulares en que queda descompuesto el paralelepípedo *ABCDEFGH*, son equivalentes a prismas rectos iguales, y por lo tanto *ABCGEF y ACDHEG* son equivalentes.

Corolario: "El volumen de un prisma triangular es igual al producto del área de la base por la longitud de la altura".

En efecto, si llamamos V al volumen del prisma triangular *ABCG EF* (Fig. 498), h a su altura y B al área del ΔABC que es la base, resulta:

$$V = \frac{1}{2} \text{ volumen } ABCDEFGH \qquad (1)$$

$$\text{Vol. } ABC\,DEFGH = \text{área } ABC\,D \bullet h$$

y como $\Delta ABC = \Delta ACD$ por ser *ABCD* un paralelogramo,

$$\text{Vol. } ABC\,DEFGH = 2\,B \bullet h \qquad (2)$$

$$\therefore \quad V = \frac{1}{2} \bullet 2B \bullet h$$

sustituyendo (2) en (1) y simplificando:

$$V = B \bullet h$$

TEOREMA 3

"Si dos pirámides tienen la misma altura y bases equivalentes, las secciones paralelas a las bases, equidistantes de los vértices, son equivalentes".

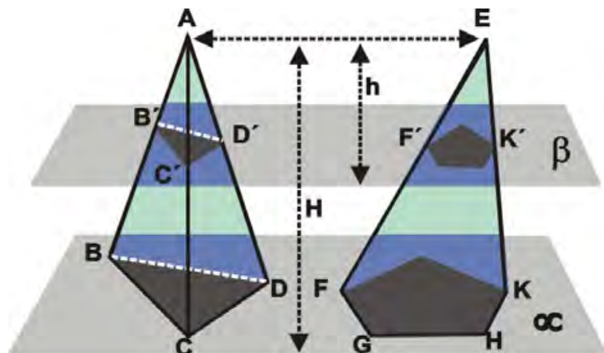


Figura 499

Hipótesis: *ABC D* y *EFGHKL* (Fig. 499) son pirámides de igual altura **H** , y de bases equivalentes, colocadas sobre el mismo plano a. Los planos α y β son paralelos, **h** es la distancia de *A y E* al plano β.

área *B'C'D'* = área *F'G'H'K'L'*

Si **H** es la altura de ambas pirámides y **h** la distancia de los vértices al plano, tenemos (teorema 1 de la pirámide):

$$\frac{\text{área } B'C'D'}{\text{área } BCD} = \frac{h^2}{H^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\text{área } F'G'H'K'L'}{\text{área } FGHKL} = \frac{h^2}{H^2} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2):

$$\frac{\text{área } B'C'D'}{\text{área } BCD} = \frac{\text{área } F'G'H'K'L'}{\text{área } FGHKL}$$

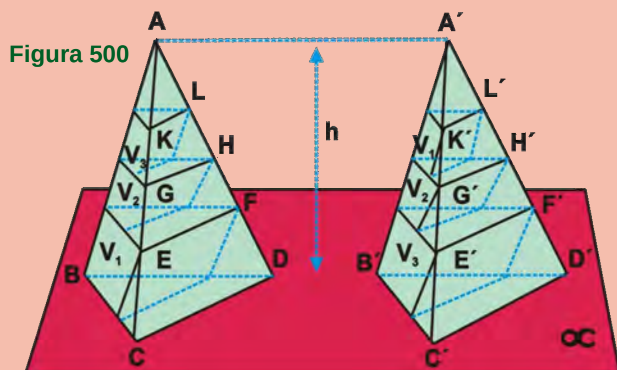
y como por hipótesis las bases son equivalentes (área *BC D* = área *FGHKL*), resulta:

área *B'C'D'* = área *F'G'H'K'L'*

TEOREMA 4

"Dos tetraedros de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes".

Figura 500



Hipótesis: *ABCD* y *A'B'C'D'* (Fig. 500) son dos tetraedros de igual altura **h** y bases equivalentes, es decir.

Área ΔBCD = Área $\Delta B'C'D'$

Tesis: Tetraedro *ABC D* es equivalente al tetraedro *A'B'C'D'*

Demostración: Supongamos las bases de los dos tetraedros en el mismo plano a.

Dividimos la altura **h** por un número cualquiera de partes iguales (por ejemplo 4) y trazamos por los puntos de división planos paralelos al plano a, que determinarán en ambos tetraedros secciones tales que las que estén en un mismo plano serán equivalentes por equidistar de los vértices *A y A'*. Si trazamos por $\overline{EF}, \overline{GH}, \overline{KL}$ planos paralelos a $\overline{AB}$ y por $\overline{E'F'}, \overline{G'H'}, \overline{K'L'}$ planos paralelos a $\overline{A'B'}$, se formará un número igual de prismas triangulares inscritos en cada tetraedro.

Los prismas correspondientes son equivalentes por tener igual altura y bases equivalentes.

Llamamos V_1, V_2 y V_3 a los volúmenes de los prismas inscritos en el tetraedro *ABC D* y V'_1, V'_2 y V'_3 a los de los inscritos en el tetraedro *A'B'C'D'*, con lo que tenemos:

$V_1 = V'_1$; $V_2 = V'_2$; $V_3 = V'_3$

Sumamos miembro por miembro:

$$V_1 + V_2 + V_3 = V'_1 + V'_2 + V'_3 \qquad (1)$$

Si el número de partes en que se divide la altura es muy grande, es decir, si la altura de los estratos tiende a cero, la suma de los volúmenes de los prismas inscritos tiene por límite el volumen del tetraedro.

Con este paso al límite tenemos:

límite $(V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \cdots) = V$ (volumen del tetraedro *ABCD*)

límite $(V'_1 + V'_2 + V'_3 + V'_4 + \cdots) = V'$ (volumen del tetraedro *A'B'C'D'*) y como los límites son iguales, resulta:

$$V = V'$$

Esto significa que los tetraedros *ABC D* y *A'B'C'D'* son equivalentes.

TEOREMA 5

"Todo tetraedro es la tercera parte de un prisma triangular de la misma base e igual altura".

Hipótesis: *E - ABC* (Fig. 501) es un tetraedro.
Tesis: *E - ABC* es la tercera parte de un prisma triangular de base *ABC* y de altura igual a la del tetraedro.

Demostración:

Por *A* y *C* trazamos $\overline{AD}$ y $\overline{CF}$ iguales y paralelas a $\overline{BE}$; unimos *D* y *F* con *E* y trazamos $\overline{DF}$, con lo que queda formado el prisma triangular *ABC DEF* .

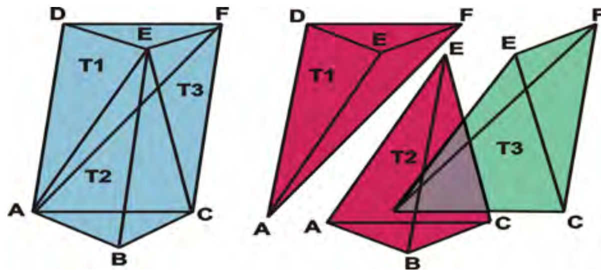


Figura 501

Si unimos *A* con *F*, el prisma queda descompuesto en los tetraedros *E - ABC* = $\mathbf{T}_2$, *A - DEF* = $\mathbf{T}_1$ y *E - AC F* = $\mathbf{T}_3$, que aparecen separados en la figura.

Los tetraedros $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_1$ tienen por bases los triángulos ΔABC y ΔDEF que son iguales por ser las bases del prisma.

Por otro lado, sus alturas trazadas desde *E* y *A* a los planos de sus bases también son iguales al ser iguales a la altura del prisma, y por lo tanto los tetraedros $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_1$ son equivalentes por tener bases y alturas iguales.

Considerando los tetraedros $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_3$, si tomamos *E* como vértice de ambos, sus bases son los triángulos ΔDAF y ΔFAC que son iguales por ser mitades del paralelogramo *AC FD* .

Además, su altura común es la perpendicular desde *E* al plano *AC FD* , por tanto $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_3$ son equivalentes.

Como los tres tetraedros son equivalentes, *E - ABC* = $\mathbf{T}_2$ es la tercera parte del prisma triangular *ABC DEF.*

TEOREMA DEL VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE

"El volumen de una pirámide cualquiera es igual a un tercio del producto del área de la base por la medida de la altura".

Hipótesis: *ABC DEF* es una pirámide cualquiera (Fig. 502)

B es el área de la base

h es la altura y

V es el volumen.

Tesis: $\mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{B} \bullet \mathbf{h}$

Demostración:

Si trazamos por la arista $\overline{AB}$ los planos diagonales *ABD* y *ABE*, la pirámide queda descompuesta en tetraedros cuyas bases son los triángulos $\Delta BC\ D$.

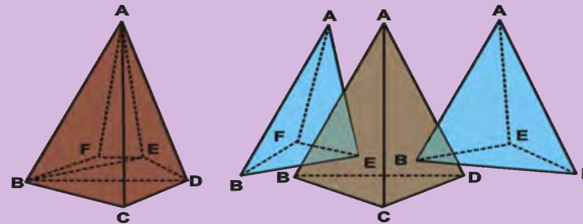


Figura 502

ΔBED y ΔBFE , todos con la misma altura **h** de la pirámide.

Llamamos $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_3$ a las áreas de estos triángulos, con lo que tenemos:

$$V = \frac{1}{3}\mathbf{b}_1\mathbf{h} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2\mathbf{h} + \frac{1}{3}\mathbf{b}_3\mathbf{h}$$

$$\therefore \quad \mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{h}\ (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3) \qquad (1)$$

Pero: $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \mathbf{B}$ (2)

Sustituimos (2) en (1):

$$V = \frac{1}{3}\mathbf{Bh}$$

Corolarios:

1. Toda pirámide es la tercera parte de un prisma con igual base e igual altura.

2. La razón de los volúmenes de dos pirámides cualesquiera es igual a la de los productos de sus bases por sus alturas.

3. Dos pirámides de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.

TEOREMA 1

"Todo tronco de pirámide triangular de bases paralelas es equivalente a la suma de tres pirámides de la misma altura del tronco y cuyas bases son las dos del tronco y una media proporcional entre ambas".

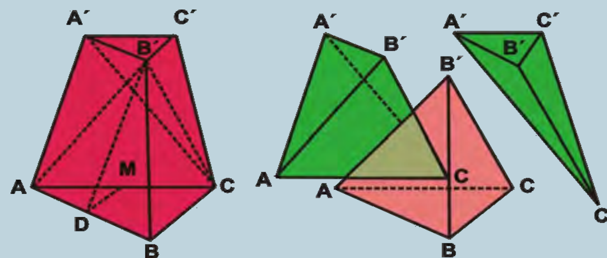


Figura 503

Hipótesis: $ABC\,A'B'C'$ es un tronco de pirámide triangular de bases paralelas de áreas **B** y **b** (Fig. 503).

Tesis: $ABC\,A'B'C'$ es equivalente a la suma de tres pirámides de altura igual a la del tronco y cuyas bases son **B**, **b** y $\sqrt{\mathbf{B}\bullet\mathbf{b}}$

Demostración:

Uniendo B' con A y C y trazando $\overline{A'C}$, el tronco queda descompuesto en las pirámides $B'\text{-}ABC$, $C\text{-}A'B'C'$ y $B'\text{-}AA'C$.

La base de la pirámide $B'\text{-}ABC$ es la base mayor ABC del tronco y su altura es la misma de éste.

La base de la pirámide $C\text{-}A'B'C'$ es la base menor $A'B'C'$ del tronco y su altura es la misma de éste.

En cuanto a la pirámide $B'\text{-}AA'C$, demostraremos que es equivalente a otra de igual altura que el tronco y cuya base es media proporcional entre las bases **B** y **b** del tronco.

Si por B' trazamos $\overline{B'D}$ y $\overline{AA'}$, unimos D con C y trazamos $\overline{DA'}$, resulta la pirámide $D\text{-}AA'C$ equivalente a la $B'\text{-}AA'C$ por tener la misma base $\Delta AA'C$ y la misma altura, la distancia de B' y D, al plano $AA'C$ que resultan iguales ya que $\overline{BD}$ es paralela a dicho plano.

Si en la pirámide $D\text{-}AA'C$ se toma como vértice el punto A' y como base el ΔADC, su altura será igual a la del tronco.

Ahora probaremos el área del ΔADC es media proporcional entre **B** y **b**.

Al comparar los triángulos ΔABC y ΔADC vemos que la razón de sus áreas es la misma que la de sus bases $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, por tener la misma altura.

$$\frac{\text{área }\Delta ABC}{\text{área }\Delta ADC}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \qquad (1)$$

Si trazamos $\overline{DM}\parallel\overline{BC}$ en los triángulos ΔADC y ΔADM tenemos:

$$\frac{\text{área }\Delta ADC}{\text{área }\Delta ADM}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} \qquad (2)$$

Pero: $\Delta ADM=\Delta A'B'C'$ por ser $\overline{AD}=\overline{A'B'}$; $\overline{AM}=\overline{A'C'}$ opuestos de los paralelogramos $ADB'A'$ y $AM\,C'A'$ y además $\angle A=\angle A'$ por tener sus lados paralelos y del mismo sentido.

Por tanto, la igualdad (2) puede escribirse:

$$\frac{\text{área }\Delta ADC}{\text{área }\Delta A'B'C'}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} \qquad (3)$$

Además: $\Delta ABC \sim \Delta ADM$ por ser $DM\parallel BC$. Luego:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$$

Sustituyendo en (3):

$$\frac{\text{área }\Delta ADC}{\text{área }\Delta A'B'C}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \qquad (4)$$

Comparando (1) y (4):

$$\frac{\text{área }\Delta ABC}{\text{área }\Delta ADC}=\frac{\text{área }\Delta ADC}{\text{área }\Delta A'B'C}$$

es decir:

$$\frac{\mathbf{B}}{\text{área }\Delta ADC}=\frac{\text{área }\Delta ADC}{\mathbf{b}}$$

$$\therefore \quad \text{área }\Delta ADC=\sqrt{\mathbf{B'b}}$$

TEOREMA 2

"Un tronco de pirámide de bases paralelas es equivalente a un tronco de pirámide triangular de la misma altura y bases equivalentes a las del tronco dado".

Hipótesis: $ABC\,DEA'B'C'D'E'$ (Fig. 504) es un tronco de pirámide cualquiera de bases paralelas.

Tesis: Volumen de $ABC\,DEA'B'C'D'E'$ = volumen $MNPQRT$

$MNPQRT$ es un tronco de pirámide triangular de la misma altura y de bases equivalentes como las del tronco dado y situadas en los planos α y β paralelos.

Tesis: Volumen de $ABCDEA'B'C'D'E'$ = volumen $MNPQRT$.

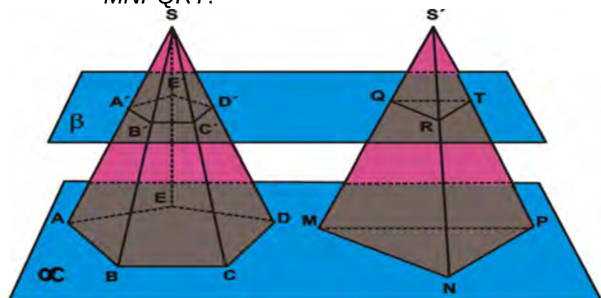


Figura 504

Demostración: Consideremos las pirámides S - $ABCDE$ y S'- MNP a las que pertenecen los troncos dados.

Las pirámides S - $ABCDE$ y S'- MNP son equivalentes por tener igual altura y bases equivalentes, por tanto:

volumen S - $ABCDE$ = volumen S –MNP (1)

Las pirámides deficientes S - $A'B'C'D'E'$ y S'-QRT también son equivalentes porque las secciones $A'B'C'D'E'$ y QRT son equivalentes.

Luego: volumen S - $A'B'C'D'E'$ = volumen S'-QRT (2)

Si restamos miembro por miembro (1) y (2) resulta:

Vol. S - $ABCDE$ – Vol. S - $A'B'C'D'E'$ =
Vol. S'- MNP – Vol. S'-QRT (3)

Pero: Vol. S - $ABCDE$ – Vol. S - $A'B'C'D'E'$ =
Vol. $ABCDEA'B'C'D'E'$ (4)

y Vol. S'- MPQ – Vol. S'-QRT = Vol. $MNPQRT$ (5)

Al sustituir (4) y (5) en (3) resulta:

Vol. $ABCDEA'B'C'D'E'$ = Vol. $MNPQRT$

VOLUMEN DEL TRONCO DE PIRÁMIDE DE BASES PARALELAS

"El volumen de un tronco de pirámide de bases paralelas es igual al producto de un tercio de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre ellas".

Si **B** y **b** son las áreas de las bases paralelas, **h** la altura y **V** el volumen, la fórmula para el cálculo del volumen es:

$$V = \frac{\mathbf{H}}{3}\left(\mathbf{B} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{B} \bullet \mathbf{b}}\right)$$

Según el teorema anterior, un tronco de pirámide de bases paralelas es equivalente a uno triangular de la misma altura y bases equivalentes a las del tronco dado (es decir, tiene el mismo volumen) y uno triangular es equivalente (tiene el mismo volumen) a la suma de tres pirámides de igual altura y cuyas bases son las dos del tronco y una media proporcional entre ambas.

EJERCICIOS

1. Si el volumen de un ortoedro es 60 m^3 y el área de la base es 15 m^2, ¿cuánto mide la altura?
R. 4 m

2. El área de un ortoedro es 264 cm^2. La relación del largo al alto y al ancho es de 5 : 3 : 1. Hallar sus dimensiones.
R. largo = 10 cm; alto = 6 cm y ancho = 2 cm

3. El largo de un ortoedro es el doble que el ancho; el ancho es el doble que la altura. Su diagonal vale $\sqrt{21}$ cm. Hallar su área total.
R. A_T = 20 cm^2

4. Encuentra el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son: 16, 12 y 8 cm
R. 1536 cm^3

5. El volumen de un ortoedro es 192 cm^3 y 2 de sus dimensiones son 8 y 6 cm. Hallar la otra dimensión.
R. 4 cm

6. Encuentra el volumen de un cubo de 7 cm de arista.
R. 343 cm^3

7. Encuentra la arista de un cubo de 512 cm^3 de volumen.
R. 8 cm

8. ¿Cuál es la arista de un cubo equivalente a un ortoedro cuyas dimensiones son: 64, 32 y 16 pies?
R. 32 pies

9. La diagonal de un cubo mide 12 cm. Hallar su volumen.
R. $192\sqrt{3}$ cm^3

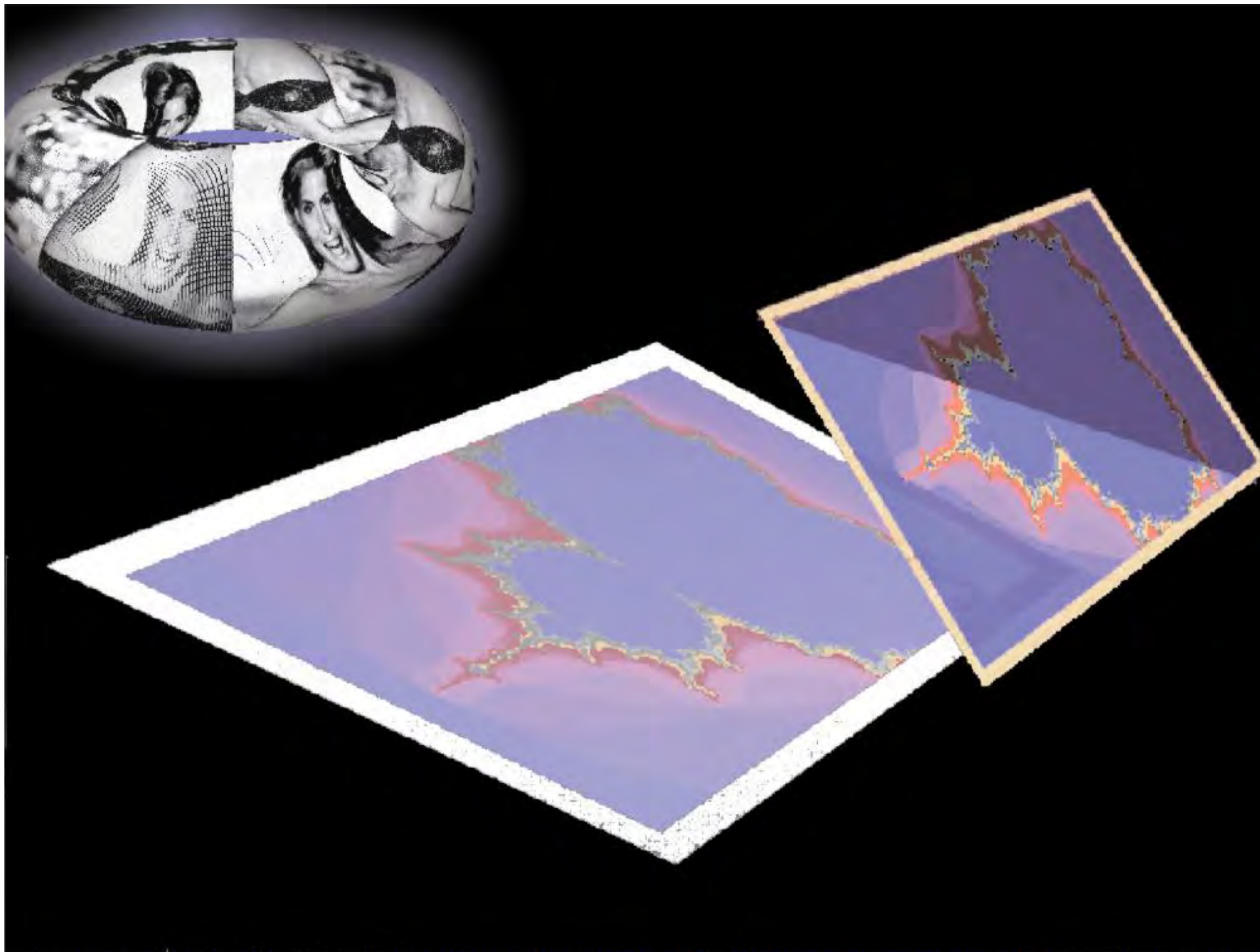
10. El área total de un cubo es 150 m^2. Hallar su volumen.
R. 125 m^3

11. El volumen de un cubo es 27 cm^3. Hallar su diagonal.
R. $d = 3\sqrt{3}$ cm

12. Expresar el volumen V de un cubo en función de la diagonal D.
R. $V = \left(\sqrt{\frac{D^2}{3}}\right)^3$

13. Encuentra el área total de un cubo equivalente a un ortoedro de 9 cm de largo, 8 cm de ancho y 3 m de altura.
R. A_T = 216 cm^2

14. Expresa el área total de un cubo en función del volumen.
R. $A_T = 6[\sqrt[3]{V}]2$



Los efectos visuales utilizados en el diseño de publicaciones, parten del mismo punto: las figuras geométricas básicas, las cuales gracias a los paquetes de diseño es posible distorsionar y dar múltiples efectos, por ejemplo: rotación, perspectiva, redondez, etc.

CAPÍTULO XXII

CUERPOS REDONDOS

Pueden definirse como lugares geométricos o como sólidos de revolución. Así, se llama superficie cilíndrica (o de rotación) el lugar de las rectas equidistantes de una recta fija; superficie cónica circular el lugar de las semirrectas que forman ángulo constante con una semirrecta fija de igual origen; superficie esférica (o esfera) el lugar de los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo.

Asimismo, la superficie cilindrica es la superficie engendrada por la rotación de una recta alrededor de una recta paralela; la superficie cónica es la superficie engendrada por la rotación de una semirrecta alrededor de una recta coplanar.

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Una **superficie de revolución** es aquella engendrada por una línea que gira alrededor de una recta llamada eje. En la rotación los puntos se mantienen a la misma distancia del eje y la línea que gira es la **generatriz.** Todos los puntos de la generatriz describen circunferencias cuyos centros están en el eje y sus planos son perpendiculares a éste.

Por ejemplo, la línea ***X X ' X '' X '''*** (Fig. 505), al girar alrededor del eje ***Y Y '***, engendra una superficie de revolución. Sus puntos ***X* , *X* ', *X* '', *X* '''** engendran circunferencias de centros ***O* , *O* ', *O* '', *O* '''**.

La superficie ***OX X ' X '' X ''' O '''***, al girar alrededor de ***Y Y '***, engendra un **sólido** o **cuerpo de revolución.**

Otras superficies de revolución importantes son la cilíndrica, la cónica y la esférica.

La **cilíndrica** es aquella engendrada por una recta paralela al eje, la **cónica** es la engendrada por una semirrecta cuyo origen está en el eje y no es perpendicular a éste y la **esférica** es la engendrada por una semicircunferencia que gira alrededor de su diámetro.

Estas tres superficies limitan los siguientes cuerpos:

1) cilindro
2) cono
3) esfera

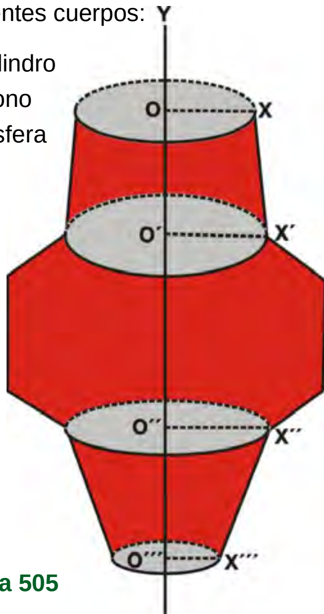


Figura 505

CILINDRO

El **cilindro de revolución** o **cilindro circular recto** es la porción de espacio limitado por una superficie cilíndrica de revolución y dos planos perpendiculares al eje. Las secciones producidas por dichos planos son dos círculos llamados **bases** del cilindro y la distancia entre las bases se llama **altura.**

También puede decirse que el cilindro es engendrado por la revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

Así, el rectángulo $ABCD$ al girar alrededor del lado $\overline{BC}$ engendra un cilindro circular recto. El lado $\overline{AD}$, que engendra la superficie cilíndrica, es la **generatriz.** Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ describen dos círculos que son las bases del cilindro (Fig. 506).

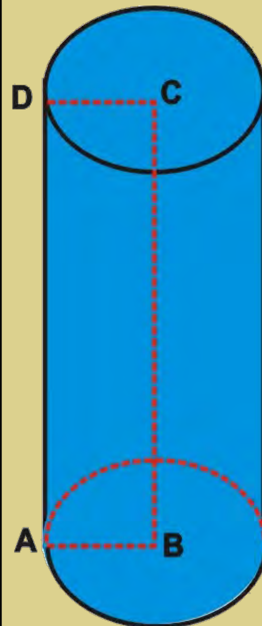
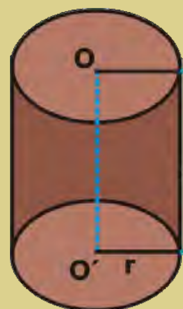


Figura 506



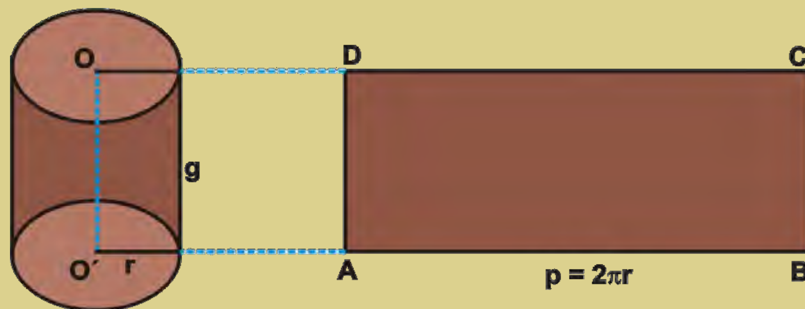


Figura 507

Podemos notar que la generatriz $\overline{AD} = \overline{BC}$ es la altura del cilindro.

El **área lateral del cilindro** es el área de la superficie cilíndrica que lo limita, y para calcularla podemos imaginar dos cosas: que lo abrimos a lo largo de una generatriz y lo extendemos en un plano, o bien que se inscribe un prisma regular y calculamos su límite del área lateral al aumentar infinitamente el número de caras laterales (Fig. 507).

En el primer supuesto podemos desarrollar un rectángulo de base $\overline{AB} = 2\pi r$ y altura $\overline{BC} = g$. El área de este rectángulo $ABCD$ es el área lateral del cilindro y vale $A_L = 2\pi r\, g$, que dice: "El área lateral de un cilindro circular recto es igual a la circunferencia de la base por la generatriz del cilindro" (Fig. 508).

En el segundo supuesto llegamos a la misma fórmula, pues el área lateral del prisma recto es igual al perímetro de la base por la arista lateral, el límite del perímetro de la base es la longitud de la circunferencia de la base del cilindro ($2\pi r$) y la arista lateral es igual a la generatriz g del cilindro.

Por otra parte, el **área total** es igual al área lateral más las áreas de las dos bases, y el área de cada base es:

$$B = \pi r^2$$

Luego:

$$A_T = A_L + 2b$$
$$A_T = 2\pi rg + 2\pi r^2$$
$$A_T = 2\pi r\,(g + r)$$

El **volumen del cilindro** es el límite del volumen de un prisma inscrito de base regular cuyo número de lados crece infinitamente. Como el volumen del prisma es el producto del área de la base por la altura, tendremos:

Volumen del cilindro $= \pi r^2 g$

ya que la altura es la generatriz.

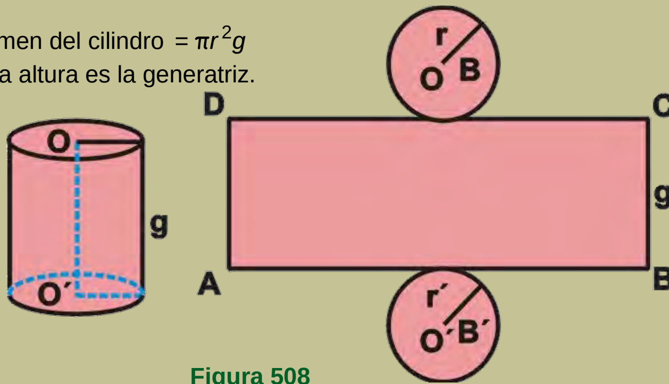


Figura 508

SUPERFICIE CÓNICA DE REVOLUCIÓN

Si una semirrecta $\overline{VA}$ (Fig. 509) cuyo origen es un punto de una recta $\overleftrightarrow{VO}$ perpendicular al plano de un círculo en su centro y gira alrededor de $\overline{VD}$ pasando sucesivamente por los puntos de la circunferencia, engendra una superficie cónica de revolución.

La recta $\overleftrightarrow{VO}$ es el eje de la superficie cónica; la semirrecta $\overleftrightarrow{VA}$ es la **generatriz** y la circunferencia es la **directriz.**

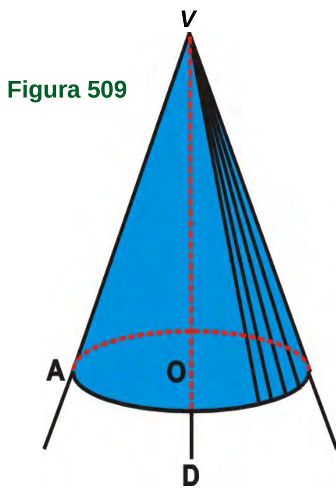


Figura 509

CONOS

La porción de espacio limitada por una superficie cónica de revolución y un plano perpendicular al eje se llama **cono circular recto o cono de revolución.**

La sección se llama base del cono, la distancia $\overline{VO}$ es la altura y el radio de la base es el radio del cono.

El cono circular recto puede considerarse engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

De tal modo, el ΔVAO (Fig. 510) al girar alrededor del cateto $\overline{VO}$, engendra un cono circular recto; la hipotenusa $\overline{VA}$ es la generatriz y engendra la superficie lateral del cono; el cateto $\overline{VO}$ es la altura del cono y el otro cateto $\overline{AO}$ que engendra la base es el radio del cono.

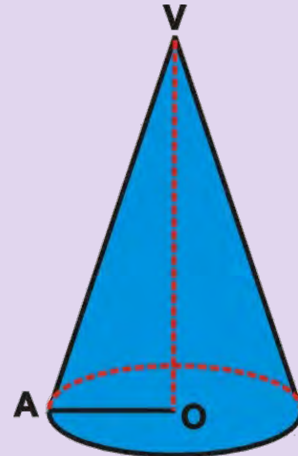


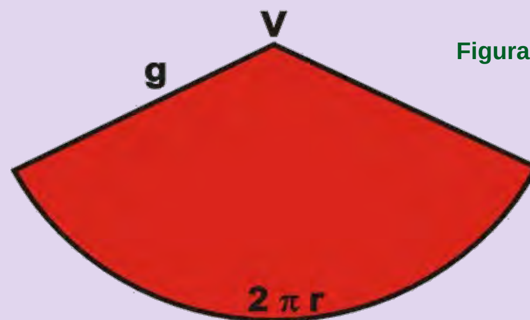
Figura 510

Si con el radio *g* construimos el sector circular del arco igual a la circunferencia de la base del cono desarrollaremos la superficie lateral del cono.

Como el área de un sector circular es igual al semiproducto de la longitud de su arco por la medida del radio, tenemos:

$$A_L = \frac{1}{2} \bullet 2\pi rg \quad \therefore \quad A_L = \pi rg$$

Es decir: "El área lateral del cono circular es igual a la semicircunferencia de la base, multiplicado por la medida de la generatriz" (Fig. 511).



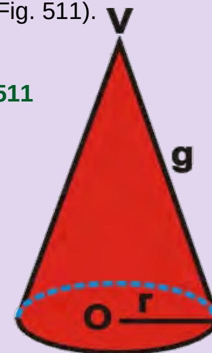


Figura 511

Si al área lateral le sumamos el área de la base (B), tendremos el área total del cono (Fig. 512):

$$A_L = \pi r g$$

$$B = \pi r^2$$

$$\therefore \quad A_T = \pi r g + \pi r^2$$

$$\therefore \quad A_T = \pi r (g + r)$$

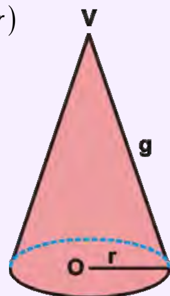
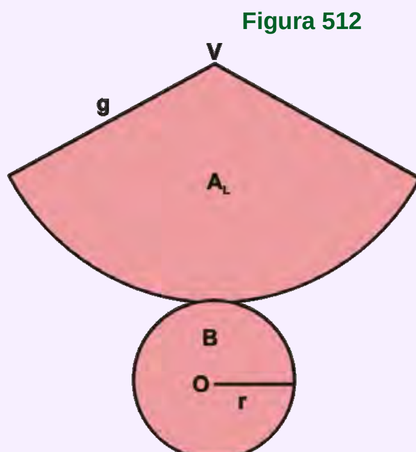


Figura 512



El **volumen del cono** es el límite del volumen de una pirámide inscrita de base regular cuyo número de lados aumenta infinitamente. Como el volumen de la pirámide es un tercio del área de la base por la altura, tendremos:

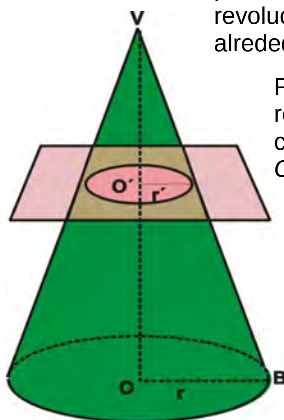
$$\text{Volumen del cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

TRONCO DE CONO

La porción de un cono circular recto comprendida entre la base y un plano paralelo a ella es conocida como **tronco de cono.** Los dos círculos que lo limitan son las **bases** y la distancia entre ellas es la **altura** y la porción de **generatriz** del cono es la generatriz del tronco.

La porción de un cono comprendida entre el vértice y el plano paralelo a la base se conoce como deficiente. Un tronco de cono circular puede considerarse engendrado por la revolución de un trapecio rectángulo que gira alrededor del lado perpendicular a las bases.

Por ejemplo, en la figura 513 está representado el tronco de cono $O'OBA$, cuyas bases son los círculos de centros O y O' y su radio r y r'. La altura es el segmento $\overline{O'O}$ y la generatriz el segmento $\overline{AB}$.



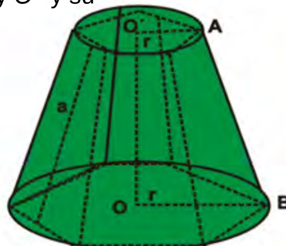


Figura 513

El cono de vértice V y la base del círculo O' es el **cono deficiente.**

El **área lateral del tronco de cono** se obtiene de la siguiente manera: Supongamos inscrito en el tronco de cono (Fig. 513) un tronco de pirámide regular, de apotema a.

Si llamamos P y P' a los perímetros de las bases, tenemos:

$$A_L = \frac{P + P'}{2} \bullet a$$

Si aumentamos infinitamente el número de caras del tronco de una pirámide, P y P' tienen como límites los valores $2\pi r$ y $2\pi r'$ y la apotema del tronco tiene como límite el valor de la generatriz del tronco, y entonces tendremos:

$$A_L = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \bullet g$$

$$A_L = \frac{2(\pi r + \pi r')}{2} \bullet g$$

$$A_L = (\pi r + \pi r')g$$

$$A_L = \pi (r + r')g$$

$$\therefore \quad A_L = \pi g (r + r')$$

Para hallar el área total del tronco de cono basta sumar al área lateral las áreas de las dos bases.

$$A_L = \pi g (r + r') \qquad A_B = \pi r^2 \qquad A_{B'} = \pi r'^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_{B'}$$

$$A_T = \pi g (r + r') + \pi r^2 + \pi r'^2$$

$$\therefore \quad A_T = \pi g (r + r') + \pi (r^2 + r'^2)$$

De manera análoga al volumen del tronco de pirámide regular, veamos el volumen del tronco de cono:

Volumen tronco de cono =

$$\frac{h}{3}\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r\right)$$

siendo h la altura, R y r los radios de las bases del tronco.

Toda sección producida en una superficie esférica por un plano es una circunferencia.

SUPERFICIE ESFÉRICA Y ESFERA

La **superficie esférica** es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de otro punto interior llamado **centro,** y la distancia del centro a un punto de la superficie se llama **radio.**

Si la distancia de un punto al centro es menor que el radio, el punto es interior a la superficie, y si es mayor el punto es exterior.

Se llama **esfera** al conjunto formado por todos los puntos de una superficie esférica y los interiores a la misma.

Las palabras esfera y superficie esférica suelen usarse como sinónimas.

Una superficie esférica también es la superficie de revolución engendrada por la rotación de una circunferencia alrededor de uno de sus diámetros.

Por otra parte, el cuerpo engendrado por la rotación de un círculo es la esfera.

Toda recta y todo plano que pasan por el centro se llaman **diámetros** y **planos diametrales,** respectivamente.

Un plano diametral divide a la esfera en 2 partes iguales que son los **hemisferios.**

POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UNA ESFERA

Una recta puede tener dos puntos comunes con una esfera (secante): un solo punto común (tangente) o ningún punto común (exterior).

Posiciones relativas de un plano y una esfera. Si la distancia del centro *O* a un plano *P* es menor que el radio, el plano es secante (Fig. 514). La intersección con la superficie esférica es una circunferencia y con la esfera es un círculo. Si el plano pasa por el centro, como el plano a, la intersección tiene el mismo radio que la esfera y se llama **círculo máximo.** Si no pasa por el centro, la intersección es un **círculo menor.** Todos los círculos máximos son iguales.

Si la distancia del centro al plano es igual al radio, el plano tiene un solo punto común con la esfera que es el **plano tangente** y el punto común es el punto de contacto.

Si la distancia del centro al plano es mayor que el radio, el plano es **exterior** y no tiene ningún punto común con la esfera.

Dos esferas ocupan posiciones análogas a las de dos circunferencias en el plano. Si son secantes tienen un círculo común cuyo plano es perpendicular a la recta que une los centros. Si son tangentes tienen un solo punto común.

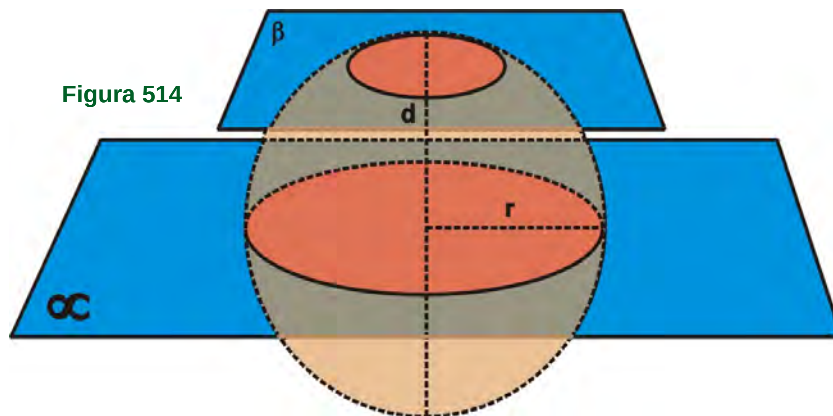
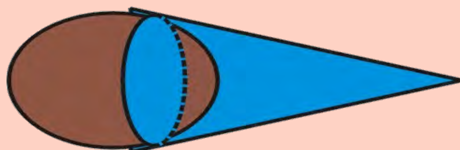


Figura 514

CONO Y CILINDRO CIRCUNSCRITO A UNA ESFERA

Si desde un punto exterior a una esfera trazamos todas las tangentes posibles, obtendremos una superficie cónica que se considera circunscrita a la esfera. La línea de contacto del cono y de la esfera es un círculo menor.



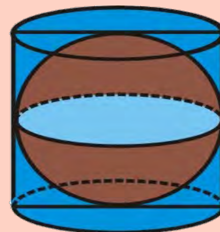


Figura 515

Si trazamos todas las tangentes paralelas a una recta dada obtendremos un cilindro circunscrito. La línea de contacto es un círculo máximo.

FIGURAS EN LA SUPERFICIE ESFÉRICA Y EN LA ESFERA

1. Si cortamos una esfera por un plano secante veremos que cada porción de superficie esférica es un **casquete esférico** (en general se considera el menor de los dos). Si el plano secante pasa por el centro, el casquete se llama hemisferio.

Cada porción de esfera se llama **segmento esférico de una base.**

2. Si cortamos una esfera por dos planos paralelos veremos que la porción de superficie esférica limitada por los dos planos se conoce como zona esférica.

La porción de esfera limitada por los dos planos es el segmento esférico de dos bases.

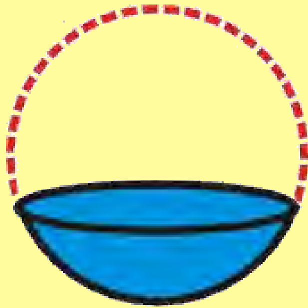


Figura 516

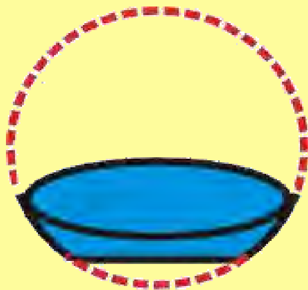


Figura 517

3. Si consideramos dos semicírculos máximos del mismo diámetro tendremos la porción de superficie esférica limitada por los dos semicírculos conocida como **huso esférico.**

La porción de esfera limitada por los dos semicírculos se llama **cuña esférica.**

4. La **distancia esférica** entre dos puntos de una superficie esférica es el menor de los arcos de círculo máximo que pasa por ellos.

Es la distancia más corta entre dos puntos medida sobre la superficie esférica.

5. El **triángulo esférico** es la porción de superficie esférica limitada por tres arcos de círculo máximo. Estos arcos o lados del triángulo son menores que una semicircunferencia.

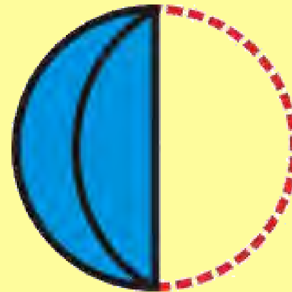


Figura 518

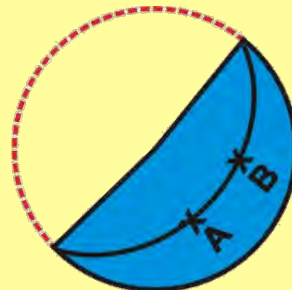


Figura 519

6. El **ángulo esférico** en un punto es aquel formado por dos arcos de círculo máximo y se mide por el ángulo formado por las tangentes a los arcos en el punto.

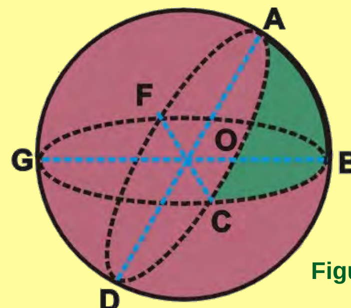


Figura 520

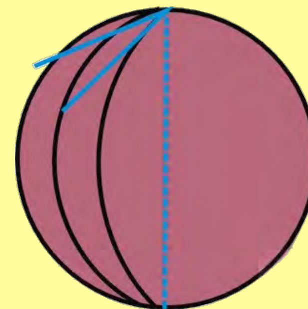


Figura 521

ÁREA DE UNA ESFERA Y DE FIGURAS ESFÉRICAS

Obtener por métodos elementales la fórmula del área de una esfera es un tanto laborioso e implica los siguientes pasos:

1. El área engendrada por la base $\overline{AB}$ de un triángulo isósceles ΔOAB al girar alrededor de un eje e que no corta al triángulo, es igual a la proyección del segmento $\overline{AB}$ sobre el eje por la longitud de la circunferencia cuyo radio es la altura $\overline{OH}$ del triángulo.

En efecto:el área engendrada por $\overline{AB}$ en su giro es el área lateral de un tronco de cono de lado $\overline{AB}$ y circunferencia media la de radio $\overline{HM}$. Luego:

$$\text{Área engendrada por } \overline{AB} = 2\pi\overline{HM}\times\overline{AB}$$

Pero los triángulos ΔOHM y ΔABD son semejantes:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{HM}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{H'M'}}$$

Luego: Área engendrada por $\overline{AB}$ es igual a $2\pi\overline{OH}\times\overline{A'B'}$, que es lo que es quería demostrar.

2. Considerar una línea poligonal regular, o sea una quebrada formada por cuerdas iguales de una circunferencia, y los triángulos isósceles que se forman uniendo los vértices de la poligonal con el centro.

Según el teorema anterior, el área de la superficie engendrada al girar la poligonal alrededor de un eje, que no la corte, es igual al producto de la proyección de la diagonal sobre el eje por la longitud de la circunferencia cuyo radio es la apotema de la poligonal.

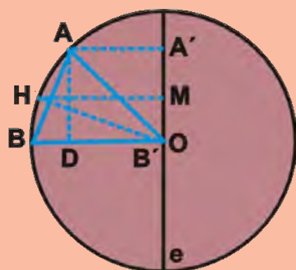


Figura 522

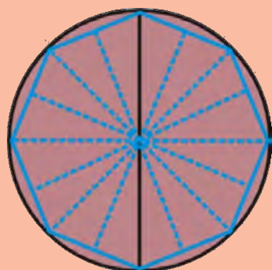


Figura 523

3. Si consideramos ahora una semicircunferencia girando alrededor de su diámetro, inscribimos una poligonal regular y hacemos crecer infinitamente el número de lados, en el límite veremos que la proyección de la poligonal es el diámetro ($2r$); la apotema se transforma en el radio r y el área resulta la de la superficie esférica. Luego:

Área superficie esférica

$$2\pi r\times 2r = 4\pi r^2$$

ÁREA DE UN HUSO ESFÉRICO

Si el huso tiene **n°** el área se calcula por la proporción:

$$\frac{360}{4\pi r^2} = \frac{\mathbf{n}^\circ}{x}$$

$$\therefore \quad X = \frac{\pi r^2\mathbf{n}^\circ}{90^\circ}$$

Relación entre el área de una esfera y la del cilindro circunscrito

Si consideramos el cilindro circunscrito limitado por dos planos tangentes paralelos, tendremos:

$$\text{Área lateral} = 2\pi r\times 2r = 4\pi r^2$$

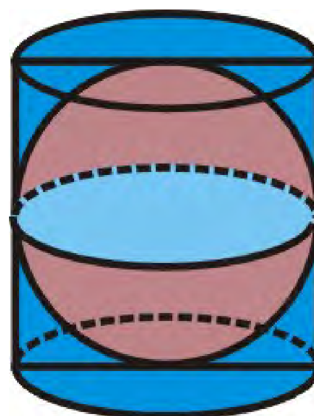


Figura 524

que es la misma área de la esfera.

ÁREA DE UN CASQUETE O DE UNA SUPERFICIE ESFÉRICA

El **área** de un **casquete** o de una **zona esférica** es el límite del área engendrada por una poligonal regular inscrita en el arco al crecer infinitamente el número de lados. Luego:

$$\text{Área de un casquete o zona} = 2\pi rh$$

siendo r el radio de la esfera y h la proyección de la poligonal sobre el diámetro perpendicular a la base del casquete o bases de la zona, es decir, la altura del casquete o zona.

VOLUMEN DE LA ESFERA

Para obtener el **volumen de una esfera** nos basaremos en el principio de Cavalieri que dice: "Si al cortar dos cuerpos por un sistema de planos paralelos se obtienen figuras equivalentes (de igual área), los dos cuerpos tienen el mismo volumen".

Supongamos ahora una esfera de radio r y el cilindro circunscrito. Siendo:

V el volumen de la esfera:

V_1 el volumen del cilindro que es igual a $\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$

V_2 el volumen del espacio comprendido entre la esfera y el cilindro.

Evidentemente: $V = V_1 - V_2$

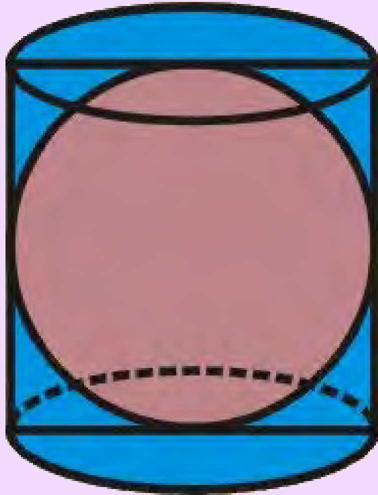


Figura 525

Para calcular V_2 observemos que si cortamos la figura por planos paralelos a las bases del cilindro, se obtienen coronas circulares cuyas áreas son de la forma:

$$\pi r^2 - \pi s^2 = \pi\left(r^2 - s^2\right) = \pi k^2$$

siendo k la distancia del centro al plano.

Si ahora consideramos el cono de vértice, el centro de la esfera y de base la del cilindro, tendremos que el área de la sección a la distancia k es:

$$x^2$$

siendo x el radio de la sección. Pero como los triángulos ΔAOB y ΔOCD son semejantes, resulta:

$$\frac{k}{r} = \frac{x}{r} \quad \therefore \quad x = k$$

es decir que el área de la corona circular $\left(\pi k^2\right)$ y el área de la sección del cono $\left(\pi x^2 = \pi k^2\right)$ son iguales.

Aplicando el principio de Cavalieri resulta que el volumen V_2 del espacio entre la esfera y el cilindro es igual a la suma de los volúmenes de los dos conos que tienen de vértice el centro de la esfera y de bases las del prisma. El volumen de cada uno de estos dos conos es:

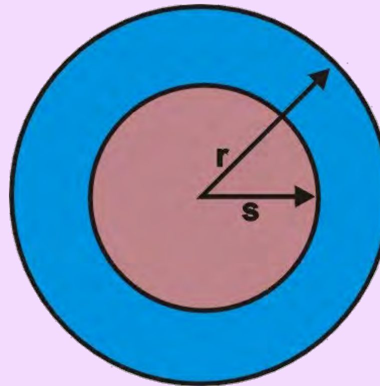


Figura 526

$$\frac{1}{3}\pi r^2(r) = \frac{1}{3}\pi r^3$$

y el de los dos conos es:

$$\frac{2}{3}\pi r^3$$

Por tanto, el volumen de la esfera será:

$$V = V_1 - V_2 = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

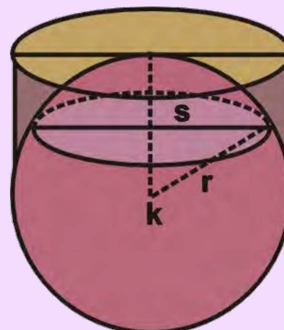


Figura 527

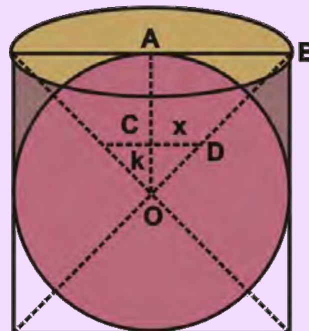


Figura 528

EJERCICIOS

1. Hallar el volumen del espacio limitado por los troncos de pirámide y de cono, de acuerdo con las medidas indicadas en el dibujo. **R.** V = 620.72 pulgadas cúbicas.

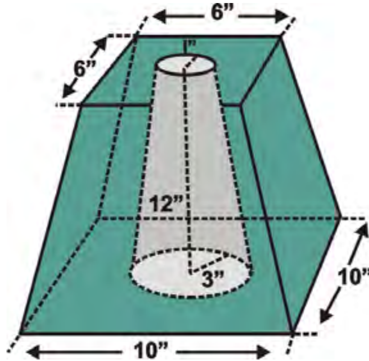


Figura 529

2. Calcular el volumen del espacio que queda entre los dos cilindros, de acuerdo con las medidas indicadas en la figura.
R. V = 1695.8 pulgadas cúbicas.

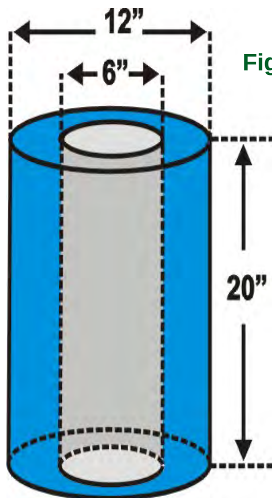
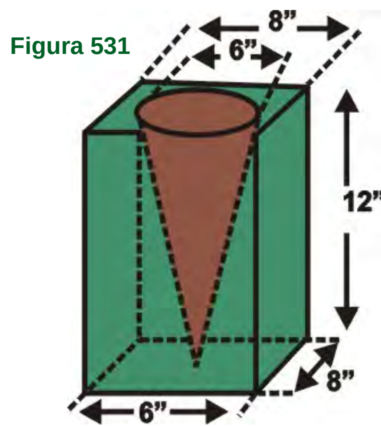


Figura 530

3. Hallar el volumen del espacio limitado entre el cono y el ortoedro de acuerdo con las medidas indicadas en la figura 531. **R.** 654.96 pulgadas cúbicas.

4. De un cubo de 5" de arista se quita un cilindro de 3" de diámetro. Calcular el volumen de la parte que queda del cubo (Fig. 532). **R.** V = 89.675 pulgadas cúbicas.

Figura 531



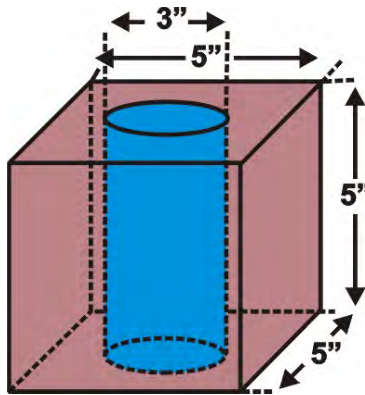


Figura 532

5. Hallar el área lateral de un cilindro circular recto, si el radio de la base mide 4 cm y la generatriz 10 cm.
R. 251.2 cm^3

6. Hallar la generatriz de un cilindro sabiendo que su área lateral es 756.6 cm^2 y el radio de la base mide 10 cm. **R.** 12 cm

7. Hallar el área total de un cilindro si el radio de la base vale 20 cm y la generatriz 30 cm. **R.** 6280 cm

8. Hallar la generatriz de un cilindro cuya área total es 408.2 cm^2 si el radio de la base mide 5 cm. **R.** 8 cm

9. El área total de un cilindro es 471 cm^2 y su generatriz es el doble de su radio. Hallar la generatriz y el radio. **R.** g = 10 cm, r = 5 cm

10. Hallar el área lateral de un cilindro, si el radio de la base mide 6 m y la altura 9 m. **R.** 339,12 m^2

11. Hallar el radio de la base de un cilindro sabiendo que su área lateral es 1507.2 cm^2 y la generatriz vale 40 cm. **R.** 6 cm

12. El área total de un cilindro es 75.36 m^2 y su generatriz es el doble del radio de la base. Hallar el radio y la generatriz.
R. g = 4 m, r = 2 m

13. Hallar el área lateral de un cilindro cuya generatriz es igual al lado del triángulo equilátero inscrito en la base del cilindro.
R. $2\sqrt{3}\pi r^2$

14. Hallar el área total de un cilindro, sabiendo que su generatriz es igual al lado del hexágono regular inscrito en su base. **R.** $4\pi r^2$

15. Hallar el área lateral de un cono cuya generatriz vale 6 cm si el radio de la base mide 4 cm. **R.** 75.36 cm^2

16. Hallar el área lateral de un cono sabiendo que el radio de la base mide 6 cm y la altura 8 cm. **R.** 188.4 cm^2

17. Hallar el área total de un cono si la generatriz vale 9 cm y el radio de la base 5 cm. **R.** 219.8 cm^2

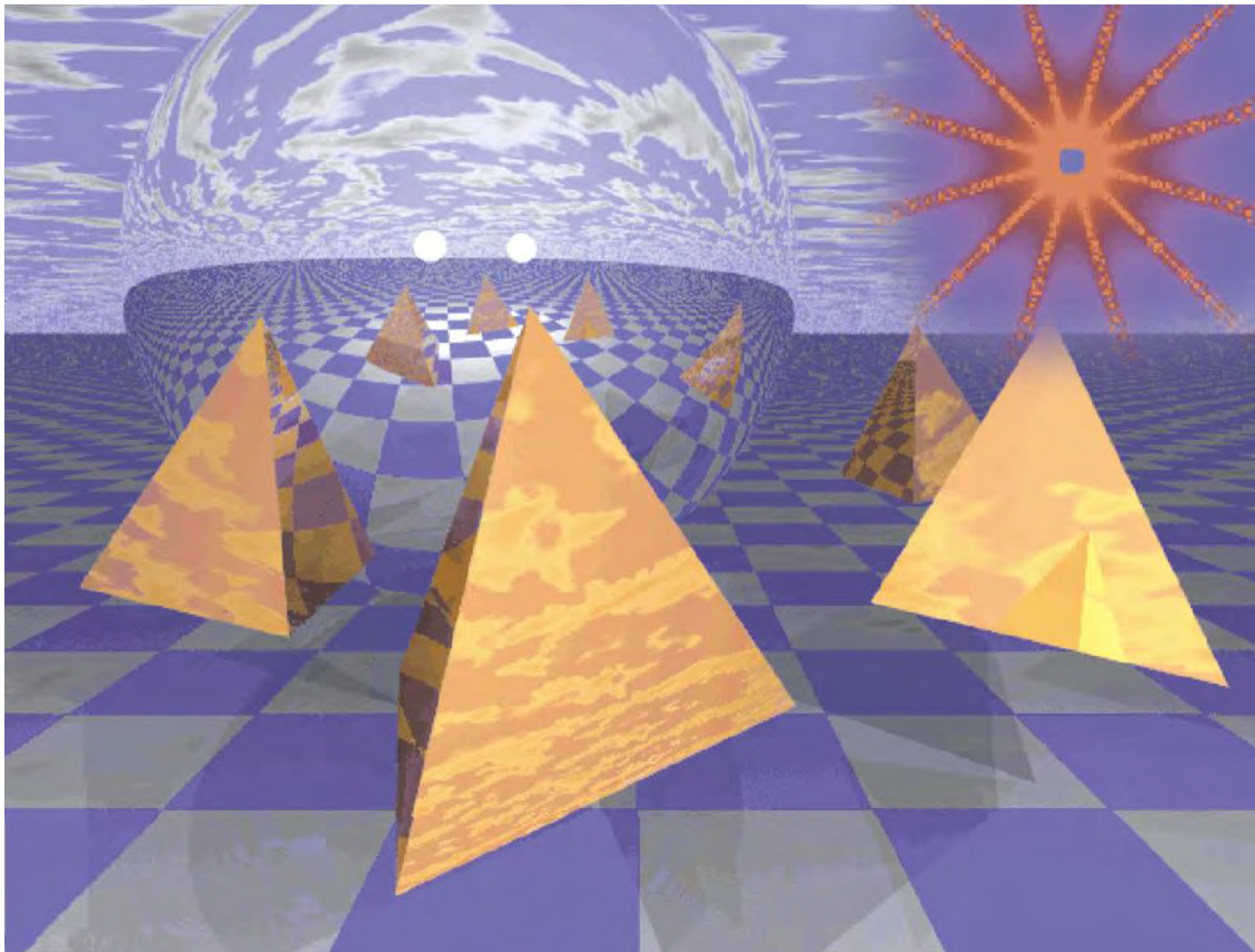
18. Hallar el área total de un cono sabiendo que el radio de la base mide 3 cm y la altura 4cm. **R.** 75.36 cm^2

19. Hallar la altura de un cono sabiendo que el área lateral mide $16\sqrt{5}\pi\text{cm}^2$ y el radio de la base mide 4 cm. **R.** 8 cm

20. El área total de un cono es 13 π cm^2. El radio de la base y la altura están en la relación 1 : 2. Hallar el radio y la altura. **R.** $r = 2$ cm , $h = 4$ cm

21. Hallar el área lateral de un tronco de cono cuya altura mide 8 cm , y los radios de las bases valen 4 cm y 10 cm , respectivamente **R.** 439.6 cm^2

22. El área lateral de un tronco de cono vale 560 π cm^2 . El radio de la base mayor y la generatriz son iguales . El radio de la base menor vale 8 cm y la altura del tronco mide 16 cm . Hallar la generatriz **R.** 20 cm



Desde la antigüedad muchos pueblos utilizaron la Geometría, dos de ellos, los aztecas y los mayas con sus monumentos grandiosos y su arte como lo muestran las grandes pirámides que aún existen y son prueba de ello.

CAPÍTULO XXIII

TRIGONOMETRÍA

Esta rama de la Geometría se ocupa de la medida de los elementos de los triángulos. En la determinación de esas medidas desempeñan un papel importante las funciones circulares, razón por la cual suelen denominarse funciones trigonométricas y su estudio se incluye en el de la trigonometría.

Las funciones circulares pueden concebirse como generalización para un arco de extremo cualquiera, de las razones goniométricas definidas en un triángulo rectángulo, tal como *MOP*, uno de cuyos ángulos agudos *x* corresponde a un arco cuyo extremo está en el primer cuadrante.

ÁNGULO DESDE EL PUNTO DE VISTA TRIGONOMÉTRICO

Siendo $\overrightarrow{OA}$ una semirrecta fija y $\overrightarrow{OC}$ una semirrecta móvil del mismo origen y en coincidencia con $\overrightarrow{OA}$, supongamos que la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ gira alrededor del punto O, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Entonces $\overrightarrow{OC}$ engendra en cada posición un ángulo, por ejemplo $\angle AOC$ (Fig. 533).

Cuando $\overrightarrow{OC}$ coincide con $\overrightarrow{OA}$, el ángulo es nulo; cuando $\overrightarrow{OC}$ comienza a girar, el ángulo aumenta a medida que $\overrightarrow{OC}$ gira. Al coincidir $\overrightarrow{OC}$ de nuevo con $\overrightarrow{OA}$, ha engendrado un ángulo completo (360°), pero $\overrightarrow{OC}$ puede seguir girando y engendrar otro ángulo de un valor cualquiera.

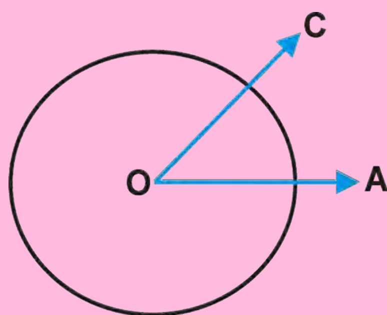


Figura 533

Arbitrariamente se ha convenido en que los ángulos engendrados en sentido contrario a las manecillas del reloj se toman como positivos y los engendrados en el mismo sentido de las manecillas del reloj se consideran negativos.

Así, en la figura 534: $\angle AOC = 45°$; $\angle AOB = 45°$

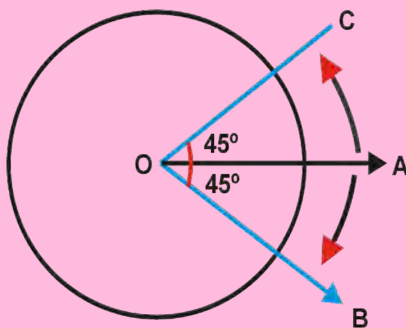


Figura 534

SISTEMA DE EJES COORDENADOS RECTANGULARES

Sobre una recta $\overleftrightarrow{XX'}$ tomemos un punto O que es el origen. Por el punto O tracemos la recta $\overleftrightarrow{YY'}$ de manera que $\overleftrightarrow{YY'} \perp \overleftrightarrow{XX'}$.

Tomemos una unidad y graduemos los dos ejes a partir del punto O. El eje XX' se gradúa positivamente hacia la derecha y negativamente hacia la izquierda. El eje YY' se gradúa positivamente hacia arriba y negativamente hacia abajo.

Los números sobre el eje XX' miden las distancias en magnitud y signo del origen a los puntos del eje y reciben el nombre de **abscisas.**

Los números tomados sobre el eje YY' miden las distancias del origen a los puntos del eje y reciben el nombre de **ordenadas.**

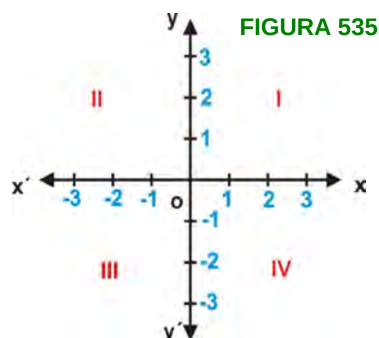


FIGURA 535

Análogamente, XX' es el **eje de las abscisas** y YY' es el **eje de las ordenadas**. El punto O es la intersección de ambos ejes y es el origen de coordenadas.

Los ejes XX' y YY' dividen el plano en cuatro partes llamadas cuadrantes.

XOY = I cuadrante YOX' = II cuadrante
$X'OY'$ = III cuadrante $Y'OX$ = IV cuadrante

COORDENADAS DE UN PUNTO

Una vez establecido en un plano un sistema de ejes coordenados, a cada punto del plano le corresponden dos números reales (una abscisa y una ordenada) llamados coordenadas del punto.

Para determinar dichas coordenadas, se trazan por el punto paralelas a los ejes XX' y YY' y se determinan los valores donde dichas paralelas cortan a los ejes. Estos valores se colocan a continuación de la letra que representa al punto, dentro de un paréntesis, separados por una coma, **primero la abscisa** y **segundo la ordenada.**

Por ejemplo, en la figura 536 las coordenadas de A son 5 y 2, que se escribe: $A(5, 2)$

Recíprocamente, dadas las coordenadas de un punto $C(-4, -2)$, para localizar el punto se señala -4 en el eje XX' y -2 en el eje YY

Por estos puntos se trazan paralelas a los ejes y donde se cortan está el punto C (Fig. 536)

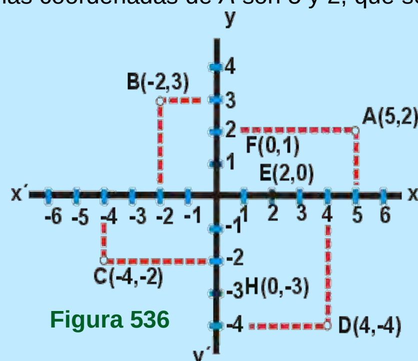


Figura 536

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Consideremos el triángulo rectángulo ΔABC (Fig. 537). Las funciones o razones trigonométricas de los ángulos agudos $\angle B$ y $\angle C$ son las siguientes:

Seno. Es la razón entre el cateto opuesto a la hipotenusa.

Notación. Seno del ángulo *B* se escribe sen B.

$$\text{sen } B = \frac{b}{a}, \text{ sen } C = \frac{c}{a},$$

Coseno. Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa. Se abrevia cos.

$$\cos B = \frac{c}{a}, \qquad \cos C = \frac{b}{a}$$

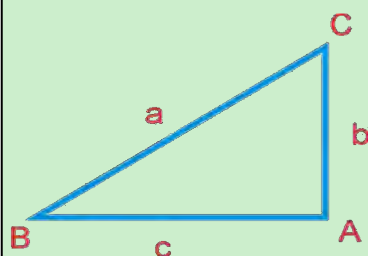


Figura 537

Tangente. Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente. Se abrevia tan.

$$\tan B = \frac{b}{c}, \qquad \tan C = \frac{c}{b}$$

Cotangente. Es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto. Se abrevia cot.

$$\cot B = \frac{c}{b}, \qquad \cot C = \frac{b}{c}$$

Secante. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente. Se abrevia sec.

$$\sec B = \frac{a}{c}; \qquad \sec C = \frac{a}{b}$$

Cosecante. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto. Se abrevia csc.

$$\csc B = \frac{a}{b}, \qquad \csc C = \frac{a}{c}$$

Ejemplo

Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm, calcular las funciones trigonométricas del ángulo agudo mayor.

Por medio del teorema de Pitágoras, calculamos la hipotenusa:

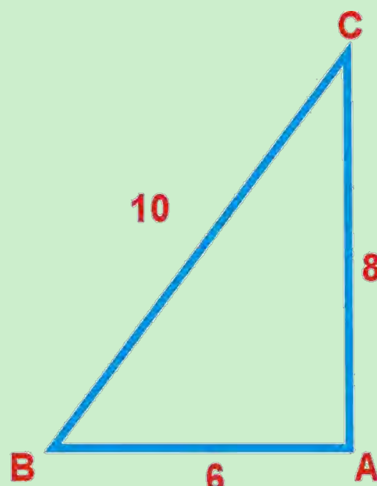


Figura 538

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\overline{BC}^2 = 100 \;\therefore\; BC = \sqrt{100} = 10$$

Como sabemos, el ángulo agudo mayor es el *B* (Fig. 538), porque a mayor lado se opone mayor ángulo.

$$\text{sen B} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$\cos B = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\tan B = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$\cot B = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\sec B = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1.67$$

$$\csc B = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1.25$$

FUNCIONES Y COFUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

Consideramos los ángulos α, β, γ y ∂ que en un sistema de coordenadas tienen su lado terminal en el 1°, 2°, 3° y 4° cuadrantes, respectivamente.

Tomemos un punto en el lado terminal y consideremos sus coordenadas y su distancia al origen.

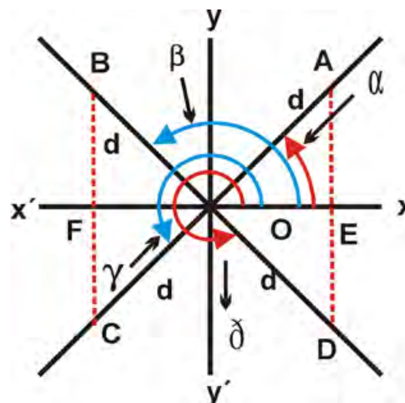


Figura 539

Las funciones trigonométricas se definen así:

Seno. Es la razón entre la ordenada y la distancia al origen.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{OA}}, \qquad \text{sen } \beta = \frac{\overline{BF}}{\overline{OB}},$$

$$\text{sen } \gamma = \frac{\overline{CF}}{\overline{OC}}, \qquad \text{sen } \partial = \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}}$$

Coseno. Es la razón entre la abscisa y la distancia al origen.

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}, \cos \beta = \frac{\overline{OF}}{\overline{OB}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{OF}}{\overline{OC}}, \qquad \cos \partial = \frac{\overline{OE}}{\overline{OD}}$$

Tangente. Es la razón entre la ordenada y la abscisa.

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{OE}}, \qquad \tan \beta = \frac{\overline{BF}}{\overline{OF}},$$

$$\tan \gamma = \frac{\overline{CF}}{\overline{OF}}, \qquad \tan \partial = \frac{\overline{DE}}{\overline{OE}}$$

Cotangente. Es la razón entre la abscisa y la ordenada.

$\cot \alpha = \frac{\overline{OE}}{\overline{AE}}$, $\cot \beta = \frac{\overline{OF}}{\overline{BF}}$, $\cot \gamma = \frac{\overline{OF}}{\overline{CF}}$, $\cot \partial = \frac{\overline{OE}}{\overline{DE}}$

Secante. Es la razón entre la distancia y la abscisa.

$\sec \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OE}}$, $\sec \beta = \frac{\overline{OB}}{\overline{OF}}$, $\sec \gamma = \frac{\overline{OC}}{\overline{OF}}$, $\sec \partial = \frac{\overline{OD}}{\overline{OE}}$

Cosecante. Es la razón entre la distancia y la ordenada.

$\csc \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AE}}$, $\csc \beta = \frac{\overline{OB}}{\overline{BF}}$, $\csc \gamma = \frac{\overline{OC}}{\overline{CF}}$, $\csc \partial = \frac{\overline{OD}}{\overline{ED}}$

Ejemplos

a) Calcular las funciones trigonométricas del ángulo $\angle XOA = \alpha$ (Fig. 540) sabiendo que A (3, 4).

$d = \sqrt{3^2+4^2}$; $d = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$; $d = 5$

$\text{sen } \alpha = \frac{4}{5} = 0.80$ $\cos \alpha = \frac{3}{5} = 0.60$

$\tan \alpha = \frac{4}{3} = 1.33$ $\cot \alpha = \frac{3}{4} = 0.75$

$\sec \alpha = \frac{5}{3} = 1.67$ $\csc \alpha = \frac{5}{4} = 1.25$

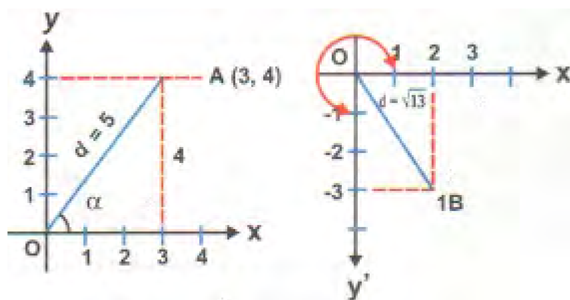


Figura 540 Figura 541

b) Calcular las funciones trigonométricas del ángulo $\angle$ XO B = b (Fig. 541) sabiendo que B (2, - 3).

$d = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9}$; $d = \sqrt{13}$

$\text{sen } b = \frac{-3}{\sqrt{13}} = \frac{-3\sqrt{13}}{13}$ $\cos b = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\tan \beta = \frac{-3}{2} = -1.5$ $\cot \beta = \frac{2}{-3} = -0.67$

$\sec \beta = \frac{\sqrt{13}}{2}$ $\cos \beta = \frac{\sqrt{13}}{-3} = \frac{-\sqrt{13}}{3}$

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Considerando que la distancia de un punto cualquiera al origen de coordenadas siempre es positiva, podemos ver que los signos de las funciones en los distintos cuadrantes son:

	I	II	III	IV
seno	+	+	-	-
coseno	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-
sec	+	-	-	+
csc	+	+	-	-

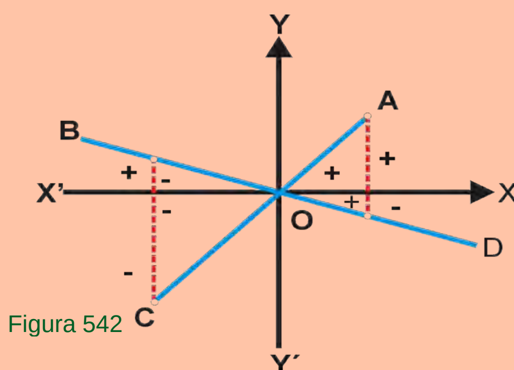


Figura 542

Funciones trigonométricas de los ángulos que limitan los cuadrantes (0°, 90°, 180°, 270°, 360°). Consideremos el ángulo a (Fig. 543). Las funciones trigonométricas son:

$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$, $\cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$, $\tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$,

$\cot \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$, $\sec \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$, $\csc \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$.

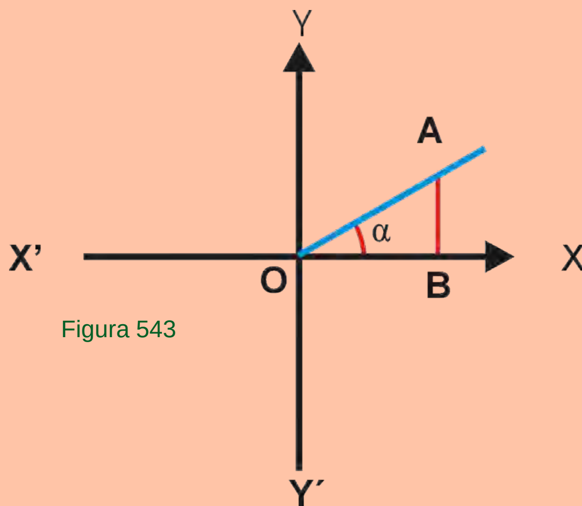


Figura 543

Valores para a = 0°. Si hacemos girar la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ de manera que coincida con el semieje $\overline{OA}$, tendremos:

$$\alpha = 0°, \quad \overline{AB} = 0, \quad \overline{OA} = \overline{OB}$$

Entonces:

$$\text{sen } 0° = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{0}{\overline{OA}} = 0$$

$$\cot 0° = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB}}{0} = \infty \text{ (no existe)}$$

$$\cos 0° = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB}} = 1$$

$$\sec 0° = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB}} = 1$$

$$\tan 0° = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{0}{\overline{OB}} = 0$$

$$\csc 0° = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{0} = \infty \text{ (no existe)}$$

Es importante señalar que la cotangente y la cosecante de 0° **no existen** porque no se pueden dividir entre cero, y en ocasiones se representan por el símbolo de infinito $\propto$, el cual indica que estas funciones trigonométricas van tomando valores cada vez mayores y llegan a ser tan grandes como uno quiera, a medida que el ángulo se acerca a cero tomando siempre valores positivos. No hay que olvidar que $\propto$ no es un número, sino un símbolo.

Valores para a = 90°. Si hacemos girar la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ de manera que coincida con el semieje $\overline{OY}$, tendremos:

$$\alpha = 90°, \quad \overline{AB} = \overline{OA}, \quad \overline{OB} = 0$$

Entonces:

$$\text{sen } 90º = \frac{\overline{AB}}{\text{OA}} = 1 \qquad \cot 90º = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{0}{\overline{AB}} = 0$$

$$\cos 90º = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{0}{\overline{OA}} = 0 \qquad \sec 90º = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{0} = \infty$$

$$\tan 90º = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{0} = \infty \qquad \csc 90º = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1$$

Valores para a = 180°. Si el giro de $\overrightarrow{OA}$ continúa hasta que coincida $\overline{OX}$', tendremos que $\overline{OB}$ es negativo y

$$\alpha = 180°, \quad \overline{AB} = 0, \quad \overline{OA} = -\overline{OB}$$

$$\text{sen } 180° = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{0}{\overline{OA}} = 0$$

$$\cot 180° = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB}}{0} = \infty \text{ (no existe)}$$

$$\cos 180° = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{-\overline{OB}} = -1$$

$$\sec 180° = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{-\overline{OB}}{\overline{OB}} = -1$$

$$\tan 180° = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{0}{\overline{OB}} = 0$$

$$\csc 180° = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{0} = \infty \text{ (no existe)}$$

Valores para a = 270°. Continuando el giro de $\overrightarrow{OA}$ hasta que coincida con el semieje $\overline{OY}$' tendremos que $\overline{AB}$ es negativo y

$$\alpha = 270°, \quad \overline{AB} = -\overline{OA} \quad \overline{OB} = 0$$

$$\text{sen } 180º = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{0}{\overline{OA}} = 0$$

$$\cot 180º = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB}}{0} = \infty \text{(no existe)}$$

$$\cos 180º = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{-\overline{OB}}{\overline{OB}} = -1$$

$$\tan 180º = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{0}{\overline{OB}} = 0$$

$$\csc 108º = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{0} = \infty \text{(no existe)}$$

Valores para a = 360°. Si seguimos el giro hasta que vuelvan a coincidir $\overrightarrow{OA}$ y $\overline{OX}$ las funciones trigonométricas de este ángulo tendrán los mismos valores que calculamos para 0°, es decir:

sen 360° = 0	cot 360° = no existe
cos 360° = 1	sec 360° = 1
tan 360° = 0	csc 360° = no existe

RESUMEN DE LOS VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS QUE LIMITAN LOS CUADRANTES

	0º	90º	180º	270º	360º
sen	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	No existe	0	No existe	0
cot	No existe	0	No existe	0	No existe
sec	1	No existe	-1	No existe	1
csc	No existe	1	No existe	-1	No existe

Al estudiar esta tabla vemos que el seno toma los valores: 0, 1, 0, – 1, 0. Es decir, su valor máximo es + 1 y el mínimo – 1. El seno varía entre + 1 y – 1, pero no puede tomar valores mayores que + 1 ni menores que – 1.

Observando el coseno, vemos que también varía entre + 1 y – 1. Si analizamos la tangente veremos que su variación es más compleja. De 0º a 90º es positiva y varía de 0 hasta tomar valores tan grandes como se quiera. Para 90º no está definida y de 90º a 180º pasa a ser negativa, variando de valores negativos muy grandes en valor absoluto hasta cero. De 180º a 270º vuelve a ser positiva, variando de cero hasta valores tan grandes como se quiera. Para 270º no está definida y de 270º a 360º pasa a negativa, variando de valores negativos muy grandes en valor absoluto hasta cero. Las demás funciones varían análogamente y estas variaciones se pueden resumir en el siguiente diagrama:

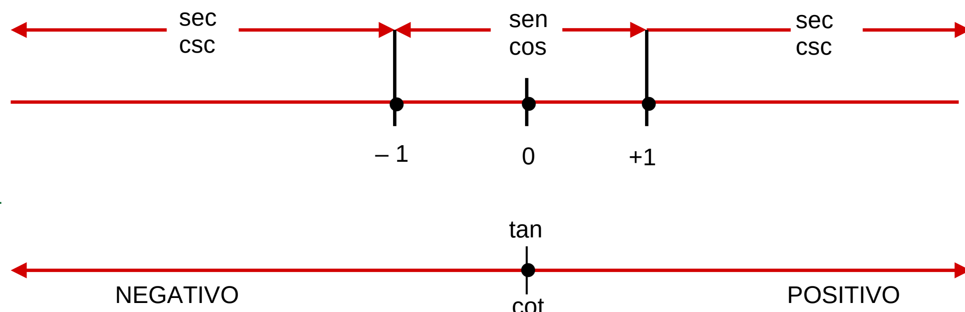


Figura 544

DIAGRAMA

Funciones trigonométricas de ángulos notables. Es posible calcular fácilmente los valores de las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.

Cálculo de los valores de las funciones trigonométricas de 30° (Fig. 545).

$$\angle AOB = \angle EOD = \frac{360º}{6} = 60º$$

$$\overline{OA} = r;$$

$$\overline{AB} = l_6 = r;$$

$$\overline{AM} = \frac{l_6}{2} = \frac{r}{2};$$

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2;$$

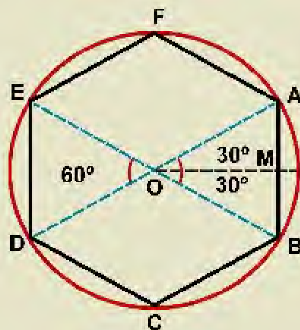


Figura 545

$$\overline{OM} = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{4r^2 - r^2}{4} = \frac{3r^2}{4};$$

$$\therefore \quad \overline{OM} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 30º = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30º = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{r\sqrt{3}}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30º = \frac{\overline{AM}}{\overline{OM}} = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \bullet \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30º = \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{\frac{r}{2}} = \frac{r\sqrt{3}}{r} = \sqrt{3}$$

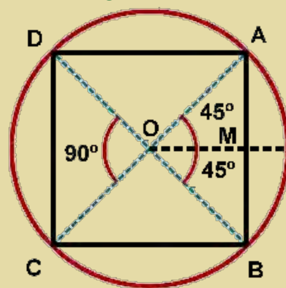
$$\sec 30º = \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \bullet \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30º = \frac{\overline{OA}}{\overline{AM}} = \frac{r}{\frac{r}{2}} = \frac{2r}{r} = 2$$

Cálculo de los valores de las funciones trigonométricas de 45º (Fig. 546).

$$\angle AO\,B = \angle CO\,D = \frac{360º}{4} = 90º$$

Figura 546



$$\overline{AB} = i_4 = r\sqrt{2}$$

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{OA} = r$$

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2$$

$$\overline{OM}^2 = r^2 - \left[\frac{r\sqrt{2}}{2}\right]^2 = r^2 - \frac{2r^2}{4} = \frac{4r^2 - 2r^2}{4} = \frac{2r^2}{4} = \frac{r^2}{2}$$

$$\therefore \quad \overline{OM} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \bullet \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen } 45º = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{r\sqrt{2}}{2}}{r} = \frac{r\sqrt{2}}{2r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45º = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{r\sqrt{2}}{2}}{r} = \frac{r\sqrt{2}}{2r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45º = \frac{\overline{AM}}{\overline{OM}} = \frac{\frac{r\sqrt{2}}{2}}{\frac{r\sqrt{2}}{2}} = \frac{2r\sqrt{2}}{2r\sqrt{2}} = 1$$

$$\cot 45º = \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{r\sqrt{2}}{2}}{\frac{r\sqrt{2}}{2}} = \frac{2r\sqrt{2}}{2r\sqrt{2}} = 1$$

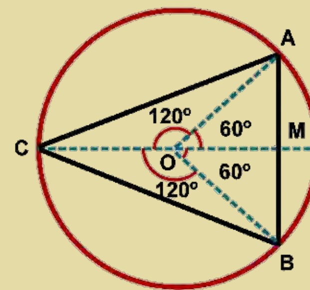
$$\sec 45º = \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{r}{\frac{r\sqrt{2}}{2}} = \frac{2r}{r\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \bullet \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45º = \frac{\overline{OA}}{\overline{AM}} = \frac{r}{\frac{r\sqrt{2}}{2}} = \frac{2r}{r\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \bullet \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Cálculo de los valores de las funciones trigonométricas de 60º (Fig. 547).

$$\angle AO\,B = \angle\, AOC = \frac{360º}{3} = 120º$$

Figura 547



$$\overline{OA} = r$$

$$\overline{AB} = i_3 = r\sqrt{3}$$

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2 =$$

$$= r^2 - \left[\frac{r\sqrt{3}}{2}\right]^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4} = \frac{4r^2 - 3r^2}{4} = \frac{r^2}{4}$$

$$OM = \sqrt{\frac{r^2}{4}}; \quad \therefore \quad \overline{OM} = \frac{r}{2}:$$

$$\text{sen } 60º = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{r\sqrt{3}}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60º = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60º = \frac{\overline{AM}}{\overline{OM}} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{\frac{r}{2}} = \frac{2r\sqrt{3}}{2r} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60º = \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{2r}{2r\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \bullet \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60º = \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{r}{\frac{r}{2}} = \frac{2r}{r} = 2$$

$$\csc 60º = \frac{\overline{OA}}{\overline{AM}} = \frac{r}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{2r}{r\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \bullet \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

TABLA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Resumen de los valores de las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

FUNCIÓN	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
csc	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

EJERCICIOS

1. Indica si son correctos o no los signos de las siguientes funciones:

a) sen 30° = $\frac{1}{2}$

b) cos 45° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) tan 60° = $\sqrt{3}$

d) sec 240° = - 2

e) cos 225° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) cot 210° = $\sqrt{3}$

g) csc 135° = $-\sqrt{2}$

h) cos 150° = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

i) tan 120° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

j) sec 300° = - 2

R. son correctos: a), c), d), f), h)

2. Menciona si son posibles o no los siguientes valores:

a) sec *E* = – 2.18

b) tan *T* = 0.02

c) sen *X* = – 1.18

d) cot *T* = – 3.21

e) csc *P* = 0.03

f) tan *H* = 4.09

g) csc *F* = – 5.14

h) cos *B* = – 0.05

i) cos *Y* = – 3.14

j) cot *D* = – 4.16

R. son posibles:
a), b), d), f), g), h), i).

3. Calcular los valores de las siguientes expresiones:

a) 5 sen2 45° + 8 cos2 30°

R. $8\frac{1}{2}$

b) 3 sen 30° + 6 cos2 45°

R. $4\frac{1}{2}$

c) 5 tan2 45° + 2 sec2 45°

R. 9

d) 4 cos 60° + 5 csc 30°

R. 12

e) 4 cos 30° + 6 sen 45°

R. $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

f) 6 tan 30° + 2 csc 45°

R. $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

g) csc 2 45° + cos2 30°

R. $2\frac{3}{4}$

h) $\csc^2 30° + \tan^2 45°$

R. 5

i) $\frac{\text{sen}30º+\csc 30º}{\text{sen}^2 30º+\cos^2 60º}$

R. 5

j) $\frac{\text{sen}^2 45º+\text{sen}^2 30º}{\cos^2 45º+\sec^2 45º}$

R. $\frac{3}{10}$

4. Representa en un sistema de ejes coordenados los siguientes puntos:

A (0, 0) *B* (7, 6)

C (– 6, 0) *D* (– 7, – 5)

E (4, 0) *F* (0, 5)

G (– 4, – 3) *H* (2, – 2)

I (3, 2) *J* (– 3, 3)

K (– 3, – 3) *L* (2, – 4)

M (7, 2) *N* (– 3, 1)

O (– 1, – 3) *P* (5, – 4)

Q (6, 8) *R* (– 5, 3)

S (0, – 3) *T* (8, – 2)

5. En el triángulo rectángulo ∆ ABC (∠ A = 90°), calcula las funciones trigonométricas de los ángulos B y C, si b = 2 cm y c = 4 cm.

R. sen B = cos C = $\frac{\sqrt{5}}{5}$

cot B = tan C = 2

cos B = sen C = $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

sec B = csc C = $\frac{\sqrt{5}}{2}$

tan B = cot C = $\frac{1}{2}$

csc B = sec C = $\sqrt{5}$



Desde sus orígenes, las construcciones realizadas por el hombre han utilizado las formas geométricas. Hoy día, las figuras siguen empleandose en las construcciones así como en el decorado de éstas.

CAPÍTULO XXIV

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS Y SUPLEMENTARIOS

Las funciones trigonométricas de ángulos complementarios verifican las siguientes igualdades:

$\text{sen}\,(90° - x) = \cos x$ $\cos\,(90° - x) = \text{sen}\, x$ $\tan\,(90° - x) = \text{ctg}\, x$
$\text{ctg}\,(90° - x) = \tan x$ $\sec\,(90° - x) = \csc x$ $\csc\,(90° - x) = \sec x$

Por su parte, las funciones trigonométricas de ángulos suplementarios cumplen las siguientes igualdades:

$\text{sen}\,(180° - x) = \text{sen}\, x$ $\cos\,(180° - x) = -\cos x$ $\tan\,(180° - x) = -\tan x$
$\text{ctg}\,(180° - x) = -\text{ctg}\, x$ $\sec\,(180° - x) = -\sec x$ $\csc\,(180° - x) = \csc x$

CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

El **círculo trigonométrico** es aquél cuyo radio vale la unidad. Siendo XX' e YY' (Fig. 548) un sistema de ejes coordenados, tracemos el círculo trigonométrico de manera que su centro coincida con el origen de coordenadas O. Consideremos un ángulo cualquiera $\angle a$ en el primer cuadrante y tracemos $\overline{BD} \perp \overline{OX}, \overline{TC} \perp \overline{OX}, \overline{AM} \parallel \overline{OX}$ y $\overline{RS} \perp \overline{OX}$.

Al aplicar las definiciones dadas acerca de las funciones trigonométricas tenemos:

$$\text{sen } a = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BD}}{r} = \frac{\overline{BD}}{1} = \overline{BD}$$

$$\cos a = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OD}}{r} = \frac{\overline{OD}}{1} = \overline{OD}$$

$$\tan a = \frac{\overline{BD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{TC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{TC}}{r} = \frac{\overline{TC}}{1} = \overline{TC}$$

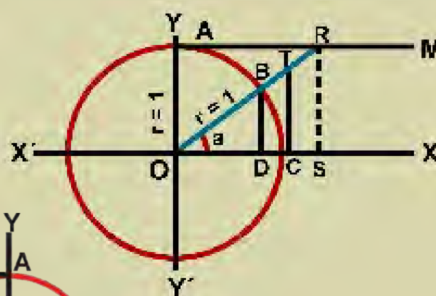
$$\cot a = \frac{\overline{OD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AR}}{r} = \frac{\overline{AR}}{1} = \overline{AR}$$

$$\sec a = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OT}}{r} = \frac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}$$

$$\csc a = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OR}}{r} = \frac{\overline{OR}}{1} = \overline{OR}$$

En cada uno de los otros cuadrantes, la representación se obtiene de manera análoga (Figs. 549, 550 y 551).

Figura 548



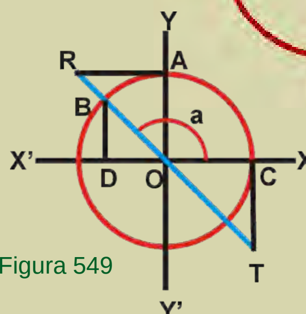


Figura 549

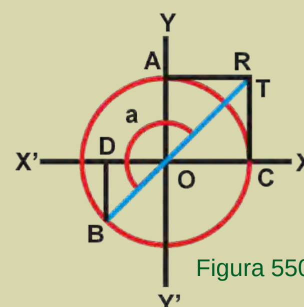


Figura 550

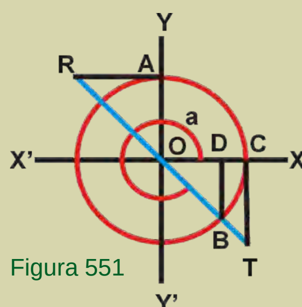


Figura 551

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

La conversión de una función trigonométrica de un ángulo cualquiera en otra función equivalente de un ángulo del primer cuadrante se denomina reducción al **primer cuadrante.**

En estas reducciones se relacionan los ángulos complementarios y suplementarios por defecto y por exceso, y los explementarios por defecto.

a) Dos ángulos son complementarios por defecto si su suma vale 90° y son complementarios por exceso si su diferencia vale 90°.

b) Dos ángulos son suplementarios por defecto si su suma vale 180° y son suplementarios por exceso si su diferencia vale 180°.

c) Dos ángulos son explementarios por defecto si su suma vale 360°.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO (90° – *A*)

En el círculo trigonométrico (Fig. 552) los triángulos rectángulos $\triangle BOA$ y $\triangle A'OB'$ son iguales por tener la hipotenusa y un ángulo agudo iguales $\left(\overline{OA'} = \overline{OB'} = 1 \text{ y } \angle BOA = \angle OB'A'\right)$.

Luego $\overline{OA'} = \overline{AB}$ y $\overline{A'B'} = \overline{OB}$

Las funciones trigonométricas de los ángulos complementarios *a* y (90° – *a*) son:

$\text{sen } a = \overline{AB}$ $\quad$ $\text{sen }(90° - a) = \overline{A'B'} = \overline{OB}$

$\cos a = \overline{OB}$ $\quad$ $\cos(90° - a) = \overline{OA'} = \overline{AB}$

$\tan a = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$ $\quad$ $\tan(90° - a) = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$

$\cot a = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$ $\cot(90° - a) = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$

$\sec a = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ $\sec(90° - a) = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$

$\csc a = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$ $\csc(90° - a) = \frac{\overline{OB'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

De donde se deduce:

$\text{sen}(90° - a) = \cos a$ $\cot(90° - a) = \tan a$

$\cos(90° - a) = \text{sen } a$ $\sec(90° - a) = \csc a$

$\tan(90° - a) = \cot a$ $\csc(90° - a) = \sec a$

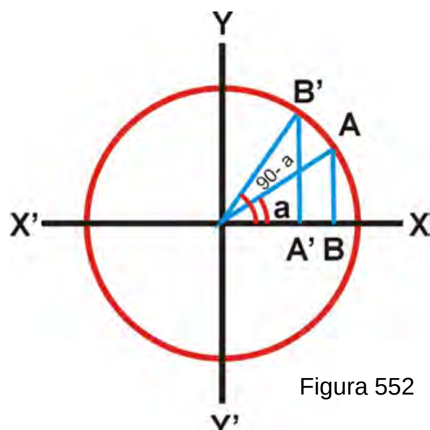


Figura 552

"Las funciones trigonométricas de un ángulo son iguales, en valor absoluto y en signo, a las cofunciones del ángulo complementario por defecto", por ejemplo:

$\text{sen } 60° = \text{sen}(90° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 70° = \tan(90° - 70°) = \cot 20°$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO (180° – *a*)

En la figura 553 tenemos:

$\overline{OA} = \overline{OA'} = r = 1$; $\overline{AB} = \overline{A'B'}$; $\overline{OB'} = -\overline{OB}$

$\text{sen } a = \overline{AB}$ $\text{sen}(180° - a) = \overline{A'B} = \overline{AB}$

$\cos a = \overline{OB}$ $\cos(180° - a) = \overline{OB'} = -\overline{OB}$

$\tan a = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$ $\tan(180° - a) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AB}}{-\overline{OB}}$

$\cot a = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$ $\cot(180° - a) = \frac{\overline{OB'}}{\overline{A'B'}} = \frac{-\overline{OB}}{\overline{AB}}$

$\sec a = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ $\sec(180° - a) = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA}}{-\overline{OB}}$

$\csc a = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$ $\csc(180° - a) = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$

De donde se deduce:

$\text{sen}(180° - a) = \text{sen } a$

$\cos(180° - a) = -\cos a$

$\tan(180° - a) = -\tan a$

$\cot(180° - a) = -\cot a$

$\sec(180° - a) = -\sec a$

$\csc(180° - a) = \csc a$

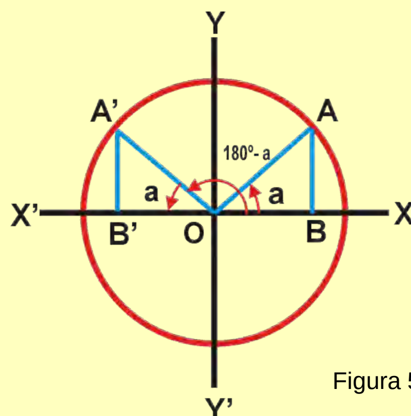


Figura 553

"Las funciones trigonométricas de un ángulo son iguales en valor absoluto a las funciones trigonométricas del ángulo suplementario por defecto, pero de signo contrario, con excepción del seno y la cosecante, que son del mismo signo".

$\text{sen } 120° = \text{sen}(180° - 60°)$

$= \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cot 120° = \cot(180° - 60°)$

$= -\cot 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO (180° + *a*)

En la figura 554 se consideran los triángulos ΔAO B y, $\Delta A'OB$, con lo que tenemos

$\overline{OA} = \overline{OA'} = r = 1;$ $\overline{OB'} = -\overline{OB}$ $\overline{OB};$ $\overline{A'B} = -\overline{AB}$

sen $a = \overline{AB}$ sen (180° + a) = $\overline{A'B'} = -\overline{AB}$

cos $a = \overline{OB}$ cos (180° + a) = $\overline{OB'} = -\overline{OB}$

$\tan a = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$ $\tan(180° + a) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB}} = \frac{-\overline{AB}}{-\overline{OB}}$

$\cot a = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$ $\cot(180° + a) = \frac{\overline{OB'}}{\overline{A'B'}} = \frac{-\overline{OB}}{-\overline{AB}}$

$\sec a = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ $\sec(180° + a) = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA}}{-\overline{OB}}$

$\csc a = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$ $\csc(180° + a) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$

De donde se deduce:

sen (180° + a) = – sen a cos (180° + a) = – cos a

tan (180° + a) = tan a cot (180° + a) = cot a

sec (180° + a) = – sec a csc (180° + a) = – csc a

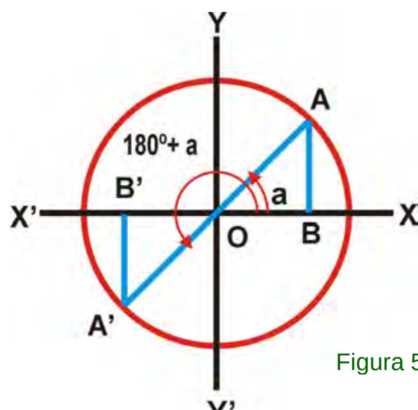


Figura 554

"Las funciones trigonométricas de un ángulo son iguales en valor absoluto a las funciones del ángulo suplementario por exceso, pero de signo contrario, excepto la tangente y la cotangente, que son del mismo signo".

$\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

tan 225° = tan (180° + 45°) = tan 45° = 1

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO (360° – *a*)

En la figura 555 se consideran los triángulos ΔAO B y, $\Delta A'OB$, con lo que tenemos

$\overline{OA} = \overline{OA'} = r = 1;$ $\overline{A'B} = -\overline{AB}$

sen $a = \overline{AB}$ sen (360° – a) = $\overline{A'B} = -\overline{AB}$

cos $a = \overline{OB}$ cos (360° – a) = $\overline{OB}$

$\tan a = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$ $\tan(360° - a) = \frac{\overline{A'B}}{\overline{OB}} = \frac{-\overline{AB}}{\overline{OB}}$

$\cot a = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$ $\cot(360° - a) = \frac{\overline{OB}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{OB}}{-\overline{AB}}$

$\sec a = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ $\sec(360° - a) = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

$\csc a = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$ $\csc(360° - a) = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{OA}}{-\overline{AB}}$

De donde se deduce:

sen (360° – a) = – sen a cos (360° – a) = cos a

tan (360° – a) = – tan a cot (360° – a) = – cot a

sec (360° – a) = sec a csc (360° – a) = – csc a

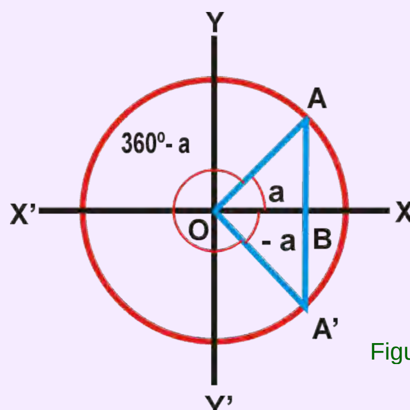


Figura 555

"Las funciones trigonométricas de un ángulo son iguales en valor absoluto a las funciones del ángulo explementario, pero de signo contrario, excepto el coseno y la secante, que son del mismo signo".

sen 315° = sen (360° – 45°) = – sen 45°

$\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO – *a*

En la figura 556 se consideran los triángulos ΔAOB y ΔA 'OB, con lo que tenemos:

$$\overline{OA} = \overline{OA'} = r = 1; \quad \overline{A'B} = -\overline{AB}$$

$\text{sen } a = \overline{AB}$ $\quad \text{sen } (-a) = \overline{A'B} = -\overline{AB}$

$\cos a = \overline{OB}$ $\quad \cos(-a) = \overline{OB}$

$\tan a = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$ $\quad \tan(-a) = \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{OB}} = \dfrac{-\overline{AB}}{\overline{OB}}$

$\cot a = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$ $\quad \cot(-a) = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{A'B}} = \dfrac{\overline{OB}}{-\overline{AB}}$

$\sec a = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ $\quad \sec(-a) = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

$\csc a = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ $\quad \csc(-a) = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{A'B}} = \dfrac{\overline{OA}}{-\overline{AB}}$

De donde se deduce:

$\text{sen}(-a) = -\text{sen } a$ $\quad \cot(-a) = -\cot a$

$\cos(-a) = \cos a$ $\quad \sec(-a) = \sec a$

$\tan(-a) = -\tan a$ $\quad \csc(-a) = -\csc a$

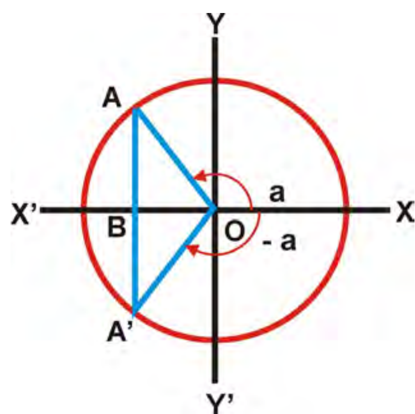


Figura 556

"Las funciones trigonométricas de un ángulo negativo son iguales en valor absoluto a las funciones del mismo ángulo positivo, pero de signo contrario, excepto el coseno y la secante, que tienen el mismo signo".

$\text{sen}(-30°) = -\text{sen } 30° = -\dfrac{1}{2}$

$\sec(-45°) = \sec 45° = \sqrt{2}$

EJERCICIOS

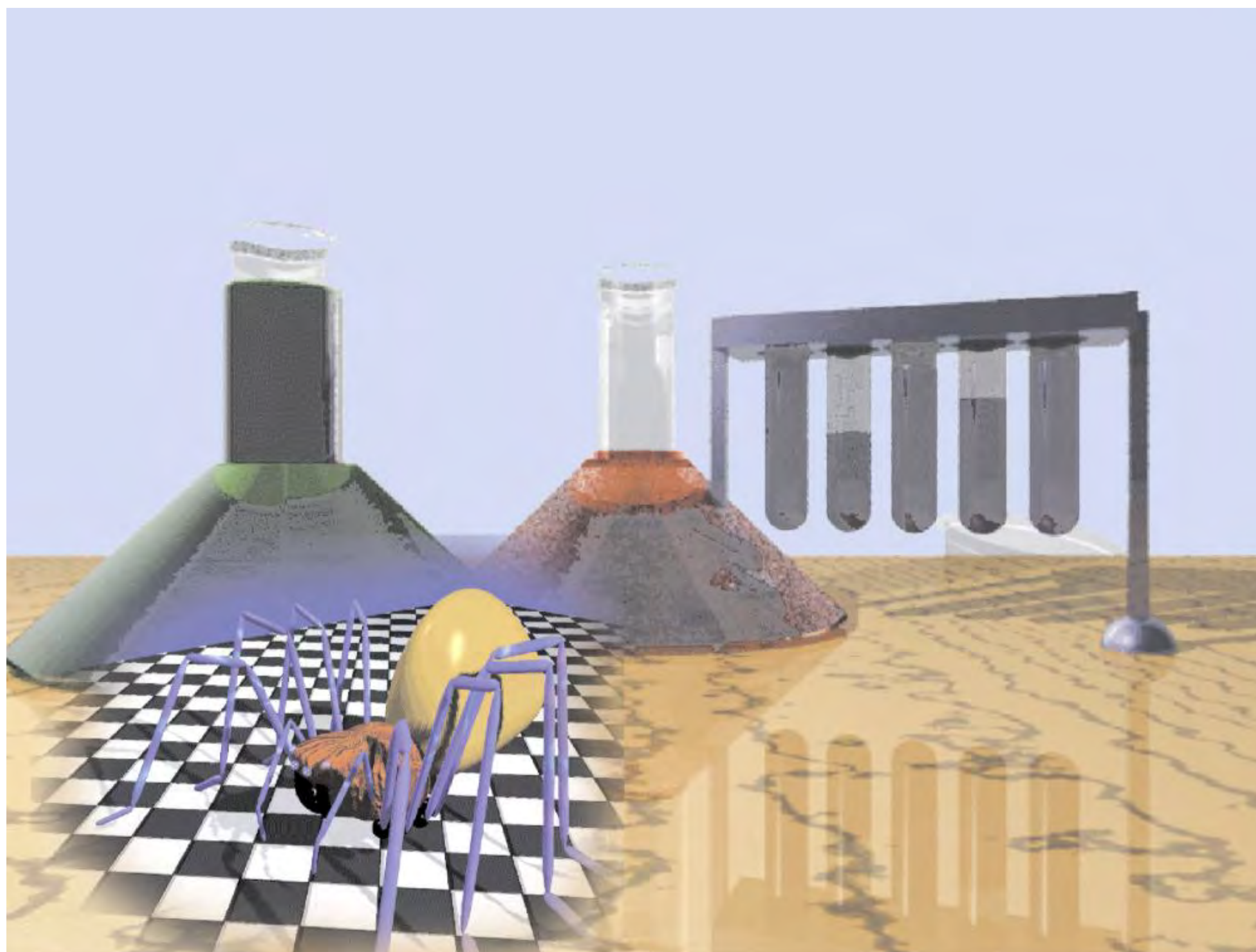
1. Señala en un círculo trigonométrico las líneas trigonométricas de cada uno de estos ángulos:

a) 30° **d)** 120° **g)** 210°
b) 275° **e)** 315° **h)** 60°
c) 150° **f)** 240° **i)** 330°

Reduce las siguientes funciones trigonométricas a otras equivalentes de ángulos menores de 45°:

2. cos 305° **R.** sen 35°
3. sec 330° **R.** sec 30°
4. – sen 320° **R.** sen 40°
5. csc 300° **R.** – sec 30°
6. cos 350° 30' **R.** cos 9° 30'
7. – sec 170° **R.** sec 10°
8. sen 64° **R.** cos 26°
9. tan 65° **R.** cot 25°
10. sec 70° **R.** csc 20°
11. cos 80° 30' 10'' **R.** sen 9° 29' 50''
12. – csc 50° 20'' **R.** – sec 39° 40
13. – tan 75° 15' 20'' **R.** – cot 14° 44' 40''
14. – sen 50° **R.** – cos 40°
15. csc 45° 20' **R.** sec 44° 40'
16. cot 50° **R.** tan 40°
17. cos 85° **R.** sen 5°
18. tan 120° **R.** – cot 30°
19. sen 105° **R.** cos 15°
20. csc 100° 20' **R.** sec 10° 20'
21. cos 135° **R.** – cos 45°
22. – sec 135° **R.** sec 45°
23. – cot 155° **R.** cot 25°
24. tan 170° **R.** – tan 10°
25. cos 96° 15' **R.** – sen 6° 15'
26. sen 110° **R.** cos 20°
27. cot 225° **R.** cot 45°
28. – cot 240° 30' **R.** – tan 29° 30'
29. csc 250° **R.** – sec 20°
30. cos 210° **R.** – cos 30°
31. sen 260° 32' **R.** – cos 9° 28'
32. – sec 250° 30' 15'' **R.** csc 19° 29' 45''
33. sen 210° 20' **R.** – sen 30° 20'
34. – tan 260° **R.** – cot 10°
35. sec 250° **R.** – csc 20°
36. sen 200° **R.** – sen 20°
37. Reduce las siguientes funciones trigonométricas a las de un ángulo positivo menor de 45°.

a) cos (– 315°) **R.** cos 45°
b) tan (– 220°) **R.** – tan 40°
c) sen (– 190°) **R.** sen 10°
d) sec (– 85° 15') **R.** csc 4° 45'



Al estudiar la naturaleza, tanto en el reino animal como en el vegetal podemos percatarnos de las similitudes existentes entre los integrantes de estos reinos y las formas geométricas. Las ciencias que los estudian utilizan objetos en los que encontramos figuras geométricas.

CAPÍTULO XXV

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se denominan ecuaciones trigonométricas a aquellas en las que la incógnita aparece en forma de ángulo de funciones trigonométricas.

Para resolver ecuaciones trigonométricas en primer lugar se acostumbra transformar la ecuación de modo que quede expresada por una sola función trigonométrica y, a continuación se resuelve como las ecuaciones algebraicas.
Una vez resuelta algebraicamente la ecuación debe procederse a su resolución trigonométrica, es decir, debe calcularse el ángulo que satisface el valor de la función trigonométrica.

RELACIONES FUNDAMENTALES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN MISMO ÁNGULO

Para hablar de las relaciones fundamentales entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo, consideremos en un sistema de coordenadas un ángulo a de lado inicial *OX* (Fig. 557).

Tracemos por un punto cualquiera *C* del lado terminal la perpendicular $\overline{MC}$ al eje *OX*.

Al aplicar las definiciones de las funciones trigonométricas tenemos:

Sen $\alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{OC}}$ (1) cos $\alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}$ (2)

tan $\alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{OM}}$ (3) cot $\alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{MC}}$ (4)

sec $\alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OM}}$ (5) csc $\alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{MC}}$ (6)

Multiplicamos (1) por (6) y tenemos:

$$\text{sen } \alpha \text{ csc } \alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{OC}} \bullet \frac{\overline{OC}}{\overline{MC}} = 1$$

$$\therefore \quad \text{sen } \alpha \text{ csc } \alpha = 1$$

Despejamos sen α: $\text{sen } \alpha = \frac{1}{\csc \alpha}$

Despejamos csc α: $\csc \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$

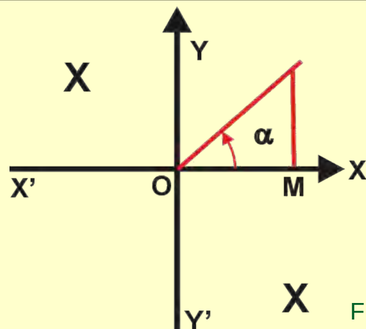


Figura 557

Multiplicamos (2) por (5) y tenemos:

$$\cos \alpha \sec \alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{OC}} \bullet \frac{\overline{OC}}{\overline{OM}} = 1$$

$$\therefore \quad \cos \alpha \sec \alpha = 1$$

Despejamos cos α: $\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$

Despejamos sec α: $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

Multiplicamos (3) por (4) y tenemos:

$$\tan \alpha \cot \alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{OM}} \bullet \frac{\overline{OM}}{\overline{MC}} = 1$$

$$\therefore \quad \tan \alpha \cot \alpha = 1$$

Despejamos tan α : $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$

Despejamos cot α: $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

RECIPROCIDAD DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Podemos deducir de las fórmulas anteriores que las siguientes funciones trigonométricas del mismo arco son recíprocas:

1) El seno y la cosecante.
2) El coseno y la secante.
3) La tangente y la cotangente.

Veamos otras relaciones importantes. Al dividir (1) y (2) tenemos:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\overline{MC}}{\overline{OC}}}{\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{OM}}$$

Si comparamos este resultado con (3):

$$\tan a = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \qquad (7)$$

Y como: $\tan a = \frac{1}{\cot \alpha}$ (8)

Comparamos (7) y (8) y tenemos:

$$\frac{1}{\cot \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\therefore \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \qquad (9)$$

Relación entre el seno y el coseno. De las fórmulas (1) y (2):

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{OC}} \qquad (1)$$

y $$\cos\alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{OC}} \qquad (2)$$

Elevamos al cuadrado:

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{OC}^2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OC}^2}$$

Sumamos miembro por miembro:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{OC}^2} + \frac{\overline{OM}^2}{\overline{OC}^2} = \frac{\overline{MC}^2 + \overline{OM}^2}{\overline{OC}^2}$$

Pero por el teorema de Pitágoras $\overline{MC}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{OC}^2$

$$\therefore \quad \text{sen}^2\alpha + \cos\alpha = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{OC}^2} = 1$$

Es decir: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

De donde deducimos:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \qquad \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$$

$$\therefore \quad \text{sen}\ \alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \therefore \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$$

Relación entre la cotangente y la cosecante y entre la tangente y la secante. De la igualdad $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, al dividir por $\text{sen}^2\alpha$ tenemos:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$$

Separando:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$$

$$\therefore \quad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Si dividimos la igualdad $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ por $\cos^2$: α

$$\frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Separando:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\therefore \quad \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

CÁLCULO DE LAS FUNCIONES RESTANTES A PARTIR DE UNA FUNCIÓN DADA

A continuación dada una función trigonométrica de un ángulo, calcularemos las restantes.

1. Dado el seno, obtener todas las demás.

a) Coseno

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$$

$$\sqrt{\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$$

$$\therefore \cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$$

b) Tangente

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$$

pero: $\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$$

c) Cotangente

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}}$$

$$\therefore \cot\alpha = \frac{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{\text{sen}\ \alpha}$$

d) Secante

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

pero: $\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$

$$\therefore \sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$$

e) Cosecante

$$\csc\alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha}$$

2. Obtener todas las funciones trigonométricas en función de coseno.

a) Seno

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\sqrt{\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\therefore\ \text{sen a} = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

b) Tangente

$\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

pero: $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\therefore\ \tan\alpha = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$

c) Cotangente

$\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}}$

$\therefore\ \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

d) Secante

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

e) Cosecante

$\csc\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$

pero: $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\therefore\ \csc\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

3. En función de la tangente.

a) Seno

$\tan a = ,\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ pero $\cos a = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$

$\therefore\ \tan a = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$ $\therefore\ \tan 2\ a = \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}$

$\tan^2\alpha\,(1 - \text{sen}^2\alpha) = \text{sen}^2\alpha$

$\tan^2\alpha - \tan^2\alpha \bullet \text{sen}^2\alpha = \text{sen}^2\alpha$

$\tan^2\alpha = \text{sen}^2\alpha + \tan^2\alpha \bullet \text{sen}^2\alpha$

$\tan^2\alpha = \text{sen}^2\alpha\,(1 + \tan^2\alpha)$

$\therefore\ \text{sen}^2\alpha = \dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$\therefore\ \text{sen}\,\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

b) Coseno

$\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, pero $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\therefore\ \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ $\therefore\ \tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$\tan^2\alpha \bullet \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\tan^2\alpha \bullet \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha\,(\tan^2\alpha + 1) = 1$

$\therefore\ \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$

$\therefore\ \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

c) Cotangente

$\cot a = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

d) Secante

$\sec a = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

pero: $\cos a = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

$\therefore\ \sec a = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}}$

$\therefore\ \sec a = \sqrt{1+\tan^2\alpha}$

e) Cosecante

$$\csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\text{pero: } \operatorname{sen} \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}$$

$$\therefore \csc \alpha = \frac{1}{\dfrac{\tan \alpha}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}}$$

$$\therefore \csc \alpha = \frac{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$$

4. En función de la cotangente.

a) Seno

$$\cot a = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\text{pero: } \cos \alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\therefore \cot \alpha = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha}; \therefore \cot^2 \alpha = \frac{1-\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\therefore \cot^2 \alpha \bullet \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\cot^2 \alpha \bullet \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha (\cot^2 \alpha + 1) = 1; \therefore \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{\cot^2 \alpha + 1}$$

$$\therefore \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}}$$

b) Coseno

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\text{pero: } \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha}$$

$$\therefore \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}; \therefore \cot^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{1-\cos^2 \alpha}$$

$$\therefore \cot^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha$$

$$\cot^2 \alpha - \cot^2 \alpha \bullet \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$\cot^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \cot^2 \alpha \bullet \cos^2 \alpha$$

$$\cot^2 \alpha = \cos^2 \alpha (1 + \cot^2 \alpha)$$

$$\therefore \cos^2 \alpha = \frac{\cot^2 \alpha}{1+\cot^2 \alpha}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}}$$

c) Tangente

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

d) Secante

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\text{pero: } \cos \alpha = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}}$$

$$\therefore \sec \alpha = \frac{1}{\dfrac{\cot \alpha}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}}}$$

$$\therefore \sec \alpha = \frac{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}}{\cot \alpha}$$

e) Cosecante

$$\csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\text{pero: } \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}}$$

$$\therefore \csc \alpha = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 \alpha}}}$$

$$\therefore \csc \alpha = \sqrt{1+\cot^2 \alpha}$$

5. En función de la secante.

a) Seno

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\text{pero: } \cos \alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\therefore \sec \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

$\therefore \sec^2 \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha};} \therefore \sec^2\alpha(1-\text{sen}^2\alpha) = 1$

$\sec^2 \alpha - \sec^2 \alpha \bullet \text{sen}^2 \alpha = 1$

$-\sec^2 \alpha \bullet \text{sen}^2 \alpha = 1 - \sec^2 \alpha$

$\sec^2 \alpha \bullet \text{sen}^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1$

$\therefore \text{sen}^2 \alpha = \frac{\sec^2 \alpha - 1}{\sec^2 \alpha}; \therefore \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha}$

b) Coseno

$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

$\therefore \sec \alpha \bullet \cos a = 1; \therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$

c) Tangente

$\tan = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

pero: $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha}$ y $\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$

$\therefore \tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha}}{\frac{1}{\sec \alpha}}; \therefore \tan\alpha = \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}$

d) Cotangente

$\cot = \frac{1}{\tan\alpha}$

pero: $\tan = \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}$

$\therefore \cot = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$

e) Cosecante

$\csc = \frac{1}{\text{sen}\alpha} = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$

6. En función de la cosecante.

a) Seno

$\csc = \frac{1}{\text{sen}\alpha}; \csc \alpha \bullet \text{sen } \alpha = 1;$

$\therefore \text{sen a} = \frac{1}{\csc \alpha}$

b) Coseno

$\csc \alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$

pero: $\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

$\therefore \csc \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}; \therefore \csc^2 \alpha = \frac{1}{1-\cos^2 \alpha}$

$\therefore \frac{1}{\csc^2 \alpha} = 1 - \cos^2 \alpha; \quad \therefore \frac{1}{\csc^2 \alpha} - 1 = -\cos^2 \alpha$

$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{\csc^2 \alpha}; \therefore \cos^2 \alpha = \frac{\csc^2 \alpha - 1}{\csc^2 \alpha}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}}{\csc \alpha}$

c) Tangente

$\tan \alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

pero: $\text{sen a} = \frac{1}{\csc\alpha}$

y $\cos \alpha = \frac{\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}}{\csc \alpha}$

$\therefore \tan \alpha = \frac{\frac{1}{\csc \alpha}}{\frac{\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}}{\csc \alpha}}; \therefore \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}}$

d) Cotangente

$\cot \alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

pero: $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}}$

$\therefore \cot a = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}}}; \therefore \cot \alpha = \sqrt{\csc^2\alpha - 1}$

e) Secante

$\sec \alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2 \alpha - 1}}$

TABLA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

	sen α	cos α	tan α	cot α	sec α	csc α
sen α		$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{\csc\alpha}$
cos α	$\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$
tan α	$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{\cot\alpha}$	$\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
cot α	$\frac{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{\text{sen}\,\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\sqrt{\csc^2\alpha-1}$
sec α	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\sqrt{1+\tan^2\alpha}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$		$\frac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
csc α	$\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	$\sqrt{1+\cot^2\alpha}$	$\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Son igualdades que se cumplen para cualesquiera valores del ángulo que aparece en la igualdad.

Se conocen varios métodos para probar las identidades trigonométricas, y algunas son muy interesantes, pero explicaremos el que consideramos más sencillo:

"Se expresan todos los términos de la igualdad en función del seno y el coseno, se efectúan las operaciones indicadas, obteniéndose la identidad de ambos miembros".

Por ejemplo, demostrar que:

$\csc a \bullet \sec a = \cot a + \tan a$;

$$\frac{1}{\text{sen}\,a}\bullet\frac{1}{\cos a}=\frac{\cos a}{\text{sen}\,a}+\frac{\text{sen}\,a}{\cos a};$$

$$\frac{1}{\text{sen}\,a\,\cos\,a}=\frac{\cos^2 a+\text{sen}^2\,a}{\text{sen}\,a\,\cos\,a};$$

$$\frac{1}{\text{sen}\,a\cos\,a}=\frac{1}{\text{sen}\,a\,\cos\,a}$$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

En las **ecuaciones trigonométricas** la incógnita aparece como un ángulo de funciones trigonométricas, y no existe un método general para resolver una ecuación trigonométrica, por lo que comúnmente se transforma toda la ecuación de modo que quede expresada en una sola función trigonométrica para resolverla como una ecuación algebraica cualquiera. Aquí la única diferencia consiste en que la incógnita es una **función trigonométrica** en vez de ser x , y ó z.

Debido a que en ocasiones se tiene que elevar al cuadrado o multiplicar por un factor, se introducen soluciones extrañas, por lo que deben comprobarse las obtenidas en la ecuación dada. Por ejemplo, si al resolver una ecuación cuya incógnita es sen a obtenemos los valores – 1 y 2, des-preciamos el valor 2, porque el seno de un ángulo no puede valer más de 1.

Una vez resuelta la ecuación algebraicamente, debemos resolver la parte trigonométrica; es decir ya conocido el valor de la función trigonométrica de un ángulo se debe determinar cuál es ese ángulo.

Como ya vimos, las funciones trigonométricas repiten sus valores en los cuatro cuadrantes, siendo positivas en dos de ellos y negativas en los otros dos; esto significa que hay dos ángulos para los cuales una función trigonométrica tiene el mismo valor y signo.

Por otra parte, dado que las funciones trigonométricas de ángulos que se diferencian en un número exacto de vueltas son iguales, entonces será necesario añadir a las soluciones obtenidas un múltiplo cual-quiera de 360°, es decir, $n \bullet 360°$.

Ejemplos

1. Resolver la ecuación:

$$3 + 3\cos x = 2\,\text{sen}^2\,x$$

Expresando el seno en función del coseno:

$3 + 3 \cos x = 2(1 - \cos^2 x)$

$3 + 3 \cos x = 2 - 2 \cos^2 x$

$2 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 - 2 = 0$

$2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$

Considerando cos x como incógnita y aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado resulta:

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

Separando las dos raíces:

$$\cos x = \frac{-3+1}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\cos x = \frac{-3-1}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

De donde se obtienen las soluciones:

Para $\cos x = -\frac{1}{2}$ . . . . $x = 120° \pm n \bullet 360°$

Para cos x – = 1 . . . . $x = 180° \pm n \bullet 360°$

2. Resolver la ecuación sen x + 1 = cos x.
Expresando el coseno en función del seno resulta:

$$\text{sen } x + 1 = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$$

$$(\text{sen } x + 1)^2 = \left[\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}\right]^2$$

$\text{sen}^2 x + 2 \text{ sen } x + 1 = 1 - \text{sen}^2 x$

$\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x + 2 \text{ sen } x + 1 - 1 = 0$

$2 \text{ sen}^2 x + 2 \text{ sen } x = 0$

$\text{sen}^2 x + \text{sen } x = 0$

$\text{sen } x (\text{sen } x + 1) = 0$

En este caso, las dos soluciones son: sen x = 0; sen x = – 1

Para sen x = 0 . . . . $x = 90° \pm n \bullet 360°$

Para sen x = – 1 . . . . $x = 270° \pm n \bullet 360°$

EJERCICIOS

Resuelve estas ecuaciones (las soluciones se dan para ángulos menores de 360°):

1. $\text{sen } x = \text{sen } 80°$ — **R.** 80°

2. $\cos(40° - x) = \cos x$ — **R.** 20°

3. $\cos y = \cos(60° - y)$ — **R.** 30°

4. $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ — **R.** 30°

5. $\cos x + 2 \text{ sen } x = 2$ — **R.** 90°, 36° 52'

6. $2 \text{ sen } x = 1$ — **R.** 30°, 150°

7. $2 \cos x = \cot x$ — **R.** 30°, 150°

8. $\csc x = \sec x$ — **R.** 45°, 225°

9. $2 \cos x \bullet \tan x - 1 = 0$ — **R.** 30°, 150°

10. $4 \cos^2 x = 3 - 4 \cos x$ — **R.** 60°, 300°

11. $\cos^2 x = \frac{3(1 - \text{sen } x)}{2}$ — **R.** 30°, 150°, 90°

12. $\csc^2 x = 2 \cot^2 x$ — **R.** 45°, 135°, 225°, 315°

13. $3 \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 3$ — **R.** 0°, 180°, 360°

14. $2 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x = 0$ — **R.** 0°, 180°, 210°

15. $\cos x + 2 \text{ sen}^2 x = 1$ — **R.** 0°, 360°, 120°, 240°

16. $\cos x = \sqrt{3} \text{ sen } x$ — **R.** 30°, 150°, 210°, 330°

17. $\sqrt{3} \text{ sen } x = 3 \cos x$ — **R.** 60°, 120°, 240°, 300°

18. $\tan^2 x + 3 = 2 \sec^2 x$ — **R.** 45°, 135°, 225°, 315°

19. $\text{sen } x = \cos x$ — **R.** 45°, 225°

Calcula las otras funciones sabiendo que:

20. $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

R. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot x = \sqrt{3}$, $\sec x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\csc x = 2$

21. $\cos x = \frac{1}{5}$

R. $\text{sen } x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\tan x = 2\sqrt{6}$

$\cot x = \frac{\sqrt{6}}{12}$, $\sec x = 5$

$\csc x = \frac{5\sqrt{6}}{12}$

22. $\tan x = \frac{3}{4}$ **R.** $\text{sen } x = \frac{3}{5}, \cos x = \frac{4}{5}$

$\cot x = \frac{4}{3}; \sec x = \frac{5}{4}$

$\csc x = \frac{5}{3}$

23. $\cot x = \frac{3}{2}$ **R.** $\text{sen } x = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos x = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\tan x = \frac{2}{3}, \sec x = \sqrt{\frac{13}{3}}$

$\csc x = \frac{13}{2}$

24. $\sec x = \frac{\sqrt{34}}{5}$ **R.** $\text{sen } x = \frac{3\sqrt{24}}{34}, \ \cos x = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

$\tan x = \frac{3}{5}, \ \cot x = \frac{5}{3}$

$\csc x = \frac{\sqrt{34}}{3}$

25. $\csc x = \frac{\sqrt{13}}{2}$ **R.** $\text{sen } x = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \ \cos x = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\tan x = \frac{2}{3}, \ \cot x = \frac{3}{2}$

$\sec x = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Prueba las siguientes identidades:

26. $\frac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x} = 1 - \frac{1}{\tan x}$

27. $\frac{\cos x}{\cot x} = \text{sen } x$

28. $\frac{\text{sen } x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$

29. $\frac{\tan x}{\text{sen } x} = \sec x$

30. $\frac{\sec y}{\tan y + \cot y} = \text{sen } y$

31. $\frac{\csc x}{\cot x} = \sec x$

32. $\frac{1 - \text{sen } x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \text{sen } x}$

33. $\text{sen}^4 z = \frac{1 - \cos^2 z}{\csc^2 z}$

34. $\sec x\,(1 - \text{sen}^2 x) = \cos x$

35. $\tan z \bullet \cos z \bullet \csc z = 1$

36. $\text{sen } x \bullet \sec x = \tan x$

37. $\frac{\tan x - \text{sen } x}{\text{sen}^3 x}$

38. $\frac{1}{\sec y + \tan y} = \sec y - \tan y$

39. $\tan x + \cot x = \frac{1}{\text{sen } x \bullet \cos x}$

40. $\frac{\csc x}{\tan x + \cot x} = \cos x$

41. $1 - 2\,\text{sen}^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

42. $\frac{\text{sen } x}{\cot x} = \sec x - \cos x$

43. $\frac{1 - \text{sen } x}{(\sec x - \tan x)^2}$

44. $\cos^2 x = (1 + \text{sen } x)(1 - \text{sen } x)$

45. $(1 - \text{sen}^2 x)(1 + \tan^2 x) = 1$

46. $\frac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x - \cos x} = \frac{\sec x + \csc x}{\sec x - \csc x}$

47. $\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{\csc^2 x}$

48. $\tan x + \tan y = \tan x \bullet \tan y\,(\cot x + \cot y)$

49. $2\,\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 + \text{sen}^2 x$

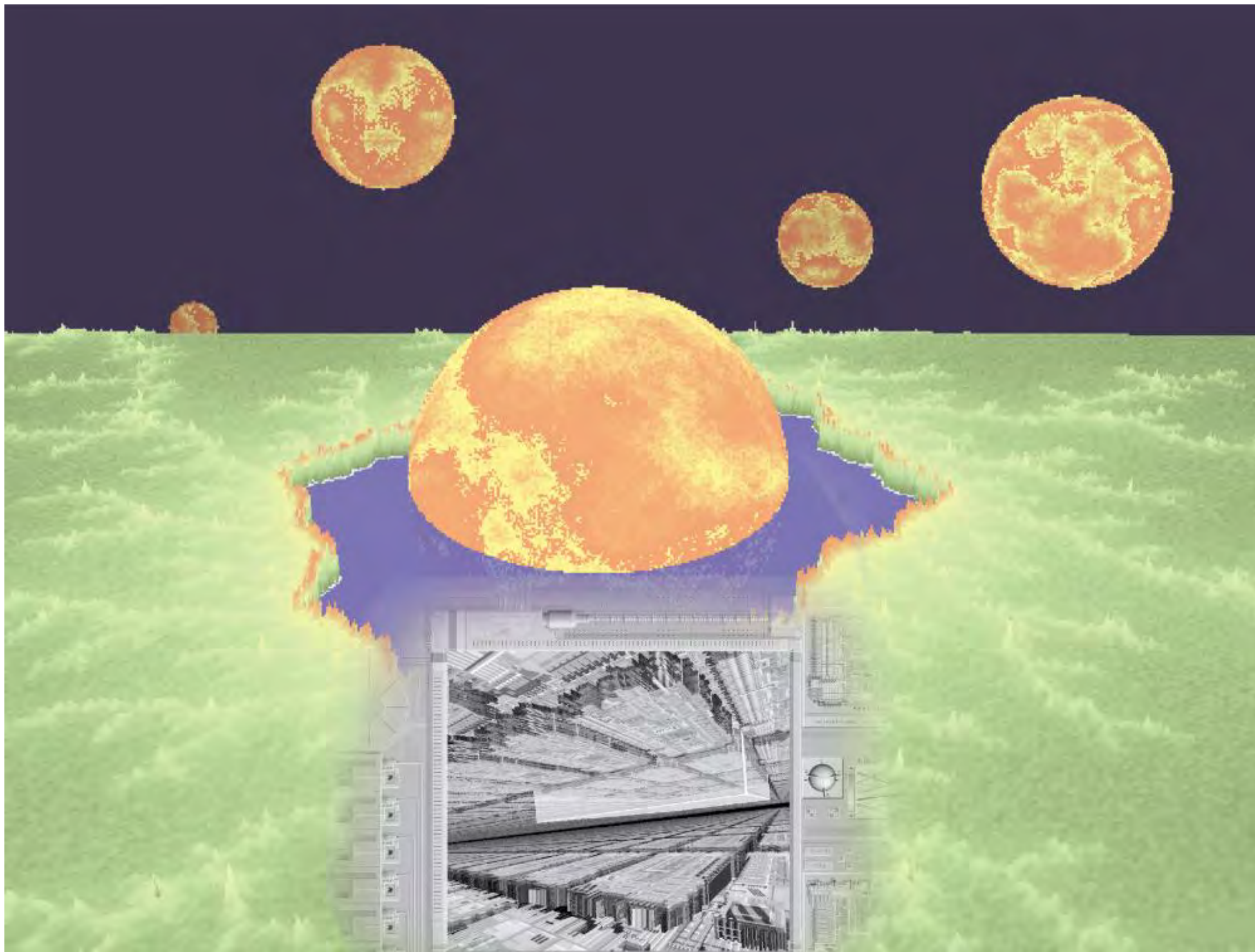
50. $\tan y + \cot y = \sec y \bullet \csc y$

51. $1 + \tan^2 x = \sec^3 x \bullet \cos x$

52. $\tan^2 x \bullet \cot^2 x = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

53. $\frac{1}{1 + \text{sen } y} + \frac{1}{1 - \text{sen } y} = 2\sec^2 y$

54. $(1 - \text{sen}^2 \beta)(1 + \tan^2 \beta) = \text{sen } \beta \bullet \sec \beta \bullet \cot \beta$



Las nuevas construcciones utilizan la línea, el rectángulo, la pirámide, la circunferencia, esferas, etc., para levantar edificios espectaculares que muestren la modernidad de las ciudades.

CAPÍTULO XXVI

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Para resolver problemas trigonométricos resultan muy útiles los siguientes teoremas: Teorema de los senos. Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Teorema del coseno. El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman.

Teorema de las tangentes. En todo triángulo, la diferencia entre dos de sus lados es a su suma como la tangente de la mitad de la diferencia entre los ángulos opuestos a dichos lados es la tangente de la mitad de la suma de dichos ángulos.

SUMA DE DOS ÁNGULOS

Siendo $\angle XOC = \angle a$ y $\angle COD = \angle b$ dos ángulos cuya suma es $\angle XOC + \angle COD = \angle XOD = \angle a + \angle b$.

Por un punto cualquiera de $\overline{OC}$ tracemos $\overline{OM} \perp \overline{OX}$ y $\overline{CD} \perp \overline{OC}$

Por el punto D tracemos $\overline{ON} \perp \overline{OX}$ y por el punto C tracemos $\overline{CH} \perp \overline{DN}$

Consideremos los triángulos $\Delta\, OCM$, $\Delta\, CDH$ y $\Delta\, OCD$

En $\Delta\, OCM$ y $\Delta\, CDH$: $\angle CDH = \angle MOC = a$ · · · · · por ser ambos agudos y tener lados perpendiculares.

Cálculo de sen ($a + b$). En la figura 558 tenemos:

$$\text{sen }(a + b) = \frac{\overline{ND}}{\overline{OD}} \qquad (1)$$

Pero: $\overline{ND} = \overline{NH} + \overline{HD}$ (2) (el todo es igual a la suma de las partes)

y $\overline{NH} = \overline{MC}$ (3) (lados opuestos de un rectángulo)

Sustituyendo (3) en (2):

$$\overline{ND} = \overline{MC} + \overline{HC} \qquad (4)$$

Figura 558

Sustituyendo (4) en (1):

$$\text{sen }(a + b) = \frac{\overline{MC}}{\overline{OC}} \bullet \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{HD}}{\overline{CD}} \bullet \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}}$$

Multiplicamos el numerador y el denominador de la primera fracción por $\overline{OC}$ así como el numerador y el denominador de la segunda por $\overline{OC}$, con lo que tenemos:

$$\text{sen }(a + b) = \frac{\overline{MC}}{\overline{OC}} \bullet \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{HD}}{\overline{CD}} \bullet \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \qquad (5)$$

Pero: $\frac{\overline{MC}}{\overline{OC}} = \text{sen}\, a$, $\quad \frac{\overline{HD}}{\overline{CD}} = \cos a$

$\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \cos b$, $\quad \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \text{sen}\, b$

Al sustituir estos valores en (5) tenemos:

$$\text{sen }(a + b) = \text{sen}\, a \cos b + \cos a \bullet \text{sen}\, b$$

Cálculo de cos ($a + b$)

$$\cos (a + b) = \frac{\overline{ON}}{\overline{OD}} \qquad (1)$$

Pero: $\overline{OM} = \overline{ON} + \overline{MN}$ El todo es igual a la suma de las partes.

$\therefore \overline{ON} = \overline{OM} - \overline{MN}$ (2) Despejando $\overline{ON}$.

y como: $\overline{MN} = \overline{HC}$ (3) Lados opuestos de un rectángulo

Al sustituir (3) en (2):

$$\overline{ON} = \overline{OM} - \overline{HC} \qquad (4)$$

Al sustituir (4) en (1):

$$\cos (a + b) = \frac{\overline{OM} - \overline{HC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{HC}}{\overline{OD}}$$

Multiplicamos el numerador y el denominador de la primera fracción por $\overline{OC}$ así como el numerador y el denominador de la segunda por $\overline{CD}$, con lo que tenemos:

$$\cos (a + b) = \frac{\overline{OM}}{\overline{OC}} \bullet \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{HC}}{\overline{CD}} \bullet \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \qquad (5)$$

Pero: $\frac{\overline{HC}}{\overline{CD}} = \text{sen a}$, $\quad \frac{\overline{OM}}{\overline{OC}} = \cos a$

$\frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \text{sen}\, b$, $\quad \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \cos b$

Al sustituir estos valores en (5):

$$\cos (a + b) = \cos a \bullet \cos b - \text{sen a} \bullet \text{sen b}$$

Cálculo de tan (a + b)

$$\tan (a + b) = \frac{\text{sen}\,(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\text{sen}\, a \bullet \cos b + \text{sen}\, b \bullet \cos a}{\cos a \bullet \cos b - \text{sen}\, a \bullet \text{sen}\, b}$$

Dividimos el numerador y el denominador por cos a • cos b, con lo que tenemos:

$$\tan(a+b) = \frac{\dfrac{\text{sen } a\cos b + \text{sen } b\cos a}{\cos a\cos b}}{\dfrac{\cos a\cos b - \text{sen } a\,\text{sen } b}{\cos a\cos b}}$$

$$\therefore \tan(a+b) = \frac{\dfrac{\text{sen } a\cos b}{\cos a\cos b} + \dfrac{\text{sen } b\cos a}{\cos a\cos b}}{\dfrac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b} - \dfrac{\text{sen } a\,\text{sen } b}{\cos a\cos b}}$$

simplificando: $\tan(a+b) = \dfrac{\dfrac{\text{sen } a}{\cos a} + \dfrac{\text{sen } b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\text{sen } a\,\text{sen } b}{\cos a\cos b}}$ (1)

Pero: $\dfrac{\text{sen } a}{\cos a} = \tan a$, (2)

y $\dfrac{\text{sen } b}{\cos b} = \tan a$, (3)

Al sustituir (2) y (3) en (1):

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \bullet \tan b}$$

Cálculo de cot ($a + b$)

$$\cot(a+b) = \frac{\cos(a+b)}{\text{sen }(a+b)} = \frac{\cos a\,\cos b - \text{sen } a\,\text{sen } b}{\text{sen } a\,\cos b + \text{sen } b\,\cos a}$$

Dividimos el numerador y el denominador por sen a sen b, con lo que tenemos:

$$\cot(a+b) = \frac{\dfrac{\cos a\cos b - \text{sen } a\,\text{sen } b}{\text{sen } a\,\text{sen } b}}{\dfrac{\text{sen } a\,\cos b + \text{sen } b\cos a}{\text{sen } a\,\text{sen } b}}$$

$\therefore \cot(a+b) = \dfrac{\dfrac{\cos a\cos b}{\text{sen } a\,\text{sen } b} - 1}{\dfrac{\cos b}{\text{sen } b} + \dfrac{\cos a}{\text{sen } a}}$ (1)

pero: $\dfrac{\cos a}{\text{sen } a} = \cot a$, (2)

y $\dfrac{\cos b}{\text{sen } b} = \cot b$ (3)

Al sustituir (2) y (3) en (1):

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a \bullet \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$$

DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Suponiendo en las fórmulas anteriores el ángulo b negativo, tendremos:

Cálculo de sen ($a - b$)

sen $[a + (-b)]$ = sen a cos $(-b)$ + sen $(-b)$ cos a (1)

Pero: cos $(-b)$ = cos b, (2) y sen $(-b)$ = – sen b (3)

Al sustituir (2) y (3) en (1):

$$\text{sen }(a-b) = \text{sen } a \bullet \cos b - \text{sen } b \bullet \cos a$$

Cálculo de cos ($a - b$)

cos $[a + (-b)]$ = cos a • cos $(-b)$ – sen a • sen $(-b)$ (1)

Pero: cos $(-b)$ = cos b, (2) y sen $(-b)$ = – sen b (3)

Al sustituir (2) y (3) en (1):

$$\cos(a-b) = \cos a \bullet \cos b + \text{sen } a \bullet \text{sen } b$$

Cálculo de tan ($a - b$)

$\tan[a + (-b)] = \dfrac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \bullet \tan(-b)}$ (1)

Pero: tan $(-b)$ = – tan b (2)

Al sustituir (2) en (1):

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \bullet \tan b}$$

Cálculo de cot ($a - b$)

$\cot[a + (-b)] = \dfrac{\cot a \bullet \cot(-b) - 1}{\cot a + \cot(-b)}$ (1)

Pero: cot $(-b)$ = – cot b (2)

Al sustituir (2) en (1):

$$\cot(a-b) = \frac{-\cot a \bullet \cot b - 1}{\cot a - \cot b};$$

y cambiando los signos tanto del numerador como del denominador:

$$\cot(a-b) = \frac{\cot a \bullet \cot b + 1}{\cot b - \cot a}$$

SECANTE Y COSECANTE DE LA SUMA Y LA DIFERENCIA DE DOS ARCOS

Aunque es posible deducir fórmulas para estos valores, dada su complejidad es preferible usar estas relaciones:

$$\sec(a \pm b) = \frac{1}{\cos(a \pm b)}, \quad \csc(a \pm b) = \frac{1}{\text{sen}\,(a \pm b)}$$

RESUMEN DE FÓRMULAS

sen ($a \pm b$) = sen a • cos b ± sen b • cos a

cos ($a \pm b$) = cos a • cos b K sen a • sen b

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \bullet \tan b}$$

$$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \bullet \cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a}$$

$$\sec(a \pm b) = \frac{1}{\cos(a \pm b)}$$

$$\csc(a \pm b) = \frac{1}{\text{sen}\,(a \pm b)}$$

Sabiendo que sen $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y cos $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcularemos las funciones trigonométricas de ($a \pm b$)

$$\cos a = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan a = \frac{\text{sen}\,a}{\cos a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\text{sen}\,a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$

$$\text{sen}\,b = \sqrt{1 - \cos^2 b} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\tan b = \frac{\text{sen}\,b}{\cos b} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \bullet \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot b = \frac{\cos b}{\text{sen}\,b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Al sustituir estos valores en las fórmulas resulta:

$$\text{sen}\,(a \pm b) = \frac{\sqrt{2}}{2} \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2} \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \text{sen}\,(a + b) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \text{sen}\,(a - b) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(a \pm b) = \frac{\sqrt{2}}{2} \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} \mp \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \cos(a + b) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \cos(a - b) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 \mp 1 \bullet \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 \mp \sqrt{3}}{3}} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3 \mp \sqrt{3}}$$

$$\tan(a + b) = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \bullet \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3}$$

$$\therefore \tan(a + b) = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2 + \sqrt{3})}{} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\tan(a - b) = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \bullet \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\cot(a \pm b) = \frac{1}{\tan(a \pm b)}$$

$$\therefore \cot(a + b) = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \bullet \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\cot(a - b) = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \bullet \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} =$$

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\sec(a \pm b) = \frac{1}{\cos(a \pm b)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{4} \mp \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}$$

$$\sec(a + b) = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \bullet \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2} = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$$\sec(a - b) = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \bullet \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} = \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$\csc(a \pm b) = \frac{1}{\text{sen}(a \pm b)} = \frac{4}{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}$$

$$\therefore \csc(a + b) = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \bullet \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6-2} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$\csc(a - b) = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

EJERCICIOS

Aplicando las fórmulas de las funciones trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos y los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables (30°, 45°, 60°), calcula las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos:

1. 105°

R. sen 105° = $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$

cos 105° = $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$

tan 105° = - (2 + $\sqrt{3}$)

cot 105° = $\sqrt{3}-2$

sec 105° = $-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$

csc 105° = $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

2. 75°

R. sen 75° = $\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

cos 75° = $\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

tan 75° = 2 + $\sqrt{3}$

cot 75° = 2 $-\sqrt{3}$

sec 75° = $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

csc 75° = $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

3. 15°

R. sen 15° = $\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

cos 15° = $\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

tan 15° = $2-\sqrt{3}$

cot 15° = $2+\sqrt{3}$

sec 15° = $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

csc 15° = $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

Calcula las funciones trigonométricas de los ángulos (a + b) sabiendo que:

4. sen a = $\frac{3}{5}$ y sen b = $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

R. sen a = $\frac{3}{5}$ y sen b = $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

sen (a + b) = $\frac{17\sqrt{13}}{65}$

sen (a – b) = $\frac{\sqrt{13}}{65}$

cos (a + b) = $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

cos (a – b) = $\frac{18\sqrt{13}}{65}$

tan (a +b) = $\frac{17}{6}$

tan (a – b) = $\frac{1}{18}$

cot (a + b) = $\frac{6}{17}$

cot (a – b) = 18

sec (a + b) = $\frac{5\sqrt{13}}{6}$

sec (a – b) = $\frac{5\sqrt{13}}{18}$

csc (a + b) = $\frac{5\sqrt{13}}{17}$

csc (a - b) = $5\sqrt{13}$

5. cos a = $\frac{5\sqrt{41}}{41}$ y cos b = $\frac{5\sqrt{61}}{61}$

R. sen (a + b) = $\frac{50\sqrt{2501}}{2501}$

sen (a - b) = $\frac{-10\sqrt{2501}}{2501}$

cos (a + b) = $\frac{\sqrt{2501}}{2501}$

cos (a - b) = $\frac{49\sqrt{2501}}{2501}$

tan (a + b) = 50

tan (a - b) = $-\frac{10}{49}$

sec (a + b) = $\sqrt{2501}$

sec (a - b) = $\frac{\sqrt{2501}}{49}$

6. sen a = $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ y cos b = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

R. sen (a + b) = $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

sen (a - b) = $\frac{10}{10}$

cos (a + b) = $\frac{\sqrt{10}}{10}$

cos (a - b) = $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

tan (a + b) = – 3

tan (a - b) = $\frac{1}{3}$

sec (a + b) = $-\sqrt{10}$

sec (a - b) = $\frac{\sqrt{10}}{3}$

csc (a + b) = $\frac{\sqrt{10}}{3}$

csc (a - b) = $\sqrt{10}$

7. tan a = $\frac{1}{2}$ y cot b = $\frac{1}{4}$

R. sen (a + b) = $\frac{9\sqrt{85}}{85}$

sen (a - b) = $\frac{-7\sqrt{85}}{85}$

cos (a + b) = $\frac{-2\sqrt{85}}{85}$

cos $(a-b)=\frac{6\sqrt{85}}{85}$

tan (a + b) = $\frac{-9}{2}$

tan (a - b) = $\frac{-7}{6}$

cot (a + b) = $\frac{-2}{9}$

cot (a - b) = $\frac{-6}{7}$

sec (a + b) = $\frac{-\sqrt{85}}{2}$

sec (a - b) = $\frac{\sqrt{85}}{6}$

csc (a + b) = $\frac{\sqrt{85}}{9}$

csc (a - b) = $\frac{-\sqrt{85}}{7}$

Simplifica:

8. cos (a – b) sen a – sen (a – b) cos a
R. sen b

9. (sen α + sen β)^2 + (cos α – cos)^2 + 2 cos (α +β)
R. 2

10. (sen α – sen β)^2 + 2 sen α sen β
R. sen^2 α + sen^2 β

11. (sen α – sen β)^2 + (cos α + cos β)^2 – 2 cos (α– β)
R. 2 – 4 sen α sen β

Demuestra estas identidades:

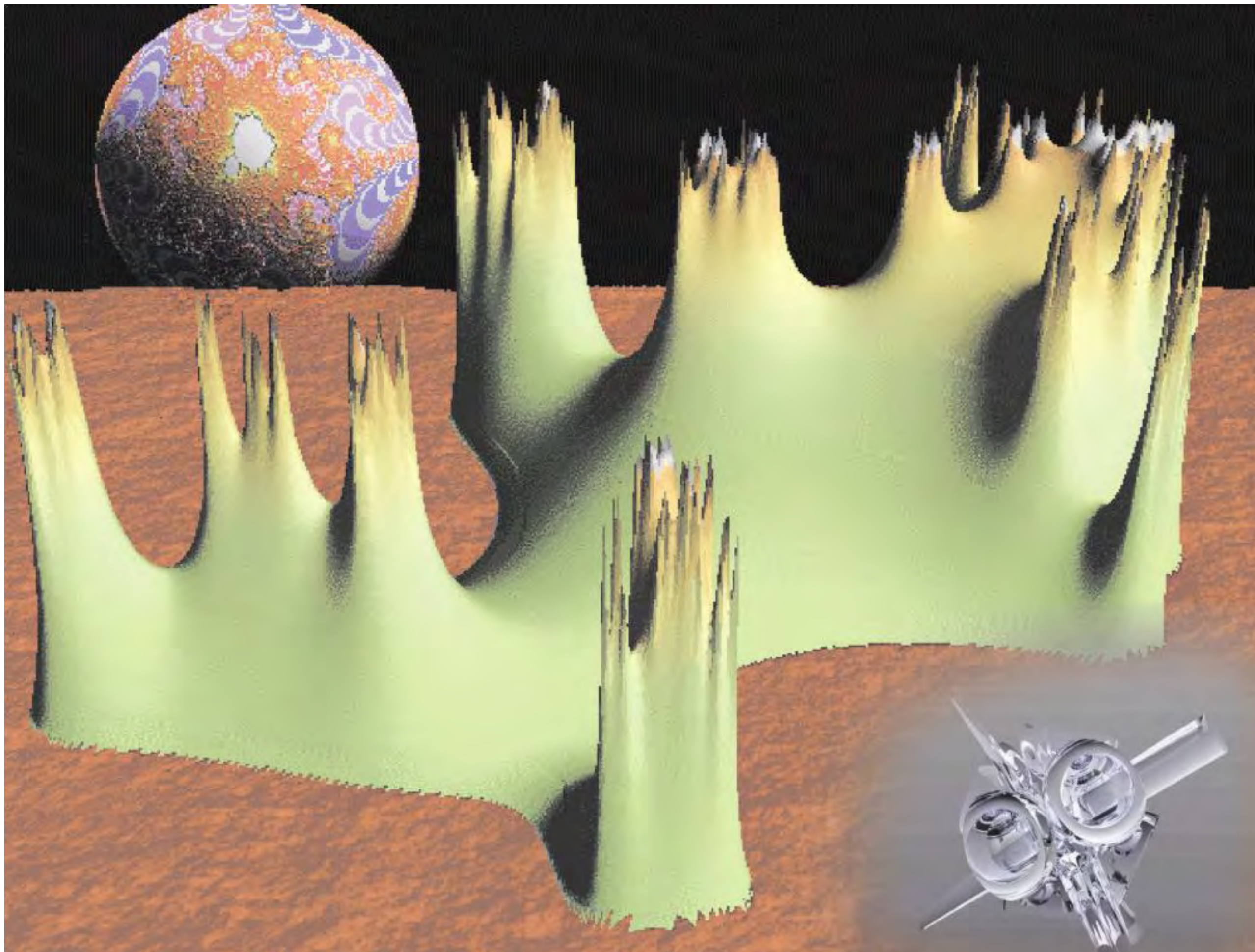
12. cos (a+ 45°) · sen (a+ 45°) = $\frac{1}{2}$ (2 cos^2 a - 1)

13. cos (x + y) cos y + sen (x + y) sen y = cos x

14. cos (x - 30°) · sen (x + 30°) = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ + sen x cos x

15. sen (x + y) sen (x – y) = cos^2 y – cos^2x

16. cos (a + b) • cos (a – b) = cos^2 a + cos^2 b – 1



La Geometría aplicada en el dibujo es eminentemente práctica y básica, trátese indistintamente del estudio del espacio, de formas totalmente imaginarias o reales.

CAPÍTULO XXVII

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DUPLO, ÁNGULO TRIPLO Y ÁNGULO MITAD

Para calcular una función trigonométrica de un ángulo duplo, hay que multiplicar la función por 2, por ejemplo sen a = sen 2a.

Para calcular una función trigonométrica de un ángulo triplo, hay que multiplicar la función por 3, por ejemplo sen a = sen 3a.

Para calcular una función trigonométrica de la mitad de un ángulo, hay que dividirla entre 2, por ejemplo sen a = sen a/2.

FUNCIONES DEL ÁNGULO DUPLO

Cálculo de sen $2a$. Si en la igualdad:

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\cos b + \text{sen}\,b\cos a$,

hacemos $b = a$, resulta:

$\text{sen}\,(a+a) = \text{sen}\,a\cos a + \text{sen}\,a\cos a$

$\therefore\ \text{sen}\,2a = 2\,\text{sen}\,a\cos a$

Cálculo de cos $2a$. Si en la igualdad:

$\cos\,(a+b) = \cos a\cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$,

hacemos $b = a$, resulta:

$\cos\,(a+a) = \cos a\cos a - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,a$

$\therefore\ \cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

Si se quiere $\cos^2 a$ en función solamente del coseno, se sustituye:

$\text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$

y resulta: $\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$

$= \cos^2 a - 1 + \cos^2 a$

$\therefore\ \cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

Cálculo de tan $2a$.

Si en la igualdad:

$$\tan\,(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \bullet \tan b}$$

hacemos $b = a$, resulta:

$$\tan\,(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \bullet \tan a}$$

por lo tanto:

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO TRIPLO

Cálculo de sen $3a$.

Si en la fórmula:

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\cos b + \text{sen}\,b\cos a$,

hacemos $b = 2a$, resulta:

$\text{sen}\,(a+2a) = \text{sen}\,a\cos 2a + \text{sen}\,2a\cos a$

$\therefore\ \text{sen}\,3a = \text{sen}\,a\,(\cos^2 a - \text{sen}^2 a) + (2\,\text{sen}\,a\cos a)\cos a$

$= \text{sen}\,a\cos^2 a - \text{sen}^3 a + 2\,\text{sen}\,a\cos^2 a$

Y como: $\cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 a$, sustituyendo resulta:

$\text{sen}\,3a = \text{sen}\,a\,(1 - \text{sen}^2 a) - \text{sen}^3 a + 2\,\text{sen}\,a\,(1 - \text{sen}^2 a)$

$\therefore\ \text{sen}\,3a = 3\,\text{sen}\,a - 4\,\text{sen}^3 a$

Cálculo de cos $3a$.

Si en la fórmula:

$\cos\,(a+b) = \cos a\cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$,

hacemos $b = 2a$, resulta:

$\cos\,(a+2a) = \cos a\cos 2a - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,2a$

$\therefore\ \cos 3a = \cos a\,(\cos^2 a - \text{sen}^2 a) - \text{sen}\,a\,(2\,\text{sen}\,a\cos a)$

$= \cos^3 a - \cos a\,\text{sen}^2 a - 2\cos a\,\text{sen}^2 a$

Y al sustituir $\text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$ tendremos:

$\cos 3a = \cos^3 a - \cos a\,(1 - \cos^2 a) - 2\cos a\,(1 - \cos^2 a)$

$= \cos^3 a - \cos a + \cos^3 a - 2\cos a + 2\cos^3 a$

$\therefore \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

Cálculo de tan $3a$.

Si en la fórmula:

$$\tan\,(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \bullet \tan b}$$

hacemos $b = 2a$, resulta:

$$\tan\,(a+2a) = \frac{\tan a + \tan 2a}{1 - \tan a \bullet \tan 2a}$$

Al sustituir $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$, resulta:

$$\tan 3a = \frac{\tan a + \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}}{1 - \tan a \bullet \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}} = \frac{\dfrac{\tan a - \tan^3 a + 2\tan a}{1 - \tan^2 a}}{\dfrac{1 - \tan^2 a - 2\tan^2 a}{1 - \tan^2 a}}$$

por lo tanto:

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

Cálculo de sen $\frac{x}{2}$. Si en la fórmula:

$\cos 2a = 1 - 2\,\text{sen}^2 a$,

hacemos $a = \frac{x}{2}$, resulta:

$\cos \frac{2x}{2} = 1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}$

$\therefore \cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}$

y al despejar $\text{sen}^2 \frac{x}{2}$

$2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$;

$\text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$

$\therefore \text{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

Cálculo de cos $\frac{x}{2}$. Si en la fórmula:

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$;

hacemos $a = \frac{x}{2}$, resulta:

$\cos^2 2\,\frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$

$\therefore \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$

y al despejar $\cos^2 \frac{x}{2}$:

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

$\therefore \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

Cálculo de tan $\frac{x}{2}$. De la fórmula:

$\tan \frac{x}{2} = \frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{1+\cos x}{2}}}$

$\therefore \tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

TRANSFORMACIÓN DE SUMAS Y DIFERENCIAS DE SENOS, COSENOS Y TANGENTES EN PRODUCTOS

Si a y b son dos ángulos y hacemos:

$a + b = A$ y $a - b = B$

al resolver el sistema:

$a + b = A$

$a - b = B$

Tenemos: $a = \frac{1}{2}(A + B)$, $b = \frac{1}{2}(A - B)$

Suma de senos. De las fórmulas:

$\text{sen}(a + b) = \text{sen}\,a \cos b + \text{sen}\,b \cos a$; (1)

$\text{sen}(a - b) = \text{sen}\,a \cos b - \text{sen}\,b \cos a$ (2)

Al sumar (1) y (2):

$\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b) = 2\,\text{sen}\,a \cos b$

y sustituyendo los valores de $a + b$, a _ b, a y b, resulta:

$\text{sen}\,A + \text{sen}\,B = 2\,\text{sen}\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$

Diferencia de senos. De las mismas fórmulas restamos (1) y (2):

$\text{sen}(a + b) = \text{sen}\,a \cos b + \text{sen}\,b \cos a$; (1)

$-\text{sen}(a - b) = -\text{sen}\,a \cos b + \text{sen}\,b \cos a$, (2)

y resulta: $\text{sen}(a + b) - \text{sen}(a - b) = 2\,\text{sen}\,b \cos a$

Sustituyendo:

$\text{sen}\,A - \text{sen}\,B = 2\,\text{sen}\frac{1}{2}(A - B)\cos\frac{1}{2}(A + B)$

Suma de cosenos. De las fórmulas:

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$; (1)

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$, (2)

al sumar (1) y (2):

$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos a \cos b$,

y sustituyendo:

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$

Diferencia de senos. En las mismas fórmulas:

$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$; (1)

$-\cos (a - b) = -\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ (2)

Al restar (1) y (2):

$\cos (a + b) - \cos (a - b) = -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Sustituyendo:

$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (A + B) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (A - B)$

Suma de tangentes. De la fórmula:

$\tan A + \tan B = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B}$,

se deduce:

$\tan A + \tan B = \frac{\operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A}{\cos A \cos B}$

$\therefore \tan A + \tan B = \frac{\operatorname{sen} (A + B)}{\cos A \cos B}$

Diferencia de tangentes. De la fórmula:

$\tan A - \tan B = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} - \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B}$,

se deduce:

$\tan A - \tan B = \frac{\operatorname{sen} A \cos B - \operatorname{sen} B \cos A}{\cos A \cos B}$

$\therefore \tan A - \tan B = \frac{\operatorname{sen} (A - B)}{\cos A \cos B}$

Resumen

$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A - B)$

$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (A - B) \cos \frac{1}{2} (A + B)$

$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A - B)$

$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (A + B) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (A - B)$

$\tan A + \tan B = \frac{\operatorname{sen} (A + B)}{\cos A \bullet \cos B}$

$\tan A - \tan B = \frac{\operatorname{sen} (A - B)}{\cos A \bullet \cos B}$

EJERCICIOS

1. Sabiendo que $\operatorname{sen} q = \frac{3}{5}$, calcula el seno, el coseno y la tangente del ángulo $2q$.

R. $\operatorname{sen} 2q = \frac{24}{25}$, $\cos 2q = \frac{7}{25}$, $\tan 2q = \frac{24}{7}$

2. Sabiendo que $\operatorname{sen} r = \frac{1}{2}$, calcula el seno, el coseno y la tangente del ángulo $3r$.

R. $\operatorname{sen} 3r = 1$, $\cos 3r = 0$, $\tan 3r =$ no existe.

3. Si $\operatorname{sen} s = \frac{7}{15}$, calcula el seno, el coseno y la tangente del ángulo $\frac{s}{2}$.

R. $\operatorname{sen} \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{15 - 4\sqrt{11}}{30}}$,

$\cos \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{15 + 4\sqrt{11}}{30}}$,

$\tan \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{15 - 4\sqrt{11}}{7}}$

4. Si $\cos u = \frac{2}{5}$, calcula el seno, el coseno y la tangente de los ángulos $2u$ y $3u$.

R. $\operatorname{sen} 2u = \frac{4\sqrt{21}}{25}$, $\operatorname{sen} 3u = \frac{-9\sqrt{21}}{125}$

$\cos 2u = \frac{-17}{25}$, $\cos 3u = \frac{-118}{125}$

$\tan 2u = \frac{-4\sqrt{21}}{17}$, $\tan 3u = \frac{9\sqrt{21}}{118}$

5. Calcula las funciones trigonométricas de los ángulos 15° y 22° 30'

R. $\operatorname{sen} 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ $\cot 15° = 2 + \sqrt{3}$

$\cos 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ $\sec 15° = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$ $\csc 15° = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

$\operatorname{sen} 22° 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ $\cot 22° 30' = \sqrt{2} + 1$

$\cos 22° 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $\sec 22° 30' = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$

$\tan 22°30' = \sqrt{2}-1$ $\csc 22° 30' = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

6. Efectúa la demostración:

a) tan x sen 2x = 2 sen2 x

b) cos 2a = cos4 a - sen4a

c) = $\frac{\text{sen } 2y}{1+\cos\ 2y}$ tan y

d) $\frac{2}{\cot a+\tan a}$ = sen 2a

e) csc 2x = $\frac{\text{sen } 2x}{1+\cos 2x}+\cot 2x$

f) $\frac{1+\cos 2x}{\cot x}=\text{sen } 2x$

g) $\frac{\cos 2x}{1-\text{sen } 2x}=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) sen x = $-\frac{1}{2}$sen 2x   **R.** 180°

b) cos 2x = cos 2x   **R.** 0°, 180°, 360°

c) tan x = sen 2x   **R.** 45°, 135°, 225°, 315°

d) 3 tan x = - tan 2x   **R.** 52° 14', 127° 46', 232° 14', 307° 46'

Transforma en producto:

8. sen 35° + sen 25°   **R.** cos 5°

9. sen 35° - sen 25°   **R.** $\sqrt{3}$ sen 5°

10. cos 5x + cos 3x   **R.** 2 cos 4x cos x

11. cos 8a + cos 2a   **R.** 2 cos 5a cos 3a

12. sen 4x - sen x   **R.** 2 sen $\frac{3}{2}$ x cos $\frac{5}{2}$x

13. sen (45° + x) - sen (45° - x) **R.** $\sqrt{2}$ sen x

14. cos 25° - cos 35°   **R.** sen 5°

15. cos x - cos 4x   **R.** 2 sen $\frac{5}{2}$ x sen $\frac{3}{2}x$

16. sen 7x + sen 3x   **R.** 2 sen 5x cos 2x

17. cos 40° + cos 20°   **R.** $\sqrt{3}$ cos 10°

18. sen 105° - sen 15°   **R.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

19. cos 10° - cos 70°   **R.** sen 40°

20. cos (90° + a) - cos (90° - a) R. - 2 sen a

21. sen 90° - sen 30°   **R.** $\frac{1}{2}$

22. cos 50° - cos 40°   **R.** $-\sqrt{2}$ sen 5°

23. cos 60° - cos 30°   **R.** $-\sqrt{2}$ sen 15°

24. sen 75° - sen 15°   **R.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

25. cos 75° + cos 15°   **R.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

26. sen 40° + sen 20°   **R.** cos 10°

27. sen 75° + sen 15°   **R.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

28. cos 5x + cos x   **R.** 2 cos 3x cos 2x

29. cos 2x - cos x   **R.** - 2 sen $\frac{3}{2}$x sen $\frac{1}{2}$ x

30. sen 2x + sen 3x   **R.** 2 sen $\frac{5}{2}$ x cos $\frac{1}{2}$ x

31. sen 7x - sen 9x   **R.** - 2 sen x cos 8x

32. sen 3x + sen 5x   **R.** 2 sen 4x cos x

33. tan 20° + tan 50°   **R.** sec 50°

34. tan 30° + tan 60°   **R.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

35. tan 50° - tan 25°   **R.** tan 25° sec 50°

36. tan 45° - tan 15°   **R.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sec 15°

37. tan (45° - a) + tan (45° + a) **R.** 2 sec 2^{a}

38. sen 60° + cos 60° **R.** $\sqrt{2}$ cos 15°

39. cos 30° - sen 30° **R.** $\sqrt{2}$ sen 15°

40. sen 30° + cos 30° **R.** $\sqrt{2}$ cos 15°

41. cos 60° - sen 60° **R.** $-\sqrt{2}$ sen 15°

42. tan 60° + cot 60° **R.** $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

Transformando en producto demuestra las siguientes igualdades:

43. $\frac{\cos 50^o - \cos 40^o}{\cos 25^o - \cos 35^o} = -\sqrt{2}$

44. $\frac{\text{sen } 35^o - \text{sen} 25^o}{\cos 50^o - \cos 40^o} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

45. cos 75° - sen 15° = sen 75° - cos 15°

46. sen 60° + cos 60° = sen 30° + cos 30°

47. $\frac{\text{sen } 35^o \ - \text{sen } 25^o}{\cos 25^o \ - \cos 35^o} = \frac{\cos 40^o + \cos 20^o}{\text{sen } 40^o + \text{sen } 20^o}$

Transformando en producto, simplifica:

48. sen (30° + x) + sen (30° - x) **R.** cos x

49. sen (45° + x) - sen (45° - x) **R.** $\sqrt{2}$ sen x

50. cos (45° + x) + cos (45° - x) **R.** $\sqrt{2}$ cos x

51. cos (30° + x) - cos (30° - x) **R.** - sen x

52. $\frac{\text{sen } (\alpha+\beta) + \text{sen } (\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}$ **R.** tan α

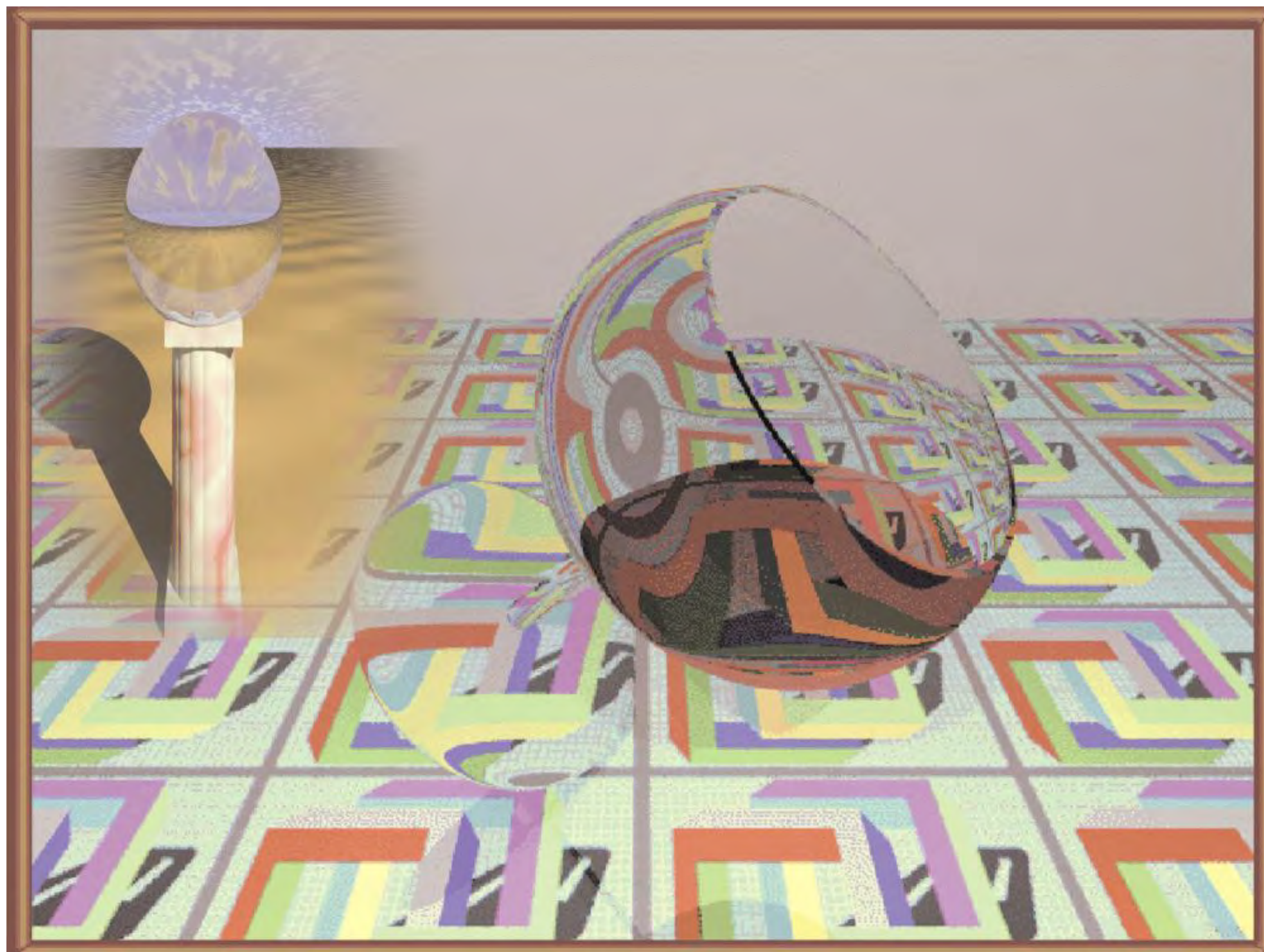
53. $\frac{\text{sen } (\alpha+\beta) - \text{sen } (\alpha-\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)}$ **R.** cot a tan β

54. $\frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}$ **R.** - tan α tan β

55. $\frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{\text{sen } (\alpha+\beta) - \text{sen } (\alpha-\beta)}$ **R.** - tan α

56. $\frac{\text{sen } (\alpha+\beta) + \text{sen } (\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}$ **R.** - cot β

57. $\frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{\text{sen } (\alpha+\beta) - \text{sen } (\alpha-\beta)}$ **R.** cot β



En la geometría óptica, el uso de figuras y formas básicas como las grecas, los círculos, etc., unido a la combinación de diversos colores permite crear una gran pluralidad de ambientes gráficos.

CAPÍTULO XXVIII

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Sabemos que un **triángulo** consta de seis elementos: 3 ángulos y 3 lados y está perfectamente determinado, al conocer **tres** de ellos, que uno de los datos será un lado. De este modo, para resolver un triángulo sólo hay que calcular tres de los elementos una vez conocidos los otros tres.

En todo triángulo la suma de sus ángulos es constante e igual a dos rectos. En todo triángulo existe una serie de puntos notables: el ortocentro, punto de intersección de las tres alturas; el baricentro, punto de intersección de las tres medianas, situados a los dos tercios de cualquiera de ellas a partir del vértice respectivo.

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

En cuanto a los **triángulos rectángulos**, dado que tienen un ángulo recto, están determinados o se pueden resolver conociendo sólo dos de sus elementos, siempre que uno sea un lado, lo que nos conduce a diversos casos de resolución de triángulos rectángulos:

1. Dados los dos catetos.
2. Dados un cateto y la hipotenusa.
3. Dados un cateto y un ángulo agudo.
4. Dados la hipotenusa y un ángulo agudo.

Primer caso: Dados los dos catetos.

Datos	**Fórmulas**
b = 50 m	a = $\sqrt{b^2+c^2}$
c = 64 m	tan B = $\frac{b}{c}$
A = 90°	C = 90° – B

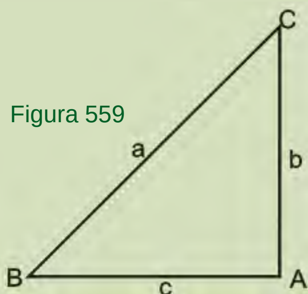


Figura 559

Cálculo de *a*

$$a = \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{50^2+64^2} = \sqrt{2500+4096} = \sqrt{6596} = 81.21m$$

Cálculo de B

$$\tan B = \frac{b}{c} = \frac{50}{64} = \frac{32}{25} = 0.78125;$$

$$\therefore \; B = 38°$$

Cálculo de *C*

$$C = 90° - B = 90° - 38° = 52°$$

Segundo caso: Dados un cateto y la hipotenusa (Fig. 560).

Datos	**Fórmulas**
a = 60 cm	b = $\sqrt{a^2-c^2}$
c = 28 cm	sen C = $\frac{c}{a}$
A = 90°	B = 90° – C

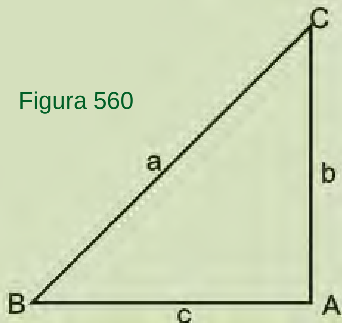


Figura 560

Cálculo de *b*

$$b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{60^2-28^2} = \sqrt{3600-784} = \sqrt{2816} = 53.06\,cm$$

Cálculo de *C*

$$\text{sen } C = \frac{c}{a} = \frac{28}{60} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} =$$

$$= 0.46666; \; \therefore \; C = 27°\,49'$$

Cálculo de *B*

$$B = 90° - C = 90° - 27°49' = 62°11'$$

Tercer caso: Dados un cateto y un ángulo (Fig. 561).

Datos	**Fórmulas**
b = 1.4 m	B = 90° – C
c = 37°	c = b tan C
A = 90°	a = $\frac{b}{\text{sen } b}$

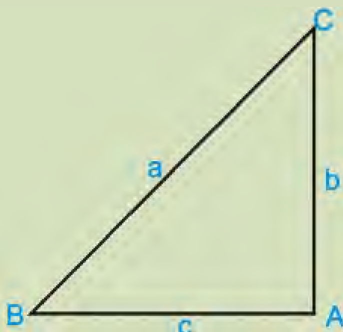


Figura 561

Cálculo de *B*

$$B = 90° - C = 90° - 37° = 53°$$

Cálculo de *c*

$$c = b \tan C = 1.4 \tan 37° = 1.4 \times 0.75355 = 1.06 \text{ m}$$

Cálculo de *a*

$$a = \frac{b}{\text{sen } b} = \frac{1.4}{\text{sen } 53º}$$

$$\frac{1.4}{0.79864} = 1.76\,m = 1.76 \text{ m}$$

Cuarto caso: Dados la hipotenusa y un ángulo agudo (Fig. 562).

Datos	**Fórmulas**
a = 20.1 km	B = 90° – C
C = 38° 16'	b = a sen B
A = 90°	c = a sen C

Cálculo de *B*

$$B = 90° - C = 90° - 38°16' = 51°44'$$

Cálculo de *b*

$$b = a \text{ sen } B = 20.1 \text{ sen } 51°44' = 20.1 \times 0.78514 = 15.78 \text{ km}$$

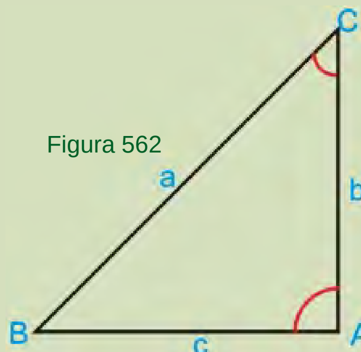


Figura 562

Cálculo de *C*

$$c = a \text{ sen } C = 20.1 \text{ sen } 38°16' = 20.1 \times 0.61932 = 12.45 \text{ km}$$

ÁREA DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Ya sabemos que el área de un triángulo rectángulo está dada por la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\ \text{base} \times \text{altura}$$

En el triángulo rectángulo se pueden tomar como base y altura los dos catetos (Fig. 563), fórmula que puede presentarse de varias formas que son las siguientes:

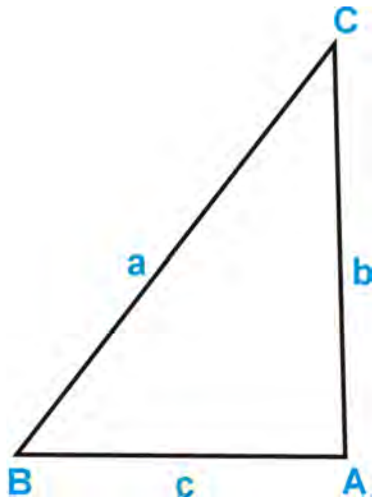


Figura 563

En el primer caso:

$$A = \frac{1}{2}\ bc$$

En el segundo caso:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad A = \frac{1}{2}\ \text{bc}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad A = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2} \quad (c)$$

$$A = \frac{1}{2}c\sqrt{a^2 - c^2}$$

$$A = \frac{1}{2}c\sqrt{(a + c)(a - c)}$$

o también

$$A = \frac{1}{2}\ \text{b}\ \sqrt{a^2 - b^2};$$

$$A = \frac{1}{2}\ \text{b}\ \sqrt{(a + b)(a - b)}$$

En el tercer caso:

$$A = \frac{1}{2}\ \text{bc}$$

$$\text{c = b tan C} \quad A = \frac{1}{2}\ \text{b (b tan C)}$$

$$A = \frac{1}{2}\ \text{b 2 tan C}$$

o también:

$$A = \frac{1}{2}\ \text{c}^2\ \text{tan B}$$

En el cuarto caso:

$$A = \frac{1}{2}\ \text{bc}$$

$$\text{b = a sen B} \quad A = \frac{1}{2}\ \text{a sen B a sen C}$$

$$\text{c = a sen C} \quad A = \frac{1}{2}\ \text{a}^2\ \text{sen B sen C}$$

pero: sen *B* = cos *C* y sen *C* = cos *B*

$$\therefore\ A = \frac{1}{2}\ \text{a}^2\ \text{sen C cos C ;} \qquad (1)$$

$$\text{o} \quad A = \frac{1}{2}\ \text{a}^2\ \text{sen B cos B ;} \qquad (2)$$

pero: sen 2*B* = 2 sen *B* cos *B* y
sen 2*C* = 2 sen *C* cos *C*

$$\therefore\ \frac{1}{2}\ \text{sen 2B = sen B cos B} \qquad \text{(3) y}$$

$$\frac{1}{2}\ \text{sen 2C = sen C cos C} \qquad (4)$$

Al sustituir (3) en (2) y (4) en (1):

$$A = \frac{1}{2}\ \text{a}^2 \bullet \frac{1}{2}\ \text{sen 2B ;}$$

$$\therefore\ A = \frac{1}{4}\ \text{a}^2\ \text{sen 2B ;}$$

$$\text{y} \quad A = \frac{1}{2}\ \text{a}^2 \bullet \frac{1}{2}\ \text{sen 2C}$$

$$\therefore A = \frac{1}{4}\ \text{a}^2\ \text{sen 2C}$$

RESOLUCIÓN GENERAL DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Para resolver triángulos oblicuángulos se puede aplicar la ley de los senos, la ley de los cosenos y la ley de las tangentes.

LEY DE LOS SENOS

"Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos".

Haremos la demostración considerando dos casos:

Primer caso: El triángulo es acutángulo. Siendo *ABC* (Fig.564) un triángulo acutángulo, tracemos las alturas $\overline{CD}$ y $\overline{AE}$.

$$\text{En el } \Delta \text{ ACD : } \frac{\overline{CD}}{b} = \text{sen A ;}$$

$$\therefore \quad \overline{CD} = \text{b sen A} \qquad (1)$$

$$\text{En el } \Delta \text{ BCD : } \frac{\overline{CD}}{a} = \text{sen B ;}$$

$$\therefore \quad \overline{CD} = \text{a sen B} \qquad (2)$$

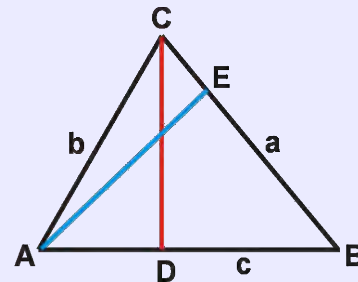


Figura 564

Comparando (1) y (2) tenemos:

b sen *A* = *a* sen *B* ;

$$\therefore \frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} \qquad (3)$$

$$\text{En el } \Delta \text{ ACE : } \frac{\overline{AE}}{b} = \text{sen C ;}$$

$$\therefore \quad \overline{AE} = \text{b sen C} \qquad (4)$$

En el Δ ABE : $\frac{\overline{AE}}{c}$ = sen B ;

∴ $AE = c \text{ sen } B$ (5)

Comparando (4) y (5):

b sen C = c sen B ;

∴ $\frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}} =$ (6)

Comparando (3) y (6):

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}$$

Segundo caso: El triángulo es obtusángulo. Siendo Δ *ABC* (Fig.565) un triángulo obtusángulo, tracemos las alturas $\overline{CD}$ y $\overline{AE}$

En el Δ *CDB* : $\frac{\overline{CD}}{a}$ = sen B ;

∴ $\overline{CD} = a \text{ sen } B$ (1)

El Δ CDA: $\frac{\overline{CD}}{b}$ = sen (180 - A) = sen A

∴ $\overline{CD} = b \text{ sen } A$ (2)

Comparando (1) y (2):

a sen B = b sen A ;

∴ $\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}}$ (3)

En el Δ *AEC* :

$\frac{\overline{AE}}{b}$ = sen C ;

∴ $\overline{AE} = b \text{ sen } C$ (4)

En el Δ *AEB* :

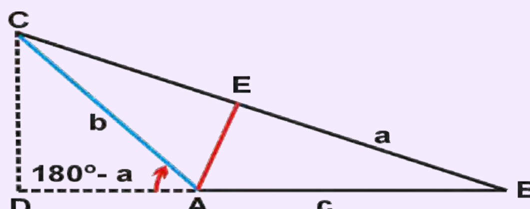


Figura 565

$\frac{\overline{AE}}{c}$ = sen B :

∴ $\overline{AE} = c \text{ sen } B$ (5)

Comparando (4) y (5):

b sen C = c sen B ;

∴ $\frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}$ (6)

Comparando (3) y (6):

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}$$

LEY DEL COSENO

"El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman".

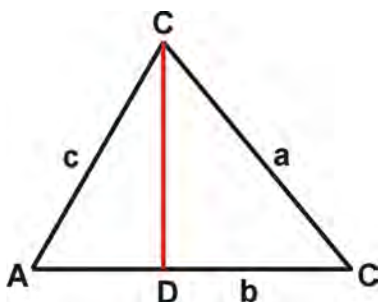


Figura 566

Haremos la demostración considerando dos casos:

Primer caso: El triángulo es acutángulo. Siendo *ABC* (Fig.566) un triángulo acutángulo, tracemos la altura.BC

Según el teorema generalizado de Pitágoras tenemos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,\overline{AD}$ (1)

Pero: $\frac{\overline{AD}}{c}$ = cos A ;

∴ $\overline{AD} = c \cos A$ (2)

Al sustituir (2) en (1):

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Análogamente se demuestra que:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Segundo caso: El triángulo es obtusángulo. Siendo *ABC* (Fig.567) un triángulo obtusángulo, tracemos la altura $\overline{BD}$, prolongando. $\overline{AC}$ Siendo ∠ $A > 90°$.

Según el teorema generalizado de Pitágoras tenemos:

$a^2 = b^2 + c^2 + 2b\,\overline{AD}$ (1)

Pero: $\frac{\overline{AD}}{c}$ = cos (180 - A) = - cos A

∴ $\overline{AD} = -c \cos A$ (2)

Al sustituir (2) en (1):

$a^2 = b^2 + c^2 + 2b(-c \cos A)$;

∴ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

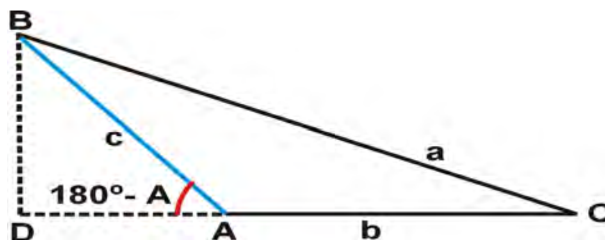


Figura 567

LEY DE LAS TANGENTES

"En todo triángulo oblicuángulo la diferencia de dos de sus lados es a su suma como la tangente de la mitad de la diferencia de los ángulos opuestos a esos lados es a la tangente de la mitad de la suma de dichos ángulos".

Demostración:

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}};$$ Ley de los senos

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen A}}{\text{sen B}};$$ Trasponiendo

$$\therefore \frac{a-b}{a} = \frac{\text{sen A - sen B}}{\text{sen A}}; \quad (1)$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{\text{sen A} + \text{sen B}}{\text{sen A}} \quad (2)$$

(1) y (2): Propiedad de las proporciones

Dividiendo (1) por (2):

$$\frac{\frac{a-b}{a}}{\frac{a+b}{a}} = \frac{\frac{\text{sen } A - \text{sen } B}{\text{sen } A}}{\frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } A}}$$

$$\therefore \frac{a-b}{a+b} = \frac{sen \quad A - sen \quad B}{sen \quad A + sen \quad B}$$

Transformando en producto:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2sen\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{2sen\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

Ordenando y simplificando:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{sen\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)sen\frac{1}{2}(A+B)}$$

Separando:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{sen\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)} \; \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{sen\frac{1}{2}(A+B)} \quad (3)$$

Pero:

$$\frac{sen\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)} = \tan\frac{1}{2}(A-B); \quad (4)$$

y

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{sen\frac{1}{2}(A+B)} = \cot\frac{1}{2}(A+B); \quad (5)$$

Al sustituir (4) y (5) en (3):

$$\frac{a-b}{a+b} = \tan\frac{1}{2}(A-B)\cot\frac{1}{2}(A+B) \quad (6)$$

Y como:

$$\cot\frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{\tan\frac{1}{2}(A+B)} \quad (7)$$

Al sustituir (7) en (6):

$$\frac{a-b}{a+b} = \tan\frac{1}{2}(A-B) \bullet \frac{1}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\therefore \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

EJEMPLOS DE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Primer caso: Conocidos los tres lados.

Resolver el triángulo cuyos datos son:

a = 34, b = 40, c = 28

Se aplica la ley del coseno.

Cálculo de A.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \quad \cos \quad A$$

Despejando $\cos A$:

$$\cos \quad A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

$$\cos \quad A = \frac{40^2+28^2-34^2}{2\times 40\times 28} = \frac{1600+784-1156}{2240} =$$

$$= \frac{307}{560} = 0.54821 \qquad \therefore \quad A = 56^\circ 45'$$

Cálculo de *B*

Análogamente:

$$\cos\ B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};$$

$$\therefore\ \cos B=\frac{34^2+28^2-40^2}{2\times34\times28}=\frac{1156+784-1600}{1904}$$

$$=\frac{340}{1904}=0.17857 \qquad \therefore \qquad B=79^\circ 43'$$

Cálculo de *C*

Análogamente:

$$\cos\ C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab};$$

$$\cos\ C=\frac{34^2+40^2-28^2}{2\times34\times40}=\frac{1156+1600-784}{2720}$$

$$=\frac{1972}{2720}=0.72500 \qquad \therefore \qquad C=43^\circ 32'$$

Es decir:

A = 56° 45'
B = 79° 43'
C = 43° 32'
A + *B* + *C* = 178° 120' = 180°

Segundo caso: Resolver un triángulo conocidos dos lados y el ángulo comprendido.

Resolver el triángulo cuyos datos son:

A = 68°18'; *b* = 6; *c* = 10

Datos	**Fórmulas**
A = 68°18'	$A=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\ A}$,
b = 6,	$\cos\ B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,
c = 10	$\cos\ C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Cálculo de *a*

$$a=\sqrt{b^2+c^2-bc\ \ \cos\ \ A}=$$
$$\sqrt{6^2+10^2-2\times6\times10\ \ \cos\ \ 68^\circ18'};$$

$$a=\sqrt{36+100-120\times0.36975}=$$
$$\sqrt{136-44.37}=\sqrt{91.63} \qquad \therefore a=9.57$$

Cálculo de *B*

$$\cos\ B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{9.57^2+10^2-6^2}{2\times9.57\times10}=$$

$$\frac{91.63+100-36}{191.4}$$

$$\cos\ B=\frac{191.63-36}{191.4}=\frac{155.63}{191.4}=0.81311$$

$\therefore$ *B* = 35°36'

Cálculo de *C*

$$\cos\ C\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9.57^2+6^2-10^2}{2\times9.57\times6}=$$

$$\frac{91.63+36-100}{12\times9.57};$$

$$\cos\ C=\frac{127.63-100}{114.84}=\frac{27.63}{114.84}=0.24059$$

$\therefore$ *C* = 76°6'

Tercer caso: Dados un lado y dos ángulos.

Datos	**Fórmulas**
A = 80°25'	*A* + *B* + *C* = 180°
B = 35°43'	
c = 60	$\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{b}{\text{sen}B}=\frac{c}{\text{sen}C}$

Cálculo de *C*

A + *B* + *C* = 180°; 80°25' + 35°43' + *C* = 180°;
116°8' + *C* = 180°

$\therefore$*C* = 180° – 116°8' = 63°52'

Cálculo de *a*

$$\frac{a}{sen\ \ A}=\frac{c}{sen\ \ C}; \qquad \frac{a}{sen\ \ 80^\circ25'}=\frac{60}{sen\ \ 63^\circ52'}$$

$$\frac{a}{0.98604}=\frac{60}{0.89777}$$

$$\therefore a=\frac{60\times098604}{089777}=\frac{59.16240}{0.89777}=65.88$$

Cálculo de *b*

$$\frac{b}{\text{sen}\ \ B}=\frac{c}{\text{sen}\ \ C}; \quad \frac{b}{\text{sen}\ \ 35^\circ43'}=\frac{60}{\text{sen}\ \ 63^\circ52'}$$

$$\frac{b}{0.58378}=\frac{60}{0.89777}$$

$$\therefore b=\frac{60\times0.58378}{0.89777}=39.01$$

ÁREA DE LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Primer caso: Dados los tres lados, se emplea la fórmula de Herón, ya estudiada en Geometría.

Hallar el área del triángulo cuyos lados son: a = 18, b = 26 y c = 28.

$$p = \frac{a+b+c}{2}; \qquad p - a = 36 - 18 = 18;$$

$$p = \frac{18+26+28}{2}; \qquad p - b = 36 - 26 = 10;$$

$$p = \frac{72}{2} = 36; \qquad p - c = 36 - 28 = 8$$

$$A_t = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{36\times18\times10\times8};$$

$$A_t = \sqrt{36\times9\times2\times2\times5\times4\times2} = \sqrt{36\times9\times4\times5\times4\times2}$$

$$A_t = 6\times3\times2\times2\sqrt{5\times2} = 72\sqrt{10} = 72\times3.162$$

$$\therefore \quad A_t = 227.694$$

Segundo caso: Dados los lados y el ángulo comprendido, si los lados son a y b y el ángulo comprendido C, utilizamos la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\text{ab sen C}$$

Demostración: De la fórmula:

$$A_t = \frac{1}{2}bh; \qquad (1)$$

$$\frac{h}{a} = \text{sen C};$$

$$\therefore \quad h = a \text{ sen } C \qquad (2)$$

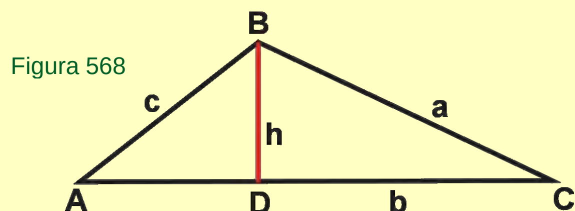
Sustituyendo (2) en (1):

$$A_t = \frac{1}{2} ba \text{ sen C}$$

Análogamente se obtiene:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} bc \text{ sen A}; \qquad \text{Área} = \frac{1}{2} ac \text{ sen B}$$

Figura 568



Hallar el área del triángulo cuyos datos son: a = 7, b = 8 y C = 30°

$$A_t = \frac{1}{2} ab \text{ sen C} = \frac{1}{2}\times 7 \times 8 \text{ sen } 30°;$$

$$A_t = \frac{1}{2} \times 56 \times 0.5 = 28 \times 0.5 = 14$$

$$\therefore \quad A = 14$$

Tercer caso: Dados un lado y dos ángulos, de la fórmula anterior:

$$A_t = \frac{1}{2}ab \text{ sen C} \quad (1)$$

y de la ley de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} \ldots\ldots$$

se deduce, despejando b:

$$b = \frac{a \text{ sen B}}{\text{sen A}};$$

y sustituyendo en (1):

$$A_t = \frac{1}{2}a\left(\frac{a \text{ sen} B}{\text{sen A}}\right)\text{sen C}$$

$$\therefore \quad A_t = \frac{a^2 \text{sen}B \,\text{sen}C}{2\text{sen}A}$$

Análogamente se obtiene:

$$A_t = \frac{b^2 \text{ sen A sen C}}{2 \text{ sen B}};$$

$$A_t = \frac{C^2 \text{ sen A sen B}}{2 \text{ sen C}}:$$

Hallar el área del triángulo cuyos datos son: A = 70°, B = 50° y c = 50.

$$A_t = \frac{C^2 \text{ sen A sen B}}{2 \text{ sen C}} = \frac{50^2 \text{ sen } 70^\circ \text{ sen } 50^\circ}{2 \text{ sen } 60^\circ};$$

$$A_t = \frac{2500\times0.93969\times0.76604}{2\times0.86603} =$$

$$= \frac{1250\times0.93969\times0.76604}{0.86603};$$

$$A_t = \frac{899.7575}{0.86603} = 1038.9$$

$$\therefore \quad A_t = 1038.9$$

EJERCICIOS

Resuelve los siguientes triángulos rectángulos y encuentra su área (A): Los números de los catetos e hipotenusas representan unidades de longitud cualesquiera (m, pulg, etc.) de la misma clase en cada ejercicio.

1. *c* = 60, *C* = 28°30'
R. *b* = 110.51 *B* = 61°30'
a = 125.74 *A* = 3315.30

2. *a* = 4, *B* = 62°30'
R. *b* = 3.55 *c* = 1.84
C = 27°30' *A* = 3.27

3. *b* = 14, *c* = 18
R. *a* = 22.81 *C* = 52°7'
B = 37°53' *A* = 126

4. *a* = 7.50, *c* = 5.25
R. *b* = 5.35 *C* = 44°30'
B = 45°30' *A* = 14.04

5. *b* = 30, *C* = 40°30'
R. *c* = 25.62 *a* = 39.45
B = 49°30' *A* = 384.30

6. *a* = 90, *C* = 20°
R. *b* = 84.57 *c* = 30.79
B = 70° *A* = 1301.95

7. *b* = 22, *c* = 45
R. *a* = 50.08 *C* = 63°56'
B = 26°4' *A* = 495

8. *a* = 5.3, *b* = 4.7
R. *c* = 2.44 *C* = 27°32'
B = 62°28' *A* = 5.73

9. *c* = 45, *B* = 65°50'
R. *b* = 100.29 *a* = 109.75
C = 24°10' *A* = 2256.52

10. *a* = 43.5, *B* = 38°
R. *c* = 34.27 *b* = 26.78
C = 52° *A* = 458.87

11. *b* = 30, *c* = 40
R. *a* = 50 *C* = 53°8'
B = 36°52' *A* = 600

12. *a* = 11.8, *b* = 3.8
R. *c* = 11.17 *C* = 71°13'
B = 18°47' *A* = 21.22

13. *b* = 2, *B* = 27°20'
R. *c* = 3.87 *a* = 4.35
C = 62°40' *A* = 3.87

14. *a* = 57.7, *C* = 29°
R. *B* = 61° *c* = 27.97
b = 50.47 *A* = 705.82

15. *b* = 60, *c* = 80
R. *a* = 100 *C* = 53°8'
B = 36°52' *A* = 2400

16. *a* = 9.3, *c* = 6.2
R. *b* = 6.93 *C* = 41°50'
B = 48°10' *A* = 21.48

17. *b* = 240, *B* = 62°
R. *C* = 28° *a* = 271.92
c = 127.60 *A* = 15312

18. *a* = 175.5, *C* = 27°15'
R. *B* = 62°45' *c* = 80.36
b = 156.02 *A* = 6268.88

Resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos:

19. *a* = 41, *b* = 19.5, *c* = 32.48 — **R.** *A* = 101°10', *B* = 27°50', *C* = 51°

20. *a* = 5.312, *b* = 10.913, *c* = 13 — **R.** *A* = 23°40', *B* = 55°33', *C* = 100°47'

21. *a* = 25, *b* = 31.51, *c* = 29.25 — **R.** *A* = 48°25', *B* = 70°32', *C* = 61°3'

22. *a* = 85.04, *b* = 70, *c* = 79.20 — **R.** *A* = 69°11', *B* = 50°18', *C* = 60°31'

23. *a* = 1048, *b* = 1136.82, *c* = 767.58 — **R.** *A* = 63°20', *B* = 75°47', *C* = 40°53'

24. *a* = 33, *b* = 51.47, *c* = 46.25 — **R.** *A* = 39°, *B* = 79°, *C* = 62°

25. *a* = 32.56, *b* = 40, *c* = 16.79 — **R.** *A* = 52°18', *B* = 103°37', *C* = 24°5'

26. *a* = 28, *b* = 34, *c* = 26.3 — **R.** *A* = 53°30', *B* = 77°30', *C* = 49°

27. *a* = 13, *b* = 4, *c* = 15 — **R.** *A* = 53°8', *B* = 14°15', *C* = 112°37'

28. *a* = 10.59, *b* = 14.77, *c* = 20.15 — **R.** *A* = 30°40', *B* = 45°20', *C* = 104°

29. *a* = 32.45, *b* = 27.21, *C* = 66°56' — **R.** *c* = 33.19, *A* = 64°6', *B* = 48°58'

30. *b* = 50, *c* = 66.6, *A* = 83°26' — **R.** *a* = 78.58, *B* = 39°13', *C* = 57°21

31. *a* = 40, *c* = 24.86, *B* = 98°6' — **R.** *b* = 50, *A* = 52°24', *C* = 29°30'

32. *a* = 60, *b* = 50, *C* = 78°28' — **R.** *c* = 70, *A* = 57°7', *B* = 44°25'

33. *b* = 49.8, *c* = 77.6, *A* = 59°11' — **R.** *a* = 67.4, *B* = 39°23', *C* = 81°26'

34. *c* = 54.75, *a* = 318, *B* = 41°27' — **R.** *b* = 374, *A* = 34°15', *C* = 104°18'

35. *a* = 1126.5, *b* = 708.3, *C* = 63°48' — **R.** *c* = 1032.3, *A* = 78°13', *B* = 37°59'

36. *b* = 61.52, *c* = 83.44, *A* = 29°14' — **R.** *a* = 42.30, *B* = 45°18', *C* = 105°28'

37. *a* = 11, *b* = 21, *C* = 97°50' — **R.** *A* = 25°50', *B* = 56°20', *c* = 25

38. *b* = 40, *c* = 24.8, *A* = 98°9' — **R.** *a* = 50, *B* = 52°21', *C* = 29°30'

39. *a* = 41, *B* = 27°50', *C* = 51° — **R.** *b* = 19.5, *c* = 32.5, *A* = 101°10'

40. $a = 78.6$, $A = 83°26'$, $C = 39°13'$ **R**. $b = 50$, $c = 66.6$, $C = 57°21'$

41. $a = 1048$, $B = 63°20'$, $C = 75°47'$ **R**. $b = 1136.8$, $c = 767.6$, $A = 40°53'$

42. $b = 50$, $A = 57°7'$, $C = 78°28'$ **R**. $a = 60$, $c = 70$, $B = 44°25'$

43. $b = 31.5$, $A = 48°25'$, $C = 61°3'$ **R**. $B = 70°32'$, $a = 25$, $c = 29.25$

44. $c = 547.5$, $B = 41°27'$, $C = 104°18'$ **R**. $b = 374$, $a = 318$, $A = 34°15'$

45. $b = 40$, $B = 103°37'$, $C = 24°5'$ **R**. $a = 32.6$, $c = 16.8$, $A = 52°18'$

46. $b = 61.5$, $A = 29°14'$, $B = 45°18'$ **R**. $a = 42.30$, $c = 83.44$, $A = 105°28'$

47. $c = 15$, $C = 112°37'$, $A = 53°8'$ **R**. $b = 4$, $a = 13$, $B = 14°15'$

48. $c = 24.8$, $B = 52°21'$, $C = 29°30'$ **R**. $a = 50$, $b = 40$, $A = 98°9'$

Encuentra las áreas de los triángulos oblicuángulos.

49. $a = 41$, $b = 19.5$, $c = 32.48$ **R**. 310.68

50. $a = 5.312$, $b = 10.913$, $c = 13$ **R**. 28.5

51. $a = 25$, $b = 31.51$, $c = 29.25$ **R**. 345

52. $a = 85.04$, $b = 70$, $c = 79.20$ **R**. 2590

53. $a = 1048$, $b = 1136.82$, $c = 767.58$ **R**. 372000

54. $a = 33$, $b = 51.47$, $c = 46.25$ **R**. 751

55. $a = 32.56$, $b = 40$, $c = 16.79$ **R**. 266.2

56. $a = 28$, $b = 34$, $c = 26.3$ **R**. 359

57. $a = 13$, $b = 4$, $c = 15$ **R**. 24

58. $a = 10.59$, $b = 14.77$, $c = 20.15$ **R**. 76

59. $a = 32.45$, $b = 27.21$, $C = 66°56'$ **R**. 405

60. $b = 50$, $c = 66.6$, $A = 83°26'$ **R**. 1655

61. $a = 40$, $c = 24.86$, $B = 98°6'$ **R**. 493

62. $a = 60$, $b = 50$, $C = 78°28'$ **R**. 1470

63. $b = 49.8$, $c = 77.6$, $A = 59°11'$ **R**. 1660

64. $c = 54.75$, $a = 318$, $B = 41°27'$ **R**. 5750

65. $a = 1126.5$, $b = 708.3$, $C = 63°48'$ **R**. 354900

66. $b = 61.52$, $c = 83.44$, $A = 29°14'$ **R**. 1258.1

67. $a = 11$, $b = 21$, $C = 97°50'$ **R**. 124.3

68. $b = 40$, $c = 24.8$, $A = 98°9'$ **R**. 493

69. $a = 41$, $B = 27°50'$, $C = 51°$ **R**. 310.68

70. $a = 78.6$, $A = 83°26'$, $C = 39°13'$ **R**. 1655

71. $a = 1048$, $B = 63°20'$, $C = 75°47'$ **R**. 372000

72. $b = 50$, $A = 57°7'$, $C = 78°28'$ **R**. 1470

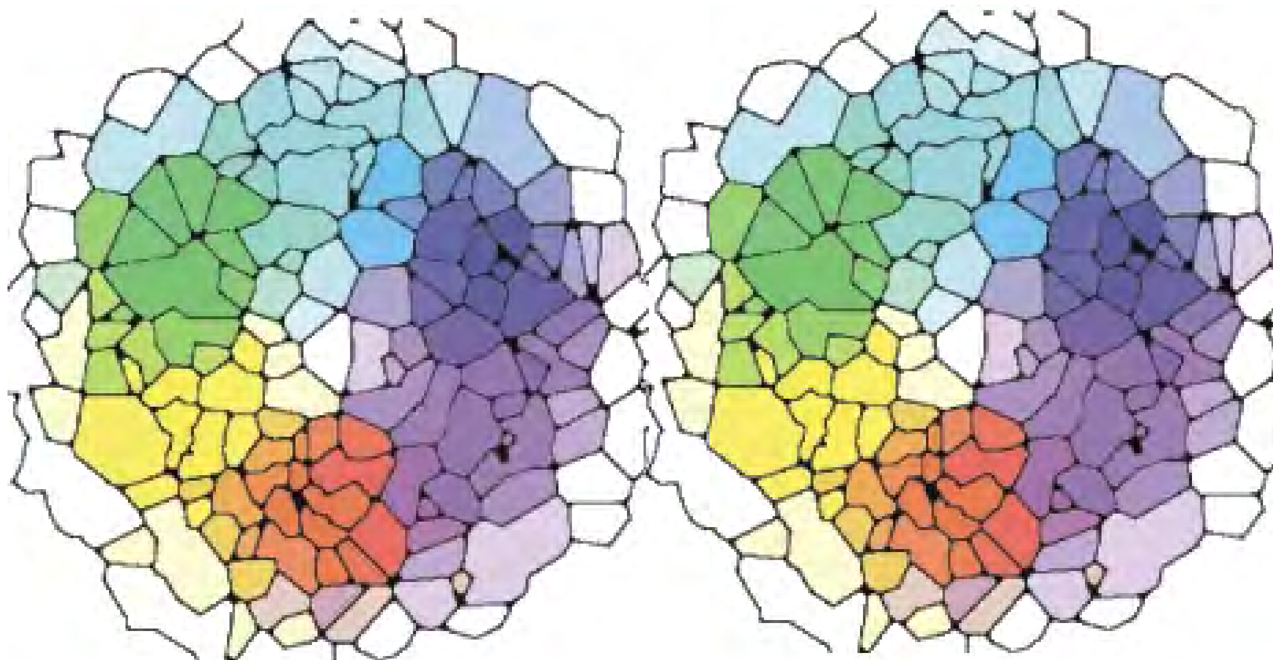
73. $b = 31.5$, $A = 48°25'$, $C = 61°3'$ **R**. 345

74. $c = 547.5$, $B = 41°27'$, $C = 104°18'$ **R**. 57600

75. $b = 40$, $B = 103°37'$, $C = 24°5'$ **R**. 266.2

76. $b = 61.5$, $A = 29°14'$, $B = 45°18'$ **R**. 1258.1

77. $c = 15$, $C = 112°37'$, $A = 53°8'$ **R**. 24



La topología o Matemática de lo posible viene a ser una Geometría que solamente tiene en cuenta los conceptos de orden y continuidad. Fue bautizada con ese nombre por Listing el año 1847.

CAPÍTULO XXIX

LOGARITMOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las expresiones a las que pueden aplicarse directamente logaritmos se denominan expresiones logarítmicas; convertir una expresión no logarítmica en logarítmica es efectuar una transformación logarítmica. En principio, toda identidad que transforme un polinomio en monomio es una transformación logarítmica. En trigonometría se hace frecuente uso de las transformaciones logarítmicas, que ofrecen numerosas identidades entre las funciones circulares.

Algunas de estas identidades pueden utilizarse para transformar cualquier suma o diferencia en producto o cociente.

LOGARITMOS

Si la base es 10 entonces los **logaritmos** se llaman vulgares, decimales o de Briggs, y son los más usados en la Matemática elemental.

Lo anterior significa que de las igualdades de la primera columna se deducen las de la segunda:

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001$, resulta: log 0.001 = - 3

$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{1000} = 0.01$, resulta: log 0.01 = - 2

$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0.1$, resulta: log 0.1 = - 1

10° = 1,	resulta	log 1 = 0
$10^1 = 10$,	resulta	log 10 = 1
$10^2 = 100$,	resulta	log 100 = 2
$10^3 = 1000$,	resulta	log 1000 = 3
$10^4 = 10000$,	resulta	log 10000 = 4
$10^5 = 100000$,	resulta	log 100000 = 5

y así sucesivamente.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS VULGARES

1. Los únicos números cuyos logaritmos son números enteros, son las potencias de 10 con exponente entero, por ejemplo:

$10^{-2} = 0.01$ . . . . log 0.01 = – 2
$10^{-1} = 0.1$ . . . . log 0.1 = – 1
$10^{0} = 1$ . . . . log 1 = 0
$10^{1} = 10$ . . . . log 10 = 1
$10^{2} = 100$ . . . . log 100 = 2
$10^{3} = 1000$ . . . . log 1000 = 3

2. El logaritmo de los números comprendidos entre 1 y 10, tienen sus logaritmos comprendidos entre 0 y 1 ya que log 1 = 0 y log 10 = 1, por ejemplo:

log 2 = 0.3010 . . . . log 8 = 09031
log 4 = 06021 . . . . log 9 = 0.9542

Los números comprendidos entre 100 y 1000 tienen su logaritmo comprendido entre 2 y 3, ya que log 100 = 2 y log 1000 = 3.

De manera análoga los números comprendidos entre 1000 y 10000 tienen su logaritmo entre 3 y 4, ya que log 1000 = 3 y log 10000 = 4, por ejemplo:

log 200 = 2.3010 . . . . log 2000 = 3.3010
log 400 = 2.6021 . . . . log 4000 = 3.6021
log 800 = 2.9031 . . . . log 8000 = 3.9031

3. Los números negativos no tienen logaritmo. El logaritmo de todo número que no sea una potencia de 10 con exponente entero consta de una parte entera llamada **característica** y una decimal llamada **mantisa**.

Ejemplos

log 2 = 0.3010 . . . . característica = 0
mantisa = 0.3010

log 400 = 2.6021 . . . . característica = 2
mantisa = 0.6021

log 8000 = 3.9031 . . . . característica = 3
mantisa = 0.9031

Cabe aclarar que la mantisa **siempre** es **positiva**, mientras que la característica es **positiva** si el número es mayor que 1 y **negativa** cuando está comprendido entre 0 y 1.

La característica de los logaritmos de números comprendidos entre 1 y 10 es cero y para hallar la característica del logaritmo de un **número** mayor que 1, se resta una unidad al número de cifras de su parte entera.

4856 tiene 4 cifras; la característica de su logaritmo es 3.
386 tiene 3 cifras; la característica de su logaritmo es 2.
8 tiene 1 cifra; la característica de su logaritmo es 0.
1215.65 tiene 4 cifras de parte entera, la característica de su logaritmo es 3.

La característica de un número menor que 1, se obtiene sumando la unidad al número de ceros que hay entre el punto decimal y la primera cifra significativa, (esta característica es negativa).

la característica de log 0.4 es – 1
la característica de log 0.05 es – 2
la característica de log 0.008 es – 3

Al escribir un logaritmo de característica negativa, el signo menos se coloca **sobre** y no delante de la característica, ya que de esta manera afectaría a todo el logaritmo, y debemos recordar que las mantisas siempre son positivas.

log 0.04 = $\overline{2}.6021$ que significa: – 2 + 0.6021
log 0.0008 = $\overline{4}.9031$ que significa: – 4 + 0.9031

CÁLCULO LOGARÍTMICO

Si B es la base un sistema de logaritmos, M y N son dos números cualesquiera:

Si: log $M = x$ entonces $B^x = M$ (1)
log $N = y$ entonces $B^y = N$ (2)

"El **logaritmo de un producto** es igual a la suma de los logaritmos de los factores".

Al multiplicar miembro por miembro (1) y (2) tenemos:

$B^x \bullet B^y = MN$,

$B^{x+y} = MN$

$\therefore$ log $MN = x + y$ (3)

Pero: log $M = x$ y log $N = y$

Sustituimos estos valores en (3):

$$\log MN = \log M + \log N$$

"El **logaritmo de un cociente** es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor".

Dividimos miembro por miembro (1) y (2):

$$\frac{B^x}{B^y} = \frac{M}{N} \; ; \qquad B^{X-Y} = \frac{M}{N}$$

$$\therefore \quad \log \frac{M}{N} = x - y \qquad (4)$$

Pero: $\log M = x$ y $\log N = y$.

Sustituimos estos valores en (4):

$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

"El **logaritmo de una potencia** es igual al exponente por el logaritmo de la base".

Elevamos ambos miembros de la igualdad (1) a la potencia "*n*" y tenemos:

$$(B^x)^n = M^n \qquad \therefore \qquad B^{n \bullet x} = M^n$$

$$\therefore \quad \log M^n = n \bullet x \qquad (5)$$

Y como: $\log M = x$, sustituyendo este valor en (5) tenemos:

$$\log M^n = n \log M$$

"El **logaritmo de una raíz** es igual al logaritmo del radicando entre el índice de la raíz".

Extraemos la raíz enésima en ambos miembros de la igualdad (1) tenemos:

$$\sqrt[n]{B^x} = \sqrt[n]{M} \qquad \therefore \quad B^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{M}$$

$$\therefore \quad \log \sqrt[n]{M} = \frac{x}{n} \qquad (6)$$

Y como: $\log M = x$, sustituyendo este valor en (6) tenemos:

$$\log \sqrt[n]{M} = \frac{\log M}{n}$$

Ejemplo

$\log (3.4 \times 5.62) = \log 3.4 + \log 5.62$

$\log (25 \times 8.3 \times 615) = \log 25 + \log 8.3 + \log 615$

$$\log \frac{1.8}{0.72} = \log 1.8 - \log 0.72$$

$$\log \frac{4.3 \times 5.9}{0.72} = \log 4.3 + \log 5.9 - \log 12.35$$

$\log 3.2^9 = 9 \times \log 3.2$

$\log (7.8^5 \times 3.62) = 5 \log 7.8 + \log 3.62$

$$\log \frac{4.6^4}{5} = 4 \times \log 4.6 - \log 5$$

$$\log \sqrt[5]{6.32} = \frac{\log \; 6.32}{5}$$

$$\log \left(\frac{\sqrt[4]{9}}{2} \right) = \frac{\log 9}{4} - \log 2$$

ANTILOGARITMOS

Un **antilogaritmo** es el número al que corresponde un logaritmo dado. Por ejemplo:

Si log 2 = 0.3010 . . . . . . antilog 0.3010 = 2
Si log 40 = 1.6021 . . . . . . antilog 1.6021 = 40
Si log 800 = 2.9031 . . . . . . antilog 2.9031 = 800

MANEJO DE LA TABLA DE LOGARITMOS

Se conocen muchas **tablas de logaritmos** atribuidas a diferentes autores, cada uno de los cuales explica a su modo cómo utilizarlas. Sin embargo, aquí nos limitaremos a explicar el manejo de la tabla incluida como apéndice de esta obra, misma que nos ayudará a encontrar el logaritmo de un número dado, así como hallar el antilogaritmo de un logaritmo dado.

A) Para encontrar el logaritmo de un número, primero se determina la característica según la explicación mencionada en las propiedades de los logaritmos vulgares.

Para hallar la mantisa:

1. Si es un número de **una cifra**, se toma la mantisa de la decena correspondiente a dicho número, en la columna "0"

	N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
log 1 = 0.000	**10**	0000	0043	0086	0128	0170
	11	0414	0453	0492	0531	0569
	12	0792	0828	0864	0899	0934
	13	1139	1173	1206	1239	1271
	14	1461	1492	1523	1553	1584
	15	1761	1790	1818	1847	1875
	16	2041	2068	2095	2122	2148
	17	2304	2830	2355	2380	2405
	18	2553	2577	2601	2625	2648
	19	2788	2810	2833	2856	2878
log 2 = 0.3010	**20**	3010	3032	3054	3075	3096
	21	3222	3243	3263	3284	33
	22	3424	3444	3464	3483	

2. Si es un número de dos cifras, buscamos el número en la columna *N* y obtenemos la mantisa en la columna "0".

	N	0	1	2	3	4
	48	6812	6821			
	49	6902	6911	6920		
log 51 = 1.7076	**50**	6990	6998	7007	7016	
	51	7076	7084	7093	7101	
	52	7160	7168	7177	7185	7193
	53	7243	7251	7259	7267	7275
	54	7324	7332	7340	7348	7356

	N					
		9494	9449	9504		
	90	9542	9547	9552		
log 92 = 1.9638	91	9590	9595	9600	9605	
	92	9638	9643	9647	9652	
	93	9685	9389	9694	9699	97
	94	9731	9736	9741	9745	9750
	95	9777	9782	9786	9791	9795

3. Para un número de tres cifras, buscamos las dos primeras cifras en la columna *N* y obtenemos la mantisa en la columna correspondiente a la tercera cifra.

	N	0	1	2	3	4
	34					
	35	5441	5453			
	36	5563	5575	5587	5599	
	37	5682	5694	5705	5717	
log 382 = 2.5821	38	5798	5809	5821	5832	5843
	39	5911	5922	5933	5944	5955
log 412 = 2.6149	**40**	6021	6031	6042	6053	6064
	41	6128	6138	6149	6160	6170
	42	6232	6243	6253	6263	6274
	43	6335	6345	6355	6365	6375
	44	6435	6444	6454	6464	
	45	6532	6542	6551		

4. El caso de un número de más de tres cifras lo explicaremos desarrollando un ejemplo. Hallaremos log 8.005. Primero determinamos la característica, y dado que la parte entera tiene una sola cifra, dicha característica es cero.

Ahora determinemos la mantisa, para lo cual consideramos las tres primeras cifras y buscamos log 8.00 y log 8.01

	N	0	1	2	3	4
	78	8921	8927	8932	8936	
	79	8976	8982	8987	8993	8998
log 8.00 = 0.9031	**80**	9031	9036	9042	9047	9053
	81	9085	9090	9096	9101	9106
	82	9138	9143	9049	9154	9159
	83	9191	9196	9201	9206	9212
log 8.01 = 0.9036	84	9243	9248	9253	9258	9263
	85	9294	9299	9304	9309	9315

$\log 8.01 = 0.9036$

$\log 8.00 = \underline{0.9031}$ diferencia correspondiente a 0.01

0.0005

Una vez conocida esta diferencia, calculamos la diferencia correspondiente a 0.005.

1.1 ———— 0.00005

0.005 ———— x

$$x = \frac{0.005 \times 0.0005}{0.01} = \frac{0.0000025}{0.01} = 0.00025$$

Entonces: log 8.00 = 0.9031

diferencia para 0.005 = $\underline{0.00025}$

log 8.005 = 0.90335

FORMA PARA HALLAR EL ANTILOGARITMO

1. Si el logaritmo figura en la tabla:

	N	0	1	2	3	4
Log x = 1.7076	**50**	6990	6998	7007	7016	7024
x = 51	51	7076	7084	7093	7101	7110
Log y = 3.7259	52	7160	7168	7177	7185	7193
y = 5320						
	53	7243	7251	7259	7267	7275
	54	7324	7332	7340	7348	
	55	7404	7412	7419	7427	
log z = 0.74.82	56	7482	7490	7497	7505	
	57	7559	7566	7574	7582	
—	58	7634	7642	7649	7657	
log u = 1.7642	59	7709	7716	7723	7731	
u = 0.581	**60**	7782	7789	7796		
	61	7853	7860	7868		
	62	7924	7931	7938		

Si la mantisa se encuentra en la columna encabezada por "0", el antilogaritmo estará en la columna encabezada por "N".

Si la mantisa está en una columna encabezada por "1", "2", etc., dicha cifra se coloca a continuación de las cifras tomadas en la columna "N".

La característica determina la posición del punto decimal, es decir, el número de cifras de la parte entera.

2. Si el logaritmo no figura en la tabla:

Explicaremos este caso con un ejemplo:

Tenemos: log x = 1.0875 y deseamos determinar el valor de x ; es decir, el antilogaritmo correspondiente al logaritmo 1.0875.

Ya sabemos que la característica 1 significa que el número tiene dos cifras en su parte entera, así que debemos buscar cuáles son estas cifras por medio de la mantisa 0.0875.

Buscamos en la tabla la mantisa que más se aproxime por defecto.

	N	0	1	2	3	4
	10	0000	0043	0086	0128	0170
	11	0414	0453	0492	0531	0569
X = 122	12	0792	0828	0864	0899	0934
	13	1139	1173	1206	1239	1271
	14	1461	1492	1523	1553	1584
	15	1761	1790	1818	1847	

Encontramos que la mantisa 0.0864 corresponde al número 12 en la columna 2, es decir, a un número cuyas cifras son 122.

Como sabemos que el número tiene dos cifras de parte entera, veremos que el valor buscado aproximadamente es 12.2, y para obtener una aproximación mayor es decir de mas cifras decimales, procedemos como sigue

a) Encontramos la diferencia entre la mantisa que tenemos y la que tomamos de la tabla y la llamamos primera diferencia:

$$\begin{array}{r} 0.0875 \\ \underline{0.0864} \\ 1^{a}\text{ diferencia} = 0.0011 \end{array}$$

b) Localizamos la diferencia entre la mantisa que tomamos en la tabla y la mantisa siguiente que corresponde al número 123, y la llamamos segunda diferencia:

$$\begin{array}{r} 0.0899 \\ \underline{0.0864} \\ 2^{a}\text{ diferencia} = 0.0035 \end{array}$$

c) Ahora decimos:

Si 35 corresponde a una diferencia de 1
11 corresponde a una diferencia de *x*

$$x = \frac{11}{35} = 0.314$$

Por tanto las cifras del número buscado son: 12.2314.

MANEJO DE LA TABLA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Nos permite localizar el valor de una función trigonométrica de un ángulo dado, además de, dado el valor de una función trigonométrica de un ángulo, hallar dicho ángulo.

Para encontrar el valor de una función trigonométrica consideremos dos casos:

1. Si el ángulo dado figura en la tabla. Para hallar el valor de una función de un ángulo menor de 45°, buscamos el ángulo en la primera columna de la izquierda y el nombre de la función en la fila vertical correspondiente.

El valor de la función trigonométrica se encuentra en la intersección de la fila donde se lee el ángulo y la columna encabezada por la función trigonométrica buscada.

Ejemplo

Hallar cos 27°20'

Grados	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos	Grados
27º 0’	.4540	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	63º 0’
10’	566	190	132	949	124	897	50’
20’	592	178	169	935	126	884	40’
30’	.4617	2.166	.5206	1.921	1.127	.8870	30’
40’	643	154	243	907	129	857	20’
50’	669	142	280	894	131	843	10’
28º 0’	.4695	2.130	.5317	1.881	1.133	.8829	62º 0’
10’	720	118	354	868	134	816	50’
20’	746	107	392	855	136	802	40’
30’	.4772	2.096	.5430	1.842	1.138	.8788	30’
40’	797	085	467	829	140	774	20’
50’		074	505				10’
29º 0’							61º 0’

Cos 27º20’ = 0.8884

Si el ángulo dado es mayor de 45°, buscamos el ángulo en la última columna de la derecha y el nombre de la función en la última fila inferior.

El valor de la función se halla en la intersección de la fila y la columna, como lo vimos en el ejemplo anterior.

Ejemplo

Hallar cot 54°10'

34º 0’	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	56º 0’
10’	616	781	787	473	209	274	50’
20’	640	773	830	464	211	258	40’
30’	.5664	1.766	.6873	1.455	1.213	.8241	30’
40’	688	758	916	446	216	225	20’
50’	712	751	.6959	437	218	208	10’
35º 0’	.5736	1.743	.7002	1.428	1.221	.8192	55 0’
10’	760	736	046	419	223	175	50’
20’	783	729	089	411	226	158	40’
30’	.5807	1.722	.7133	1.402	1.228	.8141	30’
40’	831	715	177	393	231	124	20’
50’	854	708	221	385	233	107	10’
36º 0’	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	54 0’
	Cos	**Sec**	**Cot**	**Tan**	**Csc**	**Sen**	**Grados**

cot 54°10' = 0.7221.

2. Si el ángulo dado no figura en la tabla, entonces el valor de la función trigonométrica se determina por interpolación, que consiste en tomar dos valores inmediatamente próximos al buscado, uno superior y otro inferior (los cuales se encuentran en la tabla) y de ellos deducir el valor buscado.

Ejemplo

Encontrar el seno de 20°15'. Como el ángulo está comprendido entre 20°10' y 20°20', buscamos los senos de estos valores.

Grados	**Sen**	**Csc**	**Tan**	**Cot**	**Sec**	**Cos**	
18º 0’	.3090	3.236	.3249	3.078	1.051	.9511	72º 0’
10’	118	207	281	047	052	502	50’
20’	145	179	314	3.018	053	492	40’
30’	.3173	3.152	.3346	2.989	1.054	.9483	30’
40’	365				062	417	20’
50’	393	947	607	773	063	407	10’
20º 0’	.3420	2.924	.3640	2.747	1.064	.9397	70º 0’
10’	448	901	673	723	065	387	50’
20’	475	878	706	699	066	377	40’
30’	.3502	2.855	.3739	2.675	1.068	.9367	30’
40’	529	833	772	651	069	256	20’
50’	557	812	805	628	070	346	10’
21º 0’	.3584	2.790	.3839	2.605	1.071	.9336	69º 0’
	11	769				325	50’

sen 20°20' = 0.3475

sen 20°10' = 0.3448

10' = 0.0027

Al establecer la proporción correspondiente tenemos:

10' ———— 0.0027 $\qquad x = \frac{0.0027 \times 5}{10} = \frac{0.0027}{2}$

5' ———— *x* $\qquad x = 0.00135$

sen 20°10' = 0.34480

parte proporcional a 5' = 0.00135

sen 20°15' = 0.34615

Ejemplo

Hallar el coseno de 27°23'

Grados	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos	
27º 0’	.4540	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	63º 0’
10’	566	190	132	949	124	897	50’
20’	592	178	169	935	126	884	40’
30’	.4617	2.166	.5206	1.921	1.127	.8870	30’
40’	643	154	243	907	129	857	20’
50’	669	142	280	894	131	843	10’
28º 0’	.4695	2.130	.5317	1.881	1.133	.8829	0’
10’	720	118	354	868	134	816	50’
20’	746	107	392	855	136	802	40’
30’	.4772	2.096	.5430	1.842	1.138	.8788	30’
40’	797	085	467	829	140	774	20’
50’	823	074	505	816	142	760	10’
				1.804			

cos 27°20' = 0.8884

cos 27°30' = 0.8870

10’ = 0.0014

10' ———— 0.0014 $\qquad x = \frac{0.0014 \times 3}{10}$

3' ———— x $\qquad x = \frac{0.0042}{10} = 0.0004$

cos 27º20’ = 0.8884

parte proporcional a 3' = 0.0004

cos 27°23' = 0.8880

En este caso observamos que el valor obtenido para los 3' se resta, porque al aumentar el ángulo, el coseno **disminuye**. Lo mismo sucede con la cotangente y la cosecante.

MANEJO DE LA TABLA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS LOGARÍTMICAS

Nos permite hallar el logaritmo de una función trigonométrica, localizando primero el valor de la función por medio de la tabla de funciones naturales y buscando después el logaritmo de dicho valor.

Por ejemplo, para encontrar el valor de log sen 12°20', primero buscamos sen 12°20' = 0.2136 y después log 0.2136 = 1.3296.

Por tanto: log sen 12°20' = 1.3296.

Sin embargo, para este procedimiento se debe recurrir primero a la tabla de fun-ciones trigonométricas naturales y después a la tabla de logaritmos.

Para eliminar esta operación (en dos etapas) se han preparado tablas que dan directamente los logaritmos de las funciones trigonométricas, que aparecen en el apéndice y contienen en la primera columna de la izquierda los ángulos desde 0° hasta 45° de 10' en 10'.

Los ángulos desde 45° hasta 90° se dan en orden inverso, en la primera columna de la derecha, también de 10' en 10'.

Si el ángulo es menor de 45°, se busca en la columna de la izquierda y el nombre de la función se lee por la parte superior; cuando el ángulo es mayor de 45°, se busca en la columna de la derecha y el nombre de la función se lee por la parte inferior.

Con el fin de facilitar la interpolación se ofrecen columnas de diferencias encabezadas por la letra "*d* ", situadas a la derecha de las columnas "*L* sen" y "*L* cos". Las columnas de la tangente y la cotangente encabezadas como "*L* tan" y "*L* cot", tienen una diferencia común, situada entre las dos columnas y encabezada por las letras "*dc*".

Los senos y los cosenos tienen un valor menor que la unidad y por tanto los logaritmos de estos valores tienen características negativas.

Debido a que también las tangentes de los ángulos menores de 45° y las cotangentes de ángulos mayores de 45° y menores de 90° son menores que la unidad, sus logaritmos son de característica negativa.

Para evitar escribir características negativas en la tabla, se pone 9 en lugar de 1; 8 en lugar de 2, etc.; por tanto, al tomarlos de la tabla, debemos recordar este convenio.

Las características de los logaritmos de las tangentes de los ángulos comprendidos entre 45° y 90° figuran en la misma tabla, así como las de los logaritmos de las cotangentes de ángulos menores de 45°.

En esta tabla no aparecen los valores de los logaritmos de las secantes y las cosecantes. De ser necesario calcularlos, recordemos que la secante y la cosecante son los recíprocos del coseno y el seno, respectivamente.

Àngulo	L Sen	d	L Cos	d	L Tan	dc	L Cot	Àngulo
30’	.6923	2.2	.9737	.7	.7526	2.9	.2474	30’
40’	.6946	2.3	.9390	.7	.7556	3.0	.2444	20’
50’	.6968	2.2	.9383	.7	.7585	2.9	.2415	10’
30º 0’	9.6990	2.2	9.9375	.8	9.7614	2.9	10.2386	**60º 0’**
10’	.7012	2.2	.9368	.7	.7644	3.0	.2356	50’
20’	.7033	2.1	.9361	.7	.7673	2.9	.2327	40’
30’	.7055	2.2	.9353	.8	.7701	2.8	.2299	30’
40’	.7076	2.1	.9346	.7	.7701	2.9	.2270	30’
50’	.7097	2.1	.9338	.8	.7759	2.9	.2241	10’
31º 0’	9.7118	2.1	9.9331	.7	9.7788	2.9	10.2212	**59º 0’**
10’	.7139	2.1	.9323	.8	.7816	2.8	.2184	50’
20’	.7160	2.1	.9315	.8	.7845	2.9	.2155	40’
30’	.7181	2.1	.9308	.7	.7873	2.8	.2127	30’
40’	.7201	2.0	.9300	.8	.7902	2.9		20’
50’		2.1		.8	.7930			10’

log sen 30° = $\bar{1}.6990$
log cos 30°10' = $\bar{1}.9368$
log tan 30°40' = $\bar{1}.7730$
log cot 31° = 0.2212
log cot 31°10' = 0.2184

Àngulo	L Cos	d	L Sen	d	L Con	dc	L Tan	Àngulo
20’					.9595			40’
30’	.8297	1.4	.8676		.9621			30’
40’	.8311	1.4	.8665	1.1	.9646	2.5		20’
50’	.8324	1.3	.8653	1.2	.9671	2.5	.0329	10’
43º 0’	9.8338	1.4	9.8641	1.2	9.9697	2.6	10.0303	47º 0’
10’	.8351	1.3	.8629	1.2	.9722	2.5	.0278	50’
20’	.8365	1.4	.8618	1.1	.9747	2.5	.0253	40’
30’	.8378	1.3	.8606	1.2	.9772	2.5	.0228	30’
40’	.8391	1.3	.8594	1.2	.9798	2.6	.0202	20’
50’	.8405	1.4	.8582	1.2	.9823	2.5	.0177	10’
44º 0’	9.8418	1.3	9.8569	1.3	9.9848	2.5	10.0152	**46º 0’**
10’	.8431	1.3	.8557	1.2	.9874	2.6	.0126	50’
20’	.8444	1.3	.8545	1.2	.9899	2.5	.0101	40’
30’	.8457	1.3	.8532	1.3	.9924	2.5	.0076	30’
40’	.8469	1.2	.8520	1.2	.9944	2.5	.0051	20’
50’	.8482	1.3	.8507	1.3	9.9975	2.6	.0025	10’
45º 0’	9.8495	1.3	9.8495	1.2	10.0000	2.5	10.0000	45º 0’

Ejemplos

log sen 45°10' = $\overline{1}.8507$

log cos 45°20' = $\overline{1}.8469$

log cos 45°30' = $\overline{1}.8457$

log tan 45°40' = 0.0101

log cot 45°50' = $\overline{1}.9874$

INTERPOLACIÓN

Para buscar el logaritmo de una función trigonométrica que no está en la tabla, ya que en ella los valores están calculados de 10' en 10', necesitamos hacer un cálculo auxiliar conocido como interpolación, que explicaremos con estos ejemplos:

Ejemplo

Hallar log sen 30°25'

Buscamos: log sen 30°20'

log sen 30°20' = $\overline{1}.7033$

De la columna "*d* " tomamos la diferencia: 22 (veintidós diezmilésimas), que corresponde a 10'. Conocida esta diferencia, calculamos la diferencia correspondiente a 5'.

10' —— 22

5' —— *x*

$$x = \frac{22 \times 5'}{10'} = \frac{22}{2} = 11$$

Entonces tenemos:

log sen 30°20' = $\overline{1}.7033$

valor correspondiente a 5' = 11

log sen 30°25' = $\overline{1}.7044$

Sumamos el valor correspondiente a 5' al log sen 30°20', porque el seno es una función creciente, al igual que lo es la tangente.

Ejemplo

Hallar log cot 45°32'

log cot 45°30' = $\overline{1}.9924$

De la columna "*dc* " tomamos la diferencia: 25 (veinticinco diezmilésimas) que corresponde a 10'. Conocida esta diferencia, calculamos la diferencia correspondiente a 2'.

10' —— 25

2' —— *x*

$$x = \frac{2' \times 25}{10'} = \frac{50}{10} = 5$$

Entonces tenemos:

log cot 45°30' = $\overline{1}.9924$

valor correspondiente a 2' = 5

log cot 45°32' = $\overline{1}.9919$

Restamos el valor correspondiente a 2' al log cot 45°30', porque la cotangente es una función decreciente, al igual que lo es el coseno.

EJERCICIOS

Calcula las características de los logaritmos de los siguientes números.

1. 13.56 **R.** 1

2. 7.18 **R.** 0

3. 436.925 **R.** 2

4. 108.36 **R.** 2

5. 23.01 **R.** 1

6. 9.3426 **R.** 0

7. 48.35272 **R.** 1

8. 0.5 **R.** $\bar{1}$

9. 0.0028 **R.** $\bar{3}$

10. 0.000325 **R.** $\bar{4}$

11. 0.00000083 **R.** 7

12. 0.0000721 **R.** 5

13. 48365 **R.** 4

14. 324.762 **R.** 2

15. 18.36509 **R.** 1

16. 0.00723 **R.** $\bar{3}$

17. 0.000015 **R.** $\bar{5}$

Aplica logaritmos a las siguientes ex-presiones:

18. ab **R.** $\log ab = \log a + \log b$

19. $5x$ **R.** $\log 5x = \log 5 + \log x$

20. $\frac{c}{d}$ **R.** $\log \frac{c}{d} = \log c + \log d$

21. $\frac{x}{3}$ **R.** $\log \frac{x}{3} = \log x - \log 3$

22. x^n **R.** $\log x^n = n \log x$

23. b^4 **R.** $\log b^4 = 4 \times \log b$

24. 15^3 **R.** $\log 15^3 = 3 \times \log 15$

25. $3x^2$ **R.** $\log 3x^2 = \log 3 + 2 \times \log x$

Calcula los antilogaritmos en las siguientes expresiones.

26. log 2 = 0.3010 **R.** 2

27. log y = 0.6021 **R.** y

28. log z = 0.9031 **R.** z

29. log 20 = 1.3010 **R.** 20

30. log t = 2.6021 **R.** t

31. log 8 = 0.9031 **R.** 8

32. log m = $\bar{1}.3010$ **R.** m

33. log 0.02 = $\bar{2}.3010$ **R.** 0.02

34. log p = $\bar{3}.9031$ **R.** p

35. log 100 = 2.000 **R.** 100

36. log x = $\bar{1}.8837$ **R.** x

37. log u = 1.9243 **R.** u

38. log 3 = 0.4771 **R.** 3

39. log h = 2.0016 **R.** h

40. log w = 1.5145 **R.** w

Calcula las siguientes expresiones, empleando logaritmos:

41. $\frac{53.2 \times 16.24}{89.2} =$ **R.** 9.685

42. $\frac{71.5 \times 8.64}{0.5 \times 8.6} =$ **R.** 143.665

43. $\frac{(-6.3) \times (-9.432)}{(-0.05) \times 816.5} =$ **R.** - 1.455

44. 54 × 0.33 = **R.** 16.875

45. $8^{\frac{1}{4}} \times 6^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{2}{3}} =$ **R.** 10.366

46. $\frac{5^6}{4.3^4} =$ **R.** 45.703

47. $\frac{0.48^6}{2.4^4} =$ **R.** 0.000368

48. $\frac{8^{\frac{2}{3}}}{6^{\frac{8}{4}}} =$ **R.** 1.043

49. $\sqrt{8.36 \times 9.12} =$ **R.** 8.731

50. $\sqrt[4]{\frac{64.8 \times 203.5}{94.2}} =$ **R.** 3.4

51. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \times \sqrt[4]{\frac{2}{5}} =$ **R.** 0.7225

52. $\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{4}} =$ **R.** 0.905

53. $\left(\frac{0.06123}{0.1823}\right)^{\frac{2}{3}} =$ **R.** 0.483

54. $\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{0.04} =$ **R.** 0.775

55. $\frac{\sqrt{46.28} \times \sqrt{62.15}}{\sqrt{215.3}}$ **R.** 3.655

Encuentra los siguientes valores:

56. log tan 5° **R.** $\bar{2}.9420$

57. log cot 9°20' **R.** 0.7842

58. log sen 20°32' **R.** $\bar{1}.5450$

59. log cos 25°16' **R.** $\bar{1}.9563$

60. log sen 34°40' **R.** $\bar{1}.7550$

61. log cos 51° **R.** $\bar{1}.7989$

62. log sen 59°30' **R.** $\bar{1}.9353$

63. log tan 64°42' **R.** 0.3254

64. log cot 71°38' **R.** $\bar{1}.5211$

65. log cos 80°20' **R.** $\bar{1}.2251$

66. log sen 85° **R.** 1.9983

67. log cos 55°16' **R.** $\bar{1}.7557$

68. log tan 68°12' **R.** 0.3979

69. log sen 74°18' **R.** $\bar{1}.9835$

70. log cos 23°12' **R.** $\bar{1}.9634$

71. log cot 13°5' **R.** 0.6338

72. log cos 75° **R.** $\bar{1}.4130$

73. log cot 54°6' **R.** $\bar{1}.8597$

74. log sen 17°51' **R.** $\bar{1}.4865$

75. log cos 72°9' **R.** $\bar{1}.4865$



La geometría aplicada en la época actual, nos permite apreciar en prácticamente todas las cosas que vemos y tocamos segundo a segundo, las figuras geométricas como son las cubos, cuadrados, esferas, cilindros, etc.

CAPÍTULO XXX

APLICACIONES DE LOS LOGARITMOS

La aplicación de los logaritmos a la resolución de triángulos y al cálculo de las áreas facilita notablemente la resolución de los triángulos a las áreas de los mismos, ya que los productos o cocientes se convierten en sumas o restas, respectivamente.

Existe una gran variedad de tablas, en especial de logaritmos decimales, tanto de números como de los valores de las funciones circulares y de otras funciones. El modo de operar es distinto, según se trate de tablas de simple, de doble o de triple entrada. Las características de una tabla de logaritmos decimales son: el número de cifras significativas del antilogaritmo y el número de cifras decimales de la mantisa.

APLICACIÓN DE LOS LOGARITMOS PARA LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Así, a las fórmulas aplicadas para resolver los triángulos rectángulos y calcular sus áreas se les aplican logaritmos sin efectuar transformación alguna.

(Aquí se exceptúa el cálculo de la hipotenusa en el primer caso, la cual suele calcularse sin utilizar logaritmos).

Primer caso: Cómo resolver y calcular el área del triángulo:

$b = 208$, $c = 160$, $\angle A = 90°$

Fórmulas: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; $\angle C = 90° - \angle B$:

$\tan B = \frac{b}{c}$; Área $= \frac{b \bullet c}{2}$

Cálculo de a

$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{208^2 + 160^2} = \sqrt{43264 + 25600}$

$= \sqrt{68864} = 262.04$

Cálculo de $\angle B$ $\tan B = \frac{b}{c}$

$\log \tan B = \log b - \log c$
$\log \tan B = \log 208 - \log 160$
$\log 208 = 2.3181$
$\log 160 = 2.2041$
$\log \tan B = 2.3181 - 2.2041 = 0.1140$

$\therefore B = 52°26'$

Cálculo de $\angle C$

$\angle C = 90° - \angle B$
$= 90° - 52°26'$
$= 37°34'$

Cálculo del área: $A = \frac{bc}{2}$

$\log A = \log b + \log c - \log 2$
$\log A = \log 208 + \log 160 - \log 2$
$\log A = 2.3181 + 2.2041 - 0.3010$
$\log A = 4.2212$
$\therefore A = 16642\ 31$

Segundo caso. Cómo resolver y calcular el área del triángulo:

$a = 690$, $b = 426$, $\angle A = 90°$

Fórmulas: $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$ – $\text{sen } B = \frac{b}{a}$

$\angle C = 90° - \angle B$; Área $= \frac{b}{2}\sqrt{(a+b)(a-b}$

Cálculo de c

$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$

$\log c = \frac{\log(a+b) + \log(a-b)}{2}$

$\log(a + b) = \log 1116 = 3.0476$

$\log(a - b) = \log 264 = 2.4216$

$\log c = \frac{3.0476 + 2.4216}{2} = \frac{5.4692}{2}$

$\log c = 2.7346$ $\therefore c = 542$

Cálculo de B

$\text{sen } B = \frac{b}{a}$

$\log \text{sen } B = \log b - \log a$
$\log \text{sen } B = \log 426 - \log 690$
$\log 426 = 2.6294$
$\log 690 = 2.8388$

$\log \text{sen } B = 2.6294 - 2.8388 = \overline{1}.7906$

$\therefore \angle B = 38°7'$

Cálculo de $\angle C$

$\angle C = 90° - \angle B = 90° - 38°7'$

$\therefore \angle C = 51°53'$

Cálculo del área

$A = \frac{bc}{2}$

$\log A = \log b + \log c - \log 2$
$\log A = \log 426 + \log 542 - \log 2$
$\log 426 = 2.6294$
$\log 542 = 2.7346$
$\log 2 = 0.3010$
$\log A = 2.6294 + 2.7346 - 0.3010$
$\log A = 5.0630$
$\therefore A = 115600$

Tercer caso: Cómo resolver y calcular el área del triángulo:

$c = 195, \quad \angle B = 40°20', \quad \angle A = 90°$

Fórmulas: $\angle C = 90° - \angle B$; $\quad b = c \tan B$

$a = \dfrac{c}{\text{sen } C}$; $\quad$ Área $= \dfrac{1}{2} c^2 \tan B$

Cálculo de C

$$\angle C = 90° - \angle B = 90° - 40°20'$$

$$\therefore \angle C = 49°40'$$

Cálculo de b

$$b = c \tan B$$

$\log b = \log 195 + \log \tan 40°20'$

$\log 195 = 2.2900$

$\log \tan 40°20' = \bar{1}.9289$

$\log b = 2.2900 + \bar{1}.9289 = 2.2189$

$$\therefore b = 165.5$$

Cálculo de a

$$a = \frac{c}{\text{sen } C}$$

$\log a = \log c - \log \text{sen } C$

$\log a = \log 195 - \log \text{sen } 49°40'$

$\log 195 = 2.2900$

$\log \text{sen } 49°40' = \bar{1}.8821$

$\log a = 2.4079$

$$\therefore a = 255.8$$

Cálculo del área

$$A = \frac{1}{2} c^2 \tan B$$

$\log A = 2 \log c + \log \tan B - \log 2$

$\log A = 2 \log 195 + \log \tan 40°20' - \log 2$

$\log A = 2(2.2900) + 1.9289 - 0.3010$

$\log A = 4.5800 + 1.9289 - 0.3010$

$\log A = 4.2079$

$$\therefore A = 16140$$

Cuarto caso: Cómo resolver y calcular el área del triángulo:

$a = 80, \quad \angle C = 63°15', \quad \angle A = 90°$

Fórmulas: $\angle B = 90° - \angle C$; $\quad c = a \text{ sen } C$

$b = a \text{ sen } B$; $\quad$ Área $= \dfrac{1}{4} a^2 \text{ sen } 2C$

Cálculo del $\angle B$ $\quad \angle B = 90° - \angle C = 90° - 63°15'$

$$\therefore \angle B = 26°45'$$

Cálculo de c

$$c = a \text{ sen } C$$

$\log c = \log a + \log \text{sen } C$

$\log c = \log 80 + \log \text{sen } 63°15'$

$\log 80 = 1.9031$

$\log \text{sen } 63°15' = \bar{1}.9508$

$\log c = 1.9031 + 1.9508$

$\log c = 1.8539$

$$\therefore c = 71.4$$

Cálculo de b

$$b = a \text{ sen } B$$

$\log b = \log a + \log \text{sen } B$

$\log b = \log 80 + \log \text{sen } 26°45'$

$\log \text{sen } 26°45' = \bar{1}.6533$

$\log b = 1.9031 + \bar{1}.6533$

$\log b = 1.5564$

$$\therefore b = 36.01$$

Cálculo del área

$$A = \frac{1}{4} a^2 \text{ sen } 2C$$

$$A = \frac{1}{4} 80^2 \text{ sen } 2(63°15')$$

$$A = \frac{1}{4} 80^2 \text{ sen } 126°30'$$

$\log A = 2 \log 80 + \log \text{sen } 126°30' - \log 4$

$\log A = 2(1.9031) + \bar{1}.9052 - 0.6021$

$\log A = 3.8062 + \bar{1}.9052 - 0.6021$

$\log A = 3.1093$

$$\therefore A = 1286$$

APLICACIÓN DE LOS LOGARITMOS PARA LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1. Seno de la mitad de un ángulo en función de los lados del triángulo. Si aplicamos la ley de cosenos al ángulo A, tenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Despejando $\cos A$:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A$$
$$-a^2 + b^2 + c^2 = 2bc\cos A$$

$$\therefore \quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad (1)$$

Por otra parte, sabemos que:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \quad (2)$$

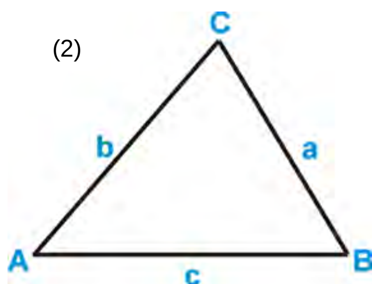


Figura 569

Sustituyendo (1) en (2):

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\frac{2bc-b^2+c^2+a^2}{2bc};}{2}} \quad \text{Efectuando}$$

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}} \quad \text{Agrupando}$$

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2;}{4bc}} \quad \text{Factorizando el trinomio}$$

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+2-c)(a-b+c)}{4bc}} \quad (3) \text{ Factorizando la diferencia de cuadrados}$$

Si llamamos $2p$ al perímetro y restamos $2b$ y $2c$, sucesiva-mente, tenemos:

$$\begin{array}{r} a+b+c=2p \\ -2b=-2b \\ \hline a-b+c=2p-2b \end{array}$$

$$\therefore \quad a-b+c=2(p-b) \quad (4)$$

Análogamente:

$$\begin{array}{r} a+b+c=2p \\ -2c=-2c \\ \hline a+b-c=2p-2c \end{array}$$
$$\therefore a+b-c=2(p-c) \quad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3):

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2(p-c)2(p-b)}{4bc}};$$

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{4(p-b)(p-c)}{4bc}}; \quad \text{Simplificando y ordenando.}$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2\,(p-c)\,2\,(p-b)}{4bc}}$$

En forma análoga, se obtiene:

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}};$$

$$\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \quad (6)$$

2. Coseno de la mitad de un ángulo en función de los lados del triángulo.

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \quad (7)$$

Sustituyendo (1) en (7):

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} \quad \text{Efectuando}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc}}{2}} \quad \text{Agrupando}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{4bc}} \quad \text{Efectuando}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}} \quad \text{Factorizando el trinomio}$$

$$\therefore \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c\quad a)}{4bc}}$$ (8) Factorizando la diferencia de cuadrados.

Si a $2p$ le restamos $2a$ tenemos:

$$\begin{array}{rl} a+b+c & = 2p \\ -2a & = -2a \\ \hline -a+b+c & = 2p-2a \end{array} \quad (9)$$

$$b+c-a = 2(p-a) \quad (10)$$

Sustituyendo (9) y (10) en (8):

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2p[2(p-a)]}{4bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{4p(p-a)}{4bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

En forma análoga, se obtiene:

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

3. Tangente de la mitad de un ángulo en función de los lados del triángulo.

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

Al sustituir los valores calculados de sen $\frac{A}{2}$ y cos, $\frac{A}{2}$ tenemos

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}}$$

$$\therefore \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

De la misma manera, podemos calcular:

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

APLICACIÓN DE LOS LOGARITMOS PARA LA LEY DE TANGENTES

La ley de senos nos da:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B},$$

cambiando los medios:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B},$$

y aplicando una de las propiedades de las proporciones:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}$$

Transformamos en producto el numerador y el denominador de la segunda razón:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \cot\frac{1}{2}(A+B)\tan\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}(A+B)$$

$$\therefore \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

En la fórmula anterior es necesario que se cumpla $a > b$.

Y en el caso de que $b > a$, bastaría con invertir las diferencias $a - b$ y $A - B$, es decir:

$$\frac{b-a}{b+a} = \frac{\tan\frac{1}{2}(B-A)}{\tan\frac{1}{2}(B+A)}$$

Resolución de triángulos oblicuángulos.

Primer caso: Dados los tres lados.

En la fórmula $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, multiplicamos ambos términos del quebrado por el paréntesis del denominador, $(p-a)$, con lo que tenemos:

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a(p-b)(p-c);}{p(p-a)^2}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

recordando que $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, donde r es el radio del círculo inscrito al triángulo, y al hacer la sustitución correspondiente tenemos:

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}r$$

$$\therefore \quad \tan\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$$

Análogamente:

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}\ ;\ \tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$$

Sabemos que el área de un triángulo en función de sus lados está dada por la fórmula A = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, atribuida a Herón de Alejandría.

Al multiplicar y dividir por "p" el radicando tendremos:

$$A=\sqrt{\frac{p^2(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$\therefore A=p\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$\therefore A = pr$$

Cómo resolver el triángulo a = 163.6; b = 397.5; c = 253.7

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{163.6+397.5+253.7}{2}=\frac{814.8}{2}=407.4$$

$p - a$ = 407.4 – 163.6 = 243.8

$p - b$ = 407.4 – 397.5 = 9.9

$p - c$ = 407.4 – 253.7 = 153.7

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$\log r=\frac{\log(p-a)+\log(p-b)+\log(p-c)-\log p}{2}$$

log ($p - a$) = log 243.8 = 2.3870
log ($p - b$) = log 9.9 = 0.9956
log ($p - c$) = log 153.7 = 2.1867
log p = log 407.4 = 2.6100

$$\log r=\frac{2.3870+0.9956+2.1867-2.6100}{2}=$$

$$=\frac{2.9593}{2}=1.4796$$

Cálculo del $\angle A$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$$

$\therefore \quad \log\tan\frac{A}{2}$ = log r - log (p - a)

$\log\tan\frac{A}{2}$ = 1.4796 - 2.3870 = $\bar{1}.0926$

$\frac{A}{2}$ = 7°3' ; $\quad\therefore\quad$ A = 14°6'

Cálculo del $\angle B$

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}$$

$\therefore \quad \log\tan\frac{B}{2}$ = log r - log (p - b)

$\log\tan\frac{B}{2}$ = 1.4796 - 0.9956 = 0.4840

$\frac{B}{2}$ = 71°50'; $\quad$ B = 143° 40'

Cálculo del $\angle C$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$$

$\therefore \quad \log\tan\frac{C}{2}$ = log r - log (p - c)

$\log\tan\frac{C}{2}$ = 1.4796 - 2.1867 = $\bar{1}.2929$

$\frac{C}{2}$ = 11°6'; $\quad\therefore\quad$ C = 22°12'

Área $A = pr$

log A = log p + log r

log A = 2.6100 + 1.4796 = 4.0896

$\therefore \quad A$ = 12290

Segundo caso. Dados dos lados y el ángulo comprendido.

Cálculo de los ángulos siendo *C* el ángulo dado.

Por la ley de tangentes sabemos que:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\tan\frac{1}{2}(A+B) \qquad (1)$$

Pero,

$$\angle A+\angle B+\angle C=180°$$

$$\therefore \angle A+\angle B=180°-\angle C$$

Dividiendo por 2 ambos miembros:

$$\frac{A+B}{2}=\frac{180°-C}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{C}{2}$$

Entonces:

$$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\tan\left(90°-\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}= \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

Esta fórmula y la que nos da $\angle A+\angle B$ nos permiten calcular los valores de *A* y *B*.

Para calcular el lado utilizamos la ley de los senos.

Ejemplo

Resolver el triángulo:

$$a=322,\quad b=212,\ \angle C=110°$$

$a=322$ $b=212$ $a+b=534$	$a=322$ $b=212$ $a-b=110$	$\angle A+\angle B+\angle C=180°$ $\angle A+\angle B=180°-\angle C$ $=180°-110°=70°$

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

$$\log\tan\frac{1}{2}(A-B)=\log(a-b)+\log\cot\frac{C}{2}-\log(a+b)$$

$$\log\tan\frac{1}{2}(A-B)=\log 110+\log\cot\frac{110°}{2}-\log 534$$

$$\log\tan\frac{1}{2}(A-B)=\log 110+\log\cot 55°-\log 534$$

log 110 = 2.0414

log cot 55° = 1.8452

log 534 = 2.7275

$$\log\tan\frac{1}{2}(A-B)=2.0414+\bar{1}.8452-2.7275$$

$$\log\tan\frac{1}{2}(A-B)=\bar{1}1591$$

$$\frac{1}{2}(A-B)=8°12'; \quad \therefore \quad A-B=16°24'$$

Al comparar con este valor y el de $\angle A+\angle B=70°$ tenemos:

$$\begin{aligned} A-B&=16°24'\\ A+B&=70°\\ \hline 2A&=86°24' \end{aligned} \qquad \therefore \angle A=\frac{86°24'}{2}$$

$$\therefore \angle A=43°12'$$

$$\begin{aligned} A+B&=69°60'\\ -A+B&=-16°24'\\ \hline 2B&=53°56' \end{aligned} \qquad \therefore \angle B=\frac{53°36'}{2}$$

$$\therefore \angle B=26°48'$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \angle A&=43°12'\\ \angle B&=26°48'\\ \angle C&=110°\\ \hline \angle A+\angle B+\angle C&=179°60'=180° \end{aligned}$$

Para calcular el lado *c* , se emplea la ley de los senos.

$$\frac{a}{\text{sen }A}=\frac{c}{\text{sen }C}$$

$$\therefore c=\frac{a\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A}$$

log c = log a + log sen C – log sen A

= log 322 + log sen 110° – log sen 43°12'

= log 322 = 2.5079

= log sen 110° = $\bar{1}$.9730

= log sen 43°12' = $\bar{1}$.8354

log c = 2.5079 + $\bar{1}$.9730 – $\bar{1}$.8354 = 2.6455

$\therefore$ c = antilog 2.6455 = 442

Área

$$A = \frac{1}{2} \text{ ab sen C}$$

log A = log a + log b + log sen C – log 2

= log 322 + log 212 + log sen 110° – log 2

log 322 = 2.5079

log 212 = 2.3263

log sen 110° = $\bar{1}$.9730

log 2 = 0.3010

log A = 2.5079 + 2.3263 + $\bar{1}$.9730 – 0.3010 = 4.5062

$\therefore$ A = 32100 aproximadamente.

Tercer caso: Dados un lado y dos ángulos.

Con la fórmula $\angle A + \angle B + \angle C$ = 180° se calcula el otro ángulo. Los lados se calculan por medio de la ley de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}$$

Ejemplo

Resolver el triángulo:

$\angle A$ = 75°20', $\angle B$ = 40°48', c = 30

Cálculo del $\angle C$

$\angle A + \angle B + \angle C$ = 180°; $\therefore$ $\angle C$ = 180° – ($\angle A$ +$\angle B$)

$\angle C$ = 180° – (75°20' + 40°48') = 180° – 115°68'

$\therefore$ $\angle C$ = 63°52'

Cálculo del lado a

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}; \qquad \therefore \text{ a} = \frac{c \text{ sen A}}{\text{sen } C}$$

log a = log c + log sen A – log sen C

= log 30 + log sen 75°20' – log sen 63°52'

log 30 = 1.4771

log sen 75°20' = $\bar{1}$.9856

log sen 63°52' = $\bar{1}$.9531

log a = 1.4771 + 1.9856 – $\bar{1}$.9531 = $\bar{1}$.5096

$\therefore$ a = 32.33

Cálculo del lado b

$$\frac{b}{\text{sen} B} = \frac{c}{\text{sen} C}; \qquad \therefore b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C}$$

log b = log c + log sen B – log sen C

= log 30 + log sen 40°48' – log sen 63°52'

log 30 = 1.4771

log sen 40°48' = $\bar{1}$.8152

log sen 63°52' = $\bar{1}$.9531

log b = 1.4771 + 1.8152 – $\bar{1}$.9531 = 1.3392

$\therefore$ b = 21.84

Área

$$A = \frac{c^2 \text{ sen} A \text{ sen} B}{2 \text{sen}(A+B)}$$

log A = 2 log c + log sen A + log sen B – [log 2 + log sen (A + B)]

= 2 log 30 + log sen 75°20' + log sen 40°48' – (log 2 + log sen 116°8')

log 30 = 1.4771

log sen 75°20' = $\bar{1}$.9856

log sen 40°48' = $\bar{1}$.8152

log 2 = 0.3010

log sen 116°8' = $\bar{1}$.9531

log A = 2(1.4771) + $\bar{1}$.9856 + $\bar{1}$.8152 – (0.3010 + $\bar{1}$.9531)

= 2.9542 + 1.8008 – 0.2541

= 2.5009

$\therefore$ A = 3169

EJERCICIOS

Resuelve y calcula el área de los siguientes triángulos rectángulos, empleando logaritmos.

1. Para medir la altura de una torre *AB*, un ingeniero se sitúa en un punto *C* de manera que *BC* = 60 m y ∠ *ACB* = 58°10'. ¿Cuál es esa altura?
R. 96.64 m

2. Un árbol de 12 m de altura proyecta una sombra de 20 m sobre un terreno horizontal. Hallar el ángulo de elevación del sol.
R. 30°50'.

3. Desde la parte superior de un faro de 60 m de altura sobre el nivel del mar se observa un buque con un ángulo de depresión de 28°30'. ¿Cuál es la distancia del buque al faro?
R. 110.50 m

4. Un avión vuela rumbo al este a una velocidad de 300 km/h. Se encuentra con un viento que viene del Norte, con una velocidad de 60 km/h. Hallar la velocidad resultante y el rumbo verdadero del avión.
R. 305.8 km/h; *S* 78°50'*E*.

5. Para medir la anchura *AB* de un río, un agrimensor escoge un punto *C* tal que *BC* = 30 m y ∠*BC A* = 62° y ∠*ABC* = 90°. Calcular el ancho del río.
R. 56.42 m

6. Un túnel de 300 m de largo tiene una inclinación de 15° respecto de la horizontal. ¿Cuál es la diferencia de nivel en ambos extremos?
R. 77.64 m

7. Se hace un disparo con un cañón que forma con la horizontal un ángulo de 40°. La velocidad de la bala es de 950 m/s. Hallar las componentes vertical y horizontal.
R. Vert. = 727.70 m/s;
Horiz. = 610.66 m/s.

8. En un tramo de carretera se asciende 50 m al recorrer 5 km. ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?
R. 34'.

9. Desde el último piso de un edificio de 5 m de altura se observan dos autos estacionados en línea recta, en el mismo plano del observador. Los ángulos de depresión son: 38° y 21°. Hallar la distancia entre ellos.
R. 191.7 m.

10. Una loma tiene una altura de 1200 m. Si desde un punto situado en el suelo se observa la cúspide con un ángulo de elevación de 23°40', ¿a qué distancia está dicho punto?
R. 273.80 m

11. *b* = 22, *c* = 45 — **R.** *a* = 50.08, ∠ *B* = 26°4', ∠ *C* = 63°56', Área = 495

12. *a* = 4, ∠ *B* = 62°30' — **R.** *b* = 3.55, ∠ *C* = 27°30', *c* = 1.84, Área = 3.27

13. *b* = 30, ∠ *C* = 40°30' — **R.** *c* = 25.62, ∠ *B* = 49°30', *a* = 39.45, Área = 384.30

14. *a* = 43.5, ∠ *B* = 38° — **R.** *c* = 34.28, ∠ *C* = 52°, *b* = 26.78, Área = 459.01

15. *b* = 240, ∠ *B* = 62° — **R.** ∠ *C* = 28°, *c* = 127.64, *a* = 271.80, Área = 15320

16. *c* = 45, ∠ *B* = 65°50' — **R.** *b* = 100.29, ∠ *C* = 24°10', *a* = 109.75, Área = 2256

17. *c* = 60, ∠ *C* = 28°30' — **R.** *b* = 110.51, *a* = 125.74, Área = 3315.30

Resuelve estos triángulos, empleando logaritmos.

18. *a* = 41, *b* = 19.50, *c* = 32.48 — **R.** ∠ *A* = 101°10', ∠ *B* = 27°50', ∠ *C* = 51°

19. *a* = 10.4, *b* = 9.5, ∠ *c* = 45°52' — **R.** *c* = 7.8, ∠ *A* = 73°10', ∠ *B* = 60°58'

20. *a* = 45, ∠ *A* = 74°54', ∠ *B* = 43°21' — **R.** *b* = 32, *c* = 41.06, ∠ *C* = 61°45'

21. *a* = 37.40, *b* = 38.25, *c* = 25 — **R.** ∠ *A* = 68°52', ∠ *B* = 72°34', ∠ *C* = 38°34'

22. *b* = 18, *c* = 31, ∠ *A* = 53°45' — **R.** *a* = 25, ∠ *B* = 35°30', ∠ *C* = 90°45'

23. *b* = 38.25, ∠ *B* = 72°33', ∠ *C* = 38°34' — **R.** *a* = 37.40, ∠ *A* = 68°53', *c* = 25

24. *a* = 5.3, *b* = 10.9, *c* = 13 — **R.** ∠ *A* = 23°40', ∠ *B* = 55°33', ∠ *C* = 100°47'

25. *a* = 15.2, *b* = 40, *c* = 30 — **R.** ∠ *A* = 19°, ∠ *B* = 120°59', ∠ *C* = 40°1'

26. *a* = 731, *b* = 652, ∠ *C* = 70°25' — **R.** *c* = 800, ∠ *A* = 59°25', ∠ *B* = 50°10'

27. *a* = 42, *b* = 50, *c* = 53.24 — **R.** ∠ *A* = 47°50', ∠ *B* = 62°2', ∠ *C* = 70°8'

28. *a* = 25, *b* = 31.5, *c* = 29.3 — **R.** ∠ *A* = 48°25', ∠ *B* = 70°32', ∠ *C* = 61°3'

29. *a* = 15.19, ∠ *B* = 120°59', ∠ *C* = 40°1' — **R.** *b* = 40, *c* = 30, ∠ *A* = 19°

30. *a* = 17, *b* = 20, *c* = 14 — **R.** ∠ *A* = 56°45', ∠ *B* = 79°43', ∠ *C* = 43°32'

TIPOS DE MAGNITUDES

Según su naturaleza, las magnitudes pueden ser **continuas** o **discontinuas.**

Las continuas son aquellas que, como la longitud y el volumen, dan idea de totalidad, sin partes o elementos naturales identificables. Otras magnitudes continuas son: la superficie, la masa material, el tiempo, la presión, la fuerza electromotriz, el peso, la temperatura y la velocidad.

Las discontinuas son las pluralidades de cosas, como las pluralidades de los libros, mesas, rectas, etc., y también se les llama magnitudes discretas.

Por otra parte, las magnitudes también se dividen en escalares y vectoriales.
Las escalares son las que no poseen dirección, como la longitud, el peso, el área, el volumen o el tiempo, y quedan completamente definidas por un **número** que expresa su medida. De este modo, la longitud es una magnitud escalar, porque al decir que una regla, por ejemplo tiene 20 cm queda perfectamente determinada su longitud.

Las vectoriales son las que poseen dirección y sentido, como la fuerza y la velocidad. Para que estas magnitudes queden definidas no basta conocer su valor, representado por un número, sino que es necesario, además conocer su dirección y sentido. Si decimos, por ejemplo, que la velocidad de un objeto móvil es de 4 cm por segundo (lo cual quiere decir que recorre 4 cm en cada segundo), con esto, no queda definida la velocidad, pues se debe especificar la **dirección** que sigue el objeto en su movimiento (por ejemplo vertical) y en qué **sentido** se mueve, (por ejemplo, de abajo hacia arriba).

TIPOS DE CANTIDADES

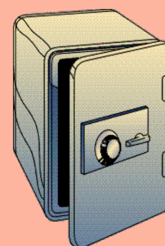
Dependiendo de los estados particulares de una u otra clase de magnitud, las cantidades también pueden ser continuas, discontinuas, escalares o vectoriales.



Las **continuas** son los estados particulares de magnitudes continuas, como el volumen de una naranja, la longitud de una carretera, la temperatura del cuerpo o la velocidad de un cohete.



Las **discontinuas** o **discretas** son los estados particulares de magnitudes discontinuas, como los alumnos de un colegio, las hojas de un libro o las pelotas que hay en una caja.
Las **escalares** son los estados particulares de las magnitudes escalares, como la longitud de un lápiz, el área de una sala o el volumen de un cuerpo.



Las **vectoriales** son los estados particulares de las magnitudes vectoriales, como la velocidad de un corredor o la velocidad de un automóvil.

Por último, se conoce también las cantidades homogéneas, de una misma magnitud, como el volumen de una piedra y el volumen de una caja y las cantidades heterogéneas, de distintas magnitudes, como la longitud de un terreno y el peso de una persona.

Figura 8

CIENCIA MATEMÁTICA

Al considerar las cantidades, es decir, los estados particulares de las magnitudes, podemos apreciar no sólo que pueden ser objeto de **comparación** y determinar una **igualdad** o **desigualdad** entre esos estados, sino también las **variaciones** que puede sufrir un mismo estado para adoptar otros, en virtud de los fenómenos (distancia entre dos objetos móviles que aumenta o disminuye: volumen de un objeto sólido que crece por la acción de calor; presión de un gas encerrado que se altera al variar su volumen, etcétera).

La **ciencia matemática** estudia tanto las magnitudes como las cantidades, que son las variaciones de aquélla en el tiempo y el espacio (estados particulares).

CONCEPTOS INTUITIVOS

En toda consideración sobre el carácter de una ciencia, hay que distinguir entre los objetos y sus relaciones, y entre las propiedades de los objetos y sus relaciones.

El objeto, para la ciencia, no debe ser necesariamente una cosa material. Un objeto es un libro, pero también lo es el espacio, un razonamiento o un punto geométrico. Es decir, se consideran objetos aquellos datos o sistemas de datos que se presentan a nuestra experiencia con cierta perdurabilidad o identidad a través del tiempo.

La inteligencia humana conoce los objetos de diversas maneras. Hay conocimientos puramente intuitivos, es decir, aquellos que logramos por intuición sensible, por contacto directo con los objetos sin que medien otros conocimientos anteriores. La mente los capta sin razonamiento alguno, como es el caso del conocimiento de espacio, materia, unidad, pluralidad, ordenación y correspondencia, entre otros.
Estos conocimientos se conocen como **conceptos primitivos** o **intuitivos** y también como **nociones intuitivas**, y son muy importantes como fundamento de la ciencia matemática.

EJERCICIOS

1. Menciona cuatro ejemplos de cuerpos animados, cuatro de cuerpos inanimados y tres de cuerpos extraterrestres.

2. ¿Pueden considerarse cuerpos una piedra y una gota de agua? ¿Qué diferencia hay entre ellos?

3. ¿Existe en la naturaleza algún cuerpo que carezca de volumen?

4. ¿Qué diferencia hay entre la superficie de un cuerpo sólido y la de uno líquido?

5. ¿Qué se quiere decir con que el concepto de superficie es general?

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7769	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8085
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9667	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9904	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

TABLAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS NATURALES

Grados		Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
0º	0’	.0000		.0000		1.000	1.0000	90º	0’
	10’	029	343.8	029	343.8	000	000		50’
	20’	058	171.9	058	171.9	000	000		40’
	30’	.0087	114.6	.0087	114.6	1.000	1.0000		30’
	40’	116	85.95	116	85.94	000	0.9999		20’
	50’	145	68.76	145	68.75	000	999		10’
1º	0’	.0175	57.30	.0175	57.29	1.000	.9998	89º	0’
	10’	204	49.11	204	49.10	000	998		50’
	20’	233	42.98	233	42.96	000	997		40’
	30’	.0262	38.20	.0262	38.19	1.000	.9997		30’
	40’	291	34.38	291	34.37	000	996		20’
	50’	320	31.26	320	31.24	001	995		10’
2º	0’	.0349	28.65	.0349	28.64	1.001	.9994	88º	0’
	10’	378	26.45	378	26.43	001	993		50’
	20’	407	24.56	407	24.54	001	992		40’
	30’	.0436	22.93	.0437	22.90	1.001	.9990		30’
	40’	465	21.49	466	21.47	001	989		20’
	50’	494	20.23	495	20.21	001	988		10’
3º	0’	.0523	19.11	.0524	19.08	1.001	.9986	87º	0’
	10’	552	18.10	553	18.07	002	985		50’
	20’	581	17.20	582	17.17	002	983		40’
	30’	.0610	16.38	.0612	16.35	1.002	.9981		30’
	40’	640	15.64	641	15.60	002	980		20’
	50’	669	14.96	670	14.92	002	978		10’
4º	0’	.0698	14.34	.0699	14.30	1.002	.9976	86º	0’
	10’	727	13.76	729	13.73	003	974		50’
	20’	756	13.23	758	13.20	003	971		40’
	30’	.0785	12.75	.0787	12.71	1.003	.9969		30’
	40’	814	12.29	816	12.25	003	967		20’
	50’	843	11.87	846	11.83	004	964		10’
5º	0’	.0872	11.47	.0875	11.43	1.004	.9962	85º	0’
	10’	901	11.10	904	11.06	004	959		50’
	20’	929	10.76	934	10.71	004	957		40’
	30’	.0958	10.43	.0963	10.39	1.005	.9954		30’
	40’	.9987	10.13	.0992	10.08	005	951		20’
	50’	.1016	9.839	.1022	9.788	005	948		10’
6º	0’	.1045	9.567	.1051	9.514	1.006	.9945	84º	0’
	10’	074	9.309	080	9.255	006	942		50’
	20’	103	9.065	110	9.010	006	939		40’
	30’	.1132	8.834	.1139	8.777	1.006	.9936		30’
	40’	161	8.614	169	8.556	007	932		20’
	50’	190	8.405	198	8.345	007	929		10’
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados	

Grados		Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
22º	40’	692	709	.3973	517	076	293		20’
	50’	719	689	.4006	496	077	283		10’
	0’	.3746	2.669	.4040	2.475	1.079	.9272	68º	0’
	10’	773	650	074	455	080	261		50’
	20’	800	632	108	434	081	250		40’
	30’	.3827	2.613	.4142	2.414	1.082	.9239		30’
	40’	854	595	176	394	084	228		20’
	50’	881	577	210	375	085	216		10’
23º	0’	.3907	2.559	.4245	2.356	1.086	.9205	67º	0’
	10’	934	542	279	337	088	194		50’
	20’	961	525	314	318	089	182		40’
	30’	.3987	2.508	.4348	2.300	1.090	.9171		30’
	40’	.4014	491	383	282	092	159		20’
	50’	041	475	417	264	093	147		10’
24º	0’	.4067	2.459	.4452	2.246	1.095	.9135	66º	0’
	10’	094	443	487	229	090	124		50
	20’	120	427	522	211	097	112		40’
	30’	.4147	2.411	.4557	2.194	1.099	.9100		30’
	40’	173	396	592	177	100	088		20’
	50’	200	381	628	161	102	075		10’
25º	0’	.4226	2.366	.4663	2.145	1.103	.9063	65º	0’
	10’	253	352	699	128	105	051		50’
	20’	279	337	734	112	106	038		40’
	30’	.4305	2.323	.4770	2.097	1.108	.9026		30’
	40’	331	309	806	081	109	013		20’
	50’	358	295	841	066	111	.9001		10’
26º	0’	.4384	2.281	.4877	2.050	1.113	.8988	64º	0’
	10’	410	268	913	035	114	975		50’
	20’	436	254	950	020	116	962		40’
	30’	.4462	2.241	.4986	2.006	1.117	.8949		30’
	40’	488	228	.5022	1.991	119	936		20’
	50’	514	215	059	977	121	923		10’
27º	0’	.4540	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	63º	0’
	10’	566	190	132	949	124	897		50’
	20’	592	178	169	935	126	884		40’
	30’	.4617	2.166	.5206	1.921	1.127	.8870		30’
	40’	643	154	243	907	129	857		20’
	50’	669	142	280	894	131	843		10’
28º	0’	.4695	2.130	.5317	1.881	1.133	.8829	62º	0’
	10’	720	118	354	868	134	816		50’
	20’	746	107	392	855	136	802		40’
	30’	.4772	2.096	.5430	1.842	1.138	.8788		30’
	40’	797	085	467	829	140	774		20’
	50’	823	074	505	816	142	760		10’
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados	

Grados		Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
29º	0’	.4848	2.063	.5543	1.804	1.143	.8746	61º	0’
	10’	874	052	581	792	145	732		50’
	20’	899	041	619	780	147	718		40’
	30’	.4924	2.031	.5658	1.767	1.149	.8704		30
	40’	950	020	696	756	151	689		20’
	50’	.4975	010	735	744	153	675		10’
30º	0’	.5000	2.000	.5734	1.732	1.155	.8660	60º	0’
	10’	025	1.990	812	720	157	646		50’
	20’	050	980	851	709	159	631		40
	30’	.5075	1.970	.5890	1.698	1.161	.8616		30’
	40’	100	961	930	686	163	601		20’
	50’	125	951	.5969	675	165	587		10’
31º	0’	.5150	1.942	.6009	1.664	1.167	.8572	59º	0
	10’	175	932	048	653	169	557		50’
	20’	200	923	088	643	171	542		40’
	30’	.5225	1.914	.6128	1.632	1.173	.8526		30’
	40’	250	905	168	621	175	511		20’
	50’	275	896	208	611	177	496		10’
32º	0’	.5299	1.887	.6249	1.600	1.179	.8480	58º	0’
	10’	324	878	289	590	181	465		50’
	20’	348	870	330	580	184	450		40’
	30’	.5373	1.861	.6371	1.570	1.186	.8434		30’
	40’	398	853	412	560	188	418		20’
	50’	422	844	453	550	190	403		10’
33º	0’	.5446	1.836	.6494	1.540	1.192	.8387	57º	0’
	10’	471	828	536	530	195	371		50’
	20’	495	820	577	520	197	355		40’
	30’	.5519	1.812	.6619	1.511	1.199	.8339		30’
	40’	544	804	661	501	202	323		20’
	50’	568	796	703	1.492	204	307		10’
34º	0’	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	56º	0’
	10’	616	781	787	473	209	274		50
	20’	640	773	830	464	211	258		40’
	30’	.5664	1.766	.6873	1.455	1.213	.8241		30’
	40’	688	758	916	446	216	255		20’
	50’	712	751	.6959	.437	218	208		10’
35º	0’	.5736	1.743	.7002	1.428	1.221	.8192	55º	0’
	10’	760	736	046	419	223	175		50’
	20’	783	729	089	411	226	158		40’
	30’	.5807	1.722	.7133	1.402	1.228	.8141		30’
	40’	831	715	177	393	231	124		20’
	50’	854	708	221	385	233	107		10’
36º	0’	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	54º	0’
	10’	901	695	310	368	239	073		50’
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados	

Grados		Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
	20’	925	688	355	360	241	056		40’
	30’	.5948	1.681	.7400	1.351	1.244	.8039		30’
	40’	972	675	445	343	247	021		20’
	50’	.5995	668	490	335	249	.8004		10’
37º	0’	.6018	1.662	.7536	1.327	1.252	.7986	53º	0’
	10’	041	655	581	319	255	969		50’
	20’	065	649	627	311	258	951		40’
	30’	.6088	1.643	.7673	1.303	1.260	.7934		30’
	40’	111	636	720	295	263	916		20’
	50’	134	630	766	288	266	898		10’
38º	0’	.6157	1.624	.7813	1.280	1.269	.7880	52º	0’
	10’	180	618	860	262	272	862		50’
	20’	202	612	907	265	275	844		40’
	30’	.6225	1.606	.7954	1.257	1.278	.7826		30’
	40’	248	601	.8002	250	281	808		20’
	50’	271	595	050	242	284	790		10’
39º	0’	.6293	1.589	.8098	1.235	1.287	.7771	51º	0’
	10’	316	583	146	228	290	753		50’
	20’	338	578	195	220	293	735		40’
	30’	.6361	1.572	.8243	1.213	1.296	.7716		30’
	40’	383	567	292	206	299	698		20’
	50’	406	561	342	199	302	679		10’
40º	0’	.6428	1.556	.8391	1.192	1.305	.7660	50º	0’
	10’	450	550	441	185	309	642		50’
	20’	472	545	491	178	312	623		40’
	30’	.6494	1.540	.8541	1.171	1.315	.7604		30’
	40’	517	535	591	164	318	585		20’
	50’	539	529	642	157	322	566		10’
41º	0’	.6561	1.524	.8693	1.150	1.325	.7547	49º	0’
	10’	583	519	744	144	328	528		50’
	20’	604	514	796	137	332	509		40’
	30’	.6626	1.509	.8847	1.130	1.335	.7490		30’
	40’	648	504	899	124	339	470		20’
	50’	670	499	.8952	117	342	451		10’
42º	0’	.6691	1.494	.9004	1.111	1.346	.7431	48º	0’
	10’	713	490	057	104	349	412		50’
	20’	734	485	110	098	353	392		40’
	30’	.6756	1.480	.9163	1.091	1.356	.7373		30’
	40’	777	476	217	085	360	353		20’
	50’	799	471	271	079	364	333		10’
43º	0’	.6820	1.466	.9325	1.072	1.367	.7314	47º	0’
	10’	841	462	380	066	371	294		50’
	20’	862	457	435	060	375	274		40’
	30’	.6884	1.453	.9490	1.054	1.379	.7254		30’
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados’	

Grados		Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
29º	0’	.4848	2.063	.5543	1.804	1.143	.8746	61º	0’
	10’	874	052	581	792	145	732		50’
	20’	899	041	619	780	147	718		40’
	30’	.4924	2.031	.5658	1.767	1.149	.8704		30
	40’	950	020	696	756	151	689		20’
	50’	.4975	010	735	744	153	675		10’
30º	0’	.5000	2.000	.5734	1.732	1.155	.8660	60º	0’
	10’	025	1.990	812	720	157	646		50’
	20’	050	980	851	709	159	631		40
	30’	.5075	1.970	.5890	1.698	1.161	.8616		30’
	40’	100	961	930	686	163	601		20’
	50’	125	951	.5969	675	165	587		10’
31º	0’	.5150	1.942	.6009	1.664	1.167	.8572	59º	0
	10’	175	932	048	653	169	557		50’
	20’	200	923	088	643	171	542		40’
	30’	.5225	1.914	.6128	1.632	1.173	.8526		30’
	40’	250	905	168	621	175	511		20’
	50’	275	896	208	611	177	496		10’
32º	0’	.5299	1.887	.6249	1.600	1.179	.8480	58º	0’
	10’	324	878	289	590	181	465		50’
	20’	348	870	330	580	184	450		40’
	30’	.5373	1.861	.6371	1.570	1.186	.8434		30’
	40’	398	853	412	560	188	418		20’
	50’	422	844	453	550	190	403		10’
33º	0’	.5446	1.836	.6494	1.540	1.192	.8387	57º	0’
	10’	471	828	536	530	195	371		50’
	20’	495	820	577	520	197	355		40’
	30’	.5519	1.812	.6619	1.511	1.199	.8339		30’
	40’	544	804	661	501	202	323		20’
	50’	568	796	703	1.492	204	307		10’
34º	0’	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	56º	0’
	10’	616	781	787	473	209	274		50
	20’	640	773	830	464	211	258		40’
	30’	.5664	1.766	.6873	1.455	1.213	.8241		30’
	40’	688	758	916	446	216	255		20’
	50’	712	751	.6959	.437	218	208		10’
35º	0’	.5736	1.743	.7002	1.428	1.221	.8192	55º	0’
	10’	760	736	046	419	223	175		50’
	20’	783	729	089	411	226	158		40’
	30’	.5807	1.722	.7133	1.402	1.228	.8141		30’
	40’	831	715	177	393	231	124		20’
	50’	854	708	221	385	233	107		10’
36º	0’	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	54º	0’
	10’	901	695	310	368	239	073		50’
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados	

Grados		Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
	20’	925	688	355	360	241	056		40’
	30’	.5948	1.681	.7400	1.351	1.244	.8039		30’
	40’	972	675	445	343	247	021		20’
	50’	.5995	668	490	335	249	.8004		10’
37º	0’	.6018	1.662	.7536	1.327	1.252	.7986	53º	0’
	10’	041	655	581	319	255	969		50’
	20’	065	649	627	311	258	951		40’
	30’	.6088	1.643	.7673	1.303	1.260	.7934		30’
	40’	111	636	720	295	263	916		20’
	50’	134	630	766	288	266	898		10’
38º	0’	.6157	1.624	.7813	1.280	1.269	.7880	52º	0’
	10’	180	618	860	262	272	862		50’
	20’	202	612	907	265	275	844		40’
	30’	.6225	1.606	.7954	1.257	1.278	.7826		30’
	40’	248	601	.8002	250	281	808		20’
	50’	271	595	050	242	284	790		10’
39º	0’	.6293	1.589	.8098	1.235	1.287	.7771	51º	0’
	10’	316	583	146	228	290	753		50’
	20’	338	578	195	220	293	735		40’
	30’	.6361	1.572	.8243	1.213	1.296	.7716		30’
	40’	383	567	292	206	299	698		20’
	50’	406	561	342	199	302	679		10’
40º	0’	.6428	1.556	.8391	1.192	1.305	.7660	50º	0’
	10’	450	550	441	185	309	642		50’
	20’	472	545	491	178	312	623		40’
	30’	.6494	1.540	.8541	1.171	1.315	.7604		30’
	40’	517	535	591	164	318	585		20’
	50’	539	529	642	157	322	566		10’
41º	0’	.6561	1.524	.8693	1.150	1.325	.7547	49º	0’
	10’	583	519	744	144	328	528		50’
	20’	604	514	796	137	332	509		40’
	30’	.6626	1.509	.8847	1.130	1.335	.7490		30’
	40’	648	504	899	124	339	470		20’
	50’	670	499	.8952	117	342	451		10’
42º	0’	.6691	1.494	.9004	1.111	1.346	.7431	48º	0’
	10’	713	490	057	104	349	412		50’
	20’	734	485	110	098	353	392		40’
	30’	.6756	1.480	.9163	1.091	1.356	.7373		30’
	40’	777	476	217	085	360	353		20’
	50’	799	471	271	079	364	333		10’
43º	0’	.6820	1.466	.9325	1.072	1.367	.7314	47º	0’
	10’	841	462	380	066	371	294		50’
	20’	862	457	435	060	375	274		40’
	30’	.6884	1.453	.9490	1.054	1.379	.7254		30’
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados’	

Grados		Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
	40’	905	448	545	048	382	234		20’
	50’	926	444	601	042	386	214		10’
44º	0’	.6947	1.440	.9657	1.036	1.390	.7193	46º	0’
	10’	967	435	713	030	394	173		50’
	20’	.6988	431	770	024	398	153		40’
	30’	.7009	1.427	.9827	1.018	1.402	.7133		30’
	40’	030	423	884	012	406	112		20’
	50’	050	418	.9942	006	410	092		10’
45º	0’	.7071	1.414	1.000	1.000	1.414	.7071	45º	0’
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados’	

TABLAS DE LOGARITMOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Àngulo		L Sen	d	L Cos	d	L Tan	dc	L Cot		
0º	0’			10.0000	.0				90º	0’
	10’	7.4637	301.1	.0000	.0	7.4637	301.1	12.5363		50’
	20’	.7648	176.0	.0000	.0	.7648	176.1	.2352		40’
	30’	7.9408	125.0	.0000	.0	7.9409	124.9	12.0591		30’
	40’	8.0658	96.9	.0000	.0	8.0658	96.9	11.9342		20’
	50’	.1627	79.2	10.0000	.1	.1627	79.2	.8373		10’
1º	0’	8.2419	66.9	9.9999	.0	8.2419	67.0	11.7581	89º	0’
	10’	.3088	58.0	.9999	.0	.3089	58.0	.6911		50’
	20’	.3668	51.1	.9999	.0	.3669	51.2	.6331		40’
	30’	.4179	45.8	.9999	.1	.4181	45.7	.5819		30’
	40’	.4637	41.3	.9998	.0	.4638	41.5	.5362		20’
	50’	.5050	37.8	.9998	.1	.5053	37.8	.4947		10’
2º	0’	8.5428	34.8	9.9997	.0	8.5431	34.8	11.4569	88º	0’
	10’	.5776	32.1	.9997	.1	.5779	32.2	.4221		50’
	20’	.6097	30.0	.9996	.0	.6101	30.0	.3899		40’
	30’	.6397	28.0	.9996	.1	.6401	28.1	.3599		30’
	40’	.6677	26.3	.9995	.0	.6282	26.3	.3318		20’
	50’	.6940	24.8	.9995	.1	.6945	24.9	.3055		10’
3º	0’	8.7188	23.5	9.9994	.1	8.7194	23.5	11.2806	87º	0’
	10’	.7423	22.2	.9993	.0	.7429	22.3	.2571		50’
	20’	.7645	21.2	.9993	.1	.7652	21.3	.2348		40’
	30’	.7857	20.2	.9992	.1	.7865	20.2	.2135		30’
	40’	.8059	19.2	.9991	.1	.8067	19.4	.1933		20’
	50’	.8251	18.5	.9990	.1	.8261	18.5	.1739		10’
4º	0’	8.8436	17.7	.9989	.0	8.8446	17.8	11.1554	86º	0’
	10’	.8613	17.0	.9989	.1	.8624	17.1	.1376		50’
	20’	.8783	16.3	.9988	.1	.8795	16.5	.1205		40’
	30’	.8946	15.8	.9987	.1	.8960	15.8	.1040		30’
	40’	.9104	15.2	.9986	.1	.9118	15.4	.0882		20’
	50’	.9256	14.7	.9985	.2	.9272	14.8	.0728		10’
5º	0’	8.9403	14.2	9.9983	.1	8.9420	14.3	11.0580	85º	0’
	10’	.9545	13.7	.9982	.1	.9563	13.8	.0437		50’
	20’	.9682	13.4	.9981	.1	.9701	13.5	.0299		40’
		L Cos	d	L Sen	d	L Cot	dc	L Tan	Ángulo	

Ángulo		L Sen	d	L Cos	d	L Tan	dc	L cot		
	30’	.9816	12.9	.9980	.1	.9836	13.0	.0164		30’
	40’	8.9945	12.5	.9979	.2	8.9966	12.7	11.0034		20’
	50’	9.0070	12.2	.9977	.1	9.0093	12.3	10.9907		10’
6º	0’	9.0192	11.9	9.9976	.1	9.0216	12.0	10.9784	84º	0’
	10’	.0311	11.5	.9975	.2	.0336	11.7	.9664		50’
	20’	.0426	11.3	.9973	.1	.0453	11.4	.9547		40’
	30’	.0539	10.9	.9972	.1	.0567	11.1	.9433		30’
	40’	.0648	10.7	.9971	.2	.0678	10.8	.9322		20’
	50’	.0755	10.4	.9969	.1	.0786	10.5	.9214		10’
7º	0’	9.0859	10.2	9.9968	.2	9.0891	10.4	10.9109	83º	0’
	10’	.0961	9.9	.9966	.2	.0995	10.1	.9005		50’
	20’	.1060	9.7	.9964	.1	.1096	9.8	.8904		40’
	30’	.1157	9.5	.9963	.2	.1194	9.7	.8806		30’
	40’	.1252	9.3	.9961	.2	.1291	9.4	.8709		20’
	50’	.1345	9.1	.9959	.1	.1385	9.3	.8615		10’
8º	0’	9.1436	8.9	9.9958	.2	9.1478	9.1	10.8522	82º	0’
	10’	.1525	8.7	.9956	.2	.1569	8.9	.8431		50’
	20’	.1612	8.5	.9954	.2	.1658	8.7	.8342		40’
	30’	.1697	8.4	.9952	.2	.1745	8.6	.8255		30’
	40’	.1781	8.2	.9950	.2	.1831	8.4	.8169		20’
	50’	.1863	8.0	.9948	.2	.1915	8.2	.8085		10’
9º	0’	9.1943	7.9	9.9946	.2	9.1997	8.1	10.8003	81º	0’
	10’	.2022	7.8	.9944	.2	.2078	8.0	.7922		50’
	20’	.2100	7.6	.9942	.2	.2158	7.8	.7842		40’
	30’	.2176	7.5	.9940	.2	.2236	7.7	.7764		30’
	40’	.2251	7.3	.9938	.2	.2313	7.6	.7687		20’
	50’	.2324	7.3	.9936	.2	.2389	7.4	.7611		10’
10º	0’	9.2397	7.1	9.9934	.3	9.2463	7.3	10.7537	80º	0’
	10’	.2468	7.0	.9931	.2	.2536	7.3	.7464		50’
	20’	.2538	6.8	.9929	.2	.2609	7.1	.7391		40’
	30’	.2606	6.8	.9927	.3	.2680	7.0	.7320		30’
	40’	.2679	6.6	.9924	.2	.2750	6.9	.7250		20’
	50’	.2740	6.6	.9922	.3	.2819	6.8	.7181		10’
11º	0’	9.2806	6.4	9.9919	.2	9.2887	6.6	10.7113	79º	0’
	10’	.2870	6.4	.9917	.3	.2953	6.7	.7047		50’
	20’	.2934	6.3	.9914	.2	.3020	6.5	.6980		40’
	30’	.2997	6.1	.9912	.3	.3085	6.4	.6915		30’
	40’	.3058	6.1	.9909	.2	.3149	6.3	.6851		20’
	50’	.3119	6.0	.9907	.3	.3212	6.3	.6788		10’
12º	0’	9.3179	5.9	9.9904	.3	9.3275	6.1	10.6725	78º	0’
	10’	.3238	5.8	.9901	.2	.3336	6.1	.6664		50’
	20’	.3296	5.7	.9899	.3	.3397	6.1	.6603		40’
	30’	.3353	5.7	.9896	.3	.3458	5.9	.6542		30’
	40’	.3410	5.6	.9893	.3	.3517	5.9	.6483		20’
	50’	.3466	5.5	.9890	.3	.3576	5.8	.6424		10’
13º	0’	9.3521	5.4	9.9887	.3	9.3634	5.7	10.6366	77º	0’
	10’	.3575	5.4	.9884	.3	.3691	5.7	.6309		50’
	20’	.3629	5.3	.9881	.3	.3748	5.6	.6252		40’
	30’	.3682	5.2	.9878	.3	.3804	5.5	.6196		30’
	40’	.3734	5.2	.9875	.3	.3859	5.5	.6141		20’
	50’	.3786	5.1	.9872	.3	.3914	5.4	.6086		10’
		L Cos	d	L Sen	d	L Cot	dc	L tan	Ángulo	

Ángulo		L Sen	d	L Cos	d	L Tan	dc	L cot		Ángulo
14º	0’	9.3837	5.0	9.9869	.3	9.3968	5.3	10.6032	76º	0’
	10’	.3887	5.0	.9866	.3	.4021	5.3	.5979		50’
	20’	.3937	4.9	.9863	.4	.4074	5.3	.5926		40’
	30’	.3986	4.9	.9859	.3	.4127	5.1	.5873		30’
	40’	.4035	4.8	.9856	.3	.4178	5.2	.5822		20’
	50’	.4083	4.7	.9853	.4	.4230	5.1	.5770		10’
15º	0’	9.4130	4.7	9.9849	.3	9.4281	5.0	10.5719	75º	0’
	10’	.4177	4.6	.9846	.3	.4331	5.0	.5669		50’
	20’	.4223	4.6	.9843	.4	.4381	4.9	.5619		40’
	30’	.4269	4.5	.9839	.3	.4430	4.9	.5570		30’
	40’	.4314	4.5	.9836	.4	.4479	4.8	.5521		20’
	50’	.4359	4.4	.9832	.4	.4527	4.8	.5473		10’
16º	0’	9.4403	4.4	9.9828	.3	9.4575	4.7	10.5425	74º	0’
	10’	.4447	4.4	.9825	.4	.4622	4.7	.5378		50’
	20’	.4491	4.2	.9821	.4	.4669	4.7	.5331		40’
	30’	.4533	4.3	.9817	.3	.4716	4.6	.5284		30’
	40’	.4576	4.2	.9814	.4	.4762	4.6	.5238		20’
	50’	.4618	4.1	.9810	.4	.4808	4.5	.5192		10’
17º	0’	9.4659	4.1	9.9806	.4	9.4853	4.5	10.5147	73º	0’
	10’	.4700	4.1	.9802	.4	.4898	4.5	.5102		50’
	20’	.4741	4.0	.9798	.4	.4953	4.4	.5057		40’
	30’	.4781	4.0	.9794	.4	.4987	4.4	.5013		30’
	40’	.4821	4.0	.9790	.4	.5031	4.4	.4969		20’
	50’	.4861	3.9	.9786	.4	.5075	4.3	.4925		10’
18º	0’	9.4900	3.9	9.9782	.4	9.5118	4.3	10.4882	72º	0’
	10’	.4939	3.8	.9778	.4	.5161	4.2	.4839		50’
	20’	.4977	3.8	.9774	.4	.5203	4.2	.4797		40’
	30’	.5015	3.7	.9770	.5	.5245	4.2	.4755		30’
	40’	.5052	3.8	.9765	.4	.5287	4.2	.4713		20’
	50’	.5090	3.6	.9761	.4	.5329	4.1	.4671		10’
19º	0’	9.5126	3.7	9.9757	.5	9.5370	4.1	10.4630	71º	0’
	10’	.5163	3.6	.9752	.4	.5411	4.0	.4589		50’
	20’	.5199	3.6	.9748	.5	.5451	4.0	.4549		40’
	30’	.5235	3.5	.9743	.4	.5491	4.0	.4509		30’
	40’	.5270	3.6	.9739	.5	.5531	4.0	.4469		20’
	50’	.5306	3.5	.9734	.4	.5571	4.0	.4429		10’
20º	0’	9.5341	3.4	9.9730	.5	9.5611	3.9	10.4389	70º	0’
	10’	.5375	3.4	.9725	.4	.5650	3.9	.4350		50’
	20’	.5409	3.4	.9721	.5	.5689	3.8	.4311		40’
	30’	.5443	3.4	.9716	.5	.5727	3.9	.4273		30’
	40’	.5477	3.3	.9711	.5	.5766	3.8	.4234		20’
	50’	.5510	3.3	.9706	.4	.5804	3.8	.4196		10’
21º	0’	9.5543	3.3	9.9702	.5	9.5842	3.7	10.4158	69º	0’
	10’	.5576	3.3	.9697	.5	.5879	3.8	.4121		50’
	20’	.5609	3.2	.9692	.5	.5917	3.7	.4083		40’
	30’	.5641	3.2	.9687	.5	.5954	3.7	.4046		30’
	40’	.5673	3.1	.9682	.5	.5991	3.7	.4009		20’
	50’	.5704	3.2	.9677	.5	.6028	3.6	.3972		10’
22º	0’	9.5736	3.1	9.9672	.5	9.6064	3.6	10.3936	68º	0’
	10’	.5767	3.1	.9667	.6	.6100	3.6	.3900		50’
	20’	.5798	3.0	.9661	.5	.6136	3.6	3864		40’
		L Cos	d	L Sen	D	L Cot	dc	L Tan	Ángulo	

Ángulo		L Sen	d	L Cos	d	L Tan	dc	L cot		
	30’	.5828	3.1	.9656	5	.6172	3.6	.3828		30’
	40’	.5859	3.0	.9651	.5	.6208	3.5	.3792		20’
	50’	.5889	3.0	.9646	.6	.6243	3.6	.3757		10’
23º	0’	9.5919	2.9	9.9640	.5	9.6279	3.5	10.3721	67º	0’
	10’	.5948	3.0	.9635	.6	.6314	3.4	.3686		50’
	20’	.5978	2.9	.9629	.5	.6348	3.5	.3652		40’
	30’	.6007	2.9	.9624	.6	.6383	3.4	.3617		30’
	40’	.6036	2.9	.9618	.5	.6417	3.5	.3583		20’
	50’	.6065	2.8	.9613	.6	.6452	3.4	.3548		10’
24º	0’	9.6093	2.8	9.9607	.5	9.6486	3.4	10.3514	66º	0’
	10’	.6121	2.8	.9602	.6	.6520	3.3	.3480		50’
	20’	.6149	2.8	.9596	.6	.6553	3.4	.3447		40’
	30’	.6177	2.8	.9590	.6	.6587	3.3	.3413		30’
	40’	.6205	2.7	.9584	.5	.6620	3.4	.3380		20’
	50’	.6232	2.7	.9579	.6	.6654	3.3	.3346		10’
25º	0’	9.6259	2.7	9.9573	.6	9.6687	3.3	10.3313	65º	0’
	10’	.6286	2.7	.9567	.6	.6720	3.2	.3280		50’
	20’	.6313	2.7	.9561	.6	.6752	3.3	.3248		40’
	30’	.6340	2.6	.9555	.6	.6785	3.2	.3215		30’
	40’	.6366	2.6	.9549	.6	.6817	3.3	.3183		20’
	50’	.6392	2.6	.9543	.6	.6850	3.2	.3150		10’
26º	0’	9.6418	2.6	9.9537	.7	9.6882	3.2	10.3118	64º	0’
	10’	.6444	2.6	.9530	.6	.6914	3.2	.3086		50’
	20’	.6470	2.5	.9524	.6	.6946	3.1	.3054		40’
	30’	.6495	2.6	.9518	.6	.6977	3.2	.3023		30’
	40’	.6521	2.5	.9512	.7	.7009	3.1	.2991		20’
	50’	.6546	2.4	.9505	.6	.7040	3.2	.2960		10’
27º	0’	9.6570	2.5	9.9499	.7	9.7072	3.1	10.2928	63º	0’
	10’	.6595	2.5	.9492	.6	.7103	3.1	.2897		50’
	20’	.6620	2.4	.9486	.7	.7134	3.1	.2866		40’
	30’	.6644	2.4	.9479	.6	.7165	3.1	.2835		30’
	40’	.6668	2.4	.9473	.7	.7196	3.0	.2804		20’
	50’	.6692	2.4	.9466	.7	.7226	3.1	.2774		10’
28º	0’	9.6716	2.4	9.9459	.6	9.7257	3.0	10.2743	62º	0’
	10’	.6740	2.3	.9453	.7	.7287	3.0	.2713		50’
	20’	.6743	2.4	.9446	.7	.7317	3.1	.2683		40’
	30’	.6787	2.3	.9439	.7	.7348	3.0	.2652		30’
	40’	.6810	2.3	.9432	.7	.7378	3.0	.2622		20’
	50’	.6833	2.3	.9425	.7	.7408	3.0	.2592		10’
29º	0’	9.6856	2.2	9.9418	.7	9.7438	2.9	10.2562	61º	0’
	10’	.6878	2.3	.9411	.7	.7467	3.0	.2533		50’
	20’	.6901	2.2	.9404	.7	.7497	2.9	.2503		40’
	30’	.6923	2.3	.9397	.7	.7526	3.0	.2474		30’
	40’	.6946	2.2	.9390	.7	.7556	2.9	.2444		20’
	50’	.6968	2.2	.9383	.8	.7585	2.9	.2415		10’
30º	0’	9.6990	2.2	9.9375	.7	9.7614	3.0	10.2386	60º	0’
	10’	.7012	2.1	.9368	.7	.7644	2.9	.2356		50’
	20’	.7033	2.2	.9361	.8	.7673	2.8	.2327		40’
	30’	.7055	2.1	.9353	.7	.7701	2.9	.2299		30’
	40’	.7076	2.1	.9346	.8	.7730	2.9	.2270		20’
	50’	.7097	2.1	.9338	.7	.7759	2.9	.2241		10’
		L Cos	d	L Sen	d	L Cot	dc	L Tan	Ángulo	

Ángulo		L Sen	d	L Cos	d	L Tan	dc	L cot		
31º	0’	9.7118	2.1	9.9331	.8	9.7788	2.8	10.2212	59º	0’
	10’	.7139	2.1	.9323	.8	.7816	2.9	.2184		50’
	20’	.7160	2.1	.9315	.7	.7845	2.8	.2155		40’
	30’	.7181	2.0	.9308	.8	.7873	2.9	.2127		30’
	40’	.7201	2.1	.9300	.8	.7902	2.8	.2098		20’
	50’	.7222	2.0	.9242	.8	.7930	2.8	.2070		10’
32º	0’	9.7242	2.0	9.9284	.8	9.7958	2.8	10.2042	58º	0’
	10’	.7262	2.0	.9276	.8	.7986	2.8	.2014		50’
	20’	.7282	2.0	.9268	.8	.8014	2.8	.1986		40’
	30’	.7302	2.0	.9260	.8	.8042	2.8	.1958		30’
	40’	.7322	2.0	.9252	.8	.8070	2.7	.1930		20’
	50’	.7342	1.9	.9244	.8	.8097	2.8	.1903		10’
33º	0’	9.7361	1.9	9.9236	.8	9.8125	2.8	10.1875	57º	0’
	10’	.7380	2.0	.9228	.9	.8153	2.7	.1847		50’
	20’	.7400	1.9	.9219	.8	.8180	2.8	.1820		40’
	30’	.7419	1.9	.9211	.8	.8208	2.7	.1792		30’
	40’	.7438	1.9	.9203	.9	.8235	2.8	.1765		20’
	50’	.7457	1.9	.9194	.8	.8263	2.7	.1737		10’
34º	0’	9.7476	1.8	9.9186	.9	9.8290	2.7	10.1710	56º	0’
	10’	.7494	1.9	.9177	.8	.8317	2.7	.1683		50’
	20’	.7513	1.8	.9169	.9	.8344	2.7	.1656		40’
	30’	.7531	1.9	.9160	.9	.8371	2.7	.1629		30’
	40’	.7550	1.8	.9151	.9	.8398	2.7	.1602		20’
	50’	.7568	1.8	.9142	.8	.8425	2.7	.1575		10’
35º	0’	9.7586	1.8	9.9134	.9	9.8452	2.7	10.1548	55º	0’
	10’	.7609	1.8	.9125	..9	.8479	2.7	.1521		50’
	20’	.7622	1.8	.9116	.9	.8506	2.7	.1494		40’
	30’	.7640	1.7	.9107	.9	.8533	2.6	.1467		30’
	40’	.7657	1.8	.9098	.9	.8559	2.7	.1441		20’
	50’	.7675	1.7	.9089	.9	.8586	2.7	.1414		10’
36º	0’	9.7692	1.8	9.9080	1.0	9.8613	2.6	10.1387	54º	0’
	10’	.7710	1.7	.9070	.9	.8639	2.7	.1361		50’
	20’	.7727	1.7	.9061	.9	.8666	2.6	.1334		40’
	30’	.7744	1.7	.9052	1.0	.8692	2.6	.1308		30’
	40’	.7761	1.7	.9042	.9	.8718	2.7	.1282		20’
	50’	.7778	1.7	.9033	1.0	.8745	2.6	.1255		10’
37º	0’	9.7795	1.6	9.9023	.9	9.8771	2.6	10.1229	53º	0’
	10’	.7811	1.7	.9014	1.0	.8797	2.7	.1203		50’
	20’	.7828	1.6	.9004	.9	.8824	2.6	.1176		40’
	30’	.7844	1.7	.8995	1.0	.8850	2.6	.1150		30’
	40’	.7861	1.6	.8985	1.0	.8876	2.6	.1124		20’
	50’	.7877	1.6	.8975	1.0	.8902	2.6	.1098		10’
38º	0’	9.7893	1.7	9.8965	1.0	9.8928	2.6	10.1072	52º	0’
	10’	.7910	1.6	.8955	1.0	.8954	2.6	.1046		50’
	20’	.7926	1.5	.8945	1.0	.8980	2.6	.1020		40’
	30’	.7941	1.6	.8935	1.0	.9006	2.6	.0994		30’
	40’	.7957	1.6	.8925	1.0	.9032	2.6	.0968		20’
	50’	.7973	1.6	.8915	1.0	.9058	2.6	.0942		10’
39º	0’	9.7989	1.5	9.8905	1.0	9.9084	2.6	10.0916	51º	0’
	10’	.8004	1.6	.8895	1.1	.9110	2.5	.0890		50’
	20’	.8020	1.5	.8884	1.0	.9135	2.6	.0865		40’
		L Cos	d	L Sen	d	L Cot	dc	L Tan	Ángulo	

Ángulo		L Sen	d	L Cos	d	L Tan	dc	L cot		
	30’	.8035	1.5	.8874	1.0	.9161	2.6	.0839		30’
	40’	.8050	1.6	.8864	1.1	.9187	2.5	.0813		20’
	50’	.8066	1.5	.8853	1.0	.9212	2.6	.0788		10’
	0’	9.8081	1.5	9.8843	1.1	9.9238	2.6	10.0762	50º	0’
40º	10’	.8096	1.5	.8832	1.1	.9264	2.5	.0736		50’
	20’	.8111	1.4	.8821	1.1	.9289	2.6	.0711		40’
	30’	.8125	1.5	.8810	1.0	.9315	2.6	.0685		30’
	40’	.8140	1.5	.8800	1.1	.9341	2.5	.0659		20’
	50’	.8155	1.4	.8789	1.1	.9366	2.6	.0634		10’
41º	0’	9.8169	1.5	9.8778	1.1	9.9392	2.5	10.0608	49º	0’
	10’	.8184	1.4	.8767	1.1	.9417	2.6	.0583		50’
	20’	.8198	1.5	.8756	1.1	.9443	2.5	.0557		40’
	30’	.8213	1.4	.8745	1.2	.9464	2.6	.0532		30’
	40’	.8227	1.4	.8733	1.1	.9494	2.5	.0506		20’
	50’	.8241	1.4	.8722	1.1	.9515	2.5	.0481		10’
42º	0’	9.8225	1.4	9.8711	1.2	9.9544	2.6	10.0456	48º	0’
	10’	.8269	1.4	.8699	1.1	.9570	2.5	.0430		50’
	20’	.8283	1.4	.8688	1.2	.9595	2.6	.0405		40’
	30’	.8297	1.4	.8676	1.1	.9621	2.5	.0379		30’
	40’	.8311	1.3	.8665	1.2	.9646	2.5	.0354		20’
	50’	.8324	1.4	.8653	1.2	.9671	2.6	.0329		10’
43º	0’	9.8338	1.3	9.8641	1.2	.9697	2.5	10.0303	47	0’
	10’	.8351	1.4	.8629	1.1	.9722	2.5	.0278		50’
	20’	.8365	1.3	.8618	1.2	.9747	2.5	.0253		40’
	30’	.8378	1.3	.8606	1.2	.9772	2.6	.0228		30’
	40’	.8391	1.4	.8594	1.2	.9798	2.5	.0202		20’
	50’	.8405	1.3	.8582	1.3	.9823	2.5	.0177		10’
44º	0’	9.8418	1.3	9.8569	1.2	9.9848	2.6	10.0152	46º	0’
	10’	.8431	1.3	.8557	1.2	.9874	2.5	.0126		50’
	20’	.8444	1.3	.8545	1.3	.9899	2.5	.0101		40’
	30’	.8457	1.2	.8532	1.2	.9924	2.5	.0076		30’
	40’	.8469	1.3	.8520	1.3	.9949	2.6	.0051		20’
	50’	.8482	1.3	.8507	1.2	9.9975	2.5	.0025		10’
45º	0’	9.8495		9.8495		10.0000		10.0000	45º	0’
		L Cos	d	L Sen	d	L Cot	Dc	L Tan	Ángulo	

TABLA DE EXPONENCIALES, RAÍCES Y RECÍPROCAS

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	1/n	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	1/n
1	1	1	1.000	1.000	1.0000	51	2,601	132,651	7.141	3.708	.0196
2	4	8	1.414	1.260	.5000	52	2,704	140,608	7.211	3.733	.0192
3	9	27	1.732	1.442	.3333	53	2,809	148,877	7.280	3.756	.0189
4	16	64	2.000	1.587	.2500	54	2,916	157,464	7.348	3.780	.0185
5	25	125	2.236	1.710	.2000	55	3,025	166,375	7.416	3.803	0182
6	36	216	2.449	1.817	.1667	56	3,136	175,616	7.483	3.826	.0179
7	49	343	2.646	1.913	.1429	57	3,249	185,193	7.5550	3.849	.0175
8	64	512	2.828	2.000	.1250	58	3,364	195,112	7.616	3.871	.0172
9	81	729	3.000	2.080	.1111	59	3,481	205,379	7.681	3.893	.0169

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	1/n
10	100	1,000	3.162	2.154	.1000
11	121	1,331	3.317	2.224	.0909
12	144	1,728	3.464	2.289	.0833
13	169	2,197	3.606	2.351	.0769
14	196	2,744	3.742	2.410	.0714
15	225	3,375	3.873	2.466	.0667
16	256	4,096	4.000	2.520	.0625
17	289	4,913	4.123	2.571	.0588
18	324	5,832	4.243	2.621	.0556
19	361	6,859	4.359	2.668	.0526
20	400	8,000	4.472	2.714	.0500
21	441	9,261	4.583	2.759	.0476
22	484	10,648	4.690	2.802	.0455
23	529	12,167	4.796	2.844	.0435
24	576	13,824	4.899	2.884	.0417
25	625	15,625	5.000	2.924	.0400
26	676	17,576	5.099	2.962	.0385
27	729	19,683	5.196	3.000	.0370
28	784	21,952	5.292	3.037	.0357
29	841	24,389	5.385	3.072	.0345
30	900	27,000	5.477	3.107	.0333
31	961	29,791	5.568	3.141	.0323
32	1,024	32,768	5.657	3.175	.0312
33	1,089	35,937	5.745	3.208	.0303
34	1,156	39,304	5.831	3.240	.0294
35	1,225	42,875	5.916	3.271	.0286
36	1,296	46,656	6.000	3.302	.0278
37	1,369	50,653	6.083	3.332	.0270
38	1,444	54,872	6.164	3.362	.0263
39	1,521	59,319	6.245	3.391	.0256
40	1,600	64,000	6.325	3.420	.0250
41	1,681	68,921	6.403	3.448	.0244
42	1,764	74,088	6.481	3.476	.0238
43	1,849	79,507	6.557	3.503	.0233
44	1,936	85,184	6.633	3.530	.0227
45	2,025	91,125	6.708	3.557	.0222
46	2,116	97,336	6.782	3.583	.0217
47	2,209	103,823	6.856	3.609	.0213
48	2,304	110,592	6.928	3.634	.0208
49	2,401	117,649	7.000	3.659	.0204
50	2,500	125,000	7.071	3.684	.0200

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	1/n
60	3,600	216,000	7.746	3.915	.0167
61	3,721	226,981	7.810	3.936	.0164
62	3,844	238,328	7.874	3.958	.0161
63	3,969	250,047	7.937	3.979	.0159
64	4,096	262,144	8.000	4.000	.0156
65	4,225	274,625	8.062	4.021	.0154
66	4,356	287,496	8.124	4.041	.0152
67	4,489	300,763	8.185	4.062	.0149
68	4,624	314,432	8.246	4.082	.0147
69	4,761	328,509	8.307	4.102	.0145
70	4,900	343,000	8.367	4.121	.0143
71	5,041	357,911	8.426	4.141	.0141
72	5,184	373,248	8.485	4.160	.0139
73	5,329	389,017	8.544	4.179	.0137
74	5,476	405,224	8.602	4.198	.0135
75	5,625	421,875	8.660	4.217	.0133
76	5,776	438,976	8.718	4.236	.0132
77	5,929	456,533	8.775	4.254	.0130
78	6,084	474,552	8.832	4.273	.0128
79	6,241	493,039	8.888	4.291	.0127
80	6,400	512,000	8.944	4.309	.0125
81	6,561	531,441	9.000	4.327	.0123
82	6,724	551,368	9.055	4.344	.0122
83	6,889	571,787	9.110	4.362	0.0120
84	7,056	592,704	9.165	4.380	.0119
85	7,225	614,125	9.220	4.397	.0118
86	7,396	636,056	9.274	4.414	.0116
87	7,569	658,503	9.327	4.431	.0115
88	7,744	681,472	9.381	4.448	.0114
89	7,921	704,969	9.434	4.465	.0112
90	8,100	729,000	9.487	4.481	.0111
91	8,281	753,571	9.539	4.498	.0110
92	8,464	778,688	9.592	4.514	.0109
93	8,649	804,357	9.644	4.531	.0108
94	8,836	830,584	9.695	4.547	.0106
95	9,025	857,375	9.747	4.563	.0105
96	9,216	884,736	9.798	4.579	.0104
97	9,409	912,673	9.849	4.595	.0103
98	9,604	941,192	9.899	4.610	.0102
99	9,801	970,299	9.950	4.626	.0101
100	10,000	1,000,000	10.000	4.642	.0100

CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS

Figura	Nombre	Claves	Perímetro	Área
	Triángulo	a, b, c = lados h = altura s = semiperímetro	P = a + b + c	$A = \frac{bh}{2}$ $s = \frac{a+b+c}{2}$
	Triangulo Rectángulo	A,b = lados Menores (catetos) C = lado mayor (hipotenusa)	P = a + b + c	$A = \frac{ab}{2}$
	Cuadrado	a = lado	$P = 4^{a}$	$A = a^2$
	Rectángulo	a =altura b =base	P = 2(a + b)	A = ba
	Rombo	A = lado d_1, d_2 = diagonales	$P = 4^{a}$	$A = \frac{d_1 d_2}{2}$
	Paralelogramo Cualquiera	a,b =lados h = altura	P = 2(a + b)	A= bh

	Trapecio	a,b,c,d = lados a,c = lados Paralelos h = altura	P = a+b+c+d	$A = \left(\frac{a+c}{2}\right)h$
	Trapezoide o Cuadrilátero cualquiera	a,b,c,d = lados $d_1 d_2$ = diagonales	P = a+ b +c + d	$A = \frac{1}{2}\sqrt{4(d_1 d_2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}$
	Pentágono	l = lado a = apotema	P = nl	$A = \frac{Pa}{2}$, A = 1.721 l^2
	Hexágono	l = lado a = apotema	P = nl	$A = \frac{Pa}{2}$, A = 2.598 l^2
	Eptágono	l = lado a = apotema	P = nl	$A = \frac{Pa}{2}$, A = 3.634 l^2
	Octágono	l = lado a = apotema	P = nl	$A = \frac{Pa}{2}$, A = 4.828 l^2

	Eneágono	l = lado a = apotema	P = nl	$A = \frac{Pa}{2}$. $A = 6.182\ l^2$
	Decágono	l = lado a = apotema	P = nl	$A = \frac{Pa}{2}$. $A = 7.694\ l^2$
	Círculo	d = diámetro r = radio $\pi = 3.1416$	$P = \pi D$ $P = 2\pi r$	$A = \frac{\pi D^2}{4}$ $A = \pi r^2$
	Corona circular	d_1 = diametro mayor d_2 = diámetro menor r_1 = radio mayor r_2 = radio menor	P. ext. = πd_1 P. int. = πd_1 p. Total: $\pi(d_1 + d_2)$	$A = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)$ $A = \pi(r_1^2 - r_2^2)$
	Sector circular	longitud del arco r = radio número de grados	l = 0.01745 – n P = l + 2r	$A = \frac{\pi r^2 n}{360}$ $A = \frac{lr}{2}$
	Segmento circular	c = cuerda r = radio h = altura n = número de grados	P = 0.01745 m + c	$A = \frac{\pi r^2}{360} - \frac{c(r-h)}{2}$

	Cuadrante	r = radio c = cuerda	$p = \frac{1}{2} r\pi + 2r$	$A = \frac{\pi r^2}{4} = 0.3927\, c^2$
	Embecadura	r = radio c = cuerda	$p = \frac{1}{2} r\pi + 2r$	$A = r^2 - \frac{\pi r^2}{4}$
	Tetraedro	a = arista	$A = 1.7321\, a^2$	$V = 0.4714\, a^3$
	Exaedro	a = arista	A = 6a	$V = a^3$
	Octaedro	a = arista	$A = 3.4642\, a^2$	$V = 0.4714\, a^3$
	Dodecaedro	a = arista	$20.6457\, a^2$	$V = 7.6631\, a^3$

	Icosaedro	a = arista	$A = 8.6605\ a^{2}$	$V = 2.1817\ a^{3}$
	Prisma cualquiera	a = arista lateral P = perímetro de la sección recta A_b = área de la base h = altura	$A_l = Pa$ $A_t = Pa + 2A_b$	$V = A_b h$
	Prisma recto	h = altura P = perímetro de la A_b = área de la base	$A_l = Ph$ $A_t = Ph + 2A_b$	$V = A_b h$
	Paralelepipedo rectángulo	a = largo b = ancho c = altura	$_l = 2(a + b)c$ $A_t = 2(a + b)c + 2a$	V = abc
	Pirámide cualquiera	A_l = Suma de las caras laterales A_b = área de la base A_t = área total h = altura	$_t = A_l + A_b$	$V = \frac{1}{3} A_b h$
	Pirámide regular	P = perímetro de la base a = apotema A_b = área de la base h = altura	$A_1 = \frac{1}{2} Pa$ $A_t = \frac{1}{2} Pa + A_b$	$V = \frac{1}{3} A_b h$

	Tronco de Pirámide regular	a = apotema h= altura P= perímetro de la Base superior P' = perímetro de la Base inferior A_b = área de la base Superior A'_b = área de la base inferior	$A_l = \left(\frac{p+p'}{2}\right)a$ $A_t = \left(\frac{p+p'}{2}\right)a + A_b + A'_b$ $+ A_b + A'_b$	$V = \frac{1}{3}h(A_b + A'_b + \sqrt{A_b A'_b})$
	Cilindro cualquiera	g = generatriz C = perímetro de la sección recta A_b = área de la base h = altura	$A_l = Cg$ $A_t = Cg + 2A_b$	$V = A_b h$
	Cilindro circular recto	h = altura r = radio de la base	$A_l = 2\pi rh$ $A_t = 2\pi rh + 2pr^2$	$V = pr^2h$
	Cono Circular Recto	g = generatriz h = altura r = radio de la base	$A_l = \pi rg$ $A_t = \pi rg + pr^2$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
	Tronco De cono Circular Recto	g = generatriz r_1 = radio de la base mayor r_2 = radio de la base menor h = altura	$A_l = \pi g(r_1 + r_2)$ $A_t = \pi g(r_1 + r_2)$ $+ \pi (r_1^2 + r_2^2)$	$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$
	Esfera	r = radio de la esfera	$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS INTENCIONALMENTE EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS INTENCIONALMENTE EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

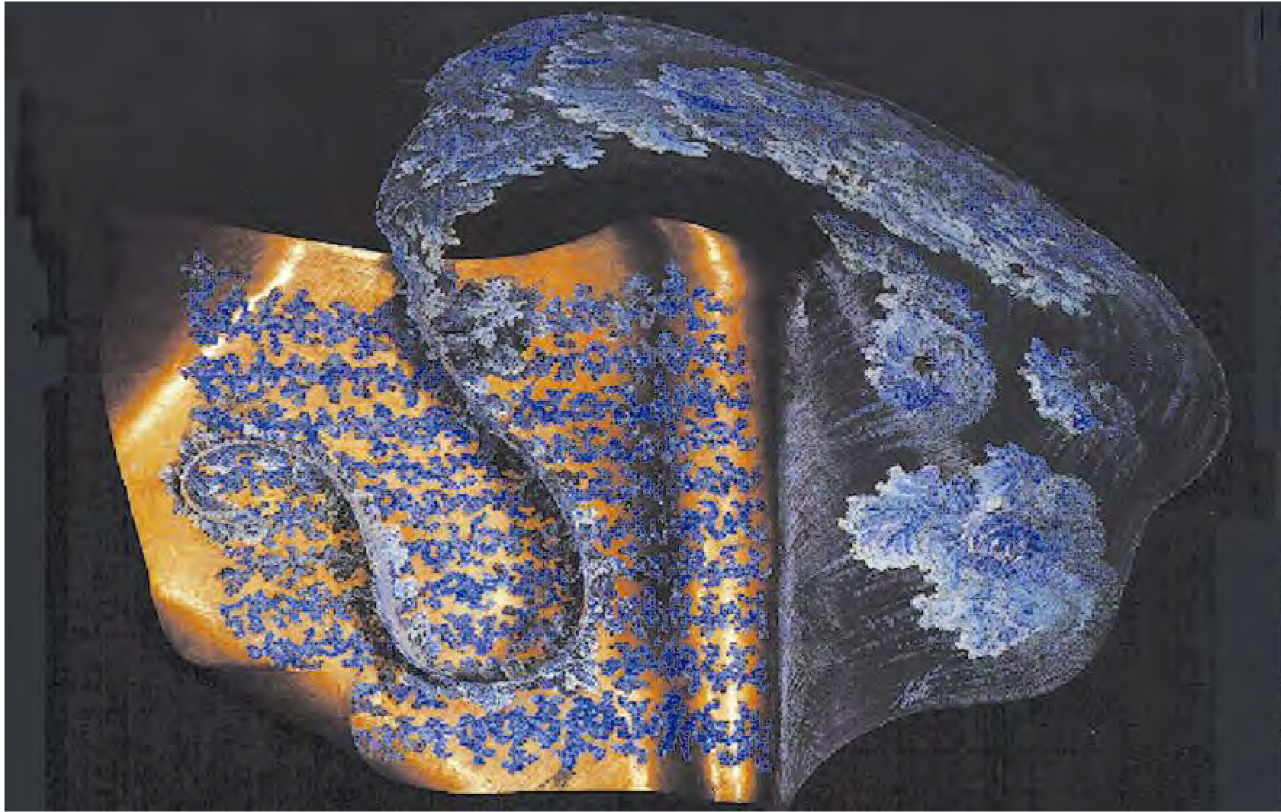
PÁGINA DE RESPUESTAS INTENCIONALMENTE EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

Cálculo Diferencial



PÁGINA
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO



El físico inglés Isaac Newton (1642-1727) inventó el Cálculo diferencial simultánea e independientemente del matemático alemán Wilhelm Leibnitz (1646-1716).

CAPÍTULO I

CÁLCULO DE LÍMITES. EL NÚMERO *e*

El matemático alemán Peter G. Dirichlet (1805-1859) estudió la convergencia de series demostrando que en una serie completamente convergente el valor de la suma de todos los términos es independiente del orden de los mismos. Junto con Legendre de-mostró el teorema de Fermat para $n = 5$ ahora tan de actualidad con la aparentemente buena demostración de Andrew Wyles.

INFINITÉSIMOS

Se dice que una sucesión es un infinitésimo cuando su límite es **cero.**

En símbolos: (a_n) es infinitésimo si $lim\ a_n = 0$

Ejemplo

Demuestra que la sucesión $(a_n) = \left(\frac{3}{n}\right) = \left(3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5} ...\right)$

. . . es un infinitésimo.

Solución

Fijamos un número e > 0. Entonces, podemos escribir:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{3}{n}\right| = \frac{3}{n} \langle \varepsilon \quad \rightarrow n \rangle \frac{3}{\varepsilon}$$

Es decir a partir del término cuyo lugar es el primer natural mayor que $\frac{3}{\varepsilon}$ se cumple que la distancia a 0 es menor que e o, equivalentemente, $a_n \in E(0,e)$. La sucesión $(a_n) = \left(\frac{3}{n}\right)$ tiene límite 0 y es un infinitésimo.

Según la definición de límite, la sucesión (a_n) es un infinitésimo si para cualquier e > 0, existe un natural n_0 tal que si $n > n_0$, entonces $|a_n| \langle \varepsilon$.

Ejemplo

Son infinitésimos las sucesiones: $(a_n) = \left(\frac{n}{n^2+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, ...\right)$

INFINETÉSIMOS Y SUCECIONES DIVERGENTES

Sabemos que la sucesión (a_n) = (n) = (1, 2, 3, 4, . . .) es divergente, pues su límite es infinito. La sucesión formada por sus inversos:

$$\left(\frac{1}{a_n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\right)$$ es un infinitésimo.

Esta relación no es casual pues se verifica siempre. En concreto:

Si una sucesión es divergente, la sucesión inversa es un infinitésimo. Es decir: Si (a_n) es divergente, entonces $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ es un infinitésimo.

Para su demostración, tomemos e > 0 tan pequeño como se quiera y consideramos $k=\frac{1}{\varepsilon}>0$. Como ($a_n$) es divergente, existirá un natural n_0 de modo que si es $n > n_0$ se tendrá que $|a_n|>k$. Se deduce que, para cada $n > n_0$ se debe cumplir: $\left|\frac{1}{a_n}\right|<\frac{1}{k}=\varepsilon$ lo que comprueba que $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ es un infinitésimo.

Ejemplo

La sucesión (a_n) = (n^2 + 1) = (2, 5, 10, 17, . . .) es divergente, pues fijado un número k tan grande como queramos se cumple que $|a_n|=|n^2+1|$ = $n^2 + 1 > k$ para cualquier n > $\sqrt{k-1}$.

Si se quiere que la sucesión tome un valor mayor que un millón, bastará tomar el término que ocupa el lugar mayor que $\sqrt{999.999}$ = 999,99, es decir, a_{1000}.

La sucesión inversa $\left(\frac{1}{a_n}\right)=\left(\frac{1}{n^2-1}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{17},...\right)$ es un infinitésimo.

También se verifica la propiedad recíproca, con la condición de que, a partir de un cierto término, todos los siguientes sean distintos de cero. En concreto.

Si una sucesión (a_n) es un infinitésimo, su inversa $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ es divergente.

La demostración es parecida a la anterior:

Fijado un número k positivo y tan grande como Se quiera, hacemos $\varepsilon=\frac{1}{k}$.

Como (a_n) es un infinitésimo, habrá un termino a_{n_0} a partir del cual se verifica que $|a_n|<\varepsilon$.

Por tanto, podemos escribir: $\frac{1}{|a_n|}>\frac{1}{\varepsilon}=k$, lo que asegura divergencia de $\left(\frac{1}{a_n}\right)$.

Ejemplo

La sucesión (a_n) = $\left(\frac{1}{n^2}\right)=\left(1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},...\right)$ es un infinitésimo, mientras que su inversa: $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ = (n^2) = (1, 4, 9, 16, . . .) es una sucesión divergente pues siempre podremos encontrar término mayor que cualquier número positivo k fijado de antemano.

INFINITÉSIMOS Y SUCESIONES CONVERGENTES

Si una sucesión (a_n) es convergente y tiene límite L, sus términos están cada vez más próximos a L. Por tanto, si a cada término de la sucesión le restamos L obtendremos otra sucesión cuyos términos están cada vez más cercanos a L – L = 0.

Esto quiere decir que, si de cada término de una sucesión convergente (a_n) restamos su límite L, se obtiene una nueva sucesión cuyo límite es cero:

$$a_n-L\to 0$$

Veamos ahora cuál es el comportamiento de los infinitésimos respecto a las operaciones algebraicas usuales.

SUMA DE INFINITÉSIMOS

La suma de dos infinitésimos es otro infinitésimo. Es decir, si (a_n) y (b_n) son infinitésimos, entonces (a_n + b_n) es un infinitésimo.

Para demostrarlo, fijemos e > 0. Debemos encontrar un término de la sucesión tal que todos los posteriores cumplan que $|a_n+b_b|\langle\varepsilon$.

Si *lim* a_n = 0, deberá existir un natural n_1 tal que si n>n1, entonces $|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

Si *lim* b_n = 0, deberá existir un natural n_2 de Modo que si $n > n_2$, se tenga que $\left|b_n<\frac{\varepsilon}{2}\right|$

Llamando n_0 = máx {n_1, n_2}, ocurrirá que, siendo $n > n_0$ se verificarán las dos desigualdades anteriores. Por tanto:

$$|a_n+b_n|\le|a_n|+|b_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Ejemplo

La sucesión $\left(\frac{4n+3}{n^2}\right)$ es un infinitésimo pues lo son los dos sumandos $\left(\frac{4}{n}\right)y\left(\frac{3}{n^2}\right)$.

PRODUCTO DE INFINITÉSIMOS

El producto de dos infinitésimos es otro infinitésimo.

Es decir, si (a_n) y (b_n) son dos infinitésimos, ($a_n \bullet b_n$) es otro infinitésimo.

Para demostrar que ($a_n \bullet b_n$) es un infinitésimo necesitaremos probar que, fijado ε > 0, existe un término de la sucesión a partir del cual los siguientes verifican que $|a_n \bullet b_n| < \varepsilon$.

Si *lím* $a_n = 0$, deberá existir un natural n_1 tal que sin $n > n_1$, entonces $|a_n| < \varepsilon$.

Si *lím* $b_n = 0$, deberá existir otro natural n_2 de modo que sin $n > n_2$ se tenga que $|b_n| < 1$.

Llamando $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$, ocurrirá que, siendo $n > n_0$ se verificarán las dos desigualdades anteriores. Por tanto:

$$|a_n \bullet b_n| = |a_n| \bullet |b_n| < \varepsilon \bullet 1 = \varepsilon$$

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UN INFINITÉSIMO

La multiplicación de un número por infinitésimo es otro infinitésimo.

Es decir, si (a_n) es un infinitésimo y r es un número, entonces ($r\, a_n$) es otro infinitésimo.

a) Si $r = 0$, resulta la sucesión ($r\, a_n$) = (0, 0, 0, 0, . . .) que evidentemente es un infinitésimo.

b) Si $r \neq 0$, fijado e > 0 debemos encontrar un término de la sucesión a partir del cual $|ra_n| < \varepsilon$.

Por ser *lím* $a_n = 0$, existe un natural n_0 de modo que si es n > n_0, entonces $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{|c|}$

De aquí deducimos que para cualquier natural $n > n_0$ se cumple que:

$$|ra_n| = |r| \bullet |a_n| < |r| \bullet \frac{\varepsilon}{|r|} = \varepsilon$$

De aquí deducimos que cuando (a_n) es un infinitésimo y $r \neq 0$, entonces la sucesión $\left(\frac{1}{r} a_n\right) = \left(\frac{a_n}{r}\right)$ es un infinitésimo y, por tanto, la sucesión inversa $\left(\frac{r}{a_n}\right)$ será divergente.

LÍMITE DE LAS SUCESIONES SUMA Y PRODUCTO

El estudio de los infinitésimos permite hallar fácilmente los límites de muchas sucesiones.

La suma de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente cuyo límite se obtiene sumando los límites de las sucesiones sumandos.

En símbolos, si *lím* $a_n = a$ y *lím* $b_n = b$, entonces *lím* $(a_n + b_n) = a + b$.

Para demostrarlo, basta comprobar que $|(a+b)-(a+b)|$ es un infinitésimo, pues sabemos que una sucesión (c_n) tiene límite L si, y sólo si la diferencia $|c_n - L|$ es un infinitésimo.

Si *lim* $a_n = a$, → $|a_n - a|$ es un infinitésimo.

Si *lim* $b_n = 0$ → $|b_n - b|$ es un infinitésimo.

Como la suma de dos infinitésimos es otro infinitésimo, resulta:

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le$$
$$|a_n - a| + |b_n - b|$$

que es un infinitésimo.

El producto de dos sucesiones convergentes es otra sucesión convergente cuyo límite es el producto de los límites de las su-cesiones factores.

Simbólicamente, si *lím* $a_n = a$ y *lím* $b_n = b$, entonces *lim* $(a_n \bullet b_n) = a \bullet b$

Basta demostrar que la sucesión

$|a_n \bullet b_n - a \bullet b|$ es un infinitésimo.

(a_n) es una sucesión convergente y, por tanto, estará acotada. Si M es una cota superior, se cumplirá que $|a_n| \le M$.

Dado que *lím* $a_n = a$ y *lím* $b_n = b$, se tiene que $|a_n - a| y |b_n - b|$ son infinitésimos. Por tanto:

$$|a_n \bullet b_n - a \bullet b| = |a_n \bullet b_n - a_n \bullet b + a_n \bullet b - a \bullet b| =$$
$$|a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \le$$
$$\le |a_n| \bullet |b_n - b| + |b| \bullet |a_n - a| \le$$
$$M \bullet |b_n - b| + |b| \bullet |a_n - a|$$

que es un infinitésimo, por serlo $M \bullet |b_n - b| y |b| \bullet |a_n - a|$.

Si *lím* a_n = y *lím* $b_n = b$, es fácil deducir las siguientes propiedades a partir de los teoremas anteriores:

lim $(a_n + r) = a + r$; *lím* $(r \bullet a_n) = r \bullet a$;
lím $(- a_n) = - a$; *lím* $(a_n - b_n) = a - b$;

LIMITE DE LA SUCESIÓN INVERSA Y DE LA SUCESIÓN COCIENTE

Ya conocemos el hecho de que si (a_n) es un infinitésimo y sus términos son distintos de cero, la sucesión inversa $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ es divergente.

Si (a_n) es una sucesión convergente y su límite es a, distinto de cero, entonces existe un término a_{n0}, a partir del cual todos sus términos son distintos de cero, verificándose además las desigualdades siguientes:

$0 < a_n < 2a$, si $a > 0$

$2a < a_n < 0$, si $a < 0$

En este caso, podemos considerar la sucesión inversa $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ y enunciar el siguiente teorema:

Si una sucesión es convergente con límite distinto de cero, la sucesión inversa también es convergente y su límite es el inverso del límite de la sucesión original.

Es decir, si *lím* $a_n = a \neq 0$, entonces *lím* $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

Para la demostración basta ver que $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_n \bullet a}\right|$ es un infinitésimo.

En efecto; haciendo e = $\frac{a}{2}$, a partir de un cierto término de la sucesión se verificará:

$$a - \frac{a}{2} < a_n < a + \frac{a}{2} \rightarrow \frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{términos positivos}} \frac{2}{a} > \frac{1}{a_n} > \frac{2}{3a}$$

Multiplicando los tres miembros de la doble desigualdad por $\frac{|a - a_n|}{a}$, resulta:

$$\frac{2}{a^2}|a - a_n| > \frac{|a - a_n|}{a_n \bullet a} > \frac{2}{3a^2}|a - a_n|$$

Dado que a es una constante y $|a - a_n|$ es un infinitésimo, también lo serán

$$\frac{2|a - a_n|}{a^2} \text{ y } \frac{2|a - a_n|}{3a^2}$$

Los términos $\frac{|a - a_n|}{a_n a}$ de la sucesión $\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right)$ están comprendidos entre dos infinitésimos, luego la sucesión también es un infinitésimo.

La demostración del teorema cuando $a < 0$ es completamente análoga.
Como consecuencia de lo anterior se demuestra que:

Si dos sucesiones son convergentes, su cociente también es una sucesión convergente cuyo límite es el cociente de los límites (siempre que el límite de la sucesión denominador no sea cero).

Es decir, si *lím* $a_n = a$ y *lím* $b_n = b \neq 0$, entonces *lím* $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Para la demostración, basta tener en cuenta que, de la igualdad

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(a_n \bullet \frac{1}{b_n}\right)$$

se deduce que $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ es un producto de sucesiones convergentes.

Sin demostración, enunciamos la propiedad del **límite de potencias**:

Si *lím* $a_n = a$ y *lím* $b_n = b$, entonces

$$\text{lím } a_n^{b_n} = a^b$$

Sobre la propiedad anterior hacemos la consideración de que si el límite de a_n es un número negativo y el límite de b_n es un número irracional, o un número racional representado por una fracción de denominador par, el límite de la potencia $a_n^{b_n}$ no está definido.

OPERACIONES CON SUCESIONES DIVERGENTES

En las operaciones con sucesiones divergentes se presentan diversos casos, que se citan a continuación, sin demostrar.

SUMA Y RESTA DE SUCESIONES DIVERGENTES

Se pueden presentar cinco casos que se expresan mediante las siguientes igualdades simbólicas:

a) $\infty \pm K = \infty$

b) $-\infty \pm K = -\infty$

c) $\infty + \infty = \infty$

d) $-\infty - \infty = \infty$

e) $\infty - \infty$ indeterminación

Ejemplos

a) $\text{lím}\left(\frac{2n-3}{5} + \frac{4n-1}{7n}\right) = \infty + \frac{4}{7} = \infty$

b) $\text{lím}\left(\frac{2-5n}{6} + \frac{1-3n}{4n+2}\right) = -\infty - \frac{3}{4} = -\infty$

c) $\text{lím}\left(\frac{2n-3}{5} + \frac{n^2}{n+1}\right) = \infty + \infty = \infty$

d) $\text{lím}\left(\frac{4n-1}{2} - \frac{2n+6}{5}\right) = \infty - \infty$ indeterminación

MULTIPLICACIÓN CON SUCESIONES DIVERGENTES

Se pueden presentar varios casos que se expresan simbólicamente:

a) $k \cdot \infty = \infty$

b) $-k \cdot \infty = -\infty$

c) $k \cdot (-\infty) = -\infty$

d) $-k \cdot (-\infty) = \infty$

e) $\infty \cdot \infty = \infty$

f) $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

g) $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

h) $0 \cdot (\pm\infty)$ indeterminación

Ejemplo

a) $lím\left(\frac{3n-7}{5} \bullet \frac{n+3}{2_n-5}\right) = \infty \bullet \frac{1}{2} = \infty$

b) $lím\left(\frac{3-n}{6} \bullet \frac{1-5n}{6}\right) =$

$\infty \bullet (-\infty) = -\infty$

c) $lím\left(\frac{3-n}{5} \bullet \frac{2}{n+1}\right) =$

$(-\infty) \bullet 0,$ indeterminado

DIVISIÓN CON SUCESIONES DIVERGENTES

Se pueden presentar estos casos que se expresan simbólicamente:

a) $\frac{\infty}{\pm k} = \pm\infty$ **b)** $\frac{-\infty}{\pm k} = \pm\infty$

c) $\frac{\pm k}{\pm\infty} = 0$ **d)** $\frac{\infty}{0} = \infty$

e) $\frac{\infty}{\infty}$ indeterminación

f) $\frac{0}{0}$ indetrminación

Ejemplos

a) $lím\left(\frac{n^n-1}{2n} : \frac{2-3n}{n+1}\right) = \frac{\infty}{-3} = -\infty$

b) $lím\left(\frac{9n-1}{3n} : \frac{6n-1}{5}\right) = \frac{3}{\infty} = 0$

c) $lím\left(\frac{n+2}{3} : \frac{1n}{n}\right) = \frac{\infty}{0} = \infty$

d) $lím\left(\frac{2n^2-1}{5n} : \frac{3n+1}{5}\right) = \frac{\infty}{\infty}$ indeter

POTENCIACIÓN CON SUCESIONES DIVERGENTES

Simbólicamente se expresan los principales casos:

a) $\infty^{\infty} = \infty$

b) $\infty^{-\infty} = 0$

c) $Si\ k > 1,\ k^{\infty} = \infty$

d) $Si\ k > 1,\ k^{-\infty} = 0$

e) $Si\ 0 \le k < 1,\ k^{\infty} = 0$

f) $Si\ 0 \le k < 1,\ k^{-\infty} = \infty$

g) $Si\ k > 0,\ \infty^{k} = \infty$

h) $Si\ k < 0,\ \infty^{k} = 0$

i) 0^0 indeterminación

j) ∞^0 indeterminación

k) $1^{\pm\infty}$ indeterminación

Ejemplo

a) $lím\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{5n-2}{n}} = \infty^5 = \infty$

b) $lím\left(\frac{2n-1}{4}\right)^{\frac{1-n}{2n}} = \infty^{\frac{1}{2}} = \infty$

c) $lím\left(\frac{4n-1}{n+3}\right)^{n^2+1} = 4^{\infty} = \infty$

d) $lím\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{\frac{1-n}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\infty} = 0$

EXPRESIONES INDETERMINADAS

En las operaciones con sucesiones divergentes han aparecido algunas expresiones indeterminadas. Las principales indeterminaciones son las siguientes:

$$\infty - \infty;\ \pm\infty \bullet 0;\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty};\quad \frac{0}{0};\quad \infty^0;\quad 0^0;\quad 1^{\pm\infty}$$

Estas expresiones simbolizan operaciones con sucesiones cuyo resultado no puede predecirse de antemano pues dependerá de las sucesiones concretas involucradas.

Ejemplo

Las dos sucesiones $(a_n) = (n) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$ y $(b_n) = (n^2) = (1, 4, 9, 16, \ldots)$ son divergentes y tienen por límite infinito. Al intentar calcular el límite del cociente tendremos:

$$lím\frac{a_n}{b_n} = \frac{lím\, a_n}{lím\, b_n} = \frac{\infty}{\infty} \text{indeterminación}$$

Si realizamos primero la división y después calculamos el límite se tiene:

$$lím\frac{a_n}{b_n} = lím\frac{n}{n^2} = lím\frac{1}{n} = 0$$

De aquí podríamos sacar la conclusión de que en este caso:

$\frac{\infty}{\infty} = 0.$

De igual forma, si invertimos el orden del cociente se llega a la siguiente conclusión:

$$lím\frac{b_n}{a_n} = \frac{lím\, b_n}{lím\, a_n} = \frac{\infty}{\infty}$$

Realizando primero la división:

$$lím\frac{b_n}{a_n} = lím\frac{n^2}{n} = lím\, n = \infty \quad es\ decir,\ \frac{\infty}{\infty} = \infty.$$

Vemos que la expresión $\frac{\infty}{\infty}$, según las sucesiones que intervengan, puede dar resultados diferentes. Por eso se llaman formas o expresiones indeterminadas. A partir de ahora trataremos la manera de resolver algunas de ellas.

LÍMITE DE SUCESIONES POLINÓMICAS. CONSTANTE

La sucesión (a_n) = (5) = (5, 5, 5, 5, . . .) tiene límite 5 pues todos sus términos distan cero del límite 5, menos de cualquier distancia prefijada de antemano. En general:

El límite de una sucesión constante es la propia constante.

Es decir, si (a_n) = (k) = (k, k, k, . . .), entonces *lím* $k = k$.

La demostración es evidente, pues $|a_n - k| = |k - k|$ = 0 < e sea cual sea el e > 0 prefijado.

LÍMITE DE SUCESIONES POLINÓMICAS DE GRADO MAYOR QUE CERO

Del hecho, ya conocido, de que la sucesión (n) = (1, 2, 3, 4, . . .) es divergente y tiene límite infinito, y de las consecuencias extraídas de los teoremas sobre límites, podemos deducir que:

($k \cdot n^p$) es divergente cuando $p > 0$

$\left(\dfrac{k}{n^p}\right)$ es un infinitésimo para $p > 0$

Toda sucesión polinómica p (n), de grado mayor que cero, es divergente y su límite es ∞ ó $-\infty$, según que el coeficiente del término de mayor grado sea positivo o negativo.

Ejemplos

a) Dado que ($an^2 + bn + c$) = $\left(n^2\left(a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2}\right)\right)$,

podemos escribir:

lím ($an^2 + bn + c$) =

$$lím\ \left(n^2\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \infty \bullet (a + 0 + 0) = \infty \bullet a = \pm\infty$$

b) Aplicando el criterio anterior:

lím ($2n^3 - n^2 + 8$) = ∞ ;

lím ($-n^4 + 6n^3 + 3n^2 + n + 5$) = $-\infty$

LÍMITES DE COCIENTES DE POLINOMIOS

En el cálculo del límite de un cociente de polinomios no puede aplicarse el teorema del cociente de los límites, pues se obtiene una expresión indeterminada de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Para hallar el límite correspondiente se dividen el numerador y el denominador por la mayor potencia que aparece en la expresión y después se calcula el límite.

Ejemplo

a) $$lím\ \frac{n^3 - 5n^2 + 4n - 1}{n^2 + 6} = lím\ \frac{\frac{n^3}{n^3} - \frac{5n^2}{n^3} + \frac{4n}{n^3} - \frac{1}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3} + \frac{6}{n^3}} = lím$$

$$\frac{1 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n} + \frac{6}{n^3}} = \frac{1 - 0 + 0 - 0}{0 + 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

b) $$lím\ \frac{3n^2 - 5n + 6}{4n^2 + 2} = lím\ \frac{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{5n}{n^2} + \frac{6}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2}} = lím\ \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}}{4 + \frac{2}{n^2}} =$$

$$\frac{3 - 0 + 0}{4 + 0} = \frac{3}{4}$$

c) $$lím\ \frac{n^3 + 6n - 3}{2n^4 - 5n^2 + 7} = lím\ \frac{\frac{n^3}{n^4} + \frac{6n}{n^4} - \frac{3}{n^4}}{\frac{2n^4}{n^4} - \frac{5n^2}{n^4} + \frac{7}{n^4}} = lím\ \frac{\frac{1}{n} + \frac{6}{n^3} - \frac{3}{n^4}}{2 - \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^4}} =$$

$$\frac{0 + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = \frac{0}{2} = 0$$

De los tres ejemplos anteriores deducimos la regla para hallar el límite del cociente de dos sucesiones polinómicas:

Dadas dos sucesiones polinómicas p (n) y q (n), que tienen a y b como coeficientes de los términos de mayor grado, se cumple:

- Si grado de $p(n)$ < grado de $q(n)$, entonces *lím* $\dfrac{p(n)}{q(n)} = 0$
- Si grado de $p(n)$ = grado de $q(n)$, entonces *lím* $\dfrac{p(n)}{q(n)} = \dfrac{a}{b}$
- Si grado de $p(n)$ > grado de $q(n)$, entonces *lím* $\dfrac{p(n)}{q(n)} = \pm\infty$ (dependiendo del signo de $\dfrac{a}{b}$

Ejemplos

a) $lím\ \dfrac{2n^2 - 7n + 3}{n + 1} = \infty$

b) $lím\ \dfrac{n^3 - 6n + 5}{-n^2 + n + 2} = -\infty$

c) $lím\ \dfrac{3n^5 - 6n^2 + 8}{2n^5 + n} = \dfrac{3}{2}$

d) $lím\ \dfrac{n}{n^4 + 6n^3 - n - 7} = 0$

Esta regla también es de aplicación cuando hay potencias fraccionarias de n, como las que se mostrarán a continuación:

Ejemplos

a) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n^2+1} = \lim \dfrac{n^{3/2}-1}{n^2+1} = 0$, pues n^2 es de grado superior a $n^{3/2}$.

b) $\lim \sqrt{\dfrac{2n^2+3}{5n^2-1}} = \sqrt{\lim \dfrac{2n^2+3}{5n^2-1}} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$

c) $\lim \dfrac{n+\sqrt{9n^2+2}}{3n-3} = \lim \dfrac{\dfrac{n}{n}+\sqrt{\dfrac{9n^2}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}}}{\dfrac{3n}{n}-\dfrac{3}{n}} = \lim \dfrac{1+\sqrt{9n+\dfrac{2}{n^2}}}{3-\dfrac{3}{n}} = \dfrac{1+\sqrt{9+0}}{3-0} = \dfrac{1+3}{3} = \dfrac{4}{3}$

En este último caso no resulta inmediato la aplicación de la regla anterior. Por eso hemos utilizado el procedimiento general. Hemos de tener en cuenta que dividir por n fuera de la raíz equivale a dividir entre n^2 dentro de ella. El siguiente es un caso análogo.

d) $\lim \dfrac{n+\sqrt{9n^3+2}}{3n-3} = \lim \dfrac{\dfrac{n}{n}+\sqrt{\dfrac{9n^3}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}}}{\dfrac{3n}{n}-\dfrac{3}{n}} = \lim \dfrac{1+\sqrt{9n+\dfrac{2}{n^2}}}{3-\dfrac{3}{n}} = \dfrac{1+\sqrt{\infty+0}}{3-0} = \dfrac{1+\infty}{3} = \dfrac{\infty}{3} = \infty$

EXPRESIONES INDETERMINADAS ∞ - ∞

Cuando puede efectuarse la operación se opera antes y, después, calcular el límite.

Ejemplo

$\lim\left(\dfrac{n^2-n+1}{n} - \dfrac{n^3+1}{n^2-1}\right)$ Nos aparece la forma indeterminada ∞ - ∞, dado que:

$$\lim \frac{n^2-n+1}{n} = \infty \quad y \quad \lim \frac{n^3+1}{n^2-1} = \infty$$

Por tanto, empezamos efectuando la diferencia del paréntesis:

$$\lim\left(\frac{n^2-n+1}{n} - \frac{n^3+1}{n^2-1}\right) =$$

$$\lim \frac{\left(n^2-1\right)\left(n^2-n+1\right)-n\left(n^3+1\right)}{n\left(n^2-1\right)} =$$

$$\lim \frac{n^4-n^3+n^2-n^2+n-1-n^4-n}{n\left(n^2-1\right)} =$$

$$\lim \frac{-n^3-1}{n^3-1} = \frac{-1}{1} = -1$$

Cuando hay radicales en el minuendo o en el sustraendo o en ambos, la operación no es inmediata. En tal caso, se multiplica y divide por la expresión conjugada y se tiene en cuenta que

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos

$\lim\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)$ Es una indeterminación ∞ -∞, por ser

$$\lim\sqrt{n^2-1} = \infty \quad y \quad \lim n = \infty$$

Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada $\sqrt{n^2-1}+n$, obteniendo:

$$\lim \left(\sqrt{n^2-1}-n\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)\left(\sqrt{n^2-1}+n\right)}{\sqrt{n^2-1}+n} = 2$$

$$\lim \frac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n} = \lim \frac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n} = \frac{-1}{\infty+\infty} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

A veces son necesarias varias transformaciones para resolver una indeterminación. Por ejemplo:

$$\lim \frac{\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+1}-n} = \lim \frac{\left(\sqrt{n}-n\right)\left(\sqrt{n}+n\right)\left(\sqrt{n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n+1}-n\right)\left(\sqrt{n+1}+n\right)\left(\sqrt{n}+n\right)} =$$

$$\lim \frac{\left(n-n^2\right)\left(\sqrt{n+1}+n\right)}{\left(n+1-n^2\right)\left(\sqrt{n}+n\right)} = \lim \frac{n-n^2}{n+1-n^2}\cdot\lim \frac{\sqrt{n+1}+n}{\sqrt{n}+n} =$$

$$1\cdot \lim \frac{\sqrt{\dfrac{n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}+\dfrac{n}{n}}{\sqrt{\dfrac{n}{n^2}}+\dfrac{n}{n}} = 1\cdot \lim \frac{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}{\sqrt{\dfrac{1}{n}}+1} =$$

$$1\cdot\frac{\sqrt{0+0}+1}{\sqrt{0}+1} = 1\cdot 1 = 1$$

EXPRESIONES EXPONENCIALES. EL NÚMERO *e*

En este epígrafe estudiamos las sucesiones del tipo a^{bn}. En muchos casos podremos calcular el límite de la potencia sin más que conocer los límites de a_n y de b_n. Pero en otros llegaremos a la indeterminación 1^∞. Empezamos viendo algunos ejemplos

Ejemplos

a) $lím\left(n^2+1\right)^{n-3} = (\infty)^\infty = \infty$

b) $lím\left(n^2+1\right)^{-n+3} = \left(\infty^{-\infty}\right) = 0$

c) $lím\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n = \left(2^\infty\right) = \infty$

d) $lím\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^\infty\right) = 0$

En todos los casos, con sólo saber el límite de la base y el del exponente obtenemos el límite de la potencia. Hay ocasiones en que esto no ocurre.

Ejemplos

a) $lím\left(\frac{n+10}{n}\right)^n = \left(1^\infty\right)$ Aunque lo parezca, 1^∞ por qué ser 1, ya que la base se aproxima a 1, pero no es exactamente 1. Hallando algunos términos de la sucesión, obtenemos:

$a_1 = 11$, $a_2 = 36$, $a_3 = 81$, ... , $a_{10} = 1.024$, ... , $a_{100} = 13.780$

Da la impresión de ser una sucesión divergente con límite infinito.

b) $lím\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n = \left(1^\infty\right)$ Hallando algunos términos de la sucesión se tiene:

$b_1 = 2$, $b_2 = 1,56$, $b_3 = 1,37$, ... , $b_{10} = 1,1$, ... , $b_{100} = 1,01$

Esta sucesión sí parece tender a 1.

c) $lím\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} = \left(1^\infty\right)$

$c_1 = 0$, $c_2 = 0,0625$, $c_3 = 0,026$, $c_4 = 0,01$, ... , $c_{10} = 0,000026$

Esta sucesión parece tender a 0.

Queda claro, por tanto, el carácter indeterminado de las potencias del tipo 1^∞. Habremos de buscar métodos específicos para su resolución en cada caso concreto.

Estudiamos con cierto detalle la sucesión $S_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Algunos de sus términos aparecen a continuación:

$$S_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2^1 = 2$$

$$S_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1,5^2 = 2,25$$

$$S_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 1,333^3 = 2,37037037$$

$$S_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 1,25^4 = 2,44140625$$

$$S_{10} = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 1,1^{10} = 2,59374246$$

$$S_{100} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 1,01^{100} = 2,70481383$$

$$S_{1000} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 1,001^{1000} = 2,71692393$$

$$S_{1000\,000} = \ldots = 2,71828047$$

Aunque cada término calculado es mayor que los anteriores, el crecimiento es tan lento que nos hace pensar que la sucesión es convergente. Así es efectivamente y su limite es un número irracional (es decir, con infinitas cifras decimales no periódicas) y se le asigna con la letra *e*.

$$e = lím\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818284\ldots$$

El número *e* es un número extraordinariamente importante y nos permitirá resolver las indeterminaciones del tipo 1^∞. Veamos como:

Hemos visto que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, pero también ocurre que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \to e, \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2} \to e$, y en general si $t_n \to \infty$ entonces $\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n} \to e.$

Este hecho nos permite resolver las indeterminaciones 1^∞ usando el siguiente teorema.

Si $lím\, a_n^{bn}$ es del tipo indeterminado 1^∞, entonces $lím\, a_n^{b_n} = e^{lím\left(a_n-1\right)\bullet b_n 0}$

$$lím\, a_n^{b_n} = lím\left(1+a_n-1\right)^{b_n} = lím\left(1+\frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{b_n} =$$

$$lím\left(1+\frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{b_n\bullet\frac{a_n-1}{a_n-1}}$$

Dado que $a_n \to 1$, se tiene que $a_n - 1 \to 0$ y por lo tanto $\frac{1}{a_n - 1} \to \infty$ donde deducimos aplicando lo dicho anteriormente.

$$lím\ a^{b_n} = \ldots = lím\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{(a_n-1)b_n}$$

$$= lím\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{lím(a_n-1)b_n} = e^{lím(a_n-1)\cdot b_n}$$

tal y como queríamos demostrar.

Ejemplos

a) $lím\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n$ Es un límite indeterminado del tipo 1^∞, puesto que $lím\frac{n+3}{n+2}=1$ y $lím\ n=\infty$

Por tanto, $lím\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = e^\lambda$, siendo λ el siguiente límite:

$$\lambda = lím\left(\frac{n+3}{n+2}-1\right)\cdot n = lím\left(\frac{n+3-n-2}{n+2}\cdot n = \right)$$

$$lím\frac{1}{n+2}\cdot n = lím\frac{n}{n+2} = 1$$

De aquí deducimos que $lím\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = e^1 = e$

b) $lím\sqrt[2n]{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2+1}}$ Expresando la sucesión como potencia de exponente fraccionario, obtenemos $lím\sqrt[2n]{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2+1}} =$

$lím\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}}$ que resulta ser un límite del tipo 1∞, pues:

$$lím\frac{n}{n-1}=1 \quad y \quad lím\frac{n^2+1}{2n}=\infty$$

Por tanto, $lím\sqrt[2n]{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2+1}} = lím\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}} = e^\lambda$

Siendo λ el siguiente límite:

$$\lambda = lím\left(\frac{n}{n-1}-\right)\cdot\frac{n^2+1}{2n} = lím\frac{n-n+1}{n-1}\cdot\frac{n^2+1}{2n} =$$

$$= lím\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n^2+1}{2n} = lím\frac{n^2+1}{2n^2-2n} = \frac{1}{2}$$

De aquí deducimos que

$$lím\sqrt[2n]{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2+1}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

EJERCICIOS

1. Calcula los siguientes límites

a) $lím(7+n)$ **R.** ∞

b) $\left(7-\frac{1}{n}\right)$ **R.** 7

c) $lím\left(7-n^2\right)$ **R.** $-\infty$

d) $lím\left(6+\frac{1}{n^3}\right)$ **R.** 6

e) $lím\frac{7}{n}$ **R.** 0

f)´$lím\ 7n$ **R.** ∞

g) $lím\left(\frac{3}{n}\right)n$ **R.** 3

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ **R.** 0

i) $lím\ 3^n$ **R.** ∞

j) $lím\ 3n^2(5+n)$ **R.** ∞

k) $lím\left(2n^3\right)^2$ **R.** $+\infty$

l) $lím\left(2n^3\right)^{-2}$ **R.** 0

m) $lím\left(\frac{3-2}{n}\right)\left(\frac{7+5}{n^2}\right)$ **R.** 0

n) $lím\left(23+10^{-n}\right)$ **R.** 23

o) $lím\left(8n^2-7n^3-500\right)$ **R.** -500

2. Calcula:

a) $lím\frac{6n^3-2n^5+2n^4-7n+8}{3n^6-5n^2+4n-7n^2+8}$ **R.** 0

b) $lím\frac{(n+1)^2}{2n^2}$ **R.** $\frac{1}{2}$

3. Calcula:

a) $lím\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{5n+3}$ **R.** $\frac{4}{5}$

b) $lím\frac{n+10}{n}$ **R.** 1

4. Calcula:

a) $lím\left(\frac{3+4n^2}{1-2n}\cdot\frac{5-3n}{5n^2+3}\right)$ **R.** $\frac{6}{5}$

b) $lím\frac{n^3-75n^2+1}{400n^2-3n}$ **R.** ∞

5. Calcula:

a) $lím\left(\frac{2}{n^3} : \frac{5}{n^2}\right)$ **R.**0

b) $lím\left(\frac{n^2+n+1}{n}\right)$ **R.**∞

6. Calcula:

a) $lím\frac{(4n-3)\bullet(5n+2)}{3n^2+1}$ **R.** $\frac{20}{3}$

b) $lím\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n-1)^4+(n-1)^4}$ **R.**0

7. Calcula:

a) $lím\left(\frac{5-n}{2}-\frac{3-2n}{3}\right)$ **R.**∞

b) $lím\frac{n^3}{n(n+1)(n+2)}$ **R.**1

8. Calcula:

a) $lím\ 7^{n-3}$ **R..**∞

b) $lím\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$ **R.**0

9. Calcula:

a) $lím\left(\frac{2n^3-3n+7}{n+2}\right)^7$ **R.**∞

b) $lím\frac{(4n+5)(7-n^3)}{n^4+1}$ **R.**-4

10. Demuestra que las sucesiones de término general

$a_n=(-1)^n+1 \quad y \quad b_n=\frac{2^n+(-2)^n}{2^n}$

carecen de límite.
R. La sucesión (a_n) es: (0, 2, 0, 2, 0, 2,0, 2, ...); por tanto, carece de límite. La sucesión (b_n) es: (0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2,...); por tanto, carece de límite.

11. Calcula:

a) $lím\left(\frac{n+3}{5}\right)^4$ **R.** $\frac{1}{625}$

b) $lím\sqrt[3]{\frac{n^2+3}{2n^2-7}}$ **R.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

12. Calcula:

a) $lím\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)$ **R.** $-\frac{1}{2}$

b) $lím\left(n^3+2\right)^{-7n+55}$ **R.**0

13. Calcula:

a) $lím\frac{2n-\sqrt{9n\ +2}}{7n+2}$ **R.** $\frac{-1}{7}$

14. Calcula:

a) $lím\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+4}}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n+6}}$ **R.**1

15. Calcula:

a) $lím\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+5}}\ \frac{\sqrt{3n^2+7}}{n}\right)$ **R.**0

16. Dadas las sucesiones cuyos términos generales son:

$a_n=n^2+3, b_n=\frac{1}{n^2}$,

$c_n=\frac{(n^2+1)}{n}$

Calcula los siguientes límites:

a) $lím(a_n+b_n)$ **R.**∞
b) $lím(a_n-b_n)$ **R.**∞
c) $lím(a_n+c_n)$ *R.*∞
d) $lím(a_n-c_n)$ **R.**∞
e) $lím(b_n+c_n)$ **R.**∞
f) $lím(b_n-c_n)$ **R.**$-\infty$
g) $lím(a_n : c_n)$ **R.**∞
h) $lím(a_n\bullet c_n)$ **R.**∞
i) $lím(b_n\bullet c_n)$ *R*.0
j) $lím(b_n : a_n)$ **R.**0
k) $lím(a_n : c_n)$ **R.**∞
l) $lím(a_n : b_n)$ **R.**∞

17. Calcula el siguiente límite:

$$lím\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}}{3\cdot 2^n}$$

R. $\frac{1}{3}$

18. Definimos la sucesión cuyo término general tiene la siguiente expresión:

$$a_n=\begin{cases} n+2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{(n+2)} & \text{si } n \text{ espar}\end{cases}$$

¿Es una sucesión monótona? ¿Converge?

R. $(a_n)=\left(3,\frac{1}{4},5,\frac{1}{6},7,\frac{1}{8},9,\frac{1}{10},11,\frac{1}{12},13,\ldots\right)$

No es monótona ni converge hacia ningún número.

19. Calcula el límite, si existe, de la sucesión:

a) 1,1,3,1,3,5,1,3,5,7,1,3,5,7,9,...

R. Carece de límite.

b) $1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{3},1,\frac{1}{4},1,\frac{1}{5},\ldots$

R. Carece de límite.

c) $a_n=\frac{2^n+1}{2^n-1}$ **R.**1

d) $a_n=\frac{2^n-1}{3^n-1}$ **R.**0

e) $a_n=\frac{2^{n+1}+5}{2^n-3}$ **R.**0

f) $a_n=\frac{2^n-8}{2^{n+1}}$ **R.**2

g) $a_n=\frac{3^{n+1}}{2^n+5}$ **R.** $\frac{1}{2}$

20. Calcula el límite de las siguientes sucesiones dadas por su término general:

a) $a_n=\left(\frac{3n+5}{5+n}\right)^n$ **R.**∞

b) $a_n=\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{23}$ **R.**1

c) $a_n=\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n$ **R.**0

d) $a_n=\sqrt{\frac{8n+2}{n-1}}$ **R.**$2\sqrt{2}$

e) $a_n=\sqrt{\frac{4n+3}{n+3}}$ **R.**2

f) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^5$ **R.**1

g) $a_n=\left(1+\frac{87}{n}\right)^5$ **R.**1



El matemático inglés Brook Taylor (1685-1731) contribuyó decisivamente al auge del análisis matemático desarrollando el cálculo de diferencias finitas.

CAPÍTULO II

FUNCIONES

Una función es un conjunto de pares ordenados con la propiedad de que todo valor x únicamente determina un valor y . Es importante mencionar que una función es una relación, pero una relación puede que no sea una función.

Una función también se denomina **aplicación o transformación**, ambas palabras connotan la acción de asociar una cosa con otra. En la proposición $y = f(x)$, la notación funcional f se interpretará como una regla mediante la cual el conjunto x es aplicado o transformado en el conjunto y.

En la siguiente expresión, $f : x \to y$ la flecha indica aplicación, la letra f expresa simbólicamente una regla de aplicación.

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Llamamos función a cualquier aplicación:

$f : R \rightarrow R$ o bien $f : D \rightarrow R$ siendo D un subconjunto de R

Mediante una función, a cada elemento x de R (o de un subconjunto de R) le asociamos un único elemento y = (x) de R.

$$x \rightarrow y = f(x)$$

x es la variable independiente e y la variable dependiente.

Ejemplo

La expresión $f(x) = x^2$ _ $3x$ define una función para la que

$$f(0)=0; f(-1)=4; f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}; \cdots$$

Ejemplo

Para la función $g(x) = 2^{1/x}$ se tiene que:

$g(1)=2;$ $g(2)=\sqrt{2}; g(0)$ no existe pues $2^{1/0}$ no es un número real . . .

Una función puede expresarse, bien mediante la fórmula, bien mediante su gráfica (conjunto de puntos del plano x , y) tales que $y = f(x)$.

Ejemplo

La función $f(x) = x^2$ que asigna a cada número su cuadrado tiene por gráfica:

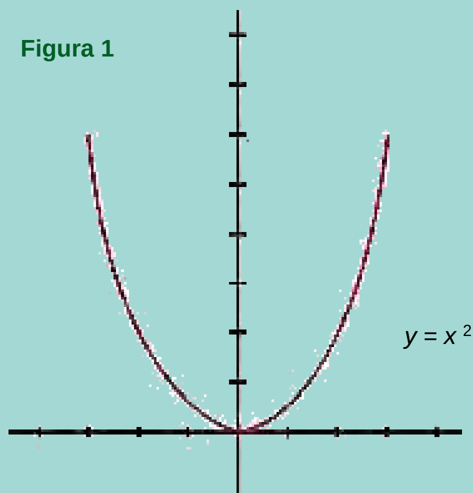
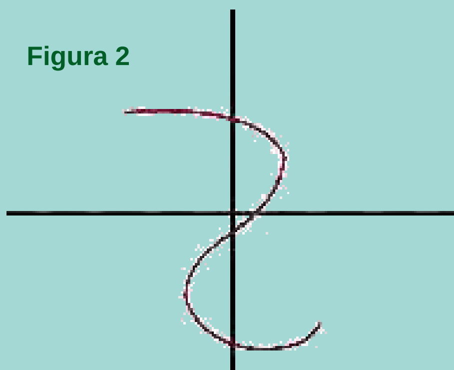
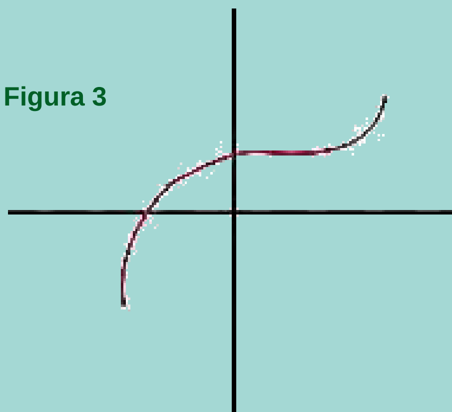


Figura 1

Puesto que, en una función, cada elemento $x \in R$ puede tener a lo sumo una imagen $y = f(x)$, la gráfica de una función nunca puede volver hacia atrás. De las siguientes gráficas, sólo la segunda representa a una función (puede observarse como en la primera, 0 tendría hasta tres imágenes).


Figura 2


Figura 3

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Sea $y = f(x)$ una función.

Llamamos dominio (o campo de existencia) de la función al conjunto de todos los valores x para los cuales $y = f(x)$ esté definida (sea un número real). Se le suele escribir por la letra mayúscula D.

Para el cálculo del dominio de una función dada por su fórmula, hemos de tener en cuenta que:

1) No es posible la división por 0.

2) No es posible extraer raíces cuadradas, raíces cuartas, sextas, etc., cuando el radicando es negativo (sí que es posible la raíz de índice impar).

3) No es posible calcular el logaritmo de un número negativo, ni tampoco de 0.

Ejemplo

El dominio de cualquier función polinómica es todo R.

$y = f(x) = 3x - 2 \rightarrow D = R$;

$g(x) = \frac{1}{4}x^3 + 8x^2 - \sqrt{2} \rightarrow D = R$

Ejemplo

Hallar el dominio de la función $y = f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

Solución

$f(x)$ sólo será un número real si $x^2 - 4$ no es 0.

Resolviendo la ecuación $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$ que son los valores que anulan al denominador. Por tanto el dominio es $D = R - \{-2, 2\}$.

Ejemplo

Halla el dominio de la función $g(x) = \sqrt{3x + 9}$

Solución

La función está definida sólo cuando $3x + 9$ es mayor o igual que cero. Resolviendo $3x + 9 \geq 0 \rightarrow 3x \geq -9 \rightarrow x \geq -3 - 3$ de donde deducimos que el dominio es $D = [-3, \infty)$.

Ejemplo

Halla el dominio de la función $h(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$

Solución

$h(x)$ está definida para aquellos $x \in R$ que hagan los dos radicandos no negativos:

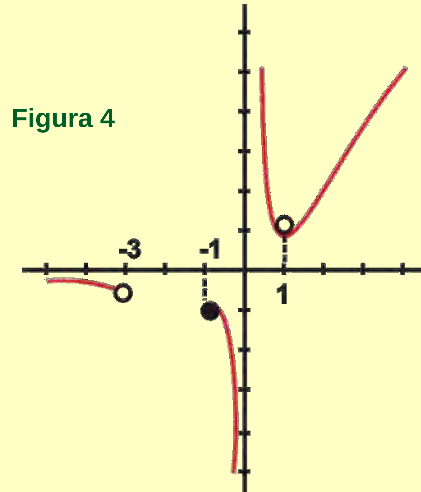
$x - 1 \geq 0 \quad y \quad 1 - x \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \quad y \quad x \leq 1 \rightarrow x = 1$

Por tanto el dominio de la función está formado únicamente por $D = \{1\}$.

A la vista de la gráfica de una función, el dominio está formado por los puntos del eje *OX* encima o debajo de los cuales hay gráfica.

Ejemplo

Para la función cuya gráfica es la siguiente:



el dominio es $D = (-\infty, -3) \cup [-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

OPERACIONES CON FUNCIONES

Supongamos dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ definidas sobre un mismo dominio *D*. De un modo completamente natural, se definen la suma y multiplicación de ambas funciones:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$; $(f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x)$

que, evidentemente, son dos nuevas funciones definidas en el dominio *D*.

Ejemplo

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x + 2$, calcula las funciones $f + g$ y $f \bullet g$.

Solución

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 4 + x + 2 = x^2 + x - 2$

$(f \bullet g)(x) = (x^2 - 4) \bullet (x + 2) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

La suma y multiplicación de funciones tienen las propiedades que se sintetizan en el siguiente cuadro:

Propiedad	Suma	Multiplicación
Asociativa	$(f + g) + h = f + (g + h)$	$(f \bullet g) \bullet h = f \bullet (g \bullet h)$
Conmutativa	$f + g = g + f$	$f \bullet g = g \bullet f$
Elemento Neutro	Es la función cero $x \rightarrow 0$ pues $f(x) + 0 = f(x)$	Es la función $x \rightarrow 1$ pues $f(x) \bullet 1 = f(x)$
Elemento simétrico	Opuesta de f: $(-f)(x) = -f(x)$ pues $(f + x) - f(x) = 0$	No existe la función inversa.
Distributiva de la multiplicación respecto de la suma	$f \bullet (g + h) = f \bullet g + f \bullet h$	

Por cumplir estas propiedades llamando $\mathcal{F}(D)$ al conjunto de las funciones definidas sobre el subconjunto *D*, se tiene que $(\mathcal{F}(D), +, \bullet)$ es un anillo conmutativo con elemento unidad.

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

De manera parecida a las sucesiones, se definen las funciones monótonas.

Una función es monótona creciente cuando a originales mayores correponden imágenes mayores (o iguales).

Es decir, $y = f(x)$ es creciente si, y sólo si, para cada par x_1, x_2 del dominio.

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Las gráficas de las funciones monótonas crecientes van hacia arriba (u horizontalmente), a medida que las recorremos de izquierda a derecha.

Ejemplo

La gráfica de $y = \frac{1}{2}x + 2$ muestra una función creciente.

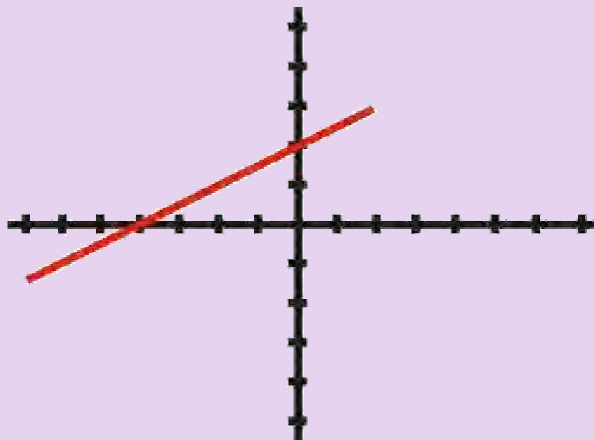


Figura 5

Una función es monótona decreciente cuando a originales mayores corresponden imagenes menores (o iguales).

Es decir, $y = f(x)$ es creciente si, y sólo si, para cada par x_1, x_2 del dominio:

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Si recorremos la gráfica de una función monótona decreciente de izquierda a derecha observaremos cómo su gráfica se desplaza hacia abajo u horizontalmente.

Ejemplo

La función de la gráfica es monótona decreciente.

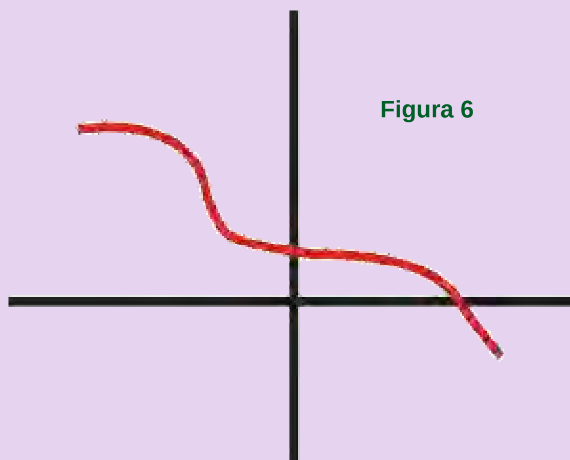


Figura 6

Al manejar funciones, puede hablarse de monotonía en un intervalo. En concreto:

Una función es creciente en el intervalo (a, b) si para cada par:

$$x_1, x_2 \in (a,b) \qquad x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

También puede hablarse de función creciente en un punto, precisamente:

Una función es creciente en un punto x_0 si existe un entorno de x_0 donde la función es creciente.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Componer dos funciones es hacer actuar una de ellas sobre el resultado de la otra:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) \quad \text{o bien}$$
$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

Se las designa, respectivamente, por g ó f y f ó g y se leen "f compuesta con g" y "g compuesta con f", respectivamente. Es decir:

$(g \text{ ó } f)(x) = g(f(x))$ $\qquad$ $(f \text{ ó } g)(x) = f(g(x))$

Ejemplo

Dadas las funciones $f(x) = 3x^2 + 1$ y $g(x) = \text{sen } x$

$(f \text{ ó } g)(x) = f(g(x)) = f(\text{sen } x) = 3 \text{ sen}^2 x + 1$

$(g \text{ ó } f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 1) = \text{sen }(3x^2 + 1)$

Observa que, en general, g ó f y f ó g son funciones diferentes.

Una función f^{-1} se llama inversa de otra f si ocurre que $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ para cada número real x

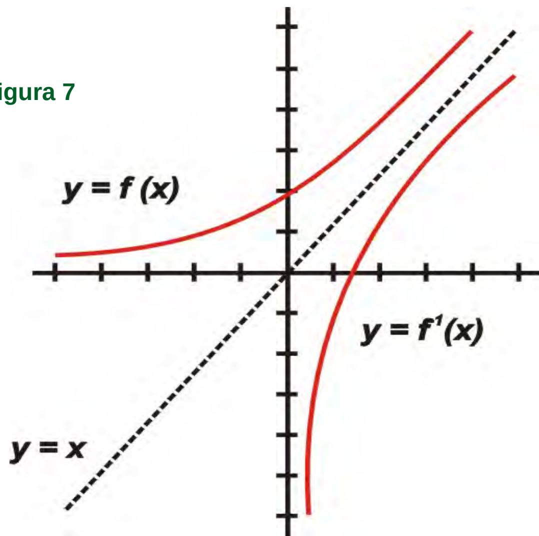
Por ejemplo, la función $(f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ es inversa de $f(x) = x^2$, pues para cada x mayor o igual que cero ocurre que:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(x^2\right) = \sqrt{x^2} = x \quad y$$

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

Una función y su inversa tienen sus gráficas simétricas respecto a la bisectriz del primer y cuarto cuadrante.

Figura 7



Para ello, para obtener la expresión analítica de f^{-1} intercambiamos x e y en $y = f(x)$. Despejando a continuación y obtendremos la función f^{-1}.

$$y = f(x) x = f(y) \xrightarrow{\text{inter } x\ y} f^{-1}(x) = f^{-1}(f(y)) \rightarrow f^{-1}(x) = y$$

Ejemplo

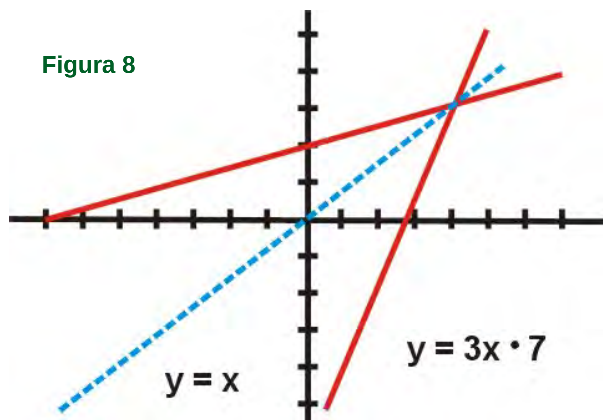
Obtener la función inversa de $f(x) = 3x - 7$

Solución

Escribimos $y = 3x - 7$. Intercambiando a continuación x por y obtenemos:

$$x = 3y - 7 \rightarrow y = \frac{x+7}{3} \text{ y por tanto } f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$$

Figura 8



FUNCIONES CLÁSICAS. LINEALES

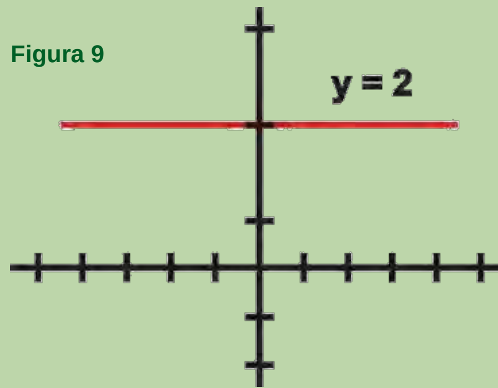
Las siguientes funciones son básicas, tanto por su sencillez como por su aplicabilidad a otras ciencias.

Se denominan así a las funciones que se representan mediante rectas. Son polinomios de grado 0 ó 1 del tipo:

$$y = ax + b$$

Ejemplos

Figura 9



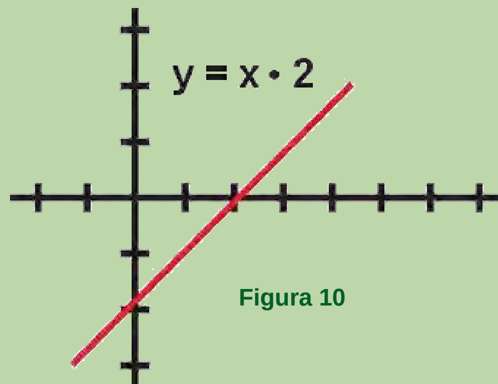


Figura 10

Dado que se trata de rectas, para la representación gráfica de cualquier función polinómica de grado uno basta obtener dos puntos de la misma.

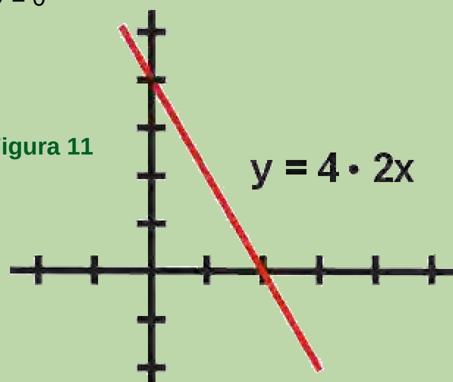
Ejemplo

Representar la función $y = 4 - 2x$

Solución

Dando a x un par de valores $x = 0 \rightarrow y = 4$; $x = 2 \rightarrow y = 0$

Figura 11



FUNCIONES FORMADAS POR TROZOS DE RECTAS

Representar gráficamente la función:

$$F(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<0 \\ -x+2 & \text{si } 0\le x<3 \\ x-2 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$$

Solución

Resulta muy aconsejable expresar la función sobre un diagrama lineal como el siguiente:

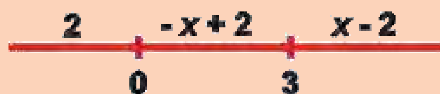


Figura 12

Cada uno de los trozos de la función es un tramo de recta. Por tanto, basta elegir dos puntos de cada tramo (es altamente aconsejable elegir los extremos aún cuando no formen parte del tramo correspondiente). En concreto:

y = 2 es recta horizontal:

$$y=-x+2\begin{cases} x=0\rightarrow y=2 \\ x=3\rightarrow y=-1 \end{cases} \qquad y=x-2\begin{cases} x=3\rightarrow y=1 \\ x=5\rightarrow y=3 \end{cases}$$

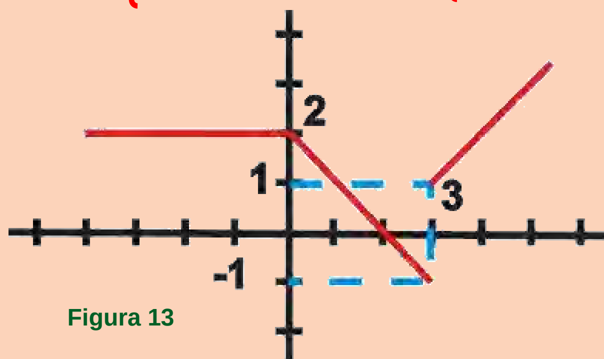


Figura 13

Un ejemplo particularmente interesante de función formada por trozos de rectas es la función **valor absoluto.**

$$y=|x|=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x\le 0 \end{cases}$$

cuya gráfica es:

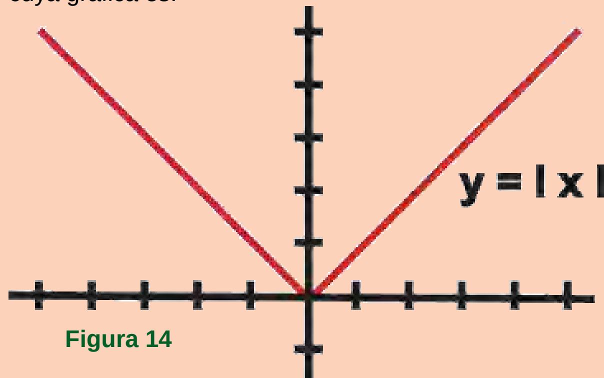


Figura 14

Para obtener la gráfica de una función $y=|f(x)|$ conocida la gráfica de la función $y = f(x)$, se deja intacta la parte positiva de la gráfica (la que está por encima del eje OX) y se dibuja la simétrica de la parte negativa de la gráfica (la que está por debajo del eje OX).

Ejemplo

Representar gráficamente la función $y=|2x-2|$

Solución

Empezamos dibujando la gráfica de la función
$y = 2x – 2$ que, como ya sabemos, es una recta oblicua.

Para ello, basta obtener dos puntos de la misma, por ejemplo:

$$\begin{cases} x=0\rightarrow y=-2 \\ x=2\rightarrow y=2 \end{cases}$$ A partir de estos puntos dibujamos la gráfica de $y = 2x – 2$

e inmediatamente; la gráfica de $y=|2x-2|$.

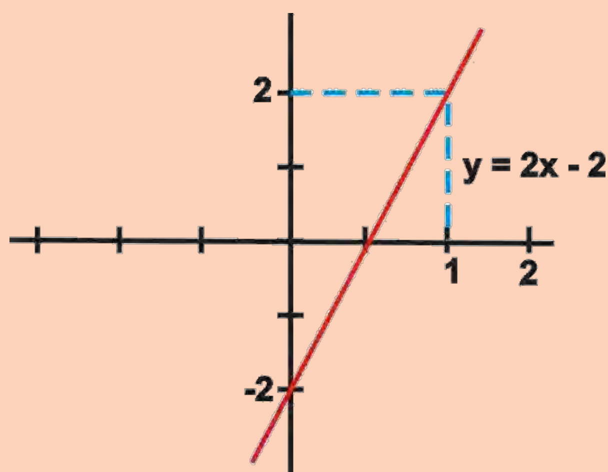


Figura 15

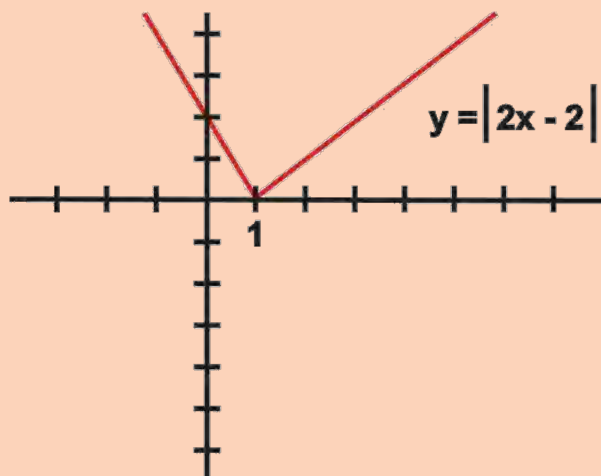


Figura 16

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Las funciones de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$ se representan mediante parábolas verticales.

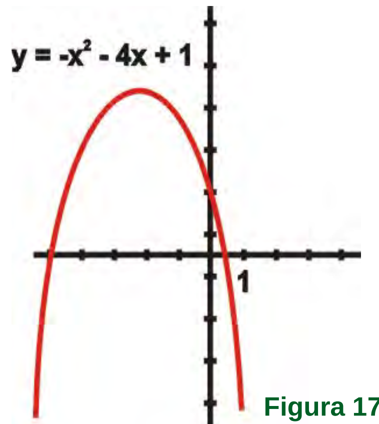


Figura 17

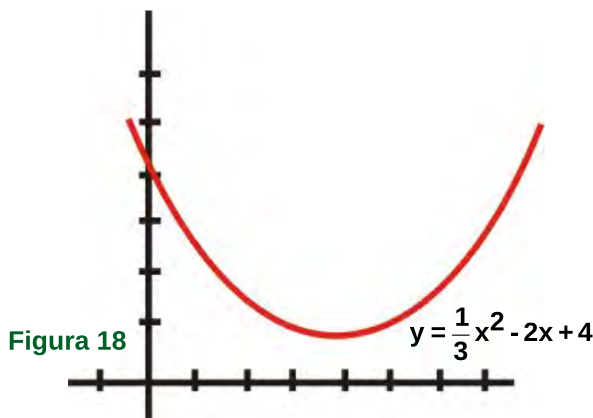


Figura 18

El valor del coeficiente *a* determina que la curva sea más o menos cerrada, y su signo el que la curva se abra hacia arriba o hacia abajo.

Las coordenadas del vértice son $V(p, q)$ siendo

$$p = -\frac{b}{2a} \quad y \quad q = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Ejemplo

Representar la función $y = -x^2 + 4x + 5$

Dado que a = -1< 0 , la parábola se abre hacia abajo.

Las coordenadas del vértice son:

$p = \frac{-4}{-2} = 2 \quad q = f(2) = -2^2 + 4 \bullet 2 + 5 = 9$. Es el punto $V(2, 9)$.

Ahora, para completar el dibujo, damos valores a x en torno a la primera coordenada del vértice, 2:

$x = 0 \rightarrow y = 5; \quad x = 1 \rightarrow y = 8;$
$x = 3 \rightarrow y = 8; \quad x = 4 \rightarrow y = 5$

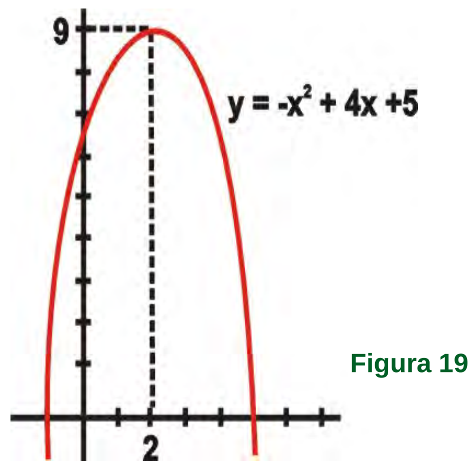


Figura 19

FUNCIONES POLINÓMICAS

También las funciones polinómicas de grado superior a dos son muy usuales. Son funciones definidas en todo *R*. El estudio y elaboración de su gráfica requiere conocimientos de cálculo infinitesimal.

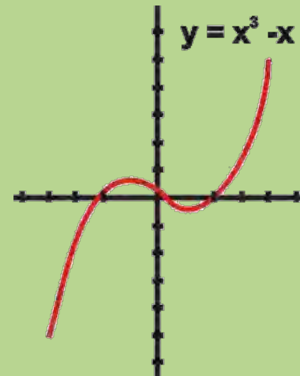


Figura 20

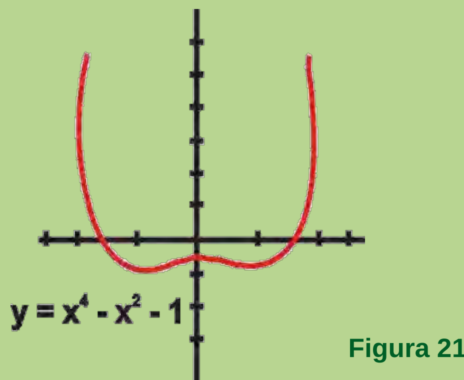


Figura 21

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA. LA HIPÉRBOLA

Se llama función de proporcionalidad inversa a cualquier función del tipo $y = \frac{k}{x}$.

Su gráfica es una hipérbola cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas.

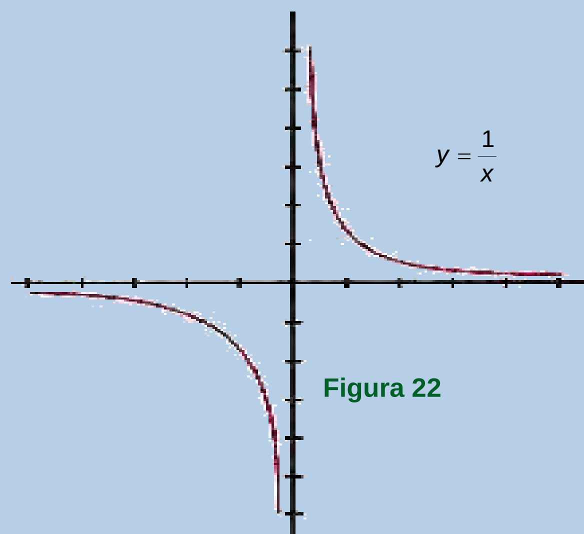


Figura 22

Otras funciones relacionadas con la proporcionalidad inversa son:

$y = \frac{k}{x \pm r}$ $\quad$ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Las gráficas de estas funciones también son hipérbolas con los ejes desplazados.

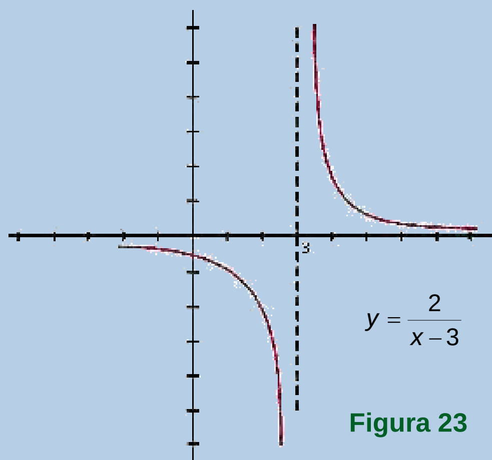


Figura 23

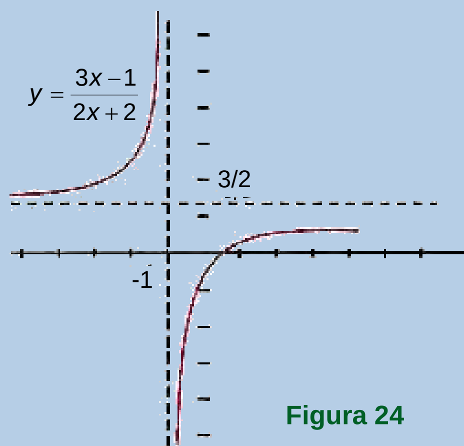


Figura 24

EJERCICIOS

1. Halla el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ **R.** R

b) $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$ **R.** R

c) $f(x) = |\,x\,|$ **R.** R

d) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ **R.** R

e) $f(x) = x$ **R.** R

f) $f(x) = |\,x+3\,|$ **R.** R

2. Consideramos las funciones polinómicas *f* y *g* dadas por *f* (*x*) = $x^2 + 1$, y *g* (*x*) = x^3, se pide:

a) *fg* **R.** $(fg)\ (x) = x^5 + x^3$

b) *gf* **R.** $(gf)\ (x) = x^5 + x^3$

3. Cuáles son los dominios de:

a) *fg* **R.** $D\,(fg) = R$

b) *gf* **R.** $D\,(gf) = R$

d) $f \circ g$ **R.** $D\,(f \circ g) = R$

e) $g \circ f$ **R.** $D\,(g \circ f) = R$

4. Se desean construir barriles de forma cilíndrica de 100 litros de capacidad.

a) Expresa la altura del barril en función del radio de la base.

R. $h = \frac{100}{\pi r^2}$

b) Expresa el área total en función del radio de la base.

R. $S = \frac{200 + 2\pi r^2}{r}$

5. En unas viviendas las ventanas son rectangulares y con una superficie de $2m^2$. Si x es la longitud del lado de la base, expresa la altura en función de *x*

R. $h = \frac{2}{x}$



Joseph Louis conde de Lagrange realizó importantes investigaciones sobre la teoría de los números y la teoría de las ecuaciones, llevó a cabo múltiples aplicaciones del cálculo matemático a problemas físicos y astronómicos.

CAPÍTULO III

APLICACIONES DE LA DERIVADA

El estudio de las derivadas se interesa no sólo por los cambios que se efectúan en las cosas, sino por lo más o menos rápidamente que las cosas cambian. Este deseo de medir el cambio llevó por caminos tortuosos hasta la noción de derivada en el siglo XVII.

Las formulaciones de Newton y Leibnitz estuvieron llenas de oscuridades que no fueron salvadas hasta la publicación en 1823 de las lecciones de Cauchy sobre el cálculo infinitesimal.

Actualmente, la aplicación de las derivadas es múltiple, por ejemplo para conseguir el máximo rendimiento de los motores de explosión deben efectuarse laboriosos cálculos de derivadas.

TANGENTES A LAS CÓNICAS

Ya conocemos de temas anteriores que la tangente a una curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$, viene dada por la ecuación:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Nos enfrentamos ahora al problema de encontrar la tangente a una cónica en uno de sus puntos. Este problema, sin el conocimiento de las derivadas, puede ser resuelto de dos maneras:

a) El sistema formado por las ecuaciones de la cónica y de la tangente ha de tener solución única pues cónica y tangente se cortan en un sólo punto.

Este procedimiento, aparte de tener excepciones, suele ser muy engorroso.

b) La tangente cumple una determinada propiedad geométrica (es perpendicular al radio de la circunferencia, es la bisectriz de los radios vectores del punto de tangencia en la hipérbola, . . .).

Utilizar estas propiedades puede resultar costoso, aparte de que el método es por completo particular en cada cónica. El uso de la derivada nos proporciona un método cómodo y general para resolver el problema.

Ejemplo

Calcula la ecuación de la tangente a una elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en un punto de su gráfica $P(x_0, y_0)$.

Solución

El procedimiento para obtener la tangente es completamente analítico.

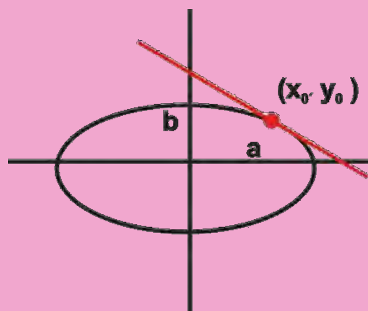


Figura 25

Derivando en forma implícita:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$$

Quitando denominadores:

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0$$

Despejando y' y simplificando:

$$y' = \frac{-2b^2x}{2a^2y} = \frac{-b^2x}{a^2y}$$

La pendiente de la tangente en el punto $P(x_0, y_0)$ es:

$$y' = \frac{-b^2x_0}{a^2y_0}$$

Por tanto la ecuación de la tangente es:

$$y - y_0 = \frac{-b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

Expresión que, operando convenientemente, resulta muy sencilla:

$$a^2y_0y - a^2y_0^2 = -b^2x_0x + b^2x_0^2 \rightarrow$$

$$b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2$$

Dividiendo por a^2b^2 obtenemos:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$$

Como $P(x_0, y_0)$ está en la elipse se tiene que $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ y, por tanto:

$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ (ecuaciones de la tangente a la elipse)

Del mismo modo se obtienen las tangente a la hipérbola y a la parábola.

Hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; Punto $P(x_0, y_0)$;

Tangente en p: $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$

Parábola $y^2 = 2px$; Punto (x_0, y_0);

Tangente en P: $y_0y = px + px_0$

Si los valores de una función f nos dice por qué puntos pasa su gráfica, los de la derivada indican qué dirección sigue la gráfica en cada punto.

La derivada nos permite decidir donde crece o decrece una función y donde alcanza sus valores máximos o mínimos.

CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

Sea f una función derivable en un punto $x = a$. Entonces:

- Si $f'(a) > 0$, f es creciente en a (Fig. 26).
- Si $f'(a) < 0$, f es decreciente en a (Fig. 27) .

Para determinar los intervalos de crecimiento de una función, hallaremos los valores donde f' se anula o no está definida y, una vez ordenados, estudiaremos el signo de f' y, por tanto, los intervalos de crecimiento de f .

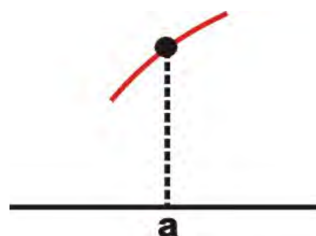


Figura 26

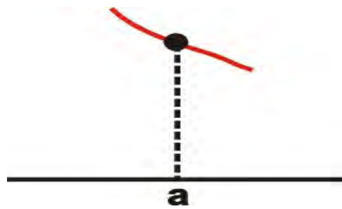


Figura 27

Ejemplo

Estudiar el crecimiento de la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4x}$

Primero calculamos el dominio de la función. Para ello:

$x^2-4x=0 \to x(x-4)=0 \to x=0$ ó $x=4$, de donde se sigue que la función está definida en R – {0, 4}.

La derivada es:

$$f'(x)=\frac{-12x^2-2x+4}{(x^2-4x)}$$

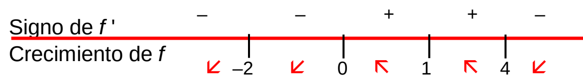
que no está definida tampoco en los puntos donde no lo estaba *f*.

Hacemos $f'(x)=0 \to -2x^2-2x+4=0 \to x=-2$ ó $x=1$

Ahora estudiamos el signo de *f* 'en cada uno de los intervalos de la recta en que los anteriores valores dividen a la recta (el método más cómodo suele ser dar valores arbitrarios, uno por cada intervalo).

Por ejemplo:

$f'(-3)<0;\quad f'(-1)>0;\quad f'(0{,}5)>0;$
$f'(2)<0;\quad f'(5)<0$



Luego la función decrece en $(-\infty,-2)$ crece en (– 2, 0), crece en (0, 1), decrece en (1, 4) y decrece en $(4,\infty)$.

EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN

Los extremos relativos (máximos o mínimos) de una función sólo pueden presentarse en los puntos que figuran en el esquema de monotonía (en ellos, la derivada vale cero o no existe).

Si *f* alcanza en *x* = *a* un extremo relativo (máximo o mínimo) entonces, o bien *f* '(*a*) = 0 o bien *f* '(*a*) no existe.

Sin embargo, puede suceder cualquiera de las dos cosas sin que *f* posea un extremo en *x* = *a*.

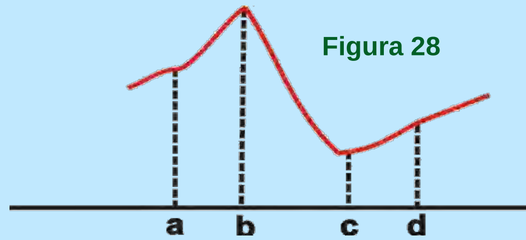


Figura 28

La función dibujada sólo presenta extremos en *b* y *c*, y en cambio, *f* ' se anula en *a* y *c* y no existe en *b* y *d* (en los puntos angulosos la función no es derivable pues en ellos la pendiente es distinta a izquierda y derecha).

Cualquiera de los siguientes criterios garantiza la existencia de extremos:

Criterio del cambio de signo de la derivada

Sea *f* una función continua en *a* y derivable alrededor de *a*.

- Si en *a*, el signo de *f* ' cambia de negativo a positivo, *f* tiene un **mínimo** en *x* = *a*.
- Si en *a*, el signo de *f* ' cambia de positivo a negativo, *f* tiene un **mínimo** en *x* = *a*.
- Si el signo de *f* ' no cambia, en *x* = *a* no hay máximo ni mínimo relativo.

Ejemplo

Para la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4x}$ estudiada antes, se tiene que *x* = – 2 es mínimo relativo y *x* = 1 es un máximo relativo.

Criterio de la segunda derivada

- Si *f* '(*a*) = 0 y *f* ''(*a*) > 0, entonces *f* tiene un **mínimo** relativo en *x* = *a*.
- Si *f* '(*a*) = 0 y *f* ''(*a*) < 0, entonces *f* tiene un **máximo** relativo en *x* = *a*.

Ejemplo

Es la función *f* '(*x*) = x^2 – 8*x* + 12 definida en todo *R*, si hacemos

$f'(x)=0 \to 2x-8=0 \to x=4$

Además como $f''(x)=2 \to f''(4)=2>0$ concluimos que la función presenta un mínimo en *x* = 4.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

En muchas actividades humanas surgen problemas de optimización, es decir, problemas que obligan a encontrar para qué valores de ciertas variables (x , y , z , . . .) una magnitud M alcanza su "valor óptimo" (máximo o mínimo).

Ejemplo

Un granjero dispone de 100 metros de valla, con los que desea construir un corral rectangular de la máxima superficie posible.

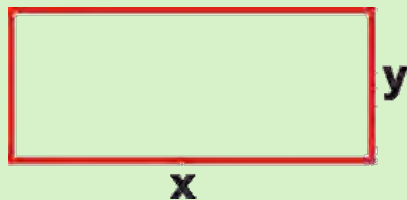


Figura 29

Su problema se reduce a encontrar el máximo de la magnitud ***S*** (superficie del corral).

$$S = x \cdot y$$

donde x e y son las dimensiones del corral y, por tanto, han de cumplir que $2x + 2y = 100$ pues han de utilizarse, exactamente, 100 metros de valla.

Para resolver estos problemas utilizaremos el siguiente procedimiento:

1. Expresaremos la magnitud M a optimizar, en función de las variables que la definen

$$M = g(x, y, z, \ldots)$$

2. Expresamos las variables x , y , z , . . . en función de una de ellas.

3. Ahora podemos expresar ***M*** en función de una sola variable, por ejemplo:

$$M = f(x)$$

Los valores óptimos de M corresponderán a los máximos o mínimos de f que ya sabemos calcular.

En el ejemplo, queremos hacer máxima $S = x \cdot y$ con la condición $2x + 2y = 100$.

De la última igualdad deducimos que $y = 50 - x$. Por consiguiente, podemos expresar

$$S = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$$

La derivada es $S' = 50 - 2x$. Por tanto, igualando $50 - 2x = 0 \rightarrow x = 25$.

Dado que $S'' = -2 < 0$, concluimos que S tiene un máximo cuando $x = 25$ y por tanto $y = 50 - 25 = 25$.

Es decir, el corral de área máxima es un cuadrado de 25 m de lado y área 625 m^3.

Ejemplo

Halla un número positivo cuya suma con su inverso sea mínima.

Solución

Llamamos al número x ; su inverso es $1/x$.

El enunciado impone la condición de que sea mínima la suma $S = x + \frac{1}{x}$.

Para hallar el mínimo de la función $S = \frac{x^2+1}{x}$ anterior derivamos e igualamos a cero:

$$S' = \frac{2x \bullet x - 1 \bullet (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2 + -1}{x^2}; \frac{x^2-1}{x^2} = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

El enunciado dice que el número sea positivo, por lo que desechamos $x = -1$

$$S'' = \frac{2}{x^3} \rightarrow S''(1) = \frac{2}{1} = 2 > 0$$

Luego para $x = 1$ hay mínimo. El número pedido es, por tanto, el 1.

Ejemplo

Dado un círculo de radio 4 dm, inscribe en él un rectángulo de área máxima.

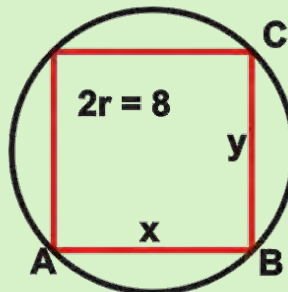


Figura 30

Solución

Llamando x e y a los lados del rectángulo, queremos hacer máxima la función área:

$$S = x \bullet y$$

Buscamos una relación entre x e y. En el triángulo rectángulo ABC, se tiene que:

$$x^2 + y^2 = 8^2 \;\rightarrow\; y = \sqrt{64 - x^2}$$

que, sustituido en la fórmula del área el rectángulo $S = x \bullet y$ queda:

$$S = x \bullet \sqrt{64 - x^2}$$

Procedemos como en los ejemplos anteriores:

$$S'' = \frac{128x - 4x^3}{2\sqrt{64x^2 - x^4}} \; ; \quad \frac{64 - 2x^3}{\sqrt{64x^2 - x^4}} = 0$$

$$\rightarrow 2x\left(32 - x^2\right) = 0$$

Las raíces son: $x = 0 \;\; y \quad x = \pm 4\sqrt{2}$

Los valores x = 0 y x = – 4 $\sqrt{2}$ carecen de sentido (los lados de un rectángulo son positivos).

Por tanto, $x = 4\sqrt{2} \rightarrow y = \sqrt{64 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 4\sqrt{2}$

Es un cuadrado de lado $4\sqrt{2}$ dm y de área 32 dm^2. (Compruebe el lector que $S''\left(4\sqrt{2}\right) < 0$) .

Ejemplo

Calcula las coordenas de los puntos de la parábola $y^2 = 4x$, tales que sus distancias al punto A (4, 0) sean mínimas.

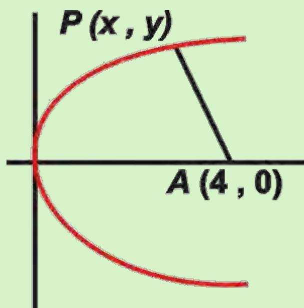


Figura 31

Solución

Queremos que la distancia $d(A,P) = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ sea mínima. Tenemos que buscar otra relación entre e y y, que se obtiene por ser P (x, y) un punto de la parábola $y^2 = 4x$. Sustituimos y^2 en la distancia:

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + 4x}$$

Condición de mínimo:

$$d' = \frac{2(x-4)+4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 16}} = 0 \rightarrow 2(x-4) + 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

si $x = 2 \rightarrow y^2 = 4 \bullet 2 \rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$ Se tienen, por tanto, dos puntos:

$$p\left(2,\; 2\sqrt{2}\right) \; y \;\; P'\left(2,\; -2\sqrt{2}\right)$$

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

Diremos que una función es **cóncava** si su gráfica se curva hacia arriba, mientras que si lo hace hacia abajo diremos que es **convexa**.

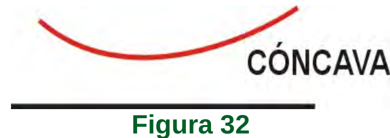


Figura 32

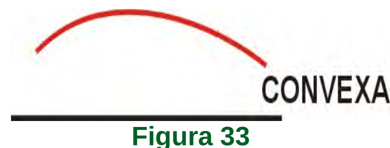


Figura 33

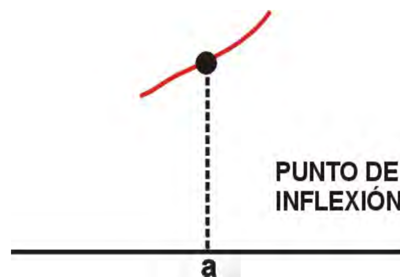


Figura 34

A los puntos donde una función pasa de ser cóncava a convexa o viceversa se les denomina **puntos de inflexión**.

La segunda derivada nos permite deducir la curvatura de una función. En concreto:

• Si $f''(a) > 0$, la función es **cóncava** en a

• Si $f''(a) < 0$, la función es **cónvexa** en a

• Si $f''(a) = 0$, de modo que f'' cambia de signo en a, la función tiene un **punto de inflexión** en $x = a$

Así, para determinar los intervalos de concavidad y convexidad de una función y sus puntos de inflexión hallaremos los valores de x donde f'' se anule o no exista y, una vez ordenados, estudiaremos el signo de f'' y, por tanto, los intervalos de curvatura de f.

Los valores donde f exista y f'' cambie de signo son los puntos de inflexión.

Ejemplo

Estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de $f'(x) = x^4 - 12x^2$

La función está definida en todo R. Sus derivadas primera y segunda son:

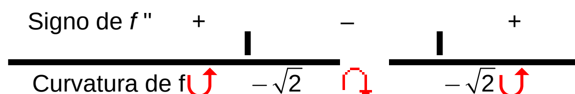
$f'(x) = 4x^3 - 24x$ $\quad f''(x) = 12x^2 - 24$

de modo que

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -\sqrt{2}$ ò $x = \sqrt{2}$

Estudiamos el signo de f'' en cada uno de los intervalos en que los anteriores valores dividen a la recta:

Signo de f'' + – +



Curvatura de f $-\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$

De aquí deducimos que la función es cóncava en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$, convexa en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ y cóncava en $\left(\sqrt{2},\infty\right)$. Hay dos puntos de inflexión en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS

Sabemos que las funciones polinómicas y derivables en todo R (es decir, son "suaves": sin saltos ni picos). Además, sus límites en $\pm\infty$ son infinitos. Esto, junto con lo estudiado hasta ahora, nos permite obtener sus gráficas siguiendo estos pasos:

1. Hallamos sus límites en $\pm\infty$ y las raíces de *f.* Con estos datos decidimos en qué intervalos es la función positiva o negativa.

2. Hallamos las raíces de f'. A partir de ellas, construimos el esquema de crecimiento y calculamos los máximos y mínimos de la función.

3. Se hallan las raíces de f''. A partir de ellas construimos el esquema de curvatura y calculamos los puntos de inflexión.

Si en algún paso no sabemos resolver la correspondiente ecuación, pasaremos a la siguiente etapa. Al final, y para apuntalar la gráfica, podremos calcular algunos valores de la función.

Ejemplo

Representar gráficamente la función $y = x^2 + x^2 - x - 1$

1. Las raíces de f se obtienen por la regla de Ruffini y son: $x = 1$ y $x = -1$ (doble) .

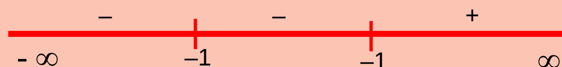
Damos ahora una introducción ejemplificada de la representación de funciones polinómicas y racionales a través del estudio de sus propiedades.

Además:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

El esquema de signos de f se obtiene *dando valores a* x en cada uno de los tramos y sustituyendo en la función. Así obtendremos los intervalos en los que la gráfica transcurre por encima o por debajo del eje X .

– – +

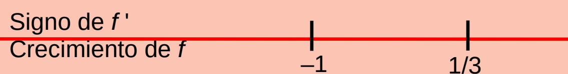


- ∞ –1 –1 ∞

2. $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Igualando $f'(x) = 0$ y resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos las raíces $x = -1$ y $x = \frac{1}{3}$.

El esquema de crecimiento de la función es:

Signo de f'

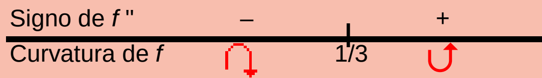


Crecimiento de f –1 1/3

En el punto A (-1, 0) hay un máximo y en $B\left(\frac{1}{3},-1'18\right)$ hay un mínimo.

3. $f''(x) = 6x + 2$. Igualando $f''(x) = 0$ obtenemos la raíz $x = -\frac{1}{3}$

El esquema de curvatura es el siguiente.



Del cambio de curvatura deducimos que el punto $C\left(-\frac{1}{3}, -0'59\right)$ es de inflexión.

La gráfica de la función es la siguiente:

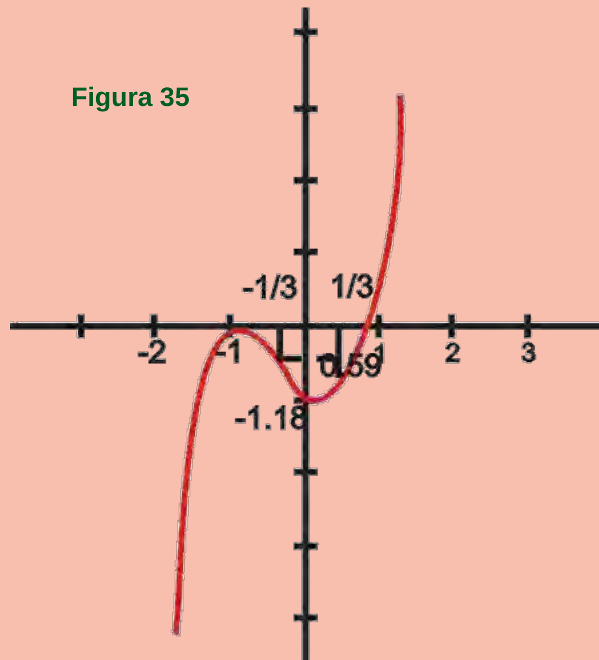


Figura 35

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Una función racional es de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde p (x) y q (x) son polinomios.

Según sabemos, estas funciones están definidas y son continuas en todo *R* salvo en aquellos puntos que anulan al denominador *q* (*x*). Para construir su gráfica seguiremos estos pasos:

1. Calculamos las raíces de *f* (soluciones de *p* (*x*) = 0, *q* = (*x*) ¹ 0) y sus discontinuidades (soluciones de *q* (*x*) = 0.

Estudiando el límite de la función en estos últimos, obtendremos bien una **asíntota vertical** (si el límite es $\frac{k}{0}$) o bien una **discontinuidad evitable** (si es $\frac{0}{0}$).

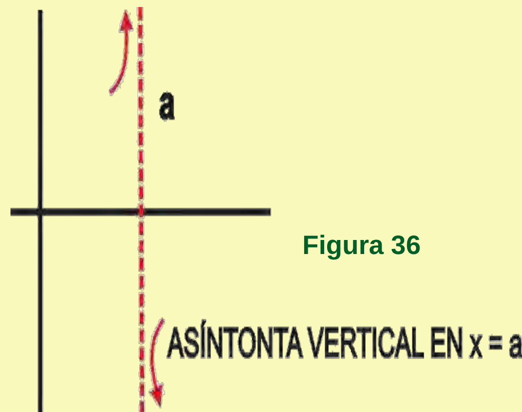


Figura 36

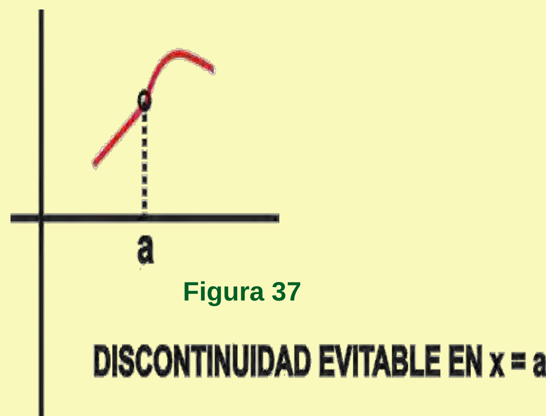


Figura 37

2. Al calcular los límites en $\pm\infty$ puede ocurrir:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, siendo entonces la recta *y* = *L* asíntota horizontal para $x \to \pm\infty$

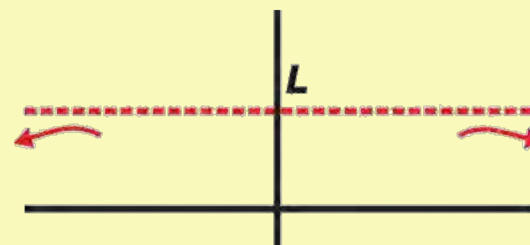


Figura 38

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ En este caso hallamos $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ pudiendo resultar:

b₁) *m* un número. Si es así, calculamos *n* = lím (*f* (*x*) – *mx*)

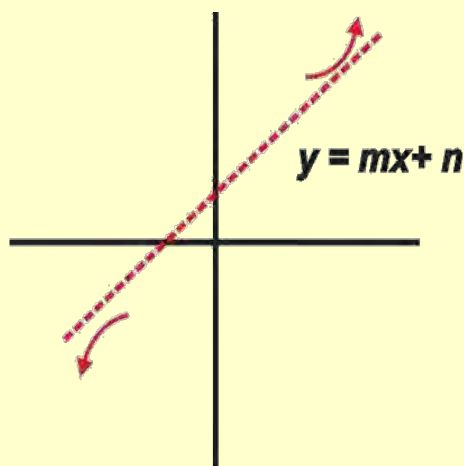


Figura 39

b₂) $m = \infty$ .En este caso, la función presenta una rama parabólica según el eje *Y* .

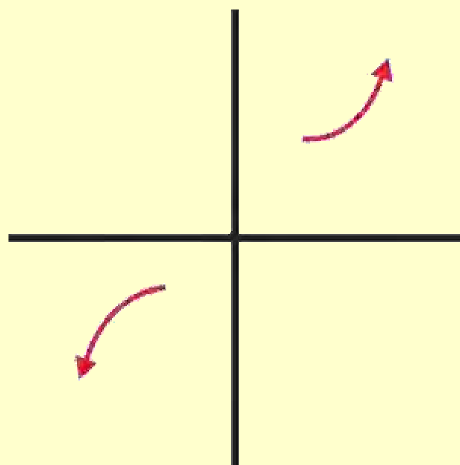


Figura 40

3. Se hallan las raíces y discontinuidades de *f* ' para a continuación construir el esquema de crecimiento de *f* y decidir sus máximos y mínimos.

4. Calculamos (si no es excesivamente complicado) las raíces y discontinuidades de *f* '' (los puntos de discontinuidad de *f* ' y *f* '' son los mismos que en *f*).

A partir de ellas hacemos el esquema de curvatura y calculamos los puntos de inflexión.

Ejemplo

Representar gráficamente la función $y = \dfrac{2x+1}{x^2-4x}$

1. Raíces de *f* : $2x+1=0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Discontinuidad de *f* :

$$x^2-4x=0 \rightarrow x(x-4)=0 \rightarrow$$

$$x = 0 \text{ ó } x = 4$$

Estudiamos ahora los límites en los puntos de discontinuidad:

– En $x = 0$ hay un límite del tipo $\left(\dfrac{1}{0}\right)$, luego $x = 0$ es asíntota vertical.

Además

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

– En $x = 4$ hay un límite del tipo $\left(\dfrac{9}{0}\right)$, luego $x = 4$ es asíntota vertical y se tiene:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 4^+} f(x) = \infty$$

2. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ pues el grado del numerador es menor que el del denominador.

De aquí se sigue que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal para $x \rightarrow \pm\infty$

3. El estudio de las raíces y discontinuidades de *f* ' ya está hecho al principio del tema.

4. La expresión de *f* '' es complicada por lo que prescindimos de esta cuarta etapa. La gráfica de la función es:

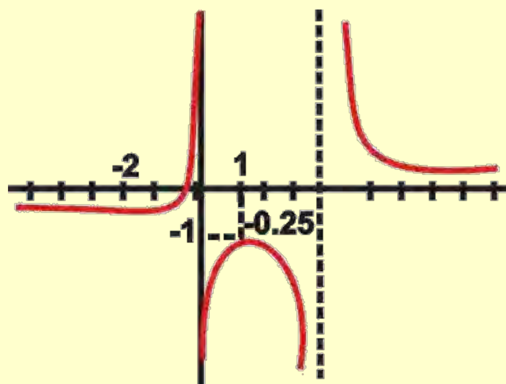


Figura 41

EJERCICIOS

1. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

R. a) Decreciente en el intervalo (0 , 2) y creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

b) Decreciente en (1 , 3) y creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

2. Estudia los máximos y mínimos de la función $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 7x - 6)e^x$

R. El punto mínimo es $M\left(-1,\ -18e^{-1}\right)$´

3. Intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

a) $f(x) = x + 5 - 2 \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

R. a) Decreciente en $(0, \pi/3) \cup (5\pi/3, 2\pi)$,creciente en $(\pi/3, 5\pi/3)$

b) Decreciente en $(\pi/4, 5\pi/4)$ y creciente en $(0, \pi/4) \cup (5\pi/4, 2\pi)$

4. Determina el máximo y el mínimo de la función $f(x) = x^5 + x + 1$ en el intervalo (0, 2).
R. El punto mínimo es *M´* (0 , 1) y el máximo M (2, 35)

5. Determina el parámetro *c* para que el mínimo de la función $y = x^2 + 2x + c$ sea igual a 8.
R. $c = 9$

6. Halla los números *b* y *c* para que la función $y = x^2 + bx + c$ alcance un mínimo en el punto *P* (– 1, 2).
R. $b = 2$, $c = 3$

7. La curva dada por $y = x^2 + bx + c$ pasa por el punto *P* (– 2, 1) y alcanza un punto crítico en $x = -3$. Halla *b* y *c*
R. $b = 6$, $c = 9$

8. La función $f(x) = x^3 + px^2 + q$ tiene un valor mínimo relativo igual a 3 en $x = 2$. Halla los números *p* y *q* .
R. $p = -3$, $q = 7$

9. Halla dos números cuya suma sea 40 sabiendo que su producto es máximo. **R.** 20 *y* 20

10. Halla dos números cuya suma es 18, sabiendo que el producto del uno por el cuadrado del otro ha de ser máximo. **R.** 12 *y* 6

11. Determina dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto del uno por el cuadrado del otro sea máximo. **R.** 18 *y* 6

12. ¿Cuál es el número que sumado con 25 veces su inverso da un valor mínimo? **R.** 5

13. Encuentra un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima. **R.** 0 , 5

14. Un pastor quiere vallar un campo rectangular de 3600 m^2 de superficie para hacer un aprisco. ¿Podrías indicarle las dimensiones para que el costo fuera mínimo? **R.** 60 m *y* 60m

15. Un pastor dispone de 1000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. ¿Podrías indicarle las dimensiones para que el corral sea lo mayor posible? **R.** 500 m *y* 250 m

16. Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 800 dólares/m y las de los otros 100 dólares/m, halla el área del mayor campo que puede cercarse con 288.000 dólares. **R.** 115.200 m^2

17. ¿Qué medidas tiene el triángulo rectángulo de máxima área entre todos los que tienen 10 cm de hipotenusa? **R.** $\sqrt{50}$ cm y $\sqrt{50}$ cm

18. Entre todos los rectángulos de perímetro 12, ¿cuál tiene la diagonal menor? ¿Cuánto mide ésta? **R.** 3 m *y* 3 m

19. De todos los triángulos isósceles de 12 cm de perímetro, halla las dimensiones de los lados del que tenga área máxima. **R.** 4, 4, 4 cm

20. Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 12 cm, calcula las dimensiones del que tenga área máxima.

R. $\sqrt{288}$ cm y $\sqrt{288}$ cm

21. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo. **R.** 5 cm *y* 10 cm

22. Determina la distancia mínima del origen a la curva $xy = 1$. **R.** $\sqrt{2}$

23. Halla los puntos de la curva $y^2 = 6x$ cuya distancia al punto *P* (4, 0) sea mínima.
R. $M\left(1, \sqrt{6}\right)$ *y* $M´\left(1, \sqrt{6}\right)$

24. Halla los puntos de la curva $y^2 = 4x$ cuya distancia al punto *P* (4, 0) sea mínima.
R. $M\left(2, \sqrt{8}\right)$ *y* $M´\left(2, -\sqrt{8}\right)$



El cálculo diferencial ha posibilitado la construcción de trenes de alta velocidad; también permite analizar el movimiento de los globos aerostáticos sometidos a la acción de corrientes de aire muy diversas.

CAPÍTULO IV

DERIVADAS Y LÍMITES

El matemático alemán Hermann Amandus Schwarz (profesor en las universidades de Gotinga y Berlín) realizó investigaciones sobre geometría diferencial, teoría de funciones y variables complejas.

Schwarz estableció la desigualdad que lleva su nombre y un procedimiento para representar las funciones de variable compleja.

En el ámbito de la física, la utilización de derivadas es muy frecuente; por ejemplo, el empleo de derivadas permite calcular las fuerzas que actúan sobre las partículas, la velocidad de las reacciones químicas depende de la derivada de las concentraciones con respecto al tiempo, para determinar la aceleración se utiliza una derivada temporal.

NOCIÓN DE LÍMITE

La noción de límite es una idea central en la matemática actual y es la base de otras ideas fundamentales como la derivada o la integral. Su gestación a lo largo de la historia de la matemática, hasta llegar a la claridad con que hoy se expone, fue lenta y tortuosa.

Hasta principios del siglo XIX los matemáticos trabajan con límites sin tener muy claro su verdadero significado.

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Consideramos una función $y = f(x)$ y un punto $x = a$ de la recta real.

Decimos que la función $f(x) \to L$ cuando $x \to a$, y se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = L$, si al dar a x valores cada vez más próximos a a, los valores de $f(x)$ se acercan a L "tanto como queramos".

La traducción precisa al lenguaje matemático es la siguiente:

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ si, fijado un entorno de L, $E(L,\varepsilon)$, tan pequeño como se quiera, podemos encontrar otro entorno de a, $E(a, \delta)$, de modo que si $x \in E(a, \delta)$ y $x \neq a$, entonces $f(x) \in E(L,\varepsilon)$.

Podemos acercarnos a a :

- Con valores de x menores que a, aproximándose entonces $f(x)$ a un número llamado límite por la izquierda de $f(x)$ cuando $x \to a$, y que se escribe:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

- Con valores de x mayores que a, acercándose $f(x)$ a un número llamado límite por la derecha de $f(x)$ cuando $x \to a$, y que se simboliza por:

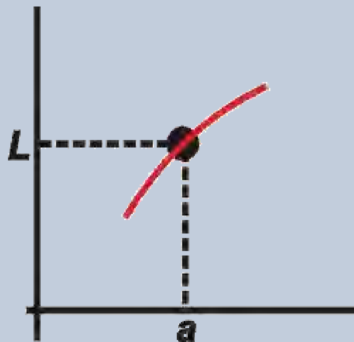
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Ambos límites laterales pueden o no, ser números reales y pueden, o no, ser iguales.

Ejemplo

Figura 42

$$\begin{cases} \lim_{x\to a^-} f(x) = L \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = L \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lim_{x\to a^-} f(x) = p \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = q \end{cases}$$

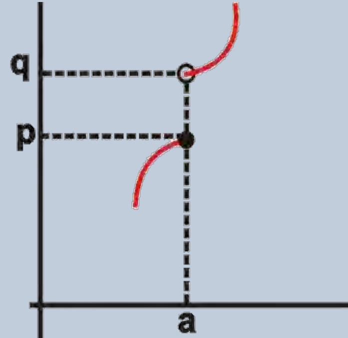


Figura 43

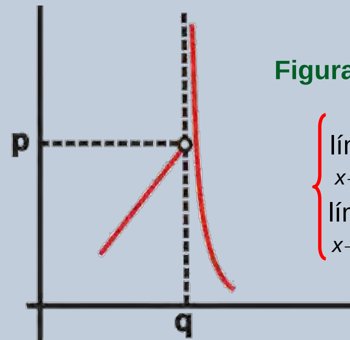


Figura 44

$$\begin{cases} \lim_{x\to a^-} f(x) = p \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \end{cases}$$

Para que una función tenga límite en un punto es necesario que ambos límites laterales sean iguales. Es decir:

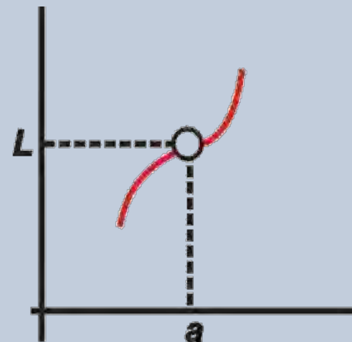
Existe $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si, y solamente si,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Para los ejemplos anteriores, sólo existe $\lim f(x) = L$ en la gráfica. En las restantes la función no tiene límite cuando $x \to a$, pues los límites laterales son distintos.

Figura 45

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$



Es muy importante destacar que para que una función tenga límite en un punto, no es necesario que esté definida en dicho punto, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^2$ y el punto $a = 2$.

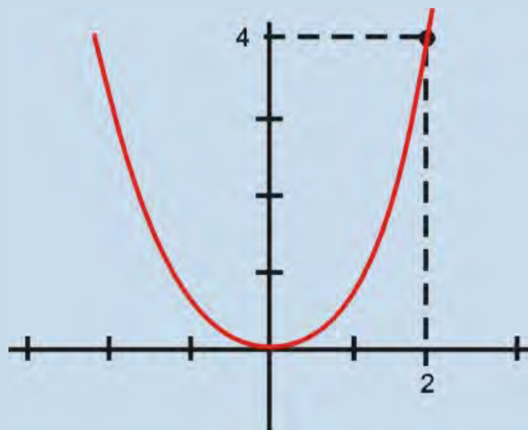


Figura 46

Es fácil comprobar que:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4\end{array}\right. \rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$$

Ejemplo

Sea la función $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x+2 & \text{si } x>0 \\ -x+1 & \text{si } x\le 0\end{array}\right.$ y el punto $a = 0$

De la gráfica siguiente deducimos:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2\end{array}\right. \rightarrow \text{No existe } \lim\limits_{x\to 0} f(x)$$

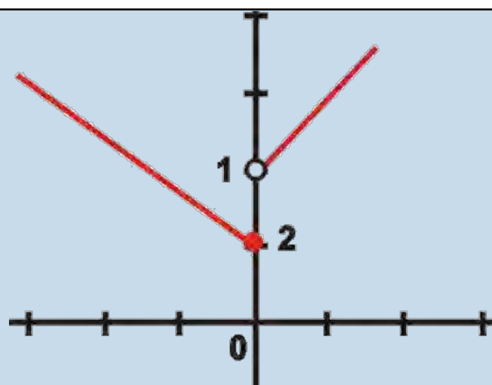


Figura 47

Ejemplo

Sea la función $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2x+1 & \text{si } x<1 \\ x+2 & \text{si } x>1\end{array}\right.$ y el punto $a = 1$

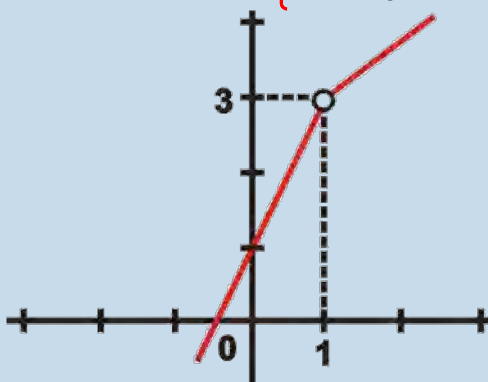


Figura 48

De la gráfica se sigue que:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3\end{array}\right. \rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$$

Observa que la función no está definida en $x = 1$.

LÍMITES INFINITOS

Decimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ si para valores de x próximos a a, los valores de $f(x)$ pueden hacerse tan grandes como queramos.

Con rigor, decimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ si fijado un valor k positivo y tan grande como se quiera, existe un entorno de a, $E(a, \delta)$, tal que si $x \in E(a, \delta)$ y $x \neq a$, entonces $f(x) > k$.

Análogamente, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si para valores de x cercanos a a, los valores de $f(x)$ se pueden hacer tan pequeños como queramos.

Con formulación precisa, diremos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si fijado un valor de k positivo y tan grande como se quiera, podemos encontrar un entorno de a, $E(a, \delta)$, tal que si $x \in E(a, \delta)$ y $x \neq a$, entonces $f(x) < -k$

Ejemplo

Consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

En el punto $x = 0$ se tiene:

$$\lim_{x \to 0^-} 1/|x| = \infty$$
$$\lim_{x \to a^+} 1/|x| = \infty \quad \rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$

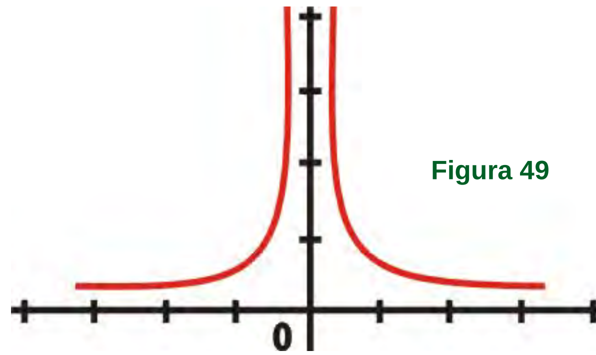


Figura 49

LÍMITES EN EL INFINITO

Cuando el dominio de $y = f(x)$ se extiende indefinidamente hacia la derecha o hacia la izquierda de la recta real tienen sentido las expresiones:

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ si "haciendo x arbitrariamente grande", los valores de $f(x)$ se acercan a L.
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ si "haciendo x arbitrariamente pequeña", los valores de $f(x)$ se acercan a L.

Ejemplo

Para la función $y = f(x)$ dada por su gráfica:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Diremos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ si, fijado un entorno de L, $E(L, \varepsilon)$, podemos encontrar un número positivo k de modo que si $x > k$, entonces $f(x) \in E(L, \varepsilon)$.

Análogamente, diremos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ si, fijado un entorno de L, $E(L, \varepsilon)$, podemos encontrar un número positivo k de modo que si $x < -k$, entonces $f(x) \in E(L, \varepsilon)$.

Evidentemente, puede ocurrir que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

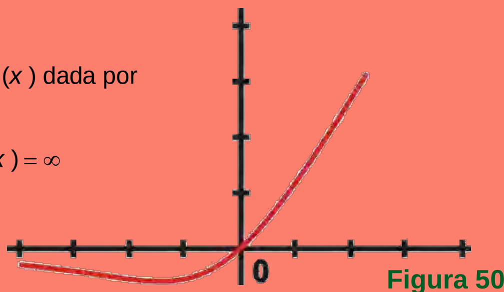


Figura 50

$\dfrac{0}{k} = 0 \qquad \dfrac{\infty}{k} = \infty$

$\dfrac{k}{0} = \infty \quad \dfrac{\infty}{0} = \infty \quad \dfrac{0}{0}$ indeterminación

$\dfrac{k}{\infty} = 0 \quad \dfrac{0}{\infty} = 0 \quad \dfrac{\infty}{\infty}$ indeterminación

Potenciación:

a) Con base un número k positivo:

$$k^0 = 1 \quad k^\infty = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < k < 1 \\ \infty & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

1^∞ indeterminación

b) Con base 0:

$$0^\infty = 0 \quad 0^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ \infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

0^0 indeterminación

c) Con base ∞

$$\infty^\infty = \infty \quad \infty^{-\infty} = 0$$

$$\infty^k \begin{cases} \infty & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

∞^0 indeterminación

CÁLCULO DE LÍMITES

Al calcular límites de funciones dadas por su fórmula $y = f(x)$ pueden presentarse los siguientes casos en los que aparecen involucradas expresiones infinitas:

Suma y resta:

$\infty \pm k = \infty \qquad -\infty \pm k = -\infty$

$\infty + \infty = \infty \qquad -\infty - \infty = -\infty$

$\infty - \infty$ indeterminación

Multiplicación:

$\infty \bullet k = \infty \qquad \infty \bullet \infty = \infty$

$\infty \bullet 0$ = indeterminación

División:

Cálculo de límites cuando $x \to \infty$

El cálculo de límites cuando $x \to \infty$ se hace igual que los límites de sucesiones.

a) Límite de funciones polinómicas

El límite de cualquier función polinómica $p(x)$ es ∞ ó $-\infty$ según que el coeficiente del término de mayor grado sea positivo o negativo.

Ejemplo

$\lim\limits_{x\to\infty} (-x^2 + 2x - 3) = -\infty$ pues $-1 < 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} (3x^3 + x^2 - x + 1) = \infty$ pues $3 > 0$

b) Límite de cociente de polinomios

Tratamos de calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \left(\text{indeterminación } \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right)$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios

Se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^{m} + a'x^{m-1} + \cdots}{bx^{n} + b'x^{n-1} + \cdots} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } m > n \\ \dfrac{a}{b} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m < n \end{cases}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x}{x^2} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4 + 8x^2 - 3}{-x^2 + x + 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x - x^2}{2x^2 + x + 8} = \frac{-1}{2} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{2x^3 - x} = 0$$

c) Límites indeterminados del tipo $\infty - \infty$

En este tipo de indeterminaciones se efectúa la operación antes de calcular el límite.

Ejemplos

1) $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) \underset{\infty-\infty}{=}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + x}} = \frac{1}{\infty + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

2) $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x} - x \right) \underset{\infty-\infty}{=}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$$

d) Límites indeterminados del tipo $0 \bullet \infty$

Al igual que en los anteriores conviene efectuar las operaciones antes de calcular el límite.

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \left(3x \bullet \frac{2x}{x^2 + 7x + 5} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{x^2 + 7x + 5} = \frac{6}{1} = 6$$

e) Límites de potencias

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{1 + 2x^2} \right)^{x} \underset{\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}}{=} 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right)^{-x} \underset{\infty^{-\infty}}{=} 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^3 - 1}{2x^3} \right)^{\frac{x}{2x+1}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Especial importancia tienen, dentro de los límites de potencias, los límites indeterminados del tipo 1^{∞}. Esta clase de indeterminación (y sólo ésta) se resuelve mediante el número e = 2,71828 . . . En general:

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}$ es del tipo 1^{∞}, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)m^{g(x)} = e^{\lambda}$

siendo $\lambda = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - 1) \bullet g(x)$

Ejemplo

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{2x+5} \underset{1^{\infty}}{=} e^{\lambda}$ siendo λ el siguiente límite:

$$\lambda = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x+2} - 1 \right) \bullet (2x + 5) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + 3 - x - 2}{x + 2} \bullet (2x + 5) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x + 2} \bullet (2x + 5) =$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x + 5}{x + 2} = \frac{2}{1} = 2$ y por tanto

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{2x+5} = e^{2}$$

Cálculo de límites cuando x → ∞

Para calcular límites cuando $x \to \infty$ cambiamos x por $-x$ y calculamos el límite cuando $x \to \infty$, Es decir

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x)$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-3x^3+x^2}{x^4-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(-x)^4-3(-x)^3+(-x)^2}{(-x)^4-1} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+3x^3+x^2}{x^4-1} = 2$$

Cálculo de límites cuando $x \to a$

Para calcular el límite de una función cuando $x \to \infty$ sustituiremos x por a y efectuaremos las operaciones indicadas.

Ejemplos

1) $$\lim_{x\to2} (3x^2-1) = 3 \bullet 2^2 - 1 = 11$$

2) $$\lim_{x\to1} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

3) $$\lim_{x\to3} (2x-3)^{\frac{1}{x}} = (2 \bullet 3 - 3)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

Pero ocurre con frecuencia que aparecen expresiones indeterminadas como, por ejemplo:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-x}{2x-2} = \frac{1^2-1}{2 \bullet 1 - 2} = \frac{0}{0} \quad \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x\to3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{x}{x-3}\right) = \infty - \infty \quad \text{indeterminación}$$

a) Límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$

En estos límites simplificaremos numerador y denominador dividiéndolos por $x - a$. Téngase en cuenta que numerador y denominador son divisibles por $x - a$ pues el valor numérico de ambos en $x = a$ es cero.

Ejemplos

1) $$\lim_{x\to-2} \frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10}$$

Es un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$

Dividimos numerador y denominador por $x + 2$ esto nos permitirá factorizar ambos. En el numerador la factorización es inmediata: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Para el denominador, usamos la regla de Ruffini:

	1	2	5	10
– 2	↓	–2	0	– 10
	1	0	5	0

$$\to x^3+2x^2+5x+10 = (x+2)(x^2+5)$$

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10} = \lim_{x\to-2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2+5)} =$$

$$\lim_{x\to-2} \frac{x-2}{x^2+5} = \frac{-2-2}{(-2)^2+5} = \frac{-4}{9}$$

2) $$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} =$$

$$\lim_{x\to2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2+2}+2} = \frac{1}{4}$$

b) Límites indeterminados del tipo $\infty - \infty$

En estos límites se efectúa antes la operación para transformarlo en otro tipo $\frac{k}{0}$.

Ejemplo

$$\lim_{x\to2} \left(\frac{x^2+1}{x-2} - \frac{x^2+x-2}{x^2-2x}\right) \underset{\infty-\infty}{=}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{x^3+x-x^2-x+2}{x(x-2)} =$$

$$\lim_{x\to2} \frac{x^3-x^2+2}{x(x-2)} = \frac{6}{0} = \infty$$

c) Límites indeterminados del tipo 1^∞

Recuerda que si lím $f(x)^{g(x)}$ es del tipo 1^∞, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^\lambda \quad \text{siendo:}$$

$$\lambda = \lim_{x\to a} (f(x)-1) \bullet g(x)$$

Ejemplo

1) $\lim_{x\to 0} (x+1)^{\frac{3}{x}} = e^{\lambda}$ (1^{∞})

siendo $\lambda = \lim_{x\to 0} (x+1-1)\bullet\frac{3}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x} = 3,$

luego $\lim_{x\to 0} (x+1)^{\frac{3}{x}} = e^{3}$

2) $\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+8x^2} = \lim_{x\to 0} (1+8x^2)^{\frac{1}{x}} = e^{\lambda}$ (1^{∞})

siendo $\lambda = \lim_{x\to 0} (1+8x^2-1)\bullet\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{x} =$

$\lim_{x\to 0} 8x = 0,$ y por tanto $\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+8x} = e^{8}$

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Tenemos la idea intuitiva de que una función es continua cuando se puede dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel. Si hay puntos en los que hay que levantarlo, decimos que la función es discontinua en dichos puntos. Esto nos permite dar la siguiente definición:

Una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Existe $f(a)$ 2. Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ 3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = x^2$ en $x = 2$

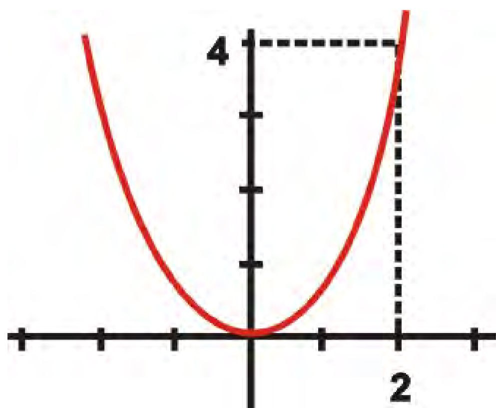


Figura 51

1. $f(2) = 4$

2. $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4 \rightarrow f$ es continua en $x = 2$

3. $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$

Ejemplo

Estudiar la continuidad de $f(x) = \frac{x}{x-1}$ en $x = 1$

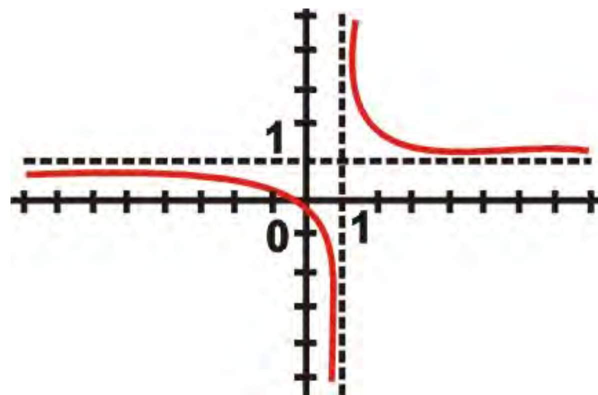


Figura 52

1. No existe $f f(1)\left(\frac{1}{0}\right)$

Por tanto f no es continua en $x = 1$.

Ejemplo

Estudiar la continuidad de la función $f(x) =$

$$\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 0 \\ x^2-2x-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

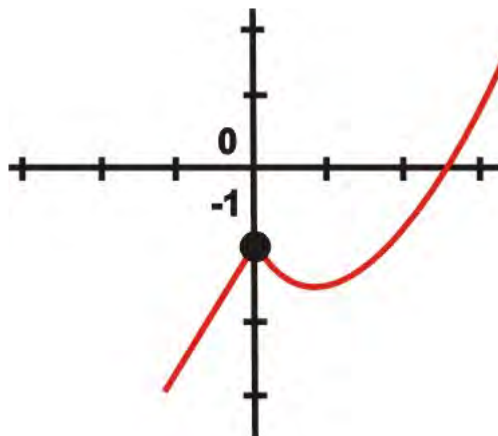


Figura 53

1. $f(0) = 0^2 - 2 \bullet 0 - 1 = -1$

2. Como la función cambia su expresión justamente en $x = 0$, hay que estudiar los límites laterales.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (2x + 1) = 2 \bullet 0 - 1 = -1$$

$$\to \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 - 2x - 1) = 0^2 - 2 \bullet 0 - 1 = -1$$

3. $\lim_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$

Como se cumplen las tres condiciones deducimos que f es continua en $x = 0$.

Ejemplo

Estudiar la continuidad en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x > 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

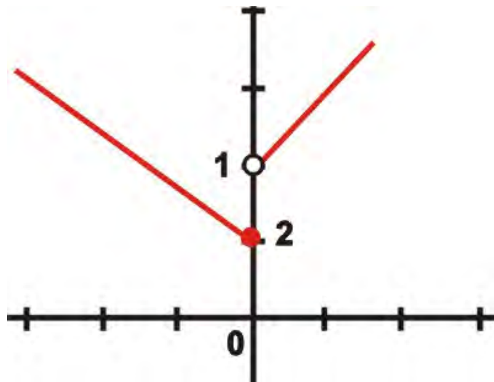


Figura 54

1. $f(0) = 1$

2. Estudiamos límites laterales:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (-x + 1) = 1$

$\to$ No existe $\lim_{x \to 0} f(x)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (x + 2) = 2$

Por tanto f es discontinua en $x = 0$.

CONTINUIDAD DE UN INTERVALO

Una función es continua en un intervalo si lo es en cada uno de los puntos del intervalo.

El siguiente criterio es de gran utilidad:

Las funciones que manejamos usualmente, que responden a una única expresión analítica, son continuas en todo su dominio de definición.

Ejemplo

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

El problema equivale, según el criterio anterior, a calcular el dominio.

Igualamos $x^2 - 4 = 0 \to x = \pm 2$

El dominio es $R - \{-2, 2\}$ y por tanto f es continua en todo R salvo en $x = -2$ y $x = 2$.

Otro criterio de gran utilidad y que nos ahorrará esfuerzos en lo sucesivo es el siguiente:

Si una función $y = f(x)$ es continua, también lo es la función $y = |(x)|$

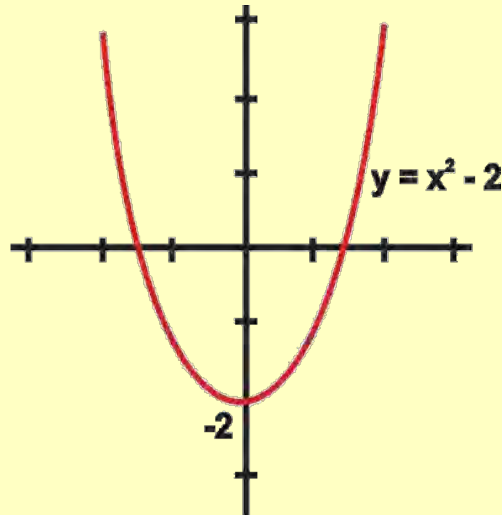


Figura 55

Efectivamente es así, pues el valor absoluto sólo altera la gráfica de una función "doblando" hacia la parte positiva del eje *OX* las partes negativas (no "rompe" la gráfica).

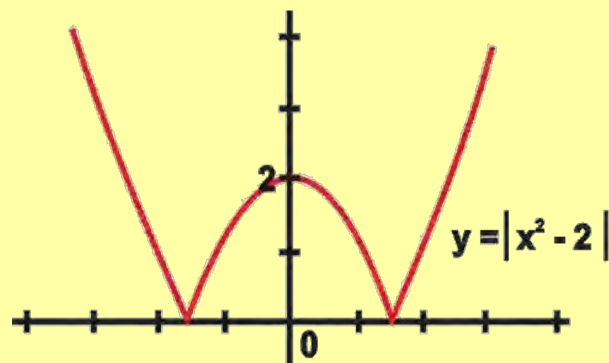


Figura 56

Ejemplo

Probar que las funciones:

$y = |x^2 - x + 2|$ e $y = \text{sen } x + |\cos x|$

son continuas en todo *R*.

Solución

Dado que $y = x^2 - x + 2$ es continua en todo *R*, también lo es $y = |x^2 - x + 2|$.

Como $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$ son funciones continuas, también lo es $y = |\cos x|$ y, por tanto, $y = \text{sen } x + |\cos x|$.

TEOREMA DE BOLZANO

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y signo de $f(a) \neq$ signo de $f(b)$, entonces existe un número $s \in (a, b)$ tal que $f(s) = 0$.

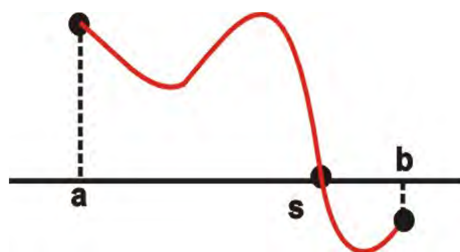


Figura 57

El teorema dice que si una gráfica continua pasa de una parte a otra del eje *X*, necesariamente lo corta.

La condición de que $f(x)$ sea continua es imprescindible, como muestra el siguiente ejemplo (es una gráfica no continua que pasa de un lado a otro del eje *X* sin cortarlo).

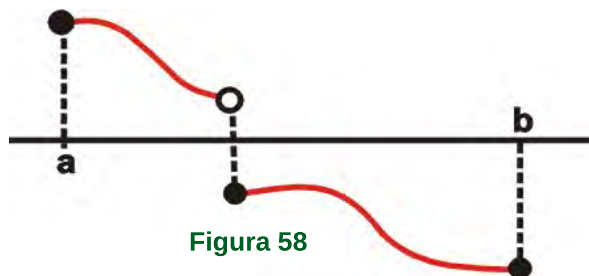


Figura 58

Ejemplo

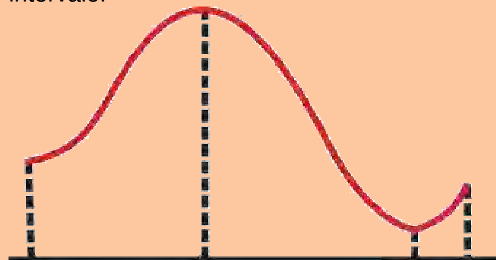
Probar que la ecuación $x^3 - 3x + 40 = 0$ tiene alguna raíz real.

Si llamamos $f(x) = x^3 - 3x + 40$, encontramos tanteando que $f(-4) = -12$ y $f(-3) = 22$

Dado que $f(x)$ es una función continua (es un polinomio), el teorema de Bolzano garantiza la existencia de un número $s \in (-4, -3)$ tal que $f(s) = 0$, es decir, que es raíz de la ecuación.

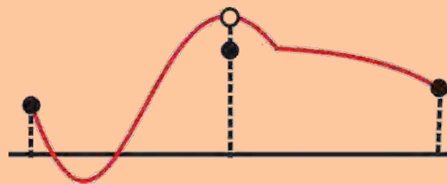
TEOREMA DE WEIERSTRASS

Cualquier función $f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$, alcanza su máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo.


Figura 59

$f(c)$ es el valor máximo y $f(d)$ el valor mínimo de la función en $[a, b]$

La continuidad de $f(x)$ y que el intervalo $[a, b]$ sea cerrado son condiciones ineludibles para garantizar la existencia de los extremos, tal como lo muestran los siguientes ejemplos:


Figura 60

$f(x)$ no es continua en $[a, b]$ y no alcanza máximo

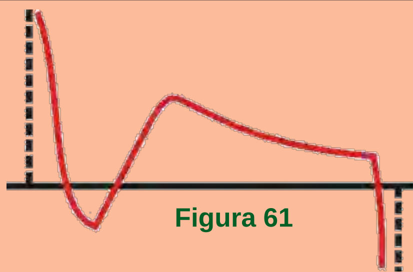


Figura 61

$f(x)$ es continua, pero el intervalo (a, b) no es cerrado y no hay máximo ni mínimo.

Ejemplo

1) La función $f(x) = x^2$ es continua en el intervalo $[-1, 1]$ (lo es en todo R). En dicho intervalo alcanza un máximo en $x = -1$ y $x = 1$ de valor 1 y un mínimo absoluto en $x = 0$ de valor 0.

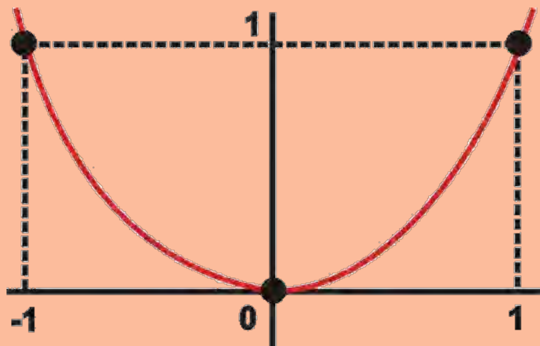


Figura 62

2) En cambio, la función $g(x) = \frac{1}{x}$ no tiene en el intervalo [- 1, 1] ni máximo ni mínimo absoluto, por no ser continua en $x = 0$ y ser $\lim_{x \to 0^-} 1/x = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} 1/x = \infty$

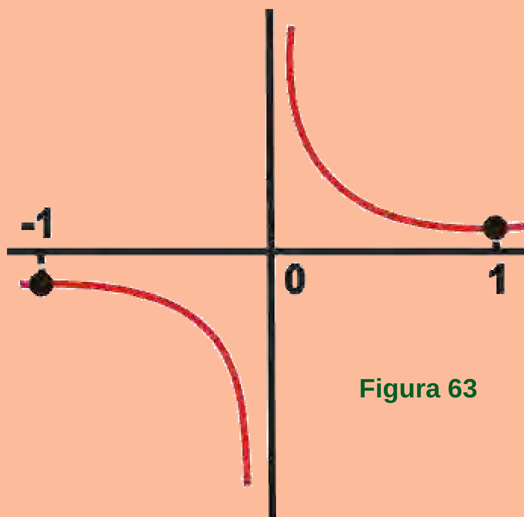


Figura 63

EJERCICIOS

1. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 5x + 6)$ **R.** 0

b) $\lim_{x \to 1} (x - 7)^7$ **R.** 0

c) $\lim_{x \to 2} (x^3 - x^2 + x + 1)$ **R.** 7

2. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim_{x \to \infty} (x^2 - x + 1)$ **R.** ∞

b) $\lim_{x \to \infty} (-x^2 + x + 25)$ **R.** $-\infty$

c) $\lim_{x \to \infty} (x^3 + x^2 + 1)$ **R.** ∞

d) $\lim_{x \to \infty} (-x^3 + x^2 + 1)$ **R.** $-\infty$

3. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - x + 1)$ **R.** ∞

b) $\lim_{x \to -\infty} (-x^2 + x + 7)$ **R.** $-\infty$

c) $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + x^2 + 10)$ **R.** $-\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + x^2 + 10)$ **R.** ∞

4. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x}{x + 1}$ **R.** 1

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x + 1}$ **R.** 0

c) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + x}{x + 1}$ **R.** $\frac{17}{5}$

d) $\lim_{x \to 6} \frac{x - 1}{x + 1}$ **R.** $\frac{5}{7}$

5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales simplificando previamente los factores comunes para los que se anula.

a) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$ **R.** 2

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$ **R.** 4

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ **R.** $\dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ **R.** 2

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$ **R.** 2

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^2-1}$ **R.** $\dfrac{5}{2}$

6. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-6x+6}{x^2-2}$ **R.** 1

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ **R.** ∞

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(1+x)^2-1}{x^2}$ **R.** 1

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^5-1}{x^7-1}$ **R.** 0

7. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+2}}$ **R.** -2

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ **R.** $\dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ **R.** $\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ **R.** $-\dfrac{1}{2}$

8. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$ **R.** -1

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ **R.** 0

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$ **R.** $\dfrac{4}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ **R.** 1

9. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x+1}-x$ **R.** $-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{1+x}-\sqrt{x}$ **R.** 0

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x^2+x}-x$ **R.** $1/2$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$ **R.** 0

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ **R.** 0

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{(x+2)(x-3)}-x$ **R.** $-1/2$

10. Calcula los siguientes límites de potencias:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2}$ **R.** $\sqrt{e^3}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-3}{2x}\right)^{\frac{x+3}{x}}$ **R.** $\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-3}{2x}\right)^{x^2}$ **R.** 0

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x^2-5x}{x+4}\right)^{x+1}$ **R.** ∞

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+3}\right)^{x}$ **R.** e^2

11. Calcula cuánto debe valer para que la función siguiente sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x\le 1 \\ 3-ax^2 & si \quad x>1 \end{cases}$$

R. $a = 1$

12. Dada la función

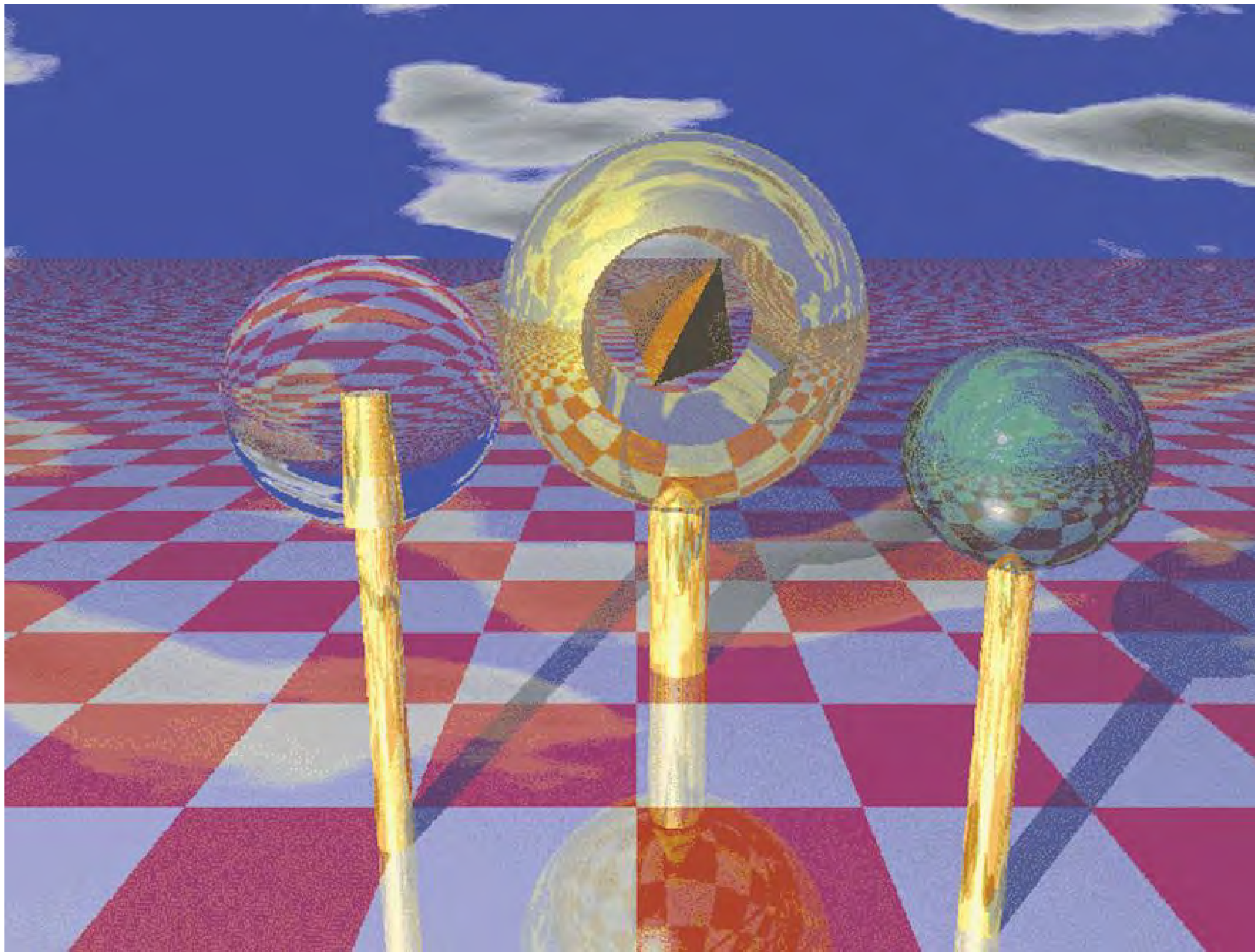
$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & si \quad x<0 \\ ax+b & si \quad 0\le x<1 \\ 2 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$ hallar a y

R. $a = 3$, $b = -1$

13. Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en $x = 0$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{kx^4-3x^3}{7x^5+3x^3} & si \quad x\ne 0 \\ -1 & si \quad x=1 \end{cases}$$

R. La función es continua para cualquier valor de k



Los logaritmos son una herramienta de cálculo imprescindible y por ello la mayoría de libros científicos y técnicos incorporan apéndices donde aparecen tablas de logaritmos.

CAPÍTULO V

LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Los logaritmos fueron divulgados en 1614 por el matemático escocés John Neper, que determinó sus propiedades a partir de la relación existente entre las progresiones aritméticas y geométricas. Gracias a este potente instrumento de cálculo Newton y Kepler pudieron establecer sus leyes, que supusieron una auténtica revolución en el campo de la Astronomía.

El uso científico y técnico de los logaritmos reviste una gran importancia. Muchas ecuaciones deben representarse sobre papel logarítmico ya que de esta manera se facilita mucho su representación y análisis.

La función $x \to \log x$ recibe el nombre de función logarítmica, que es continua y diferenciable, y su función derivada es $x \to 1/x$.

DEFINICIÓN

El logaritmo de un número respecto a otro llamado base es el exponente a que hay que elevar la base para obtener dicho número.

Así, por ejemplo, si tenemos que

$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$

diremos que siendo 2 la base en todos los casos, el logaritmo de 4 es 2 puesto que 2 es el exponente a que se debe elevar la base 2 para obtener el número 4. Análogamente, en base 2 el logaritmo de 8 es 3, el logaritmo de 32 es 5 y el logaritmo de 64 es 6.

Para expresar estos hechos haciendo uso de la notación logaritmica diremos que:

$\log_2 4 = 2$
$\log_2 8 = 3$
$\log_2 32 = 5$
$\log_2 64 = 6$

En general, si se cumple que $x^y = z$, tendremos que $y = \log_x z$. Es decir, que la operación de extraer logaritmos, también llamada logaritmación, es una operación inversa de la potenciación puesto que mientras en la potenciación se trataba de encontrar un número llamado potencia conocidos la base y el exponente, en la logaritmación se trata de hallar el exponente conocida la base y la potencia.

De las consideraciones anteriores se dedude fácilmente que cualquier número positivo puede utilizarse como base de un sistema de logaritmos. Por consiguiente, el número de sistemas de logaritmación es infinito.

No obstante, en la práctica son dos los sistemas de logaritmación más utilizados, a saber, el sistema de logaritmos vulgares cuya base es 10 y fueron descubiertos por el matemático inglés Henry Briggs y el sistema de logaritmos naturales o neperianos descubiertos por el matemático escocés John Neper, cuya base es el número irracional e = 2,7182818284. . .

Cuando se emplean logaritmos vulgares se acostumbra omitir el subíndice 10. Así, por ejemplo, tendremos que si

$10^0 = 1$	escribiremos $\log_{10} 1$	= 0 o bien log 1	= 0
$10^1 = 10$	escribiremos $\log_{10} 10$	= 1 o bien log 10	= 1
$10^2 = 100$	escribiremos $\log_{10} 100$	= 2 o bien log 100	= 2
$10^3 = 1.000$	escribiremos $\log_{10} 1.000$	= 3 o bien log 1.000	= 3
$10^4 = 10.000$	escribiremos $\log_{10} 10.000$	= 4 o bien log 10.000	= 4

Obviamente, para que en una base cualquiera el logaritmo de un número natural sea otro número natural es condición necesaria que el número dado sea una potencia exacta de la base. Así, por ejemplo, tendremos que:

$\log_5 25 = 2$ puesto que $5^2 = 25$
$\log_3 27 = 3$ puesto que $3^3 = 27$
$\log_4 16 = 2$ puesto que $4^2 = 16$

Ahora bien, $\log_4 5$ no será un número natural puesto que 5 no es una potencia exacta de 4. De modo similar log 7 no es tampoco un número natural puesto que 7 no es potencia exacta de 10.

LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Ya conocemos la gráfica de la función $y = 2^x$. La gráfica de su función inversa será, como ya sabemos, simétrica de la anterior respecto de la recta $y = x$, bisectriz del primer y tercer cuadrante.

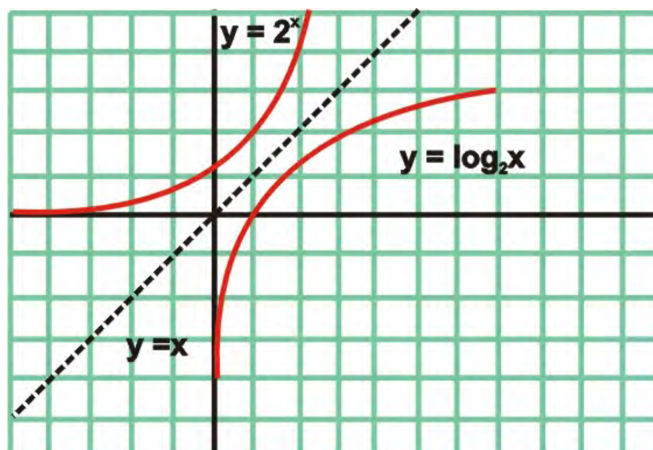


Figura 64

Esta nueva función se llama **función logaritmica** de base 2: $y = \log_2 x$

Algunos de sus valores figuran en la tabla adjunta.

TABLAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS NATURALES

Grados		Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
0º	0’	.0000		.0000		1.000	1.0000	90º	0’
	10’	029	343.8	029	343.8	000	000		50’
	20’	058	171.9	058	171.9	000	000		40’
	30’	.0087	114.6	.0087	114.6	1.000	1.0000		30’
	40’	116	85.95	116	85.94	000	0.9999		20’
	50’	145	68.76	145	68.75	000	999		10’
1º	0’	.0175	57.30	.0175	57.29	1.000	.9998	89º	0’
	10’	204	49.11	204	49.10	000	998		50’
	20’	233	42.98	233	42.96	000	997		40’
	30’	.0262	38.20	.0262	38.19	1.000	.9997		30’
	40’	291	34.38	291	34.37	000	996		20’
	50’	320	31.26	320	31.24	001	995		10’
2º	0’	.0349	28.65	.0349	28.64	1.001	.9994	88º	0’
	10’	378	26.45	378	26.43	001	993		50’
	20’	407	24.56	407	24.54	001	992		40’
	30’	.0436	22.93	.0437	22.90	1.001	.9990		30’
	40’	465	21.49	466	21.47	001	989		20’
	50’	494	20.23	495	20.21	001	988		10’
3º	0’	.0523	19.11	.0524	19.08	1.001	.9986	87º	0’
	10’	552	18.10	553	18.07	002	985		50’
	20’	581	17.20	582	17.17	002	983		40’
	30’	.0610	16.38	.0612	16.35	1.002	.9981		30’
	40’	640	15.64	641	15.60	002	980		20’
	50’	669	14.96	670	14.92	002	978		10’
4º	0’	.0698	14.34	.0699	14.30	1.002	.9976	86º	0’
	10’	727	13.76	729	13.73	003	974		50’
	20’	756	13.23	758	13.20	003	971		40’
	30’	.0785	12.75	.0787	12.71	1.003	.9969		30’
	40’	814	12.29	816	12.25	003	967		20’
	50’	843	11.87	846	11.83	004	964		10’
5º	0’	.0872	11.47	.0875	11.43	1.004	.9962	85º	0’
	10’	901	11.10	904	11.06	004	959		50’
	20’	929	10.76	934	10.71	004	957		40’
	30’	.0958	10.43	.0963	10.39	1.005	.9954		30’
	40’	.9987	10.13	.0992	10.08	005	951		20’
	50’	.1016	9.839	.1022	9.788	005	948		10’
6º	0’	.1045	9.567	.1051	9.514	1.006	.9945	84º	0’
	10’	074	9.309	080	9.255	006	942		50’
	20’	103	9.065	110	9.010	006	939		40’
	30’	.1132	8.834	.1139	8.777	1.006	.9936		30’
	40’	161	8.614	169	8.556	007	932		20’
	50’	190	8.405	198	8.345	007	929		10’
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados	

EJERCICIOS

Resuelve y calcula el área de los siguientes triángulos rectángulos, empleando logaritmos.

1. Para medir la altura de una torre *AB*, un ingeniero se sitúa en un punto *C* de manera que *BC* = 60 m y ∠ *ACB* = 58°10'. ¿Cuál es esa altura?
R. 96.64 m

2. Un árbol de 12 m de altura proyecta una sombra de 20 m sobre un terreno horizontal. Hallar el ángulo de elevación del sol.
R. 30°50'.

3. Desde la parte superior de un faro de 60 m de altura sobre el nivel del mar se observa un buque con un ángulo de depresión de 28°30'. ¿Cuál es la distancia del buque al faro?
R. 110.50 m

4. Un avión vuela rumbo al este a una velocidad de 300 km/h. Se encuentra con un viento que viene del Norte, con una velocidad de 60 km/h. Hallar la velocidad resultante y el rumbo verdadero del avión.
R. 305.8 km/h; *S* 78°50'*E*.

5. Para medir la anchura *AB* de un río, un agrimensor escoge un punto *C* tal que *BC* = 30 m y ∠*BC A* = 62° y ∠*ABC* = 90°. Calcular el ancho del río.
R. 56.42 m

6. Un túnel de 300 m de largo tiene una inclinación de 15° respecto de la horizontal. ¿Cuál es la diferencia de nivel en ambos extremos?
R. 77.64 m

7. Se hace un disparo con un cañón que forma con la horizontal un ángulo de 40°. La velocidad de la bala es de 950 m/s. Hallar las componentes vertical y horizontal.
R. Vert. = 727.70 m/s;
Horiz. = 610.66 m/s.

8. En un tramo de carretera se asciende 50 m al recorrer 5 km. ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?
R. 34'.

9. Desde el último piso de un edificio de 5 m de altura se observan dos autos estacionados en línea recta, en el mismo plano del observador. Los ángulos de depresión son: 38° y 21°. Hallar la distancia entre ellos.
R. 191.7 m.

10. Una loma tiene una altura de 1200 m. Si desde un punto situado en el suelo se observa la cúspide con un ángulo de elevación de 23°40', ¿a qué distancia está dicho punto?
R. 273.80 m

11. *b* = 22, *c* = 45 — **R.** *a* = 50.08, ∠ *B* = 26°4', ∠ *C* = 63°56', Área = 495

12. *a* = 4, ∠ *B* = 62°30' — **R.** *b* = 3.55, ∠ *C* = 27°30', *c* = 1.84, Área = 3.27

13. *b* = 30, ∠ *C* = 40°30' — **R.** *c* = 25.62, ∠ *B* = 49°30', *a* = 39.45, Área = 384.30

14. *a* = 43.5, ∠ *B* = 38° — **R.** *c* = 34.28, ∠ *C* = 52°, *b* = 26.78, Área = 459.01

15. *b* = 240, ∠ *B* = 62° — **R.** ∠ *C* = 28°, *c* = 127.64, *a* = 271.80, Área = 15320

16. *c* = 45, ∠ *B* = 65°50' — **R.** *b* = 100.29, ∠ *C* = 24°10', *a* = 109.75, Área = 2256

17. *c* = 60, ∠ *C* = 28°30' — **R.** *b* = 110.51, *a* = 125.74, Área = 3315.30

Resuelve estos triángulos, empleando logaritmos.

18. *a* = 41, *b* = 19.50, *c* = 32.48 — **R.** ∠ *A* = 101°10', ∠ *B* = 27°50', ∠ *C* = 51°

19. *a* = 10.4, *b* = 9.5, ∠ *c* = 45°52' — **R.** *c* = 7.8, ∠ *A* = 73°10', ∠ *B* = 60°58'

20. *a* = 45, ∠ *A* = 74°54', ∠ *B* = 43°21' — **R.** *b* = 32, *c* = 41.06, ∠ *C* = 61°45'

21. *a* = 37.40, *b* = 38.25, *c* = 25 — **R.** ∠ *A* = 68°52', ∠ *B* = 72°34', ∠ *C* = 38°34'

22. *b* = 18, *c* = 31, ∠ *A* = 53°45' — **R.** *a* = 25, ∠ *B* = 35°30', ∠ *C* = 90°45'

23. *b* = 38.25, ∠ *B* = 72°33', ∠ *C* = 38°34' — **R.** *a* = 37.40, ∠ *A* = 68°53', *c* = 25

24. *a* = 5.3, *b* = 10.9, *c* = 13 — **R.** ∠ *A* = 23°40', ∠ *B* = 55°33', ∠ *C* = 100°47'

25. *a* = 15.2, *b* = 40, *c* = 30 — **R.** ∠ *A* = 19°, ∠ *B* = 120°59', ∠ *C* = 40°1'

26. *a* = 731, *b* = 652, ∠ *C* = 70°25' — **R.** *c* = 800, ∠ *A* = 59°25', ∠ *B* = 50°10'

27. *a* = 42, *b* = 50, *c* = 53.24 — **R.** ∠ *A* = 47°50', ∠ *B* = 62°2', ∠ *C* = 70°8'

28. *a* = 25, *b* = 31.5, *c* = 29.3 — **R.** ∠ *A* = 48°25', ∠ *B* = 70°32', ∠ *C* = 61°3'

29. *a* = 15.19, ∠ *B* = 120°59', ∠ *C* = 40°1' — **R.** *b* = 40, *c* = 30, ∠ *A* = 19°

30. *a* = 17, *b* = 20, *c* = 14 — **R.** ∠ *A* = 56°45', ∠ *B* = 79°43', ∠ *C* = 43°32'

TABLA DE LOGARITMOS

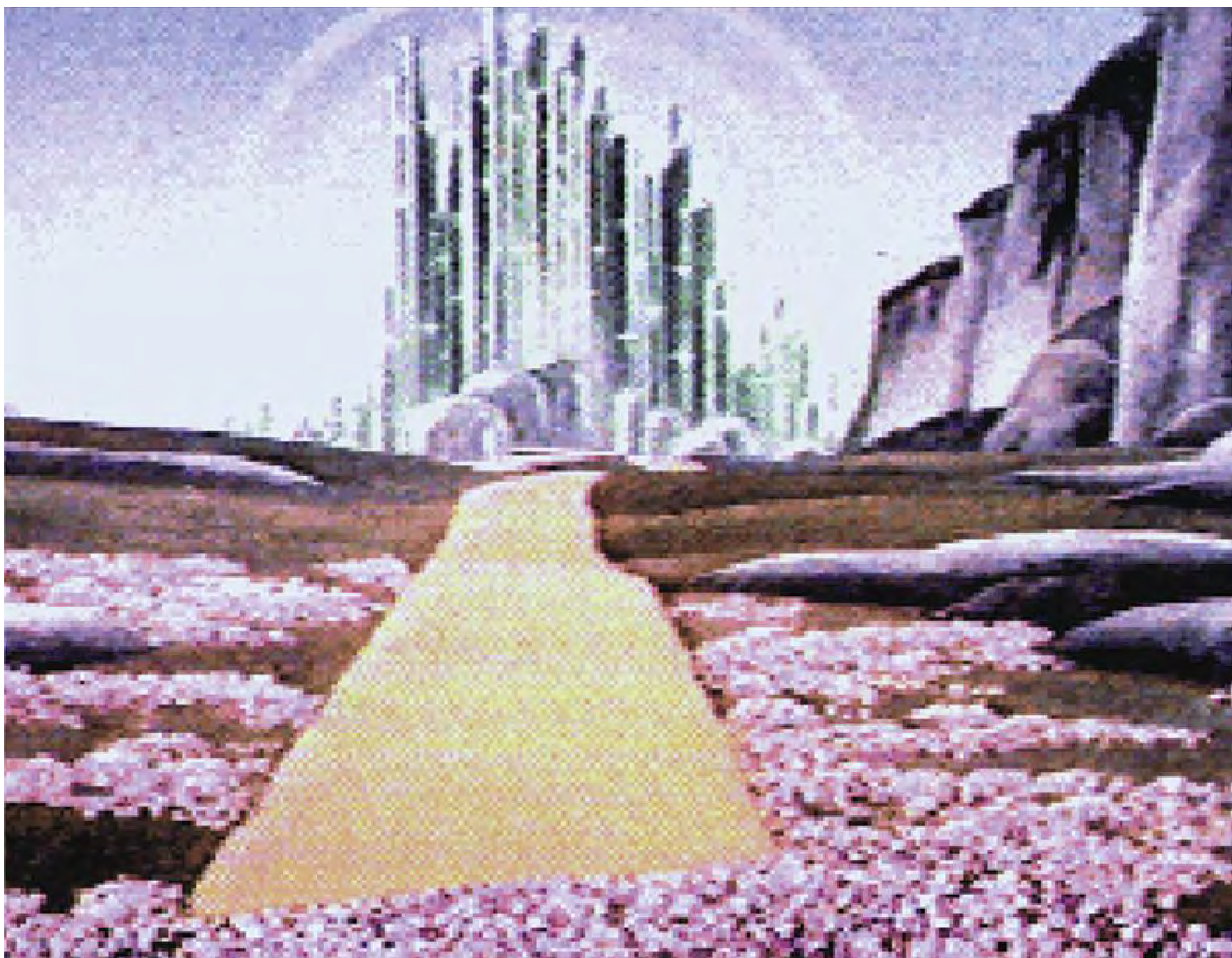
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0972	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5859
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7216	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

PÁGINA DE RESPUESTAS INTENCIONALMENTE EN BLANCO

Cálculo Integral



PÁGINA
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO



El cálculo integral permite diseñar modernas construcciones en el ámbito de las telecomunicaciones, además mediante la utilización de éste es posible calcular volúmenes.

CAPÍTULO I

LA INTEGRAL INDEFINIDA

Cauchy, a principios del siglo XIX; Riemann, a mediados del mismo siglo; y Lebesgue, a principios del siglo XX, han sido los matemáticos a cuyos esfuerzos se deben los sucesivos refinamientos que ha tenido la teoría de las integrales. Ya en este siglo, surge **la teoría de la medida** como continuación natural del cálculo integral. Una de sus creaciones es la medida de Hausdorff, que mide y estudia los conjuntos de medida cero bajo la integral de Lebesgue.

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

El concepto de primitiva es el recíproco al de derivada.
Dada una función g, hallar su función derivada g'.

Obviamente, el problema inverso sería éste: Suponiendo que nos dan g', hallar la función g. Pero, como distintas funciones pueden tener la misma derivada, éste es un problema que no tiene solución única, de modo que lo enunciaremos de forma más precisa así: Suponiendo que se conoce una función f, se trata de hallar otra función F que cumpla la condición $F' = f$.

Una función $F(x)$ se dice que es **primitiva** de una función $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo

1. $F(x) = x^3$ es una primitiva de $f(x) = 3x^2$, dado que $F'(x = 3x^2 = f(x)$.

2. $F(x)$ = sen x es una primitiva de $f(x)$ = cos x, pues $F'(x)$ = cos $x = f(x)$.

• Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, también lo es $F(x) + k$, siendo k cualquier número real.

Así ocurre, pues: $(F(x) + k)' = F'(x) + 0 = f(x)$.

Por ejemplo, las funciones, . . . son todas primitivas de la función $3x^2$.

INTEGRAL INDEFINIDA

Una función $f(x)$ puede tener infinitas primitivas que se diferencian unas de otras en una constante.

El conjunto de todas las primitivas de $f(x)$ se llama **integral indefinida** de $f(x)$.

Se representa por: $\int f(x)\,dx$

Por tanto, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se tiene que:

$\int f(x)\,dx = F(x) + k$ donde k la llamada constante de integración

Ejemplos

1. $\int 3x^2 dx = x^3 + k$

2. $\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + k$

El cálculo de primitivas, además de un simple juego de ingenio es un ejercicio de importancia capital por las múltiples aplicaciones que presenta.

INTEGRALES INMEDIATAS

Los siguientes resultados son consecuencia inmediata de las correspondientes propiedades de las derivadas. Se les llama **integrales inmediatas.**

$\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + k$ $\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + k$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k\,(n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + k$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + k \qquad \int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = \int (1+\cot^2 x)dx = -\cot x + k$$

$$\int e^2\,dx = e^x + k \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + k$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a'}{\ln a} + k \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen}\,x + k$$

$$\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + k$$

Estos resultados, dados sin más, dan poco juego, se acaban en sí mismos.

Necesitamos nuevas reglas que nos permitan enriquecer la gama de funciones que sabemos integrar

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int (f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2. $\int a\,f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$

Estas propiedades, aplicadas a las funciones anteriores, permiten operarlas de diversas formas, dando lugar a una enorme variedad de funciones que, con sólo estas reglas, podemos integrar.

Ejemplos

- $\int dx = x + k$
- $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + k$
- $\int \dfrac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} + k = \dfrac{-1}{x} + k$
- $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$
- $\int \sqrt[4]{x^3}dx = \int x^{\frac{3}{4}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + k = \dfrac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + k = \dfrac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + k$
- $\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^2 \bullet x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{2+\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{5}{2}}\,dx =$

  $\dfrac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}k = \dfrac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + k = \dfrac{2}{7}\sqrt{x^7} + k$
- $\int \dfrac{2^x}{5^x}dx = \int \left(\dfrac{2}{5}\right)^x dx = \dfrac{1}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}\left(\dfrac{2}{5}\right)^k + k$

MÉTODOS GENERALES DE INTEGRACIÓN

En general, cada función se integra de una forma particular. Sin embargo, las primitivas de muchas funciones se pueden calcular, mediante transformaciones adecuadas, gracias a las integrales inmediatas.

MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN

A veces, para calcular la integral de una función *f*, conviene descomponer *f* (*x*) en suma de otras funciones que sepamos integrar; si lo logramos, hallamos la integral integrando cada sumando. El siguiente ejemplo es una muestra de ello.

• $\int (x^2 - x^{-1} + 3e^x)\, dx = \int x^2\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx + 3\int e^x\, dx =$

$$\frac{x^3}{3} - \ln|x| + 3e^x + k$$

Otras veces, la descomposición se consigue expresando una fracción como suma de fracciones y simplificando cada una de éstas. Por ejemplo:

• $\int \frac{2x-5+4\sqrt[3]{x^2}}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{2x}{x^2} - \frac{5}{x^2} + 4\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2}\right) dx =$

$\int \left(\frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} + 4x^{-\frac{4}{3}}\right) dx = 2\int \frac{1}{x}\, dx - 5\int x^{-2}\, dx + 4$

$\int x^{-\frac{4}{3}}\, dx = 2\ln|x| - 5\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{4x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + k =$

$2\ln|x| + \frac{5}{x} - \frac{12}{\sqrt[3]{x}} + k$

• $\int \cos 5x\, dx = \frac{1}{5}\text{sen } 5x + k$

• $\int e^{3x-5}\, dx = \frac{1}{3} e^{3x-5} + k$

• $\int \frac{1}{4x-1} dx = \frac{1}{4} \ln|4x-1| + k$

$$\int \frac{3x^2+\cos x+2e^{2x}}{x^3+\text{sen}x+e^{2x}} dx = \ln\left|x^3+\text{sen}\,x+e^{2x}\right| + k$$

pues es inmediato comprobar que el numerador es la derivada del denominador.

En general $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + k$ resultado que se usa con mucha frecuencia.

Por ejemplo:

• $\int \frac{x}{x^{2+1}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^{2+1}} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k$

Otras veces, hace falta "echarle imaginación". Como por ejemplo en las siguientes:

• $\int \tan^2 x\, dx = \int (1 + \tan^2 x - 1)\, dx =$

$\int (1 + \tan^2 x)\, dx - \int 1\, dx = \tan x - x + k$

• $\int \frac{1}{\text{sen}^2 x \bullet \cos^2 x} dx = \int \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x \bullet \cos^2 x}\, 1\, dx =$

$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{sen}^2 x}\right) dx = \tan x - \text{cotan}\, x + k$

MÉTODO DEL CAMBIO DE VARIABLE

A veces, una integral de apariencia difícil se reduce a otra conocida si se cambia adecuadamente la variable de integración. Cuando se hace eso, *d x* se suele calcular derivando la relación entre *x* y la nueva variable. Al final, debe darse el resultado en términos de la primera variable (*x*).

Ejemplos

• $\int \sqrt{5x+3}\, dx$ Podemos aprovechar el cambio para que desaparezca la raíz del siguiente modo:

$5x + 3 = t^2 \rightarrow 5\, dx = 2t\, dt \rightarrow dx = \frac{2}{5} t\, dt$

$\int \sqrt{5x+3}\, dx = \int \sqrt{t^2} \bullet \frac{2}{5} t\,dt = \frac{2}{5} \int t \bullet t\,dt =$

$\frac{2}{5} = \int t^2 dt = \frac{2}{5}\frac{t^3}{3} + k = \frac{2}{15} t^3 + k \underset{t=\sqrt{5x+3}}{=}$

$= \frac{2}{15}(\sqrt{5x+3})^3 + k$

Hay integrales en las que aparecen una función *f* (*x*) y su derivada *f* '(*x*). En ellas conviene efectuar el cambio *f* (*x*) = *t* que al diferenciar produce *f* '(*x*)*d x* = *d t* . Los siguientes ejemplos son una muestra de ello.

• $\int \text{sen}\, x \cos x\, dx$ Efectuamos el cambio sen *x* = *t* → cos *x d x* = *d t* y, por tanto:

$\int \text{sen}\, x \cos x\, dx = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + k = \frac{\text{sen}^2 x}{2} + k$

• $\int \cos(x^2 + 1) x\, dx$ En esta integral aparece una función (x^2 + 1) y, prácticamente, se deriva (*x*). Por ello hacemos el cambio:

$x^2+1=t \to 2xdx=dt \to xdx=\frac{1}{2}dt$

$\int \cos(x^2+1)xdx=\int \cos t \bullet \frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int \cos t\, dt=$

$\frac{1}{2}\text{sen}\, t+k=\frac{1}{2}\text{sen}(x^2+1)+k$

En otras integrales el cambio no resulta tan evidente. Por ejemplo, una muy clásica es:

$\bullet\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ Efectuamos el cambio: x = at $\to$ dx = adt

con lo cual:

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{adt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}}=\int \frac{adt}{\sqrt{a^2(1-t^2)}}=\int \frac{adt}{a\sqrt{1-t^2}}$

$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\text{arcsen}\, t+k=\text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)+k$

$\int \frac{x}{x^4+1}dx$ Cambiamos $x^2=t \to 2xdx=dt \to xdx=\frac{1}{2}dt$

$\int \frac{x}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\text{arctg}\, t+k=\frac{1}{2}\text{arctg}\, x^2+k$

Exponemos a continuación un conjunto de integrales de uso frecuente cuyos resultados se justifican porque se reducen a las inmediatas ya estudiadas, efectuando el cambio:

f (x) = t $\to$ f ’(x) dx = dt

$\bullet\int [f(x)]^n \bullet f'(x)dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+k\ (n\neq -1)$

$\bullet\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+k$

$\bullet\int e^{f(x)} \bullet f'(x)\, dx=e^{f(x)}+k$

$\bullet\int a^{f(x)} \bullet f'(x)\, dx=\frac{a^{f(x)}}{\ln a}+k$

$\bullet\int \text{sen}\, f(x) \bullet f'(x)dx=-\cos f(x)+k$

$\bullet\int \cos f(x) \bullet f'(x)dx=\text{sen} f(x)+k$

$\bullet\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx=\tan\, f(x)+k$

$\bullet\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)}dx=-\cot x+k$

$\bullet\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}dx=\text{arcsen} f(x)+k$

$\bullet\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx=\arctan x+k$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean *u* (*x*) y *v* (*x*) dos funciones derivables. Diferenciando la función *u* • *v* se obtiene:

$$d(u \bullet v) = vdu + udv$$

de donde

$$udv = d(u \bullet v) - vdu$$

e integrando miembro a miembro: $\int udv = u \bullet v - \int vdu$

que es la fórmula de integración por partes.

Ejemplos

$\int x\cos x dx$ tomando $\begin{cases} u=x & \to \\ dv=\cos x dx \end{cases} \begin{cases} du=dx \\ v=\int \cos x dx=\text{sen}\, x \end{cases}$

$\int x\cos xdx=x\,\text{sen}\, x-\int \text{sen}\, xdx=x\,\text{sen}\, x+\cos x+k$

$\bullet\int x\, e^x dx$ tomamos $\begin{cases} u=x & \to \\ dv=e^2dx \end{cases} \begin{cases} du=dx \\ v=\int e^2dx=e^2 \end{cases}$

y resulta:

$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + k$

$\bullet\int x^2 \ln x dx$ tomamos $\begin{cases} u=\ln & \to \\ dv=x^2dx \end{cases} \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3} \end{cases}$

y queda:

$\int x^2\ln xdx=\frac{x^3}{3}\bullet \ln x-\int \frac{x^3}{3}\bullet\frac{1}{x}dx=$

$\frac{x^3}{3}\bullet\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\bullet\ln x-\frac{x^3}{9}+k$

Notas

1. Como norma general se debe tener en cuenta que todas la integrales de las formas:

$$\int p(x)\,\text{sen}\,bx\,dx\ ;\ \int p(x)\cos bx\,dx\ ;$$

$$\int p(x)e^{bx}dx\ ;\ \int p(x)a^{bx}dx$$

donde $p(x)$ es un polinomio y a y b son números reales, se integran tomando como función $u = p(x)$ y reiterando el pro-ceso si el grado de $p(x)$ es mayor que 1.

Análogamente, las integrales de la forma:

$$\int p(x)\ln x dx$$

se calculan haciendo $u = \ln x$.

2. En el cálculo de algunas integrales, al reiterar la integración por partes se vuelve a obtener la integral de partida, que se despeja.

Ejemplo

Calcular $I = \int e^x \text{sen}\,x\,dx$

Haciendo $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos xdx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \int senxdx = -\cos x \end{cases}$

se obtiene:

$$I = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

integral esta última que de nuevo calculamos por partes haciendo:

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos xdx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \int \cos xdx = senx \end{cases}$$

de donde:

$\int e^x \cos x\,dx = e^x\,\text{sen}\,x - \int e^x\,\text{sen}\,x\,dx$ y, volviendo a la integral que buscamos:

$$I = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx =$$

$$- e^x\cos x + e^x\,\text{sen}\,x - \int e^x\,\text{sen}\,x\,dx$$

o bien $I = - e^x\cos x + e^x\,\text{sen}\,x - I$ fórmula de la que po-demos despejar I.

$$2I = - e^x \cos^x + e^x\,\text{sen}\,x \rightarrow I \frac{-e^x\cos x + e^x senx}{2} + k =$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Nuestro propósito es ahora calcular integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios.

Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $Q(x)$, se efectúa la división y se puede escribir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{siendo grado } R(x) < \text{grado } Q(x)$$

y resulta: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$

en la que, al ser $C(x)$ un polinomio, su integral es inmediata y el problema queda reducido a determinar $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ siendo grado $R(x) <$ grado $Q(x)$.

Ejemplo

Para empezar a calcular $\int \frac{x^3}{x^2-2x+2}dx$, dado que el grado de x^3 es mayor que el de $x^2 - 2x + 2$ empezamos efectuando la división.

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2 - 2x + 2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2 - 2x} & x+2 \\ \quad -2x^2 - 2x & \\ \quad \underline{-2x^2 + 4x - 4} & \\ \qquad 2x - 4 & \end{array}$$

luego $\int \frac{x^3}{x^2-2x+2} = x + 2 + \frac{2x-4}{x^2-2x+2}$

$$\text{y}: \int \frac{x^3}{x^2-2x+2}dx = \int (x+2)dx + \int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}dx =$$

$$\frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}dx$$

El siguiente paso a realizar es calcular las raíces del polinomio denominador $Q(x)$. Es decir, resolver la ecuación $Q(x) = 0$. Se pueden presentar los siguientes casos:

1. Que las raíces sean todas reales y simples.

Si las raíces del polinomio $Q(x)$ son $r_1, r_2, \ldots, r_n$ todas reales y distintas, se puede descomponer:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_2}{x-r_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-r_n}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son números que hay que determinar.

APLICACIONES DE FUNCIONES RACIONALES

Calcular $\int \frac{dx}{x^2-4}$

Solución

Las raíces del polinomio $x^2 - 4$ son las soluciones de la ecuación $x^2 - 4 = 0$, es decir $x = 2$ y $x = -2$. Descomponiendo en fracciones simples obtenemos:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-2} \rightarrow A(x+2) + B(x-2) = 1$$

Dando a x los valores 2 y - 2 obtenemos:

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ -4B = 1 \end{cases} \rightarrow A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$$

de donde $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1/4}{x-2} - \frac{1/4}{x+2}$ y por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$\frac{1}{4} In|x-2| - \frac{1}{4} In|x+2| + k$$

2. Que las raíces sean todas reales y algunas sean múltiples.

En tal caso, para cada raíz real múltiple r de orden p se es-criben p fracciones así:

$$\frac{B_1}{x-r} + \frac{B_2}{(x-r)^2} + \frac{B_3}{(x-r)^3} + \ldots + \frac{B_p}{(x-r)^p}$$

donde $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_p$ son constantes que hemos de calcular.

Ejemplo

Calcular $\int \frac{2x^3 - 8x^2 + 11x - 11}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2} dx$

Solución

Descomponiendo mediante la regla de Ruffini el denominador $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ obtenemos las raíces $x = 1$ (triple) y $x = -2$ (simple). Por tanto, podemos escribir:

$$\frac{2x^3 - 8x^2 + 11x - 11}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+2}$$ y por tanto

$A(x-1)^2(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x+2) + D(x-1)^3 = 2x^3 - 8x^2 + 11x - 11$

Dando a x los valores - 2, - 1, 0 y 1 e igualando se tiene:

$$\begin{cases} -27D = 81 \\ 4A - 2B + C - 8D = 32 \\ 2A - 2B + C - D = -11 \\ 3C = -6 \end{cases}$$

sistema con solución: $A = -1$, $B = 1$, $C = -2$ y $D = 3$.

De aquí deducimos:

$$\int \frac{2x^3 - 8x^2 + 11x - 11}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2} dx = -\int \frac{dx}{x-1} + \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$-2\int \frac{dx}{(x-1)^3} + 3\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= -In|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + 3In|x+2| + k$$

3. Que existan raíces complejas

Si el denominador $Q(x)$ admite una raíz compleja simple $r = a + bi$, también admite la raíz conjugada $r = a - bi$. Para las dos raíces complejas se tiene el término:

$$\frac{Mx + N}{(x-a)^2 + b^2}$$

donde M y N son valores a determinar.

Ejemplo

Calcular $\int \frac{3x^2 + 23}{x^3 - x^2 + 8x + 10}$

Calculamos las raíces del denominador $x^3 - x^2 + 8x + 10$ mediante la regla de Ruffini:

	1	-1	8	10
-1	↓	-1	2	-10
	1	-2	10	0

que nos proporciona la raíz real $x = -1$. Las restantes raíces son las soluciones de la ecuación

$x^2 - 2x + 10 = 0$.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6\sqrt{-1}}{2} =$$

$= \frac{2 \pm 6i}{2} = \begin{cases} 1+3i \\ 1-3i \end{cases}$ = 1 + 3 i de donde:

$$\frac{3x^2+23}{x^3-x^2+8x+10} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{(x-1)^2+3^2}$$

De aquí seguimos:

$A[(x-1)^2] + (Mx+N)(x+1) = 3x^2 + 23$

y, dando a x los valores – 1, 0 y 1 e igualando obtenemos:

$$\begin{cases} 13A = 26 \\ 10A + N = 23 \\ 9A + 2M + 2N = 26 \end{cases}$$

sistema cuya solución es: A = 2, M = 1 y N = 3. Por tanto, la integral se calcula:

$$\int \frac{3x^2+23}{x^3-x^2+8+10}dx = 2\int \frac{dx}{x+1} + \frac{x+3}{(x-1)^2+3^2}dx =$$

$= 2 \ln |x+1| + I$

denominador tiene raíces complejas $r = a \pm bi$ se resuelven utilizando el cambio de variable:

$$x = a + bt$$

En nuestro ejemplo: $x = 1 + 3t \to dx = 3dt$ con lo que:

$$I = \int \frac{x+3}{(x-1)^2+3^2} dx = \int \frac{1+3t+3}{9t^2+9} \bullet 3\,dt =$$

$$\frac{3}{9}\int \frac{4+3t}{t^2+1}dt = \frac{1}{3}\int \frac{4dt}{t^2+1} + \frac{1}{3}\int \frac{3t}{t^2+1}dt$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}dt =$$

$$= \frac{4}{3} \text{ arctg } t + \frac{1}{2} \ln (t^2+1) + k = \frac{4}{3} \text{ arctg } \left(\frac{x-1}{3}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + 1\right] + k = \frac{4}{3} \text{ arctg } \left(\frac{x-1}{3}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \ln (x^2 - 2x + 10) + C$$

y por tanto la integral original queda como:

Calculamos separadamente la integral I= $\int \frac{x+3}{(x+1)^2+3^2}dx$ = $\int \frac{3x^2+23}{x^3-x^2+8x+10}dx = 2\ln|x+1|$

$+ \frac{4}{3} \text{ arctg } \left(\frac{x-1}{3}\right) + \frac{1}{2}\ln (x^2 - 2x + 10) + C$

Las integrales del tipo $\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$ d x que aparecen inevitablemente en la resolución de integrales racionales cuyo

EJERCICIOS

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 5x^7 dx$ **R.** $\frac{5x^8}{8} + k$

b) $\int 7x^9 dx$ **R.** $\frac{7x^{10}}{10} + k$

c) $\int 3x^2 \bullet x^3 dx$ **R.** $\frac{3x^6}{6} + k$

d) $\int 9x^6 \bullet x^2 dx$ **R.** $\frac{9x^5}{5} + k$

e) $\int 4(x^2)^3 dx$ **R.** $\frac{4x^7}{7}$+k

2. Calcula las siguientes integrales desarrollando los integrandos:

a) $\int (x+1)^2 dx$

R. $\frac{x^3}{3} + x^2 + x + k$

b) $\int (x-9)^2 dx$

R. $\frac{x^3}{3} - x^2 + x + k$

c) $\int x(x-1)^2 dx$

R. $\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + k$

d) $\int x^6(x^2+1) dx$

R. $\frac{x^9}{9} + \frac{x^7}{7} + k$

e) $\int (x+1)^3 dx$

R. $\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{3x^2}{2} + x + k$

3. Calcula las siguientes integrales potenciales simples cuyo exponente es un número negativo:

a) $\int x^{-7} dx$

R. $-\frac{x^{-6}}{6} + k$

b) $\int x^{-9} dx$

R. $-\frac{x^{-6}}{8} + k$

c) $\int x^2 \bullet x^{-3} dx$

R. $\angle|x| + k$

d) $\int x^6 \bullet x^{-2} dx$

R. $\frac{x^9}{9}$+k

e) $\int (x^{-2})^3 dx$

R. $-\frac{x^{-5}}{5}+k$

f) $\int (x^{-8})^{1/2} dx$

R. $-\frac{x^{-3}}{3}+k$

g) $\int 1\, dx$

R. $\frac{-1}{x}+k$

4. Calcula las siguientes integrales potenciales simples cuyos integrandos están escritos en forma radical. Pasa primero a forma potencial:

a) $\int \sqrt{x}dx$

R. $\frac{2x}{3}+k$

b) $\int \sqrt[3]{x}dx$

R. $\frac{3x^{4/3}}{4}+k$

c) $\int x\sqrt{x}dx$

R. $\frac{2x^{5/2}}{5}+k$

d) $\int \sqrt{x}\bullet\sqrt[3]{x}dx$

R. $\frac{6x^{11/6}}{11}+k$

e) $\int \sqrt[3]{x^2}dx$

R. $\frac{3x^{5/3}}{5}+k$

f) $\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx$

R. $2\sqrt{x}+k$

g) $\int \frac{x}{\sqrt{x}}dx$

R. $\frac{2x^{3/2}}{3}+k$

5. Calcula las siguientes funciones potenciales compuestas. Piensa quién es *f* y *f* ':

a) $\int (x + 1)2\, dx$

R. $\frac{(x+1)^3}{3}+k$

b) $\int (7x + 5)^2\, dx$

R. $\frac{(7x+5)^3}{21}+k$

c) $\int (x^2 + 3)\bullet x\, dx$

R. $\frac{(x^3+1)^2}{2}+k$

d) $\int x^2\bullet (x^3 + 2)\, dx$

R. $\frac{(x^2+3)^2}{2}+k$

e) $\int (x + 1)\bullet (x^2 + 2x + 5)^6\, dx$

R. $\frac{(x^2+2x+5)^7}{14}+k$

f) $\int (16x + 1)\bullet (8x^2 + x - 5)\, dx$

R. $\frac{(8^2+x-5)^2}{2}+k$

6. Los integrandos son funciones racionales; antes de integrar pásalos a forma potencial:

a) $\int \frac{1}{(2x+1)^2}dx$

R. $-\frac{1}{2\,(2x+1)}+k$

b) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$

R. $-\frac{1}{x^2+x+1}+k$

c) $\int \frac{1}{x^2+2x+1}dx$

R. $-\frac{1}{x+1}+k$

d) $\int \frac{1}{x^3+3x^2+3x+1}dx$

R. $-\frac{1}{2(x+1)^2}+k$

e) $\int \frac{1}{(2x+1)^3}dx$

R. $-\frac{1}{4(2x+1)^2}+k$

f) $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^7}dx$

R. $-\frac{1}{18(x^3+1)^6}$

7. En las siguientes integrales aparecen radicales; exprésalos en forma potencial antes de integrar:

a) $\int \sqrt{1+x}dx$

R. $\frac{2(1+x)^{\frac{1}{2}}}{3}+k$

b) $\int x\sqrt{1-x^2}dx$

R. $-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}+k$

c) $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx$

R. $\frac{2(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}{9}+k$

d) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}dx$

R. $2\sqrt{x+1}+k$

e) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$

R. $\frac{6(x+1)^{\frac{7}{6}}}{7}+k$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$

R. $\frac{\sqrt{3x^2+1}}{3}+k$

8. Calcula las siguientes integrales de tipo logarítmico:

a) $\int \frac{1}{3X+5}dx$

R. $\frac{1}{3}L\left|3x+5\right|+k$

b) $\int \frac{3}{ax+b}dx$

R. $\frac{3}{a}L\left|ax+b\right|+ k$

c) $\int \frac{x^2}{x^3+2}dx$

R. $\frac{1}{3}\ L\ \left|x^3+2\right|+ k$

9. Calcula las siguientes integrales de tipo logarítmico:

a) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

R. $L\ (1 + e^{x}) + k$

b) $\int \frac{\text{sen}\,x-\cos x}{\text{sen}\,x+\cos x}dx$

R. $-\ L\ \left|\text{sen}\ \ x+\cos\ \ x\right|+ k$

c) $\int \frac{1}{xLx}dx$

R. $L\ (Lx) + k$

10. Calcula las siguientes integrales de tipo exponencial:

a) $\int e^{-x}\,dx$

R. $-e^{-x} + k$

b) $\int e^{2x}\,dx$

R. $\frac{1}{2}e^{2x} + k$

c) $\int e^{-2x}\,dx$

R. $-\ \frac{1}{2}e^{-2x} + k$

d) $\int e^{2x+1}\,dx$

R. $\frac{1}{2}\ e^{2x+1} + k$

e) $\int e^{-x^2} \bullet x\,dx$

R. $\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$

11. ¿Cuánto ha de valer k para que la función $f(x) = ke^{5x}$ sea derivada de la función $F(x) = e^{5x}$?

R. $k = 5$

12. Halla la función que tome en $x = 1$ el valor 2 y que tenga por derivada la función $f(x) = 12x^2 + 6$

R. $F(x) = 4x^3 + 6x - 8$

13. Halla una función cuya derivada sea $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ y que se anule para $x = 1$.

R. $F(x) = x^4 - \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x - \frac{1}{6}$

14. Halla la función G tal que $G''(x) = 6x + 1$, $G(0) = 1$ y $G(1) = 0$.

R. $G(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 1$

15. Halla la función G para la que $G''(x) = 2x$ y además $G(1) = -1$, $G(2) = 2$

R. $G(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x}{3}$

16. Dada la función $f(x) = 3x^2 + 2x$ halla la primitiva que pasa por el punto $A(1,2)$.

R. $F(x) = x^3 + x^2$

17. Halla la ecuación de la curva que pasa por los puntos $P(0,3)$ y $Q(-1,4)$, sabiendo que su derivada segunda es $y'' = 6x - 2$

R. $y = x^3 - x^2 - 3x + 3$

18. Calcula las siguientes integrales de tipo seno. Observa que son formas compuestas:

a) $\int \cos(x + 1)\,dx$

R. $\text{sen}\,(x + 1) + k$

b) $\int \cos(2x + 5)\,dx$

R. $\frac{1}{2}$ sen (2x + 5) k

c) $\int x \cos x^2\,dx$

R. $\frac{1}{2}\text{sen}\,x^2 + k$

d) $\int 2x \cos(x^2 + 2)\,dx$

R. $\text{sen}\,(x^2 + 2) + k$

e) $\int \frac{\cos\ Lx}{x}\ dx$

R. $\text{sen}\,Lx + k$

19. Calcula las siguientes integrales de tipo coseno:

a) $\int \frac{\text{sen}\ \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$

R. $-\cos\sqrt{x} + k$

b) $\int \frac{\text{sen}\ Lx}{x}dx$

R. $-\cos Lx + k$

c) $\int \frac{\text{sen}\ Lx}{2x}dx$

R. $-\frac{1}{2}\cos\ Lx\ +\ k$

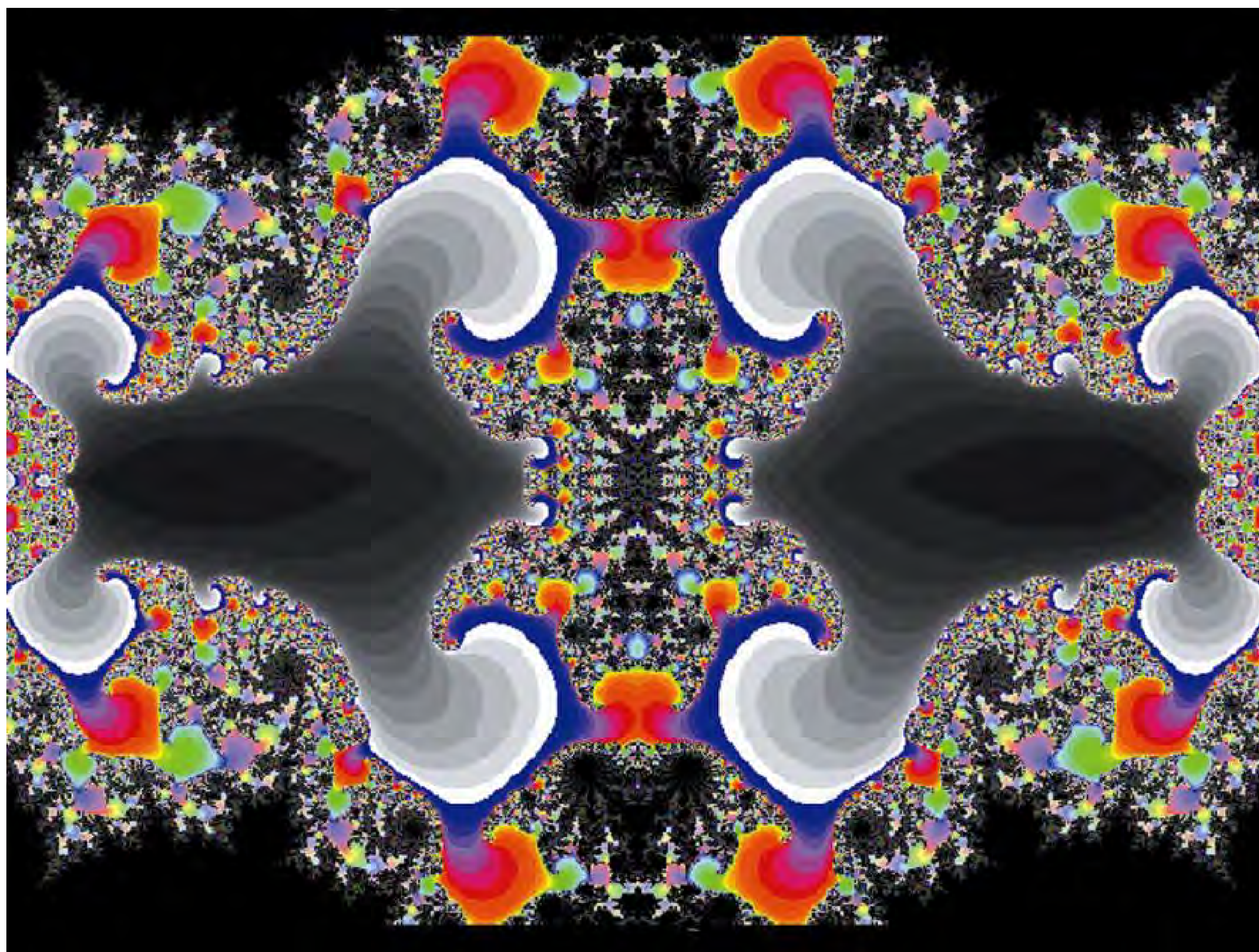
20. Calcula las siguientes integrales de tipo tangente:

a) $\int \sec^2\frac{x}{3}+k$

R. $3 \tan\ \frac{x}{3} + k$

b) $\int 3 \sec^2(2x + 6)\,dx$

R. $\frac{3}{2}\tan(2x + 6) + k$



El cálculo integral resulta imprescindible en termodinámica. De ello da muestra la máquina de vapor diseñada por James Watt (1736-1819) que se conserva en el museo de Londres y que fue una precursura de la revolución industrial.

CAPÍTULO II

LA INTEGRAL DEFINIDA. CÁLCULO DE ÁREAS

Históricamente la integral nació como herramienta para el cálculo del área bajo la gráfica de una función. Así, en el siglo XVII, Newton y Leibnitz suministraron, en su "Cálculo diferencial" un método directo para determinar áreas limitadas por curvas muy diversas.

Gracias al cálculo infinitesimal, en la segunda mitad del siglo XX surge el mundo de los **fractales**. Su aparición está muy relacionada con la irrupción del ordenador y su facilidad de cálculo y representación gráfica.

En la actualidad, el cálculo integral es muy utilizado en el diseño de construcciones, en la termodinámica, en el diseño de embarcaciones, además se utiliza para determinar volúmenes y cálcular diversas áreas.

INTEGRAL DEFINIDA

Supongamos que f(x) es una función continua en un intervalo $[a,b]$. Llamamos **integral indefinida** de f(x) entre a y b al área orientada comprendida entre la gráfica de f (x), el eje x y las abscisas x = a y x = b. Se la representa por:

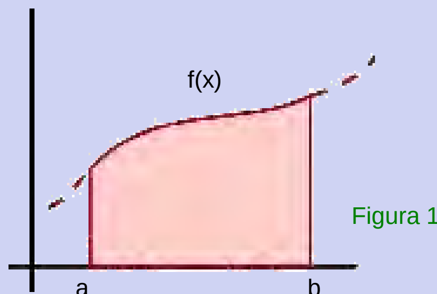


Figura 1

Al hablar de área orientada queremos decir que el valor de la integral será positivo o negativo dependiendo de si la función es positiva (gráfica por encima del eje X) o negativa (por debajo).

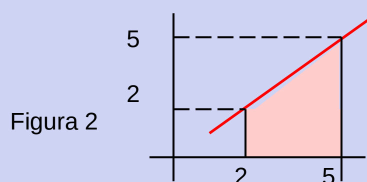
Ejemplo

1. $\int_2^5 x dx$ es el área comprendida entre la gráfica de

Y=x, el eje x y las abscisas

x=2 y x=5. Es el área del trapecio sombreado de la figura:

Figura 2



Por tanto: $\int_2^5 x\,d\,x = \frac{\text{Base mayor} + \text{base menor}}{2} \bullet \text{altura} =$

$\frac{2+5}{2} \bullet 3 = 10{,}5$

2. $\int_{-1}^{3} -2d\,x$ es el área comprendida entre la gráfica de y = -2, el eje X y las abscisas x = - 1 y x = 3. Su valor es el área del rectángulo sombreado de la figura.

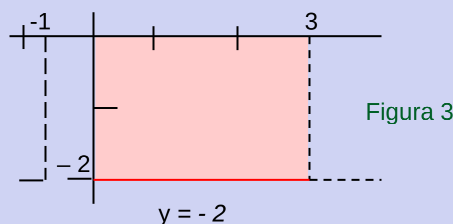


Figura 3

y = - 2

Por tanto: $\int_{-1}^{3} -2d\,x = \text{base} \bullet \text{altura} = 4 \bullet (-2) = -8$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Las siguientes propiedades son todas razonables e intuitivas. Haremos uso de ellas enseguida para el cálculo de áreas.

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$
- Si *f* (*x*) es continua en [*a, b*] y *c* está entre *a* y *b*, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

- Si f (x) > 0 y continua en [a, b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

  y si f (x) < 0 en todo [a, b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx < 0$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- Por convenio $\int_b^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

LA INTEGRAL Y SU RELACIÓN CON LA DERIVADA

Hemos tropezado con integrales que de algún modo resolvíamos directamente. En la mayor parte de las integrales que surgen en la práctica el único camino es el de la **aproximación numérica** (especialmente hoy con la ayuda del ordenador).

De todas formas, hay algunas funciones que aparecen muy a menudo que pueden ser integradas mediante el estupendo truco que halló Barrow, el maestro Newton, en el siglo XVII.

LA FUNCIÓN ÁREA

Si f (x) es continua en [a, b], podemos calcular $\int_a^x f(t)dt$ para cada x $\in [a,b]$.

Por tanto, podemos considerar la nueva función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

que es el área contenida bajo la gráfica de *f* entre *a* y un punto variable *x* .

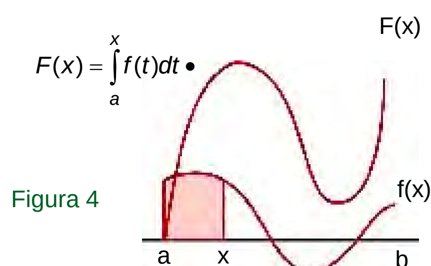


Figura 4

Se ve intuitivamene que la rapidez de crecimiento de *F* es proporcional a la ordenada de *f* .

Efectivamente ocurre que *F* ' = *f* , tal como prueba el Teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si *f* (*x*) es una función continua en [*a*, *b*], la función:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b]$$

es derivable y verifica que *F* '(*x*) = *f* (*x*).

Ejemplo

Calcula la derivada de la función $\int_5^x \sqrt{e^t+1}\,dt$

Llamamos F (x) = $\int_5^x \sqrt{e^t+1}\,dt = \int f(t)dt$ siendo $f(t) = \sqrt{e^t+1}$ continua

Por teorema fundamental del cálculo,

$$F'(x) = f(x) = \sqrt{e^x+1}$$

CONSECUENCIA FUNDAMENTAL: LA REGLA DE BARROW

Si *f* (*x*) es continua [*a*, *b*] y *G* (*x*) es una primitiva de *f* (*x*), entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Demostración:

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de f (x).

Si *G* (*x*) es otra primitiva de *f* (*x*), se tiene que *F* (*x*) = *G* (*x*) + *k* .

Si le damos a *x* el valor *a* obtenemos: *F* (*a*) = *G* (*a*) + *k*. Pero como:

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

se obtiene que *k* = – *G* (*a*). Sustituimos:

F (*x*) = *G* (*x*) – *G* (*a*). Si ahora sustituimos *x* por *b* :

$$F(b) = G(b) - G(a)$$

Es decir: $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

Ejemplos

1. Calcula la derivada de la función $\int_{x^2}^{\operatorname{sen} x} (1+\sqrt{t})\,dt$

La función cuya derivada se nos pide es del tipo

$$F(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\,dt$$

Si *G* (*x*) es una prima de *f* (*x*), por regla de Barrow se tiene que:

$$F(x) = G(h_2(x)) - G(h_1(x))$$

Derivando obtenemos:

$$F'(x) = G'(h_2(x)) \bullet h_2(x) - G'(h_1(x)) \bullet h_1(x)$$

Teniendo en cuenta que *G* ' = *f* se tiene que:

$$F'(x) = f(h_2(x)) \bullet h_2(x) - f(h_1(x)) \bullet h_1(x)$$

Aplicándolo a nuestro caso concreto:

$F'(x) = (1 + \sqrt{\operatorname{sen} x}) \bullet \cos x - (1 + \sqrt{x^2}) \bullet 2x = \cos x + \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x - 2x - 2x^2$

2. La regla de Barrow permite calcular integrales definidas a partir del conocimiento de una primitiva. Por ejemplo:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2$$

$$\int_{-1}^{1}\left(x-3+\frac{1}{x-2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x-2|\right]_{-1}^{1} =$$

$$=\left(\frac{1}{2}-3+\ln 1\right)-\left(\frac{1}{2}+3+\ln 3\right) = -6 - \ln 3 = -7{,}098...$$

3. El cambio de variable es igualmente aplicable a la integral definida. En concreto:

$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$ Utilizamos el cambio de variable: $1 - x = t^2 \longrightarrow -dx = 2t\,dt$

Pero al cambiar la variable también cambian los límites de integración. En este caso:

$$\begin{cases} x = 0 \to t = 1 \\ x = 1 \to t = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \int_1^0 (1-t^2)\sqrt{t^2}(-2t)\,dt =$$

$$2\int_0^1 (1-t^2)t^2\,dt = 2\int_0^1 (t^2-t^4)\,dt =$$

$$=2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{15}$$

4. La fórmula para la integración por partes en la integral definida es:

$$\int_a^b u\,dv = [u \bullet v]_a^b - \int_a^b v\,du$$

$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx$ Ponemos $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = x\,dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ v = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Así:

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} -$$

$$\frac{1}{2}\left[x-\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi-2}{4} = 0{,}285...$$

CÁLCULO DE ÁREAS

Área entre una curva y el eje *X*

Si para calcular el área entre una curva $y = f(x)$, el eje X y dos abscisas, a y b, nos limitamos a obtener el valor de la integral

$\int_a^b f(x)\,dx$, nos exponemos a equivocarnos, pues si la curva corta al eje X, la integral compensa áreas positivas y negativas y su valor no coincide con lo que usualmente llamamos área.

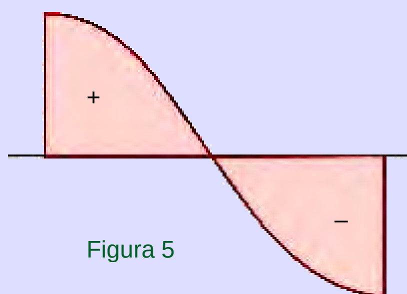


Figura 5

Lo correcto es calcular por separado la integral de cada tramo que quede a un mismo lado del eje X. Para que no nos veamos en la necesidad de representar la curva, es conveniente seguir estos pasos:

1. Resuelve la ecuación $f(x) = 0$ para averiguar los puntos de la curva con el eje X.

2. Selecciona las raíces que estén entre a y b y ordénalas de menor a mayor. Por ejemplo:

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b$$

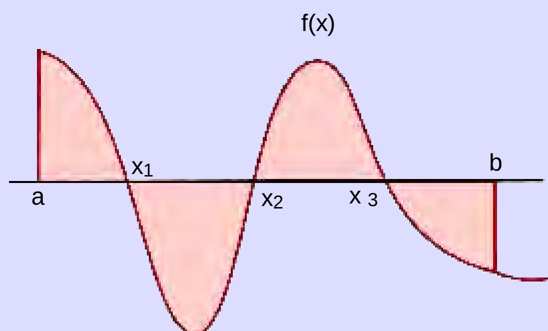


Figura 6

3. Se calcula el valor absoluto de la integral definida en cada tramo que queda a un mismo lado del eje X y se suman los resultados, es decir:

$$S = \left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)\,dx\right|$$

Ejemplo

Calcula el área del recinto plano delimitado por la curva $y = x^2 - 1$, el eje OX, y $x = 2$.

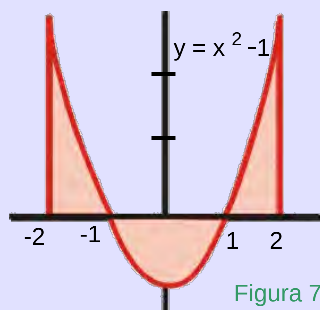


Figura 7

Solución

Puntos de corte de la curva con el eje X: $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = -1$ ó $x = 1$. Dado que ambas raíces están entre -2 y 2, se tiene que:

$$S = \left|\int_{-2}^{-1}(x^2-1)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^2-1)\,dx\right| =$$

$$= \left|\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1}\Bigg| + \left|\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1}\Bigg| + \left|\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2}\Bigg| =$$

$$= \left|\left(-\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{8}{3}+2\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{3}-1\right) - \left(-\frac{1}{3}+1\right)\right|$$

$$+ \left|\left(\frac{8}{3}-2\right) - \left(\frac{1}{3}-1\right)\right| = \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{4}{3}\right| =$$

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4u^2$$

Calcula el área limitada por la gráfica $y = \cos x$, el eje OX, $x = 0$ y $x = 2.\pi$

Solución

Puntos de corte con el eje X : $\cos x = 0$ tiene como únicas soluciones entre $x = 0$ y $x = 2\pi$ los valores $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$

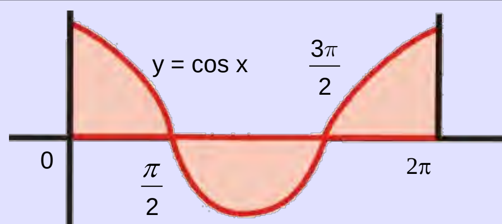


Figura 8

$$S = \left|\int_0^{\pi/2} \cos x dx\right| + \left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x dx\right| + \left|\int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x dx\right|$$

$$= \left|\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi/2}\Big| + \left|\operatorname{sen} x\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}\Big| + \left|\operatorname{sen} x\right]_{3\pi/2}^{2\pi}\Big| =$$

$$= |1-0| + |-1-1| + |0-(-1)| =$$

$$= |1| + |-2| + |1| = 1 + 2 + 1 = 4u^2$$

Deduce la fórmula para el área de un círculo de radio R.

Solución

La ecuación implícita de una circunferencia de radio R centrada en el origen es

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Despejando y obtenemos: $y^2 = R^2 - x^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$

que conduce a las ecuaciones $y_1 = +\sqrt{R^2 - x^2}$ e $y^2 = -\sqrt{R^2 - x^2}$

correspondientes a la semicircunferencia superior e inferior, respectivamente.

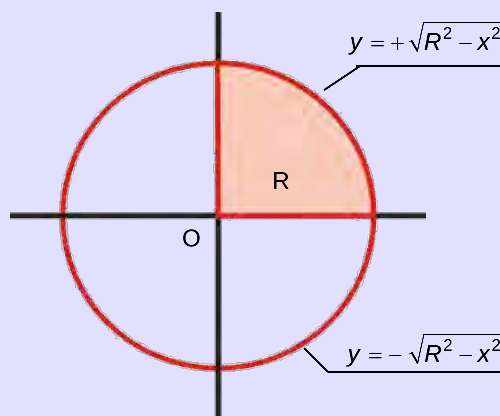


Figura 9

La superficie del círculo será el cuádruplo del área sombreada, es decir:

$$S = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - X^2}\; dx \underset{X = R\,\text{sen}\,t}{=} 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\,\text{sen}^2 t}\; R\cos t\; dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2\cos^2 t}\; R\cos t\, dt = 4R^2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 4R^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = 4R^2\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\text{sen}^2 t\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 4R^2\left(\frac{\pi}{4} + \text{sen}\,\pi\right) = 4R^2\frac{\pi}{4} = \pi R^2$$

ÁREA COMPRENDIDA ENTRE DOS CURVAS

El área comprendida entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ es el área comprendida entre la función diferencia $f(x) - g(x)$ y el eje X.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Se calculan los puntos de corte de ambas curvas resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$.

2. Ordenamos las abscisas de los puntos de corte de menor a mayor. Por ejemplo:

$$x_1 < x_2 < x_3$$

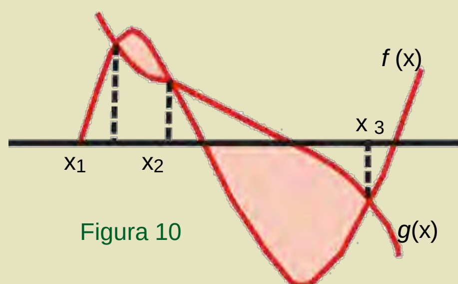


Figura 10

3. Se calcula el valor absoluto de la integral definida de la función diferencia en cada uno de los tramos obtenidos y se suman los resultados. Para este caso:

$$S = \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x))dx\right|$$

Ejemplos

• Calcula el área limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = x$.

Solución

Los puntos de corte de ambas curvas se obtienen resolviendo la ecuación $x^3 = x$.

$x^3 = x \rightarrow x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow$

$x = 0$ ó $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 0$ ó $x = 1$ ó $x = -1$

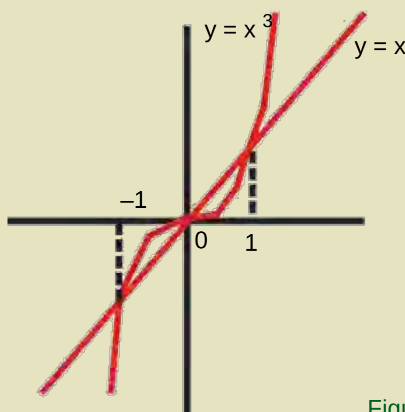


Figura 11

$$S = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 1)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{3}\right]_{0}^{1}\right| =$$

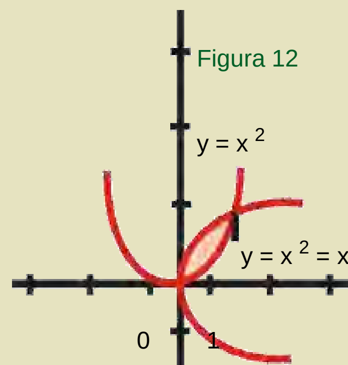
$$= \left(\frac{0}{4} - \frac{0}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{0}{4} - \frac{0}{2}\right) =$$

$$\left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = u^2$$

Calcula el área limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$.

Solución

Puntos de corte de ambas funciones: $x^2 = \sqrt{x} \rightarrow x^4 =$
$x \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow$
$\grave{o}\, x^3 = 1 \rightarrow$
$x = 0\ \grave{o}\ x = \sqrt[3]{1} = 1$



APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA INTEGRAL. CÁLCULO DE VOLÚMENES

De un cuerpo geométrico conocemos las áreas $S(x)$ de las secciones producidas por planos perpendiculares a una recta r en los puntos x de la misma.

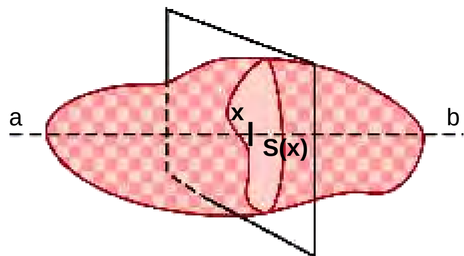


Figura 13

En estas condiciones, el volumen del cuerpo viene dado por la fórmula:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

Interpretamos el volumen como la "suma infinita" de volúmenes $S(x) \bullet dx$ infinitamente pequeños (en Física se llaman elementos infinitesimales de volumen).

Ejemplo

1. Una vasija de 1 m de profundidad tiene la propiedad de que al ir llenándose de agua, en cada instante el área de la superficie del agua es igual a la altura alcanzada por el agua, ¿cuántos litros de agua podremos verter en el recipiente?

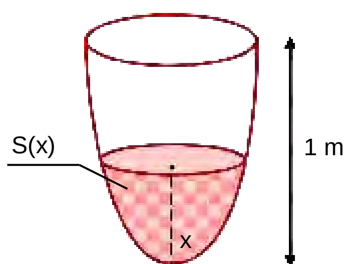


Figura 14

Solución

Si llamamos x a la altura, el área de la superficie visible es $S(x)$. Pero en el enunciado se nos dice que $S(x) = x$. Por tanto, el volumen es:

$$V = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} m^3, \text{es decir 500 litros}$$

2. Halla el volumen de un cono con radio de la base R y altura h.

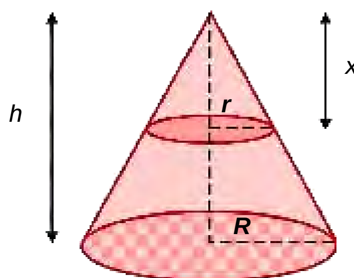


Figura 15

Solución

El área S (x) corresponde a un círculo de radio $r = \frac{Rx}{h}$ puesto que por la semejanza de los triángulos rectángulos se tiene que:

$$\frac{r}{x} = \frac{R}{h} \rightarrow r = \frac{Rx}{h}$$

Por tanto el área del círculo es

$$S(x) = \pi \bullet r^2 = \pi \bullet \frac{R^2x^2}{h^2} = \frac{\pi R^2}{h^2}x^2$$

De manera que:

$$V = \int \frac{\pi R^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_o^h = \frac{\pi R^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN

Un trozo de curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ se hace girar alrededor del eje X.

Engendra un cuerpo de revolución cuyo volumen queremos calcular.

Al cortar por un plano perpendicular en el punto de abscisa x, la sección producida es un círculo de radio $|f(x)|$.

De manera que:

$$S(x) = \pi f(x)^2$$

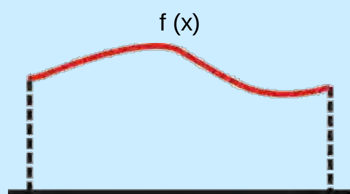


Figura 16

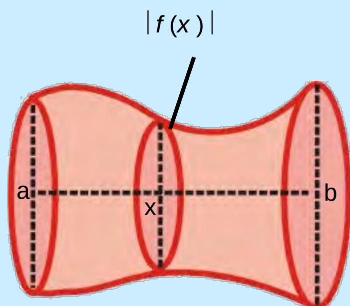


Figura 17

Por tanto, el volumen engendrado es:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Ejemplo

1. Volumen engendrado al girar la parábola $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje X entre 0 y 4.

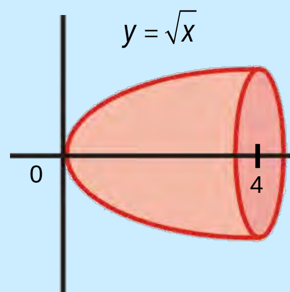


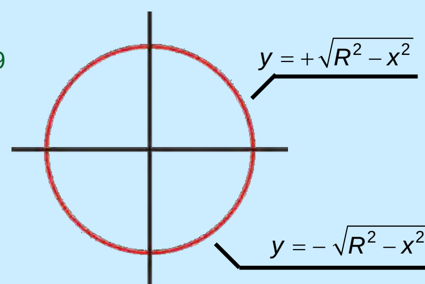
Figura 18

Solución

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi u^3$$

2. Deducir el volumen de una esfera de radio R.

Figura 19



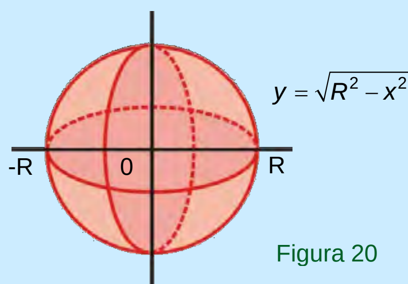


Figura 20

Solución

Hacemos girar la función $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ entre las abscisas - R y R. El volumen de la esfera de radio R es:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) = \pi \left(\frac{2R^3}{3} + \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 u^3 \right]$$

3. Volumen engendrado por $y = +\sqrt{x}$ al girar alrededor del eje Y, entre $y = 0$ e $y = 2$.

Solución

Se hace exactamente igual que al girar en torno al eje X, con la salvedad de que hay que poner x en función de y, $x = \varnothing$ (y), e integrar respecto a y. Es decir:

$$V = \pi \int_a^b \phi(y)^2 dy$$

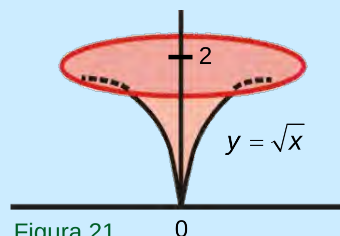


Figura 21

Como $x = y^2 \rightarrow$

$$V = \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 y^4 dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32}{5} \pi u^3$$

LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

Tenemos una curva $y = f(x)$ y queremos calcular su longitud entre dos puntos *A* y *B* de abscisas *a* y *b*

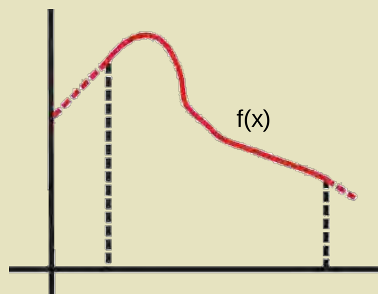


Figura 22

La longitud del arco de curva *AB* es

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Ejemplo

Hallar la longitud de la circunferencia de radio *R* :

Solución

En la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ despejamos la *y*, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ que describe la semicircunferencia superior.

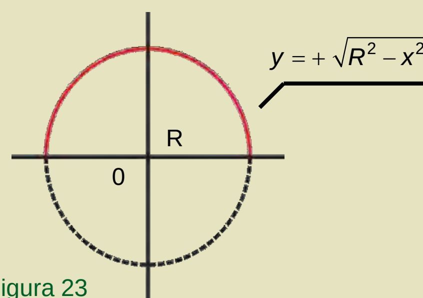


Figura 23

Para hallar su longitud hacemos:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \rightarrow \sqrt{1+f'(x)^2} =$$

$$\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

y

$$L = 4\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = 4\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}}\,dx =$$

$$4R\left[\text{arcsen}\,\frac{x}{R}\right]_0^R = 4R\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 2\pi R$$

ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Un trozo de curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ se hace girar alrededor del eje *X* .

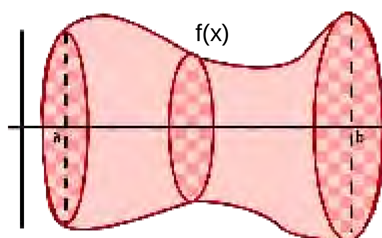


Figura 24

Engendra un cuerpo de revolución cuya superficie es:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Ejemplo

Obtener la fórmula del área de la esfera de radio *R*.

Solución

Hacemos girar la semicircunferencia superior alrededor del eje X entre - R y R . La superficie es: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$S = 2\pi\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx =$$

$$2\pi\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx =$$

$$2\pi\int_{-R}^{R} R\,dx = 2\pi R(R+R) = 4\pi R^2$$

EJERCICIOS

1. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^3 x^2\,dx$

b) $\int_1^3 x^4 dx$

R. $a)\ \frac{26}{3}$ **b)** $\frac{242}{5}$

2. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_3^7 \sqrt{x}dx$

b) $\int_2^3 x^2\sqrt{x}dx$

c) $\int_1^2 Lxdx$

d) $\int_1^3 2^x dx$

R. a) $\frac{14\sqrt{7}-6\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{54\sqrt{3}-16\sqrt{3}}{3}$

c) $2L2-1$

d) $\frac{6}{L2}$

3. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^2 \operatorname{sen} x dx$

b) $\int_2^3 \cos x dx$

c) $\int_0^1 \tan x dx$

d) $\int_0^1 \sec^2 x dx$

R .a) – cos 2 + cos 1

b) sen 3 –sen 2

c) – L |cos 1| + **L** cos 0

d) tan 1

4. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-2}^{x} [x]dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx$

c) $\int_1^2 xLx\,dx$

R. a) 9

b) 1

c) $2\,L2-\frac{3}{4}$

5. Calcula la integral $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$

R. $\frac{1}{2}L\frac{8}{3}$

6. Determina a y b para que la función:

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}\pi x + a & \text{para } x\le -1\\ ax+b & \text{para } -1<x\le 0 \text{ sea}\\ x^2+2 & \text{para } x>0\end{cases}$$

continua y después calcula la integral definida de $f(x)$ entre – 2 y 2.

R. a = 1, b = 2

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=\frac{2}{\pi}+\frac{56}{6}$$

7. Determina a y b para que la función:

$$f(x)=\begin{cases}2+a & \text{para } x\le 1\\ ax+b & \text{para } -1<x\le 0 \text{ sea}\\ 3x^2+2 & \text{para } x>0\end{cases}$$

continua y después calcula la integral definida de $f(x)$ entre – 2 y 2.

R. $a=\frac{3}{4}, b=2$

$$\int_{2}^{-2} f(x)dx=\frac{1}{4L2}+\frac{115}{8}$$

8. Calcula el área del recinto limitado por las rectas $y = 2x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$. Comprueba el resultado utilizando alguna formula de geometría elemental.

R. 12 dólares.

9. Calcula el área del recinto limitado por las rectas $y + x = 10$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$. Comprueba el resultado mediante la fórmula geométrica correspondiente.

R. 30 dólares.

10. Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$.

R. $\frac{208}{3}$ dólares.

11. Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = x^3$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$.

R. $\frac{1280}{3}$ dólares

12. Calcula el área del recinto determinado por:

a) La parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$.

b) La parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$

c) La parábola $y = 4 - x^2$ y la recta $y = x + 2$

R. a) $\frac{1}{6}$ dólares

b) $\frac{9}{2}$ dólares

c) $\frac{9}{2}$ dólares

13. Halla el área del recinto limitado por la curva de ecuación = $2\sqrt{x}$ y la recta $y = x$.

R. $\frac{8}{3}$ dólares.

14. Calcula el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 2(1 - x^2)$ y la recta de ecuación $y = -1$.

R. $4\sqrt{3}/2$ dólares

15. Obten el área comprendida entre las parábolas:

a) $y = 5 - x^2$ e $y = x^2$

b) $y = 4 - x^2$ e $y = 3x^2$

c) $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$

R. a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ u.s

b) $\frac{16}{3}$ u.s

c) $\frac{64}{3}$ u.s

16. Encuentra el área comprendida entre las parábolas:

a) $y^2 - 2x = 0$ y $x^2 - 2y = 0$

b) $y^2 - 4x = 0$ y $x^2 - 4y = 0$

R. a) $\frac{4}{3}$ dólares

b) $\frac{16}{3}$ dólares

17. Halla el área comprendida entre la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.

R. 8 dólares.

18. Encontrar el área del triángulo formado por los ejes coordenadas y la tangente en un punto cualquiera a la hipérbola de ecuación $x\,y = 1$.

R. 2 dólares.

19. Calcula el área de la región limitada por el eje de abscisas y la gráfica de $y = xe^{x}$ entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

R. 1 u.s.

20. Obtén el volumen de la región determinada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 3$ al girar alrededor del eje OX.

R. $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^6}\right)u.v$

21. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = Lx$ e $y = 1$ y los ejes de coordenadas.

R. $e - 1$ u. s.

22. Encuentra el área del recinto limita- do por las gráficas de las funciones $y = \log x$ e $y = 1$.

R. 9 log **e** u.s.

23. Obten el área de la zona del plano limitada por las tres rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = e$, y la gráfica de $y = L^2 x$.

R. $e - 2$ u. s.

24. Calcula el área limitada por la curva $y = \tan x$, el eje OX y la recta $x = \frac{\pi}{4}$

R. $L\sqrt{2}$ *u.s*

25. Calcula el volumen engendrado por la superficie al girar la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, alrededor del eje OX .

R. $\frac{8\pi}{3}$ u.v.

26. Calcula, mediante una integral definida, el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos midan a y b.

R. $\frac{ab}{2}$ u.s.

27. Calcula el volumen limitado por el elipsoide de evolución generado por la elipse $2x^2 + y^2 = 1$ al girar alrededor del eje OX

R. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ u.v.

28. Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos limitados por las gráficas que se indican:

a) $f(x) = x^{1/2}$ $\quad g(x) = 1$

b) $f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x^{1/2}$

c) $f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = 1 - x^2$

R. a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{9\pi}{70}$

c) $\frac{64}{15}\pi$

29. Halla el volumen del cono engendrado al girar el segmento de la recta que une el origen de coordenadas con el punto a, b al girar alrededor del eje Y.

R. $\frac{1}{3}\pi a^2 b$

30. Encuentra el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje X las curvas $y^2 = 2px$ y $x = a$.

R. πpa^2

31. Calcula el volumen de un sólido de base circular de radio r, si al pasar perpendicularmente por un diámetro fijo un plano se forma de un triángulo equilátero.

R. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}r^2$

32. Calcula la longitud del arco de curva de la parábola $x^3 = ay^2$, entre el punto (0, 0) y el punto de abscisa $x = 5a$.

R. $\frac{335}{27}a$

33. Halla la longitud del arco de la curva $y = 1 - \ln\cos x$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$

R. $\ln\tan\frac{3\pi}{8}$

34. Obtén la longitud del arco de la curva $y = \ln x$ entre $x = \sqrt{3}$ y $x = \sqrt{8}$

R. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

35. Encuentra el volumen del cuerpo engendrado al girar un arco de la sinusoide $y =$ sen x y el eje X, alrededor del eje Y.

R. $\frac{\pi^2}{2}$

36. Halla el volumen engendrado al girar la curva $y = xe^{x}$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ alrededor del eje X.

R. $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO

PÁGINA INTENCIONALMENTE EN BLANCO

Estadística y Probabilidad



PÁGINA
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO



Simeón D. Poisson matemático y físico francés estudió la mecánica racional, introduciendo la ecuación que lleva su nombre. Asimismo tienen gran importancia sus investigaciones sobre la teoría de probabilidades y la mecánica celeste.

CAPÍTULO I

ESTADÍSTICA

La estadística es el estudio de los mejores modos de acumular y analizar datos y de establecer conclusiones acerca del colectivo del que se han recogido tales datos.

La probabilidad es el estudio de la incertidumbre: es la parte de la matemática que trata de manejar con números el azar.

En los temas que siguen se familiariza al lector con la terminología clásica de la estadística y la probabilidad y se le inicia en problemas sobre los que deberá extraer conclusiones adecuadas.

INTRODUCCIÓN

La Estadística es la ciencia que trata sobre la toma, organización, recopilación, presentación y análisis de datos para deducir conclusiones sobre ellos y para tomar decisiones que estén de acuerdo con los análisis efectuados.

Cuando se tiene una serie de datos sobre las características de un conjunto de personas o cosas, tales como edades, pesos y estaturas de los habitantes de una determinada ciudad o el número de relojes defectuosos o no defectuosos producidos por una fábrica en un tiempo determinado, resulta poco menos que imposible estudiar todas las personas o cosas. Así pues, en Estadística se acostumbra estudiar una parte del total que recibe el nombre de **muestra**, mientras que la totalidad del conjunto estudiado se denomina **población**.

CONCEPTOS BÁSICOS

Una población puede ser **finita** o **infinita**. Así, por ejemplo, el conjunto de personas que viven en una ciudad es una población finita, mientras que la población constituida por todos los posibles sucesos obtenidos en los lanzamientos sucesivos de una moneda es infinita.

En el caso de que la muestra elegida sea representativa de la población, se pueden deducir interesantes conclusiones sobre dicha población, al analizar la muestra extraída. La parte de la Estadística que estudia las condiciones bajo las cuales tales inferencias son válidas recibe el nombre de Estadística **inductiva** o **inferencial**.

Sin embargo, en muchas ocasiones no se puede tener una total certeza sobre la veracidad de las inferencias deducidas.

En estos casos, se acostumbra a decir que haya una determinada probabilidad de que dichas inferencias sean válidas.

VARIABLES

Una variable es un símbolo, por ejemplo, *X* , *Y* , *Z* , que puede tomar un valor cualquiera dentro de un conjunto de posibles valores denominado dominio de la **variable**. Cuando la variable tan sólo puede tomar un valor se de nomina **constante**.

Una variable se denomina continua cuando puede tomar cualquier valor comprendido entre otros dos. Así, por ejemplo, el peso de una persona es una variable continua puesto que una persona puede pesar 84 Kg, 86 Kg o cualquier valor comprendido entre 84 y 86 Kg como, por ejemplo, 84,587 Kg.

En cambio una variable se denomina discreta cuando no puede tomar cualquier valor comprendido entre otros dos. Así, por ejemplo, el número de miembros de una familia puede ser 6 ó 7 pero no 6,25.

RAMAS DE LA ESTADÍSTICA

La parte de la Estadística que únicamente se ocupa de describir y analizar un conjunto determinado sin extraer ningún tipo de conclusión o inferencia sobre un conjunto mayor se denomina Estadística **descriptiva** o **deductiva**.

PRESENTACIÓN DE LOS DATOS

Los datos que vienen definidos por una variable continua, tales como los pesos de un conjunto de personas, reciben el nombre de **datos continuos**, mientras que los datos que vienen definidos por una variable discreta, tales como el número de miembros de un conjunto de familias, se denominan **datos discretos.** Generalmente, los datos continuos se obtienen a partir de medidas, mientras que los datos discretos se obtienen a partir de enumeraciones.

Para presentar los datos de una población estadística se acostumbra a emplear métodos gráficos que simplifiquen la labor del observador.

Los métodos gráficos más utilizados son los siguientes:

1. Diagrama de barras. Consiste en levantar sobre cada valor de la variable una barra cuya longitud coincida con su frecuencia (Fig. 1).

Ejemplo

Las notas de Matemáticas obtenidas por los 40 alumnos de una clase han sido las siguientes:

Nota	Número de alumnos (frecuencia)
0	1
1	1
2	2
3	3
4	7
5	11
6	7
7	4
8	2
9	1
10	1

Representar las notas de los alumnos mediante un diagrama de barras.

Solución: Tendremos

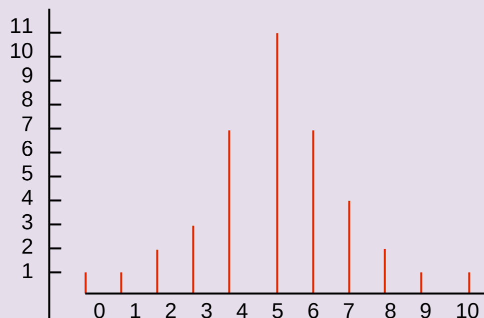


Figura 1

2. Polígono de frecuencias. Se señalan los extremos de los segmentos cuya altura coincide con la frecuencia y se unen mediante una línea quebrada (Fig. 2).

Ejemplo

En el ejemplo anterior, representar las notas de los alumnos mediante un polígono de frecuencias (Fig.2).

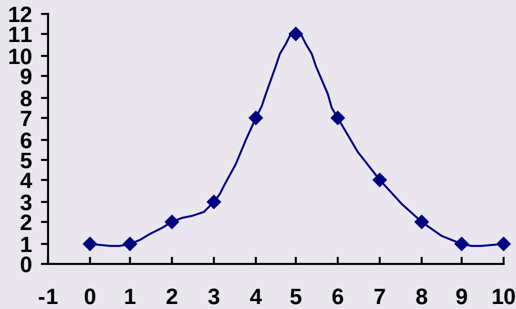


Figura 2

3. Diagrama de frecuencias acumuladas. Se utilizan cuando interesa conocer el número de individuos que hay antes de un cierto valor de la variable (Fig. 3).

Ejemplo

En el ejemplo anterior, representar las notas de los alumnos mediante un diagrama de frecuencias acumuladas.

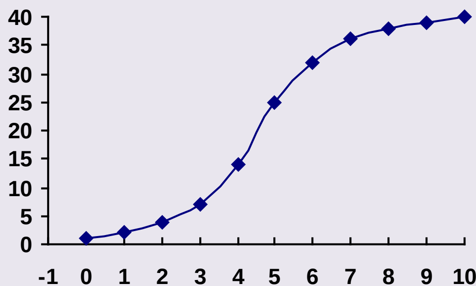


Figura 3

Notas	No. de alumnos (frecuencia acumulada, f_A)
0	1
(0, 1)	2
(0, 2)	4
(0, 3)	7
(0, 4)	14
(0, 5)	25
(0, 6)	32
(0, 7)	36
(0, 8)	38
(0, 9)	39
(0,10)	40

4. Diagrama de frecuencias relativas. Resultan imprescindibles cuando interesa comparar varias poblaciones del mismo tipo, pero con distinto número de individuos.

Ejemplo

Mediante un diagrama de frecuencias relativas acumuladas, comparar las notas de Matemáticas de los 40 alumnos de la clase del ejemplo anterior con las notas obtenidas por los 20 alumnos de otra clase, que fueron las siguientes:

Nota	Número de alumnos (frecuencia)
0	0
1	0
2	1
3	1
4	1
5	2
6	3
7	6
8	3
9	2
10	1

Solución

1ª Clase			2ª Clase	
Nota	f_A	$f_{r\,A} = f_A / 40$	f_A	$f_{r\,A} = f_A / 20$
0	1	0.025	0	0
(0, 1)	2	0.05	0	0
(0, 2)	4	0.1	1	0.05
(0, 3)	7	0.175	2	0.1
(0, 4)	14	0.35	3	0.15
(0, 5)	25	0.625	5	0.25
(0, 6)	32	0.8	8	0.4
(0, 7)	36	0.9	14	0.7
(0, 8)	38	0.95	17	0.85
(0, 9)	39	0.975	19	0.95
(0, 10)	40	1	20	1

Tal como puede observarse, las notas de la segunda clase son muy superiores a las de la primera clase y, por lo tanto, el diagrama de frecuencias relativas acumuladas de la primera clase queda por encima del de la segunda clase.

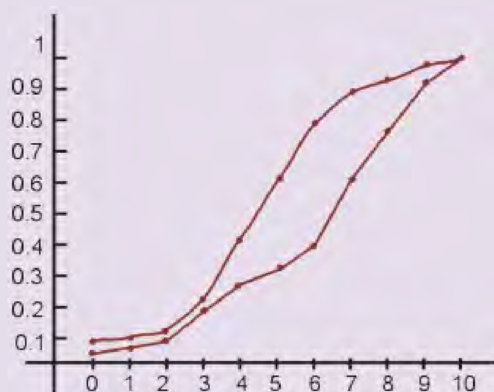


Figura 4

5. Diagramas de sectores. Consisten en repartir los 360° del círculo proporcionalmente a las frecuencias de la población estudiada.

Ejemplo

Representar mediante diagramas de sectores los alumnos aprobados (notas [5-10] y suspensos (notas [0-5]) del ejemplo anterior.

Solución

	1ª Clase	2ª Clase
Aprobados	26 (234° del círculo)	17 (306° del círculo)
Suspensos	14 (126° del círculo)	3 (54° del círculo)



Figura 5



Figura 6

6. Gráficas en espiral. Se emplean para representar datos cronológicos que registran una fuerte tendencia a la expansión.

Ejemplo

La población de un país evolucionó durante los últimos 100 años del modo siguiente:

Año	Población (millones de personas)
1880	50
1890	63
1900	76
1910	92
1920	106
1930	123
1940	132
1950	151
1960	179
1970	212
1980	247

Representar la evolución experimentada por la población de dicho país mediante una gráfica en espiral.

Solución

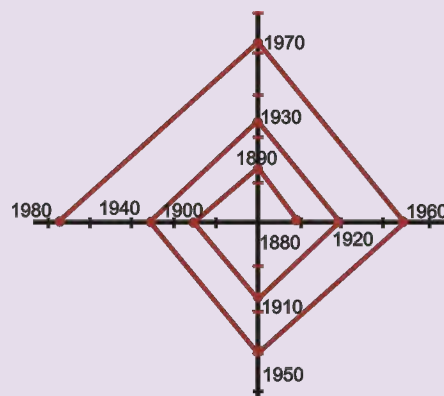


Figura 7

7. Cartogramas. Consisten en hacer resaltar con distintos colores o rayas diversas zonas de un mapa según un motivo determinado.

Así, por ejemplo, se puede pintar la densidad de población o la renta per cápita según su distribución en un mapa.

8. Pictogramas. Se utilizan fundamentalmente para representar índices de producción empleando un símbolo del artículo que se produce.

Este caso puede ser, por ejemplo, un automóvil o una manzana. El principal inconveniente de los pictogramas es que las fracciones son difíciles de representar puesto que se deben amputar los dibujos.

9. Histogramas de frecuencia. Se emplean cuando el número de valores que puede tomar la variable estadística es muy elevado.

DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA

Se denomina ordenación a toda colocación de una determinada serie de datos numéricos en orden creciente o decreciente de magnitud. La diferencia entre el mayor y el menor de los datos ordenados recibe el nombre de **rango** o **recorrido de los datos**. Así, por ejemplo, si la estatura del soldado más alto de un cuartel es de 213 cm y la del más bajo es de 151 cm, el rango será 213 – 151 = 62 cm. Tal como se comentó anteriormente, cuando se trabaja con un gran número de datos resulta conveniente distribuirlos en intervalos de clase y posteriormente determinar el número de datos que pertenecen a cada clase, que recibe el nombre de **frecuencia de clase**.

Una distribución de frecuencias es una ordenación en forma de tabla de los datos en clases, asignando a cada clase las frecuencias correspondientes.

Los datos ordenados y resumidos en una distribución de frecuencia reciben el nombre de datos **agrupados**.

Los números extremos de cada intervalo de clase reciben el nombre de **límites** de clase. El menor de ellos se denomina límite inferior de la clase y el mayor se llama límite superior de la clase.

Cuando un intervalo de clase carece de límite superior o de límite inferior, recibe el nombre de **intervalo de clase abierto**. Así, por ejemplo, un intervalo de clase que agrupara a las personas cuya estatura fuera "inferior a 150 cm" sería un intervalo de clase abierto.

MARCA DE CLASE

El punto medio de un intervalo de clase recibe el nombre de **marca de clase** y se obtiene dividiendo por 2 la suma de los límites inferior y superior del intervalo de clase.

En general, para obtener distribuciones de frecuencia se acostumbra a seguir los siguientes pasos:

a) Determinar el mayor y el menor de los datos registrados para encontrar el rango, es decir, la diferencia entre el mayor y el menor de los datos.

b) Dividir el rango en un número adecuado de intervalos de clase del mismo tamaño, que generalmente oscila entre 5 y 15.

c) Determinar las frecuencias de clase, es decir, el número de datos que corresponden a cada intervalo de clase.

Tal como se comentó anteriormente, existen diversos modos de representar gráficamente las distribuciones de frecuencia. Los más utilizados son los histogramas y los polígonos de frecuencias.

Ejemplo

Las estaturas de 1.000 soldados de un cuartel se distribuyen del modo siguiente:

Estatura (cm)	Número de soldados (frecuencia)
[150-160)	140
[160-170)	410
[170-180)	320
[180-190)	70
[190-200)	50
[200-210)	10

Representar mediante un histograma de frecuencias las estaturas de los soldados del cuartel. Dibujar asimismo el polígono de frecuencias.

Solución: En primer lugar hallaremos el valor central de cada intervalo, que recibe el nombre de marca de clase, para poder dibujar posteriormente el polígono de frecuencias.

Así pues, tendremos:

Intervalos	Marcas de Clase	Frecuencias
[150-160)	155	140
[160-170)	165	410
[170-180)	175	320
[180-190)	185	70
[190-200)	195	50
[200-210)	205	10

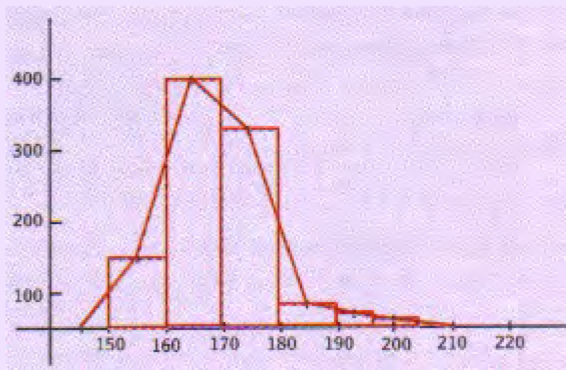


Figura 8

HISTOGRAMAS

Los **histogramas** constan de una serie de rectángulos cuyas superficies son proporcionales a las frecuencias de clase y cuyas bases se hallan situadas sobre un eje horizontal con centros en las marcas de clase y cuyas longitudes coinciden con el tamaño de los intervalos de clase.

Si los intervalos de clase son todos de igual tamaño, las alturas de los rectángulos son proporcionales a las frecuencias de clase y en este caso se acostumbra a tomar las alturas numéricamente iguales a las frecuencias de clase.

TABLAS DE FRECUENCIAS

Las tablas que representan frecuencias acumuladas reciben el nombre de distribuciones de frecuencias acumuladas, mientras que las gráficas que representan las frecuencias acumuladas se denominan polígonos de frecuencias acumuladas u **ojivas**.

Análogamente, la **frecuencia relativa** acumulada es la frecuencia acumulada dividida por la frecuencia total, mientras que las gráficas que representan las frecuencias. relativas acumuladas reciben el nombre de polígonos de frecuencias relativas acumuladas.

Si la población de donde se extraen las muestras es muy grande, es posible elegir intervalos de clase muy pequeños. De este modo, el polígono de frecuencias correspondiente a una población grande puede estar formado por muchos segmentos pequeños, de manera que el polígono va aproximándose a una curva. Dichas curvas se denominan **curvas de frecuencias**

POLÍGONOS DE FRECUENCIAS

Los **polígonos de frecuencias** se obtienen uniendo las marcas de clase. En general, se acostumbra a prolongar los polígonos de frecuencias hasta las marcas de clase inmediatamente superior e inferior, que corresponderían a clases de **frecuencia cero**.

FRECUENCIAS

Se define la frecuencia relativa de una clase como la frecuencia de dicha clase dividida por la suma de las frecuencias de todas las clases. La suma de las frecuencias relativas de todas las clases vale 1.

Tal como se comentó en los ejemplos precedentes, las representaciones gráficas de distribuciones de frecuencia relativa pueden obtenerse a partir del correspondiente histograma o polígono de frecuencias, sin más que cambiar la escala vertical de frecuencias por una escala de frecuencias relativas, conservándose el mismo diagrama. Las representaciones resultantes se denominan histogramas de frecuencias relativas y polígonos de frecuencias relativas, respectivamente.

Se denomina **frecuencia acumulada** hasta un intervalo de clase determinado a la frecuencia total de todos los valores menores que el límite superior de clase de dicho intervalo de clase.

CURVAS DE FRECUENCIAS

Las curvas de frecuencia presentan las siguientes formas características:

1. **Curvas simétricas.** Tal como puede observarse en la figura 9, las curvas de frecuencia simétricas son aquellas en las que las observaciones que equidistan del máximo central tienen la misma frecuencia.

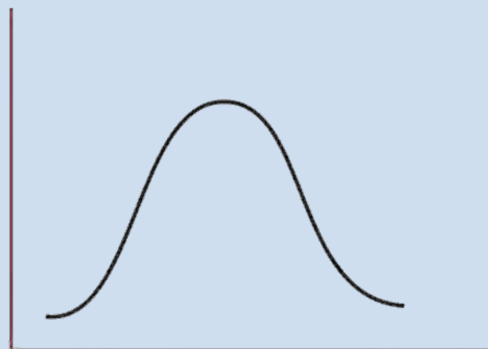


Figura 9

2. **Curvas sesgadas.** Tal como puede observarse en las figuras 10 y 11, las curvas de frecuencia sesgadas se caracterizan porque la cola de la curva a un lado del máximo central es mayor que al otro lado. Si la cola mayor aparece a la derecha de la curva se dice que la curva está sesgada a la derecha o que tiene sesgo positivo (Fig. 10), mientras que si la cola mayor aparece a la izquierda de la curva se dice que la curva está sesgada a la izquierda o que tiene sesgo negativo (Fig. 11).

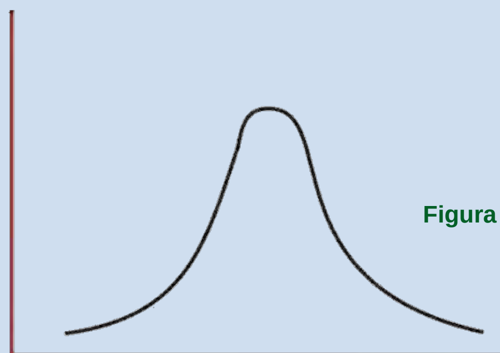


Figura 10

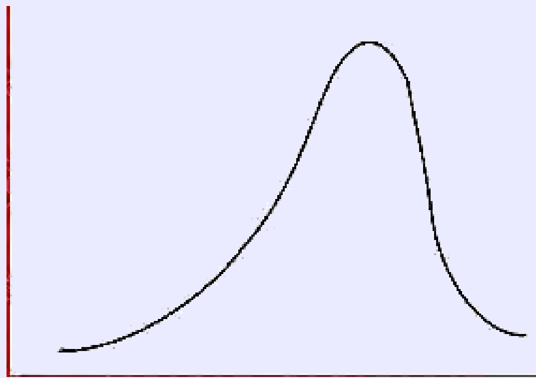


Figura 11

3. Curvas en forma de J o de J invertida. Tal como puede observarse en las figuras 12 y 13, las curvas de frecuencia en forma de J o de J invertida se caracterizan porque el máximo se presenta en un extremo.

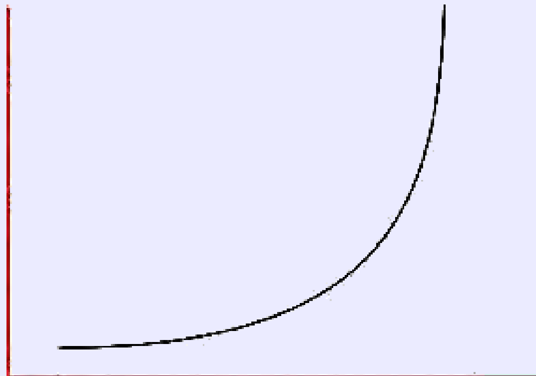


Figura 12

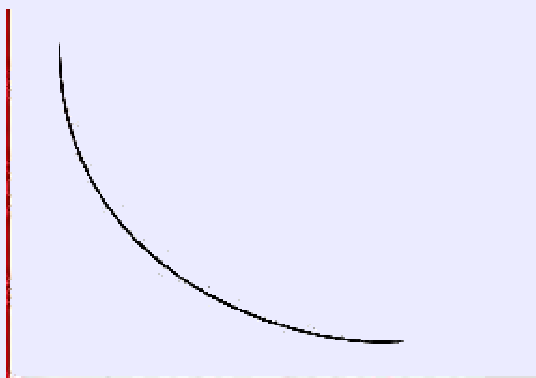


Figura 13

4. Curvas en forma de U. Tal como puede observarse en la figura 14, las curvas de frecuencia en forma de U presentan el máximo en ambos extremos.

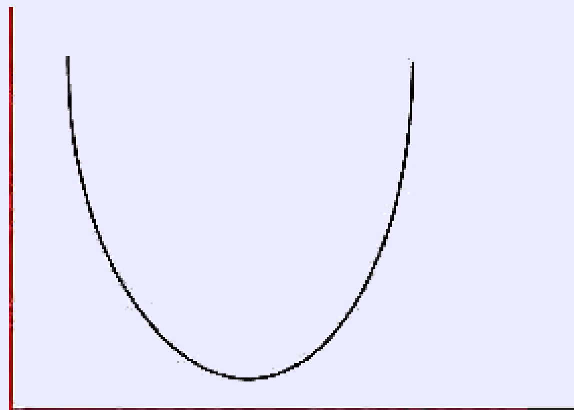


Figura 14

5. Curvas bimodales. Tal como puede observarse en la figura 15, las curvas de frecuencia bimodales presentan dos máximos.

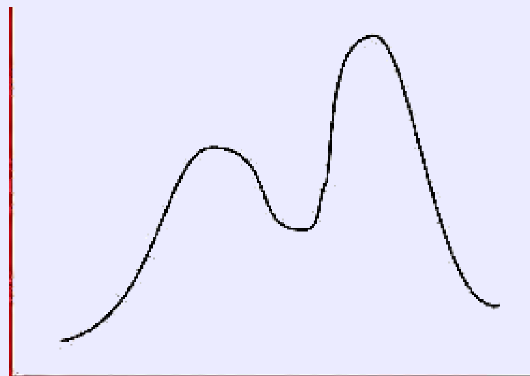


Figura 15

6. Curvas multimodales. Tal como puede observarse en la figura 16, las curvas de frecuencia multimodales presentan más de dos máximos.

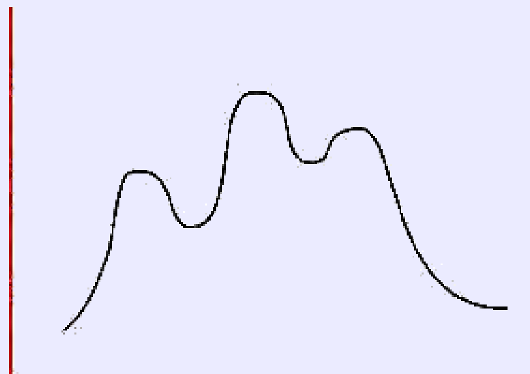


Figura 16

MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

Son valores que tienden a situarse en el centro del conjunto de datos ordenados según su magnitud.

Las medidas de centralización más empleadas son la medida aritmética o media, la mediana, la moda, la media geométrica, la media armónica y la media cuadrática. La aplicación de una u otra medida de centralización depende de los resultados que interese extraer a partir de los datos.

MEDIA ARITMÉTICA O MEDIA

La media aritmética o media de un conjunto de N números x_1, x_2, x_3, . . . , x_n se representa por x y se define como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{\sum x}{N}$$

donde el símbolo x_i representa cualquiera de los N valores x_1, x_2, x_3, . . . , x_n que puede tomar la variable x. La letra i minúscula en x_i se denomina subíndice y puede representar cualquiera de los números 1, 2, 3, . . . , n .

Por su parte, el símbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$ se utiliza para indicar la suma

de todas las x_i desde i = 1 hasta $i = n$, es decir que $\sum_{i=1}^{n} x_i$ $= x_1 + x_2 + x_3 + . . . + x_n$. Si no ha y posibilidad de confusión, el símbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$ se acostumbra a simplificar por $\sum x$.

Ejemplo

Hallar la media aritmética de 6, 4, 3, 7 y 8.

Solución

Tendremos

$$\bar{x} = \frac{6+4+3+7+8}{5} = \frac{28}{5} = 5{,}6$$

Cuando los números x_1, x_2, x_3, . . . , x_n aparecen f_1, f_2, f_3, . . . , f_n veces, respectivamente, es decir que sus frecuencias respectivas son f_1, f_2, f_3, . . . , f_n , la media aritmética puede calcularse del modo siguiente:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \cdots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} =$$

$$\frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{\sum fx}{N}$$

Ejemplo

Hallar la media aritmética de 6, 6, 6, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 7.

Solución

Tendremos

$$\bar{x} = \frac{3 \bullet 6 + 4 \bullet 4 + 2 \bullet 3 + 1 \bullet 7}{3+4+2+1} =$$

$$\frac{18+16+6+7}{10} = \frac{47}{10} = 4{,}7$$

En ocasiones, a cada uno de los números x_1, x_2, x_3, . . . , x_n se les asigna un peso determinado $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n$. En estos casos, se acostumbra a calcular la media aritmética ponderada del modo siguiente:

$$\bar{x} = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3, + \cdots + \omega_n x_n}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_n} = \frac{\sum \omega x}{\sum \omega}$$

Ejemplo

Un estudiante ha obtenido las calificaciones siguientes:

Asignatura	Nota	Peso
Historia	1	8
Química	7	3
Física	3	3
Matemáticas	6	3
Biología	5	3
Geología	6	2
Dibujo	5	2
Idioma	7	2
Filosofía	4	1

Calcular su nota media ponderada.

Solución

Tendremos

$$\bar{x} = \frac{1.8+3.7+3.3+3.6+3.5+2.6+2.5+2.7+1.4}{1+3+3+3+3+2+2+2+1} =$$

$$= \frac{8+21+9+18+15+12+10+14+4}{20} = \frac{111}{20} = 5{,}55$$

La media aritmética presenta, entre otras, las siguientes propiedades:

La suma algebraica de las desviaciones de un conjunto de números respecto de su media aritmética es cero.

Ejemplo

Comprobar la propiedad anterior con los números 6, 4, 3, 7 y 8.

Solución

La media aritmética de estos números es $\overline{x} = 5{,}6$, tal como se vio anteriormente.

Las desviaciones respectivas son:

6 - 5, 6 = 0.4
4 - 5, 6 = -1.6
3 - 5, 6 = -2.6
7 - 5, 6 = 1.4
8 - 5, 6 = 2.4

La suma algebraica de las desviaciones es: 0.4 - 1.6 - 2.6 + 1.4 + 2.4 = 0 tal como queríamos comprobar.

La suma de los cuadrados de las desviaciones de un conjunto de números respecto de un número cualquiera es mínima cuando dicho número coincide con la media aritmética.

MEDIANA

La mediana de una serie de datos ordenados en orden de magnitud es el valor medio si el número de datos es impar o bien la media aritmética de los dos valores medios si el número de datos es par.

Ejemplo

Hallar la mediana de los números 2, 3, 3, 4, 5, 7, 7, 7, 9.

Solución

Como los números están ordenados en orden creciente de magnitud y hay un número impar de números, la mediana será el valor medio, o sea, 5.

Ejemplo

Hallar la mediana de los números 2, 2, 3, 4, 6, 6, 6, 8.

Solución

Como los números están ordenados en orden creciente de magnitud y hay un número par de números, la mediana será la media aritmética de los dos valores medios, o sea,

$$\frac{(4+6)}{2} = 5$$

MODA

La moda de una serie de números es el valor que se presenta con mayor frecuencia.

La moda puede no ser única e incluso puede no existir.

Ejemplo

Hallar la moda de los números 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7.

Solución

El número que más veces se repite es 5. Por consiguiente, 5 es la moda.

Ejemplo

Hallar la moda de los números 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8.

Solución

Los números que más se repiten son 5 y 7. Por consiguiente, las modas, son 5 y 7.

Ejemplo

Hallar la moda de los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Solución

Ningún número se repite más que los otros. Por consiguiente, no hay moda.

Cuando una distribución presenta una única moda se dice que es unimodal, cuando presenta dos bimodal, etc

MEDIA GEOMÉTRICA

La media geométrica G de una serie de n números x_1, x_2, x_3, . . . , x_n es la raíz enésima del producto de dichos números. Es decir,

$$G = \sqrt[n]{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}$$

Ejemplo

Hallar la media geométrica de los números 3, 9 y 27.

Solución

Tendremos:

$$G = \sqrt[3]{3 \bullet 9 \bullet 27} = \sqrt[3]{729 = 9}$$

MEDIA ARMÓNICA

La media armónica H de una serie de n números $x_1 \bullet x_2 \bullet x_3$, . . . , x_n se define como:

$$H = \frac{1}{1/N \sum_{i=1}^{n} 1/x_i} = \frac{N}{\sum 1/x}$$

Ejemplo

Hallar la media armónica de los números 2, 5 y 10.

$$H = \frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right)} = \frac{3}{\frac{8}{10}}$$

30/8=3,75

MEDIA CUADRÁTICA

La media cuadrática de una serie de *n* números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ se define como:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{N} = \frac{\sqrt{\sum x^2}}{N}$$

Ejemplo

Hallar la media cuadrática de los números 2, 3, 4 y 5.

Solución

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^2}}{N} = \frac{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2} +}{4}$$

$$\sqrt{\frac{4+9+16+25}{4}} = \sqrt{\frac{54}{4}} = \sqrt{13.5} =$$

3.67 aproximadamente.

RANGO O RECORRIDO

Es la diferencia entre los dos valores extremos, máximo y mínimo.

Evidentemente, la dispersión de los datos será tanto mayor cuando mayor sea el recorrido.

El rango o recorrido no es una buena medida de dispersión, puesto que basta con que un dato se aleje mucho de la media para que el rango o recorrido resulte muy afectado, ya que únicamente depende de dos valores, sin que influyan para nada los restantes datos.

Ejemplo

Hallar el rango de la siguiente serie de números: 4, 5, 7, 9, 9, 10, 12, 15.

Solución: El rango será la diferencia entre los valores extremos.

Es decir, 15 - 4 = 11

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión dan idea de la separación de los datos numéricos alrededor de un valor medio.

Las medidas de dispersión más utilizadas son el rango o recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

DESVIACIÓN MEDIA

La desviación media de una serie de *n* números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ se define como:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{N}$$

Ejemplo

Hallar la desviación media de los números 3, 4, 6, 7.

Solución

Tendremos:

$$\bar{x} = \frac{3+4+6+7}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Desviación media:

$$\frac{|3-5| + |4-5| + |6-5| + |7-5|}{4}$$

$$= \frac{|-2| + |-1| \; |1| + |2|}{4} = \frac{2+1+1+2}{4} = \frac{6}{4} = 1.5$$

Los sumandos se toman en valor absoluto para que no se compensen las desviaciones de los datos que superan a la media aritmética con las desviaciones de los datos que son inferiores a ella. La desviación media es una buena medida de dispersión.

En el caso de que los datos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ aparezcan con frecuencias respectivas $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$, la desviación media adopta la expresión

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \, |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum f \, |x - \bar{x}|}{n}$$

La expresión anterior resulta muy útil cuando se dispone de datos agrupados donde los distintos x_i representan las marcas de clase y las f_i las correspondientes frecuencias de clase.

Ejemplo

Hallar la desviación media de los números 3, 3, 3, 4, 6, 6, 7, 7, 7, 7.

Solución

$$\bar{x} = \frac{3 \bullet 3 + 1 \bullet 4 + 2 \bullet 6 + 4 \bullet 7}{3+1+2+4} = \frac{9+4+12+28}{10} = \frac{53}{10} = 5.3$$

Desviación media:

$$\frac{3\,|3-5.3| + 1\,|4-5.3| + 2\,|6-5.3| + 4\,|7-5.3|}{3+1+2+4} =$$

$$= \frac{3\,|-2.3| + 1\,|-1.3| + 2\,|0.7| + 4\,|1.7|}{10} =$$

$$= \frac{3(2.3) + 1(1.3) + 2(0.7) + 4(1.7)}{10} =$$

$$= \frac{6.9 + 1.3 + 1.4 + 6.8}{10} = \frac{16.4}{10} = 1.64$$

VARIANZA

La varianza s^2 de una serie de n números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ viene dada por la expresión.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

Ahora bien, en la práctica los valores x_i son números cómodos de manejar, mientras que la media aritmética x acostumbra a ser un número con varios decimales, por lo que las diferencias $x_i - x$ también suelen ser números decimales, que resultan engorrosos de ser elevados al cuadrado.

Por todo ello, en la práctica se prefiere desarrollar la expresión de la varianza del modo siguiente:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i - \bar{x} + \overline{x^2}\right)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n}$$

Ahora bien, como $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$

Tendremos que:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

De este modo únicamente debe calcularse el cuadrado de un número engorroso, x^2.

Ejemplo

Calcular la varianza de los números 4, 5, 6, 7.

Solución

Tendremos:

$$\bar{x} = \frac{4+5+6+7}{4} = 5.5$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{4^2+5^2+6^2+7^2}{4} - (5.5)^2 =$$

$$= \frac{16+25+36+49}{4} - 30.25 = \frac{126}{4} - 30.25 =$$

$$31.5 - 30.25 = 1.25$$

En el caso de que los datos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ aparezcan con frecuencias respectivas $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$, la varianza adopta la expresión

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum f(x - \bar{x})^2}{n}$$

En la práctica se acostumbra desarrollar esta expresión de modo similar al comentado anteriormente, convirtiéndose la ex-presión anterior en

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \bar{x}^2$$

Ejemplo

Calcular la varianza de los números 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4.

Solución

Tendremos:

$$\bar{x} = \frac{3 \bullet 2 + 2 \bullet 3 + 5 \bullet 4}{3+2+5} = \frac{6+6+20}{10} = \frac{32}{10} = 3.2$$

$$x_i^{22} = (3.2)^2 = 10.24$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \bar{x}^2 = \frac{3(2)^2 + 2(3)^2 + 5(4)^2}{3+2+5} - 10.24 =$$

$$\frac{3 \bullet 4 + 2 \bullet 9 + 5 \bullet 16}{10} - 10.24 =$$

$$\frac{12+18+80}{10} - 10.24 = \frac{110}{10} - 10.24 =$$

$$= 11 - 10.24$$

DESVIACIÓN TÍPICA

La desviación típica de una serie de n números x_1, x_2, x_3, . . . , x_n viene dada por la expresión

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\frac{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2}}{n}$$

Tal como puede observarse, la desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.

En la práctica se calcula la desviación típica mediante la expresión

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2}$$

Ejemplo

Calcular la desviación típica de los números 4, 5, 7, 8.

Solución

Tendremos:

$$\bar{x}=\frac{4+5+7+8}{4}=\frac{24}{4}=6$$

Así pues,

$$s=\sqrt{\frac{4^2+5^2+7^2+8^2}{4}-6^2}=\sqrt{\frac{16+25+49+64}{4}-36}=$$

$$\sqrt{\frac{154}{4}-36}=\sqrt{38.5-36}=\sqrt{2.5}=1.58\text{ aprox}$$

En el caso de que los números x_1, x_2, x_3, . . . , x_n se esenten con frecuencias respectivas f_1, f_2, f_3, . . . , f_n la desviación típica puede calcularse mediante la expresión

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i\ (x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum f\ (x-\bar{x})^2}{n}}$$

En la práctica, se suele desarrollar la expresión anterior, obteniéndose

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i x_i^2}{n}-\bar{x}^2}$$

Ejemplo

Calcular la desviación típica de los números 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7.

Solución

Tendremos:

$$\bar{x}=\frac{3\bullet 4+2\bullet 5+1\bullet 6+4\bullet 7}{3+2+1+4}=$$

$$\frac{12+10+6+28}{10}=\frac{56}{10}=5.6$$

$$s=\sqrt{\frac{3(4)^2+2(5)^2+1(6)^2+4(7)^2}{10}-(5.6)^2}=$$

$$\sqrt{\frac{3\bullet 16+2\bullet 25+1\bullet 36+4\bullet 49}{10}-31.36}=$$

$$=\sqrt{\frac{48+50+36+196}{10}-31.36}=\sqrt{\frac{330}{10}-31.36}=$$

$$\sqrt{33-31.36}=\sqrt{1.64}=1.28\text{ aprox.}$$

EJERCICIOS

1. Las calificaciones de Antonio en 8 materias fueron 6, 5, 7, 6, 8, 5, 9 y 6. Hallar la media aritmética de las calificaciones.

R. 6.5

2. La altura de 12 alumnos de un salón de clase son 165, 163, 161, 168, 151, 159, 161, 160, 164, 155, 160 y 162 cm. Hallar la media aritmética de la altura.

R. 160.75 cm

3. El salario mensual de 6 empleados son $1.000, $1.300, $1.100, $1.150, $1.200 y $970. Hallar la media aritmética de los salarios.

R. $1.120

4. Las temperaturas tomadas en la ciudad de Nueva York el mismo día de cada mes a la misma hora durante un año fueron 1°C, 6°C, 10°C, 14°C, 18°C, 25°C, 30°C, 34°C, 26°C, 19°C, 11°C y 4°C. Hallar la media aritmética de las temperaturas.

R. 16.5°C

5. El tiempo utilizado por 8 atletas en recorrer 100 metros fueron 10.15, 10.18, 10.08, 10.03, 10.11, 10.00, 9.99 y 10.02 segundos. Hallar la media aritmética de los tiempos.

R. 10.07 segundos.

6. En un examen de Matemáticas, 6 estudiantes obtuvieron un 3.8 obtuvieron 4.13 un 5.8 un 6.5 un 7.3 un 8 y 1 un 9. Hallar la media aritmética de las calificaciones.

R. 5.25

7. Al terminar sus estudios de Historia, 60 estudiantes tenían 22 años, 50 tenían 23 años, 17 tenían 24 años y 8 tenían 25 años. Hallar la media aritmética de las edades.
R. 22.8 años

8. Cuatro grupos de alumnos, formados por grupos de 8, 10, 12 y 10 cada uno, registraron una media de pesos de 65, 70, 75 y 80 kg, respectivamente. Hallar el peso medio de todos los alumnos.
R. 73 kilogramos

9. De un total de 100 objetos, 15 eran 4, 45 eran 5, 25 eran 6 y 15 eran 7. Hallar la media aritmética de los objetos.
R. 5.4

10. En un compañía hay 50 trabajadores, 30 de los cuales son casados y 20 solteros. Si el salario mensual de un casado es de $1.200 y el de un soltero $1.000, ¿cuál es el salario medio de un trabajador de la compañía?
R. $1.120

11. En el Problema 1, hallar la mediana de las calificaciones.
R. 6

12. En el Problema 2, hallar la mediana de la altura.
R. 161 cm

13. En el Problema 3, hallar la mediana de los salarios mensuales.
R. $1.125

14. Encontrar las temperaturas del Problema 4.
R. 16°C

15. Hallar la mediana de los tiempos del Problema 5.
R. 10.055 segundos

16. Obtener la mediana de las calificaciones del Problema 6.
R. 5

17. Encontrar la mediana de las edades del Problema 7.
R. 23 años.

18. En el Problema 8, hallar la mediana de los pesos.
R. 75 kg

19. Encontrar la mediana de los objetos del Problema 9.
R. 5

20. Hallar la mediana de los salarios del Problema 10.
R. $1.200

21. Hallar la moda de las calificaciones del Problema 1.
R. 6

22. Obtener la moda de la altura del Problema 2.
R. 160 y 161 cm

23. En el Problema 3, hallar la moda de los salarios mensuales.
R. No existe.

24. Encontrar la moda de las temperaturas del Problema 4.
R. No existe.

25. Hallar la moda de los tiempos del Problema 5.
R. No existe.

26. Obtener la moda de las calificaciones del Problema 6.
R. 5

27. En el Problema 7, hallar la moda de las edades.
R. 22 años

28. Encontrar la moda de los objetos del Problema 9.
R. 5

29. Hallar la moda de los salarios del Problema 10.
R. $1.200

30. Hallar, con aproximación de centésimas, la media geométrica de las calificaciones del Problema 1. **R.** 6.37

31. Obtener, con aproximación de centésimas, la media geométrica de la altura del Problema 2.**R.** 160.69 cm

32. Encontrar, con aproximación de centésimas, la media geométrica de los salarios mensuales del Problema 3.
R. $1.114.29

33. En el Problema 4, hallar, con aproximación de centésimas, la media geométrica de las temperaturas.
R. 11.94°C

34. Obtener, con aproximación de centésimas, la media geométrica de los tiempos del Problema 5.
R. 10.07 segundos

35. Hallar, con aproximación de centésimas, la media geométrica de las calificaciones del Problema 6.
R. 5.03

36. Encontrar, con aproximación de centésimas, la media geométrica de las edades del Problema 7.
R. 22,78 años

37. En el Problema 9, obtener, con aproximación de centésimas, la media geométrica de los objetos.
R. 5.32

38. Obtener, con aproximación de centésimas, la media geométrica de los salarios del Problema 10.
R. $1.115.60

39. Hallar, con aproximación de centésimas, la media armónica de las calificaciones del Problema 1.
R. 6.26

40. Encontrar, con aproximación de centésimas, la media armónica de la altura del Problema 2.
R. 160.63 cm

41. En el Problema 3, hallar, con aproximación de centésimas, la media armónica de los salarios mensuales.
R. $1.108.62

42. Obtener, con aproximación de centésimas, la media armónica de las temperaturas del Problema 4.
R. 6.22

43. Hallar, con aproximación de centésimas, la media armónica de los tiempos del Problema 5.
R. 10.07 segundos.

44. Encontrar, con aproximación de centésimas, la media armónica de las calificaciones del Problema 6.
R. 4.82

45. Obtener, con aproximación de centésimas, la media armónica de las edades del Problema 7.
R. 22.77 años

46. En el Problema 9, hallar, con aproximación de centésimas, la media armónica de los objetos.
R. 5.25

47. Hallar, con aproximación de centésimas, la media armónica de los salarios del Problema 10.
R. $1.111.11

48. Hallar, con aproximación de centésimas, la media cuadrática de las calificaciones del Problema 1.
R. 6.63

49. En el Problema 2, hallar, con aproximación de centésimas, la media cuadrática de la altura.
R. 160.81 cm

50. Obtener, con aproximación de centésimas, la media cuadrática de los salarios mensuales del Problema 3.
R. $1.125.71

51. Obtener, con aproximación de centésimas, la media cuadrática de las temperaturas del Problema 4.
R. 19.39°C

52. Encontrar, con aproximación de centésimas, la media cuadrática de los tiempos del Problema 5.
R. 10.07 segundos

53. Hallar, con aproximación de centésimas, la media cuadrática de las calificaciones del Problema 6.
R. 5.41

54. En el Problema 7, hallar, con aproximación de centésimas, la media cuadrática de las edades.
R. 22.82 años

55. Encontrar, con aproximación de centésimas, la media cuadrática de los objetos del Problema 9.
R. 5.48

56. Obtener, con aproximación de centésimas, la media cuadrática de los salarios del Problema 10.
R. $1.124.28.

57. Hallar el rango de las calificaciones del Problema 1.
R. 4

58. En el Problema 2, hallar el rango de la altura del Problema 2.
R. 17 cm

59. Obtener el rango de los salarios mensuales del Problema 3.
R. $330

60. Encontrar el rango de las temperaturas del Problema 4.
R. 33°C

61. Hallar el rango de los tiempos del Problema 5.
R. 0.19 segundos

62. En el Problema 6, hallar el rango de las calificaciones del Problema 6.
R. 6

63. Obtener el rango de las edades del Problema 7.
R. 3 años

64. Encontrar el rango de los objetos del Problema 9.
R. 3

65. Hallar el rango de los salarios del Problema 10.
R. $200

66. Hallar, con aproximación a centésimas, la desviación media de las calificaciones del Problema1.
R. 1.12

67. En el Problema 2, hallar, con aproximación a centésimas, la desviación media de la altura.
R. 3.12 cm

68. Encontrar, con aproximación a centésimas, la desviación media de los salarios mensuales del Problema 3.
R. $96.67

69. Obtener, con aproximación a centésimas, la desviación media de las temperaturas del Problema 4.
R. 8.83°C

70. Obtener, con aproximación a centésimas, la desviación media de los tiempos del Problema 5.
R. 0.06 segundos

71. En el Problema 6, hallar, con aproximación a centésimas, la desviación media de las calificaciones.
R. 1.22

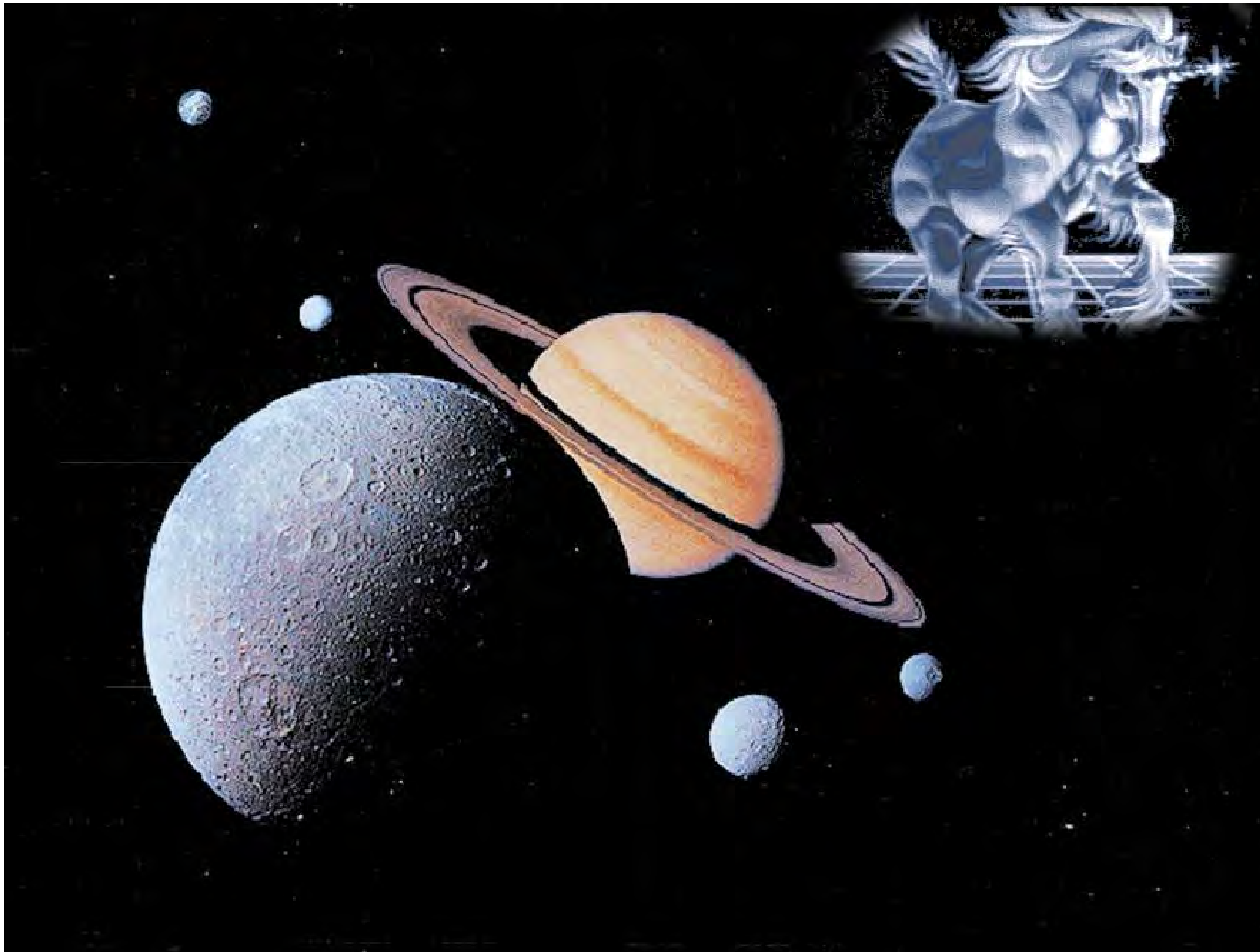
72. Hallar, con aproximación a centésimas, la desviación media de las edades del Problema 7.
R. 0.71 años

73. Encontrar, con aproximación a centésimas, la desviación media de los objetos del Problema 9.
R. 0.78

74. Obtener, con aproximación a centésimas, la desviación media de los salarios del Problema 10.
R. $96

75. Hallar, con aproximación de centésimas, la desviación típica de las calificaciones del Problema 1.
R. 1.32

76. En el Problema 2, hallar, con aproximación de centésimas, la desviación típica de la altura.
R. 4.28 cm



Por medio de la observación del juego de dados, la Probabilidad se convirtió en una rama de la matemática pura y aplicada. En el siglo XIX, Fermat en su obra "Teoría analítica de la probabilidad", y en el siglo XX, Kolmogorov, convirtieron la probabilidad en una ciencia.

CAPÍTULO II

PROBABILIDAD

Inicialmente, la probabilidad comenzó siendo una colección de observaciones respecto del juego de dados; con el tiempo se ha convertido en una rama importantísima de las matemáticas.

Es el estudio de los hechos morales y físicos del mundo, y su conjunto expresado en guarismos y presentado en cuadros o tablas como materia de comparación y deducción. Ahora bien como no es posible tener la seguridad absoluta de la veracidad de dichas inferencias frecuentemente se emplea el término **probabilidad** para hablar de estas conclusiones.

La teoría probabilística tiene tal auge en el conocimiento humano que su aplicación práctica se manifiesta en casi todas las áreas del saber.

NOCIONES DE COMBINATORIA

Aunque no es necesario saber combinatoria para calcular probabilidades, nos parece que un buen conocimiento de la misma permite resolver muchos problemas de probabilidad de forma especialmente rápida y elegante. A continuación se hace una breve introducción sobre sus resultados más importantes.

VARIACIONES

Las variaciones de *m* elementos, tomados de *n* en *n*, son las distintas agrupaciones de *n* elementos que se pueden formar con los *m* elementos y que difieren, unas de otras, en algún elemento o en el orden.

Número de variaciones sin repetición:

$$V_{m,n} = m \bullet (m-1) \bullet (m-2) \bullet \ldots \bullet (\text{m - n} + 1)$$

Número de variaciones con repetición:

$$VR_{m,n} = m^n$$

Ejemplo

Supongamos una caja con una bola blanca, una negra y una roja iguales en tamaño.

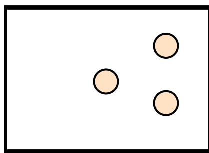


Figura 17

Número de formas de extraer dos bolas sin reemplazamiento:

$$V_{3,2} = 3 \bullet 2 = 6$$

Número de formas de extraer dos bolas con reemplazamiento: $VR_{3,2} = 3^2 = 9$

Indicación: Las extracciones son con o sin reemplazamiento dependiendo de si volvemos a introducir en la urna la primera bola extraída antes de sacar la segunda.

Ejemplo

El número de quinielas de fútbol que hay que hacer para acertar el pleno al quince con seguridad es:

$$VR_{3,15} = 3^{15} = 14.348.907$$

Ejemplo

Con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de dos cifras distintas pueden formarse?

En total son $V_{5,2} = 5 \bullet 4 = 20$ números

Ejemplo

Tres amigos deciden comprarse un helado para cada uno. En la heladería los hay de seis sabores diferentes.

El número de elecciones posibles es: $VR_{6,3} = 6^3 = 216$

PERMUTACIONES

Las permutaciones de *n* elementos son las distintas formas en que pueden ordenarse dichos *n* elementos.

Las permutaciones de n elementos son:

$P_n = V_{n,n} = n! = n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \ldots \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1$

Ejemplo

¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1, 3 y 5?

Hay $P_3 = 3! = 6$ números

COMBINACIONES

Las combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n* son los distintos subconjuntos de *n* elementos que se pueden formar con los *m* elementos (no influye el orden de colocación).

El número de combinación es:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

Ejemplo

¿Cuántas parejas distintas pueden formarse con cinco individuos?

$$C_{5,2} = \frac{V_{5,2}}{P_2} = \frac{5 \bullet 4}{2} = 10 \text{ parejas}$$

Ejemplo

¿Cuántos boletos sencillos de lotería primitiva hay que rellenar para acertar con seguridad los seis números?

$$C_{49,6} = \frac{V_{49,6}}{P_6} = \frac{49 \bullet 48 \bullet 47 \bullet 46 \bullet 45 \bullet 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816 \text{ boletos}$$

Ejemplo

En una carrera compiten 10 corredores y se clasifican los tres primeros para la fase siguiente.

¿De cuántas maneras diferentes puede producirse la clasificación?

Solución

$$C_{10,3} = \frac{V_{10,3}}{P_3} = \frac{10 \bullet 9 \bullet 8}{3 \bullet 2} =$$

120 formas diferentes.

En todos los problemas de combinatoria hay varios aspectos a considerar. Cuando se trata de formar agrupaciones de elementos hay que preguntarse dos cosas importantes:

- ¿Se permite o no que los elementos se repitan?
- El orden en que se agrupan los elementos, ¿cuenta o no?

La respuesta a estas preguntas dependerá del enunciado del problema:

	Influye el orden	¿Puede haber repetición	Fórmula
$VR_{m,n}$ Variaciones con repetición	Sí	Sí	m^n
$V_{m,n}$ Variaciones sin repetición	Sí	No	$\overbrace{m \cdot (m-1) \cdot \ldots}^{n \text{ factores}}$
P_n Permutaciones	Sí	No	$m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$C_{m,n}$ Combinaciones	No	No	$\frac{V_{m,n}}{n!}$

Tanto las variaciones como las permutaciones pueden ser expresadas mediante factoriales.

Si en la fórmula $V_{m,n} = \overbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}^{n \text{ factores}}$ multiplicamos y dividimos por $(m-n)!$ obtenemos:

$$V_{m,n} = \frac{m \bullet (m-1) \bullet (m-2) \bullet \ldots \bullet (m-n+1) \bullet (m-n)!}{(m-n)!} =$$

$$\frac{m \bullet (m-1) \bullet \ldots \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1}{(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!} \quad V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Para las combinaciones tendríamos:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{p_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

A los valores de $C_{m,n}$ se les llama **números combinatorios** y se les designa por $\binom{m}{n}$. Es decir: $C_{m,n} = \binom{m}{n}$

Comprobar que los elementos del siguiente triángulo son números combinatorios:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 **10** 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 **21** 7 1

Los dos números que aparecen en negrita son: $\binom{5}{2} = 6 \; y \; \binom{7}{5} = 21$

Esta configuración llamada **triángulo de Tartaglia**, se forma poniendo "unos" al principio y 1 final de cada fila y obteniendo los restantes términos como suma de los dos que tiene sobre él. De este modo se obtienen con mucha facilidad los números combinatorios.

PROPIEDADES

1. $0! = 1$ (por convenio)

2. $\binom{1}{0} = 1;\ \binom{2}{1} = 1;\ \binom{3}{0} = 1; \ldots;$

$\binom{m}{0} = 1$

3. $\binom{1}{1} = 1; \binom{2}{1} = 2; \binom{3}{1} = 3; \ldots;$

$\binom{m}{1} = m$

4. $\binom{1}{1} = 1; \binom{2}{2} = 1; \binom{3}{3} = 1; \ldots;$

$\binom{m}{m} = 1$

5. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

Ejemplo

$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \bullet 9}{2} = 45;$

$\binom{22}{21} = \binom{22}{1} = 22$

EXPERIMENTOS ALEATORIOS. SUCESOS

Llamamos experimentos aleatorios a aquellos cuyos resultados no pueden predecirse antes de su realización. Son experimentos que no dan siempre el mismo resultado al repetirlos en las mismas condiciones.

Ejemplos

- Tirar al aire un dado o una moneda.
- Predecir la duración de una conversación telefónica.
- Lanzar un proyectil hacia un blanco determinado.

Un suceso elemental es el resultado de cada una de las realizaciones del experimento aleatorio.

Ejemplos

- Al lanzar un dado y anotar el resultado de la cara superior, se pueden obtener los siguientes sucesos elementales.

$\omega_1 = \{1\}$; $\omega_2 = \{2\}$; $\omega_3 = \{3\}$;

$\omega_4 = \{4\}$; $\omega_5 = \{5\}$; $\omega_6 = \{6\}$

- Se tiran dos monedas al aire y se anotan los resultados. Los sucesos elementales son:

ω_1 = "obtener cara y cara" =(C, C);

$\omega_2 = (C\ ,+)$; w $_3 = (+\ , C\ )$;

$\omega_4 = (+\ ,+)$

Al conjunto de todos los sucesos elementales se le llama espacio muestral, y se representa por la letra Ω (omega mayúscula).

Ejemplos

- En el primer ejemplo de los anteriores, el espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- En el segundo ejemplo, el espacio muestral es $\Omega = \{(C, +), (+, C\ ), (+, +)\}$

Llamamos suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Se dice que se ha producido el suceso A si el resultado del experimento es un elemento de A.

Ejemplos

1. En el ejemplo consistente en lanzar un dado, algunos sucesos son:

   A: "obtener número par"

   B: "obtener número primo"

   C: "obtener número impar menor que 5"

2. Al lanzar tres monedas, son sucesos:

   A: "obtener al menos una cara"
   B: "obtener como máximo una cruz"
   C: "obtener exactamente dos caras"

Como se observa, cada suceso está compuesto por varios sucesos elementales

Cualquier suceso que sea igual al conjunto vacío $\varnothing$ se llama suceso imposible y, por tanto, será un suceso que no se produce nunca. Cualquier suceso que sea igual al espacio muestral Ω suceso seguro (es el suceso que ocurre siempre).

Ejemplos

1. En el lanzamiento de un dado es un suceso imposible el obtener un número negativo; y es un suceso seguro obtener un número menor que 8.

2. En el lanzamiento de una moneda, obtener cara y cruz es un suceso imposible, y es suceso seguro el obtener cara o cruz.

Decimos que el suceso A está contenido en el suceso B, escrito $A \subset B$, si siempre que se verifica A también se verifica B.

Ejemplo

Al lanzar un dado consideramos los sucesos A : "obtener 6", y B : "obtener múltiplo de 3". Es claro que $A \subset B$, pero en cambio $B \not\subset A$ pues si, por ejemplo, se obtiene 3, se verifica B pero no A.

OPERACIONES CON SUCESOS

Dados dos sucesos A y B, se llama:

Suceso unión designado $A \cup B$, al que se verifica cuando se verifica alguno de los dos (A o B).

Suceso intersección, designado $A \cap B$, al que se verifica cuando se verifican simultáneamente los dos (A y B).

Suceso contrario del suceso A, designado A^c, al suceso que se verifica siempre que no se produce A.

Ejemplo

En el experimento aleatorio "lanzar un dado", sean los sucesos:

P : "obtener número par"
T : "obtener múltiplo de 3"
Se tiene que:

$P \cup T = \{2, 3, 4, 6\}$; $P \cap T = \{6\}$;
$P^C = \{1, 3, 5\}$; $T^C = \{1, 2, 4, 5\}$

PROPIEDADES

1. Asociatividad: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
2. Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$ $\quad A \cap B = B \cap A$
3. Simplificación: $A \cup (B \cap A) = A$ $\quad A \cap (B \cup A) = A$
4. Idempotencia: $A \cup A = A$ $\quad A \cap A = A$
5. Complementación: $A \cup A^C = \Omega$ $\quad A \cap A^C = \phi$
6. Universal e ínfimo: $A \cup \Omega = \Omega$ $\quad A \cap \Omega = A$

$$A \cup \phi = A \qquad A \cap \phi = \phi$$

7. Distributiva: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

8. Leyes de Morgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ $\quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Ejemplo

Comprobar las leyes de Morgan en el experimento consistente en lanzar un dado para los sucesos:

A : "obtener número par"

B : "obtener un número no inferior a 5"

Decimos que dos sucesos A y B son incompatibles si no pueden verificarse simultáneamente; es decir, si $A \cap B = \phi$.

FRECUENCIAS. LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Repetimos un experimento aleatorio n veces. Sea A un suceso ligado al experimento que aparece n_A veces.

Se llama **frecuencia absoluta** del suceso A al número de veces n_A que se verifica A a lo largo de las n repeticiones del experimento.

Se llama **frecuencia relativa** del suceso A al cociente f_A entre la frecuencia absoluta y el número total de pruebas realizadas; es decir,

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

Ejemplo

Se lanza un dado veinte veces y se obtiene en cuatro ocasiones un "5". La frecuencia absoluta del suceso "obtener un 5" es 4; y su frecuencia relativa es $\frac{4}{20} = 0,2$.

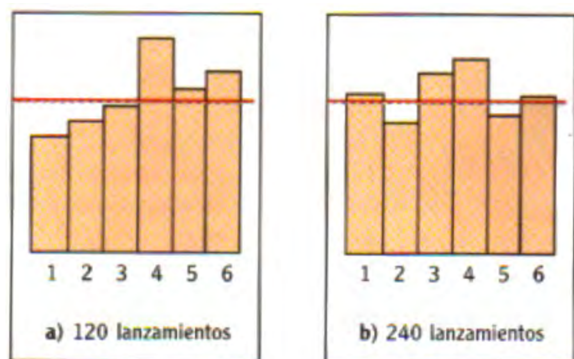
¿Es posible dar leyes que regulen el azar?

La palabra **azaroso** se utiliza como sinónimo de imprevisible. El azar es considerado como lo más opuesto al orden, a cualquier regla, a toda previsión. ¿Cómo poner leyes a algo imprevisible? Veamos un ejemplo:

En una clase de 40 alumnos cada uno de ellos lanzó un dado 120 veces. Los resultados se juntaron cada dos; después cada 10; después los 40.

He aquí las gráficas con las frecuencias relativas en cada caso. Aparece una línea recta a la altura $\frac{1}{6} = 0,167$

para que se pueda comparar, en cada caso, la frecuencia relativa obtenida con la frecuencia esperada, que es $\frac{1}{6}$.



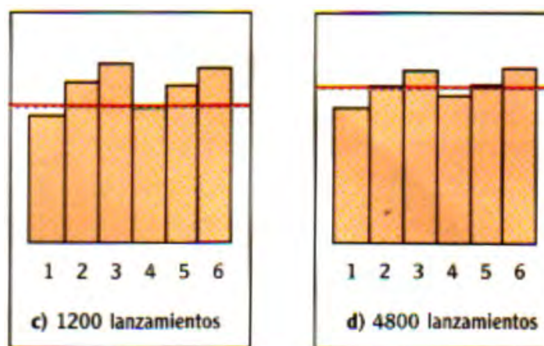


Figura 18

Las gráficas hablan por sí solas. También resulta elocuente la siguiente gráfica, que da la frecuencia relativa del {3} al lanzar un dado reiteradamente.

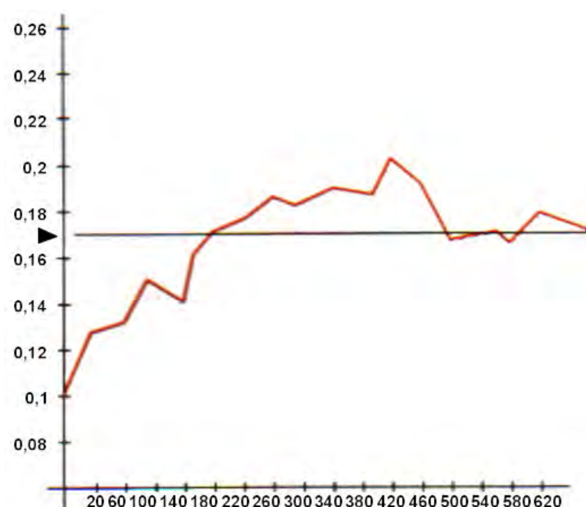


Figura 19

Que la frecuencia relativa se va estabilizando cuando aumenta el número de experiencias, es una verdad empírica, no demostrable, pero sí reiteradamente comprobable.

Su enunciado es el principio básico del azar, llamado ley de los grandes números:

Si el número de observaciones de un fenómeno aleatorio crece mucho, la frecuencia relativa del suceso asociado se va acercando más y más hacia un cierto valor.

Este valor se llama **probabilidad** del suceso.

DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

La probabilidad es un número que se asigna a cada suceso, y que ha de cumplir con las siguientes condiciones:

Ax I. Para cualquier suceso *S*, debe cumplirse que

$$p(S) \geq 0$$

Ax II. Si dos sucesos son incompatibles, $A \cap B = \varnothing$, entonces la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Ax III. La probabilidad total es 1:

$$p\ (\Omega) = 1$$

En esencia, los tres axiomas dicen que disponemos de una cantidad total de probabilidad igual a 1, que hemos de repartir aditivamente entre los distintos sucesos.

Propiedades

Se deducen a partir de los axiomas.

1. Si *A y B* son dos sucesos tales que $A \subset B$, entonces $p(A) \leq p(B)$.

Demostración

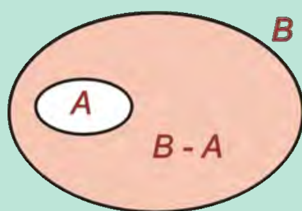


Figura 20

A partir del gráfico deducimos $B = A \cup (B - A)$, y como A y $B - A$ son sucesos incompatibles se tiene, por el Ax II, que $P(B) = p(A) + p(B - A)$. Por ser siempre $p(B - A) \geq 0$, deducimos que $p(B) \geq p(A)$.

2. $p(A^c) = 1 - p(A)$

Demostración: Dado que $A \cup A^C = \Omega$ y $A \cap A^C = \varnothing$, se tiene que

$$1 = p(\Omega) = p(A) + p(A^c) \rightarrow$$
$$p(A^c) = 1 - p(A)$$

3. $p(\varnothing) = 0$

Demostración: Dado que $\varnothing = \Omega^C \rightarrow p(\varnothing) = 1 - p(\Omega) = 1 - 1 = 0$

4. Para cualquier suceso A, se tiene que $0 \leq p(A) \leq 1$.

Demostración: Como $A \subset \Omega \rightarrow p(A) \leq p(\Omega) = 1$

5. Para dos sucesos cualesquiera *A* y *B*, se tiene que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Demostración

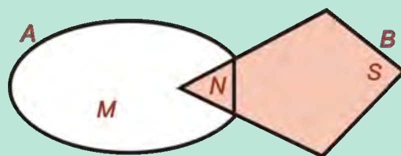


Figura 21

Descomponiendo $A \cup B$ en tres conjuntos disjuntos *M*, *N* y *S* tal como aparece en la figura obtenemos:

$$A = M \cup N \} \rightarrow p(A) = p(M) + p(N) \}$$
$$B = N \cup S \rightarrow p(B) = p(N) + p(S)$$
$$A \cap B = N \rightarrow p(A \cap B) = p(N)$$
$$A \cup B = M \cup N \cup S \rightarrow$$
$$p(A \cup B) = p(M) + p(N) + p(S)$$
$$p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$$
$$p(M) + p(N) + p(N) + p(S) - p(N) =$$
$$p(M) + p(N) + p(S) = p(A \cup B)$$

6. Supongamos que el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ es finito y que los sucesos elementales $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ son equiprobables, es decir:

$$p(\omega 1) = p(\omega 2) = ... = p(\omega n)$$

Entonces:

$$1 = p(\Omega) = p(\omega_1 \cup \omega_2 \cup ... \cup \omega_n) =$$
$$p(\omega_1) + p(\omega_2) + ... + p(\omega_n) = n \bullet$$
$p(\omega_1)$ luego, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$
$$p(\omega_i) = 1/n$$

Consideremos ahora un suceso cualquiera $S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}$. Para este suceso:

$$p(S) = p(\omega_1 \cup ... \cup \omega_k) =$$
$$p(\omega_1) + ... + p(\omega_k) =$$
$$(1/n) + (1/n) + ... + (1/n) = k/n$$

Llegamos así a la definición clásica de probabilidad, llamada **Ley de Laplace**:

$$p(S) = \frac{\text{numeros de casos favorables}}{\text{numero de casos posibles}}$$

Ejemplo

Hallar la probabilidad de que sacar un Rey al extraer una carta de una baraja de 40 cartas.

Solución

Los casos posibles (total de sucesos elementales) son 40 (total de cartas de la baraja).

Los casos favorables (sucesos elementales que provocan un Rey) son 4 (los cuatro reyes de la baraja). Por tanto:

$$p(\text{rey}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

Ejemplo

Se lanzan sucesivamente cuatro monedas al aire. Calcular:

a) La probabilidad de obtener exactamente dos caras.

b) La probabilidad de obtener a lo sumo tres cruces.

Solución

Los casos posibles (total de disposiciones de cuatro elementos formados por caras y cruces) son:

$$VR_{2,4} = 2^4 = 16$$

Los casos favorables a "obtener exactamente dos caras" son:

{$CC++$, $C+C+$, $C++C$, $+CC+$, $+C+C$, $++CC$}. En total: 6

Por tanto:

p (exactamente dos caras) = $\frac{6}{16}$ = $\frac{3}{8}$

Dado que los casos favorables a "obtener a lo sumo tres cruces" (ninguna, una, dos o tres) son muy numerosos, resulta muy útil recurrir al suceso contrario -en este caso "obtener cuatro cruces"-.

Según la propiedad 2:

p (a lo sumo tres cruces) = 1 - p (cuatro cruces). El único caso favorable a "obtener cuatro cruces" es {+ + + +}, por tanto:
p (a lo sumo tres cruces) = 1 - p (cuatro cruces) = $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

EJERCICIOS

1. Encuentra cuál es el espacio muestral correspondiente a las siguientes experiencias aleatorias. Si es finita y cuántos elementos. Escribe el número total.

a) Tomamos una carta de una baraja española (40 cartas) y anotamos el número.

b) Agarramos una carta de una baraja española y anotamos el palo.

c) Extraemos dos cartas de una baraja y anotamos el palo de cada una.

d) Lanzamos dos monedas y anotamos el resultado.

e) Lanzamos tres monedas y anotamos el resultado.

f) Lanzamos seis monedas y anotamos el resultado.

g) Lanzamos seis monedas y anotamos el número de caras.

h) Lanzamos un dado tantas veces como sea necesario hasta que salga un 5. Anotamos el número de tiradas que realizamos.

i) En un teléfono de una oficina, anotamos el tiempo que media entre dos llamadas.

R. a) Ω ={1,2,3,4,5,6,7,10,11,12}

b) Ω ={Oros,Copas,Espadas, Bastos} = {O, C, E_S, B}

c) Ω = {OO,OC,OE_S,OB,CC, CE_S,CB,E_SE_S,E_SB,BB }

d) Ω = {CC , $C+$, $+C$, $++$}; C = cara; $+$ = cruz.

e) Ω = {CCC,$CC+$,$C+C$,$C++$, $+CC$, $+C+$, $+C+$}.

f) Ω = tiene 32 elementos.

g) Ω = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

h) {1, 2, 3, 4, . . . , . . .} infinito

i) Infinito.

2. Pon todos los sucesos de la experiencia del ejercicio anterior letra b.
R. ∅, {O }, {C }; {E_S}; {B}; {O, C}; {O, B}; {C, E_S}; {C, B}; {E_S , B}; {O, C , E_S}; {O, C , B}; {O, E_S, B}; {C, E_S , B}; E

3. En una baraja hemos suprimido varias cartas. Entre las que quedan se dan las siguientes probabilidades de ser ex-traídas: P [rey] = 0.15; P [bastos] = 0.3

¿Está entre ellas el rey de bastos? Caso afirmativo, da su probabilidad. ¿Cuántas cartas quedan?

R. P [rey o bastos] = P [rey] + P [bastos] -P [rey bastos]. P [rey o bastos] = 1 - P [ni rey ni bastos] = 1- 0.6 = 0.4. Por tanto: P [rey y bastos] = P [rey] + P [bastos] -P [rey o bastos] = 0.15 + 0.3 – 0.4 = 0.05. Es decir, la probabilidad del rey de bastos es 0,005. Como 0,05= $\frac{1}{20}$, significa que quedan 20 cartas, una de las cuales es el rey de bastos.

4. Tiramos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de cada una de las posibles sumas?

R. $P[2] = \frac{1}{36}$; $P[3] = \frac{1}{18}$; $P[4]\frac{1}{12}$

P [5] = $\frac{1}{9}$; $P[6] = \frac{5}{36}$; $P[7] = \frac{1}{6}$;

P [8] = $\frac{5}{32}$; $P[9] = \frac{1}{9}$; $P[10] = \frac{1}{12}$

P [11] = $\frac{1}{18}$; $P[12] = \frac{1}{36}$

5. A, B, y C son tres sucesos de una misma experiencia. Expresa en función de ellos los sucesos:

a) Se realiza alguno de los tres.
b) No se realiza ninguno de los tres. c) Se realizan los tres.
d) Se realizan dos de los tres.
e) Se realizan al menos dos de los tres.

R. a) $A \cup B \cup C$

b) $A^C \cap B^C \cap C^C$

c) $A \cap B \cap C$

d) $(A\cap B)\cup(A\cap C) \cup (B\cap C)-(A\cap B \cap C)$

e) $(A\cap B) \cup(A\cap C) \cup (B\cap C)$

6. En familias de tres hijos se estudia la distribución de sus sexos. Por ejemplo (V, M, M) significa que el mayor es varón y los otros dos mujeres. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral Ω? Describe los siguientes sucesos:

A = "La menor es mujer"
B = "El mayor es varón"
¿En que consiste $A \cup B$
R. E tiene 8 elementos.
A = "la menor es mujer" = {[VVM), (VMM), (MVM), (MMM)}
B = {(VMM), (VMV), (VVM), (VVV)}

$A \cup B$ es el suceso que consiste en que el mayor sea varón o la menor mujer, o ambas cosas.

7. Se lanzan simultáneamente cuatro monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener, por lo menos, una cara?
R. $\frac{15}{16}$

8. Sean A, B, C, sucesos arbitrarios de un experimento aleatorio. Expresar mediante A, B y C el suceso: "ocurren exactamente dos sucesos de los A, B y C .

R. $(A\cap B \cap C^C) \cup(A\cap B^C \cap C)\cup(A^C \cap B \cap C)$

9. Las letras de la palabra CLASE se colocan al azar y en línea. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos vocales queden juntas? Razonarlo.
R. $\frac{2}{5}$

10. Se realiza el experimento aleatorio de lanzar sucesivamente cuatro monedas al aire y se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo sumo tres cruces?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras?

R. a) 15/16 **b)** 6/16

11. Una clase se compone de veinte alumnos y diez alumnas. La mitad de que al elegir una persona al azar, resulte ser:

a) Alumna que apruebe historia.

b) Alumno que suspenda historia.

R. a) 1/6 **b)** 1/3

12. Sean *A* y *B* dos sucesos tales que

$P(A\cup B)=\frac{3}{4}, p(B)=\frac{2}{3}, y$

$P(A\cup B)=\frac{1}{4}$.Hallar

$P(B), P(A)\ y\ P(A\cap B)$

R. $\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{12}$

13. Determinar si son compatibles o incompatibles los sucesos *A* y *B* en los siguientes casos:

a) $P(A)=\frac{1}{4}; P(B)=\frac{1}{2};$

$P(A\cup B)=\frac{2}{3}$

b) $P(A)=0; P(B)=\frac{1}{2}$

R. a) Compatibles.

b) incompatibles.

14. Considérese $P(A)=\frac{2}{5}; P(B)=\frac{1}{3}$

$y\ P(A\cap B)=\frac{1}{3}$.Hallar $P(A\cup B)$

$y\ P(A\cap B)$.

R. $\frac{2}{3};\frac{1}{15}$

15. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un 6 al lanzar un dado *n* veces?

R. $\frac{1}{2};1-\frac{1}{6^n}$

16. Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es *p*, ¿cuánto vale la probabilidad de que al menos uno de los dos no ocurra? Razonarlo.

R. $1-P$; $P(A\cup B)=P(A\cap B)$

$=-1P(A\cap B)$

17. Se lanzan dos monedas y sean *A* = [salgan 2 caras], *B* = [salgan 2 cruces] y *C* = [salgan una cara y una cruz]. Obtener los siguientes sucesos:

a) $A\cup B$
b) $A\cap C$
c) $A-B$
d) A^c
e) C^c
f) $(A\cup B)^c$
g) $A\cup B\cup C$
h) $A\cap B\cap C$

R. a) $\{CC, XX\}$
b) ϕ
c) $\{CC\}$
d) $\{CX, XC, XX\}$
e) $\{CC, XX\}$
f) $\{CX, XC\}$
g) Ω
h) ϕ

18. En un concurso de tiro al blanco un participante realiza 4 disparos. Sean *A* = [acierta al menos tres tiros], *B* = [acierta tantos o más tiros de los que falla] y *C* = [falla dos o más tiros]. Obtener los siguientes sucesos:

a) $A\cap B$

b) $A\cup(B\cap C)$

c) B^c

d) $C-B$

R. a) A
b) [acierte al menos 2]
c) [falle más que acierte]
d) [falle al menos 3 tiros}

19. En una tienda de descuento hay una caja con camisetas, de las cuales 4 son blancas, 6 rojas, 5 verdes 2 amarillas y 3 violetas. Un dependiente coge una camiseta al azar. Calcular las probabilidades de que la camiseta:

a) Sea blanca.
b) Sea verde o violeta.
c) No sea amarilla.
d) Sea beige.
e) Sea blanca, verde o amarilla.

R. a) 4/20
b) 8/20
c) 1 – 2/20 = 18/20
d) 0
e) 11/20

20. En una ciudad el 20% tiene menos de 25 años, el 40% tiene entre 26 y 35 años, el 15% tiene entre 36 y 55 años, el 17% tiene entre 56 y 65 años y el 8% tiene más de 65 años. Se pregunta al azar a una persona su edad. Calcular las siguientes probabilidades:

a) Sea mayor de 65 años.
b) Tenga menos de 55 años.
c) Tenga al menos 56 años.
d) Tenga menos de 25 años o más de 65 años.
e) Tenga 40 años.

R. a) 8/100
b) 75/100
c) 25/100
d) 28/100
e) No hay datos suficientes

21. Si una persona escribe al azar un número de tres cifras, hallar la probabilidad de que escriba:

a) 123.
b) Un número terminado en dos ceros.
c) Un número mayor que 300
d) Un número par y que empieza por 5.

R. a) 1/1000
b) 10/1000
c) 699/1000
d) 50/100

22. Se toma al azar una ficha de domino y se suman sus puntos. Calcular la probabilidad de que la suma sea:

a) 0
b) 12
c) 2
d) Par.
e) Mayor que 10.
f) Impar y menor que 7.
g) Mayor que 3 y menor o igual a 5.
h) Menor que 12.
i) Mayor que 0 y menor que 12.

R. a) 1/28
b) 1/28
c) 2/28
d) 14/28
e) 2/28
f) 6/28
g) 6/28
h) 27/28
i) 26/28

23. De una baraja española (40 cartas) se destapa una carta que es el 3 de bastos, se extrae otra carta al azar. Calcular las probabilidades:

a) Que sea del mismo palo.
b) Que sea de distinto palo.
c) Que sea de numeración más alta.
R. a) 9/39
b) 30/39
c) 28/39

24. Sobre un tablero de ajedrez se coloca al azar en una casilla un peón negro. Calcular las probabilidades de los sucesos:

a) Caiga en un cuadro blanco.
b) Sea comido por una torre blanca situada en un vértice del tablero.
c) Sea comido por un alfil blanco situado en un vértice del tablero.
d) Sea comido por la reina blanca situada en un vértice del tablero.
R. a) 32/64
b) 14/64
c) 7/64
d) 21/64

25. Se pulsan 4 teclas numéricas de una calculadora y aparece en la pantalla un número de 4 cifras. Calcular la probabilidad de que dicho número sea:
a) Par.
b) Mayor o igual que 2.000.
c) Tenga las cuatro cifras iguales.
d) Termine en 6.
e) Sea múltiplo de 5 y 10.
f) Sea múltiplo de 7 y 11 y menor
que 3.000.
g) Sea capicúa.
R. a) 5000/10000
b) 8000/10000
c) 10/10000
d) 1000/10000
e) 2000/10000
f) 38/10000
g) 100/10000

26. Un dado está trucado, de tal manera que la probabilidad de sacar 2 es doble que la de obtener 1, la de sacar 2 es doble que la de obtener 1, la de sacar 3 es el triple de la de 1, y así sucesivamente. Calcular las probabilidades de obtener 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

R. Si llamamos $p(1) = a$, se tiene que $a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a = 1$. De aquí: $p(1) = 1/21$, $p(2) = 2/21$, $p(3) = 3/21$, $p(4) = 4/21$, $p(5) = 5/21$, $p(6) = 6/21$.

27. Se tiene un dado trucado tal que

$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{8}$

$P(5) = \frac{1}{4}$

Calcular las probabilidades de los sucesos siguientes:
a) $A = [6]$
b) $B = [2, 3, 4, 5]$
c) C = [salga número par]
d) $B \cap C$
e) $B \cap C$
f) B^c
R. a) 1/4
b) 5/8
c) 1/2
d) 3/8
e) 1/4
f) 3/8

28. Sabiendo que $p(A) = \frac{1}{3}; p(B) = \frac{1}{4}$

y $P(A \cap B) = \frac{5}{12}$

a) Decir si A y B son compatibles.
b) Calcular $P(A \cap B)$.
R. a) $p(A) + p(B) = 7/12 \neq p(A \cup B)$, luego A y B son compatibles.
b) $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 2/12$.

29. Sabiendo que $P(A) = 1/2$, $P(B^c) = 3/4$ y $P(A \cap B) = 1/12$, calcular:
a) $P(B)$
b) $P(A \cup B)$
c) $P(A^c \cup B^c)$
d) $P(A^c \cap B^c)$
R. a) 1/4
b) 8/12
c) $p(A^c \cup B^c) = p((A \cap B)^c)$
$= 1 - p(A \cap B) = 1 - 1/12$
$= 11/12$

30. De una baraja española de 40 cartas se extrae una al azar. Calcular la probabilidad de que dicha carta sea:

a) Oros o copas.
b) Copas o menor que 5.
c) Bastos o figura o menor que 4.
R. a) 20/40
b) 22/40
c) 28/40

31. A un congreso asisten 25 mujeres (de las cuales 7 hablan francés y 18 inglés) y 30 hombres (10 hablan francés y 20 inglés). Se elige al azar un congresista y se pide calcular la probabilidad de que:

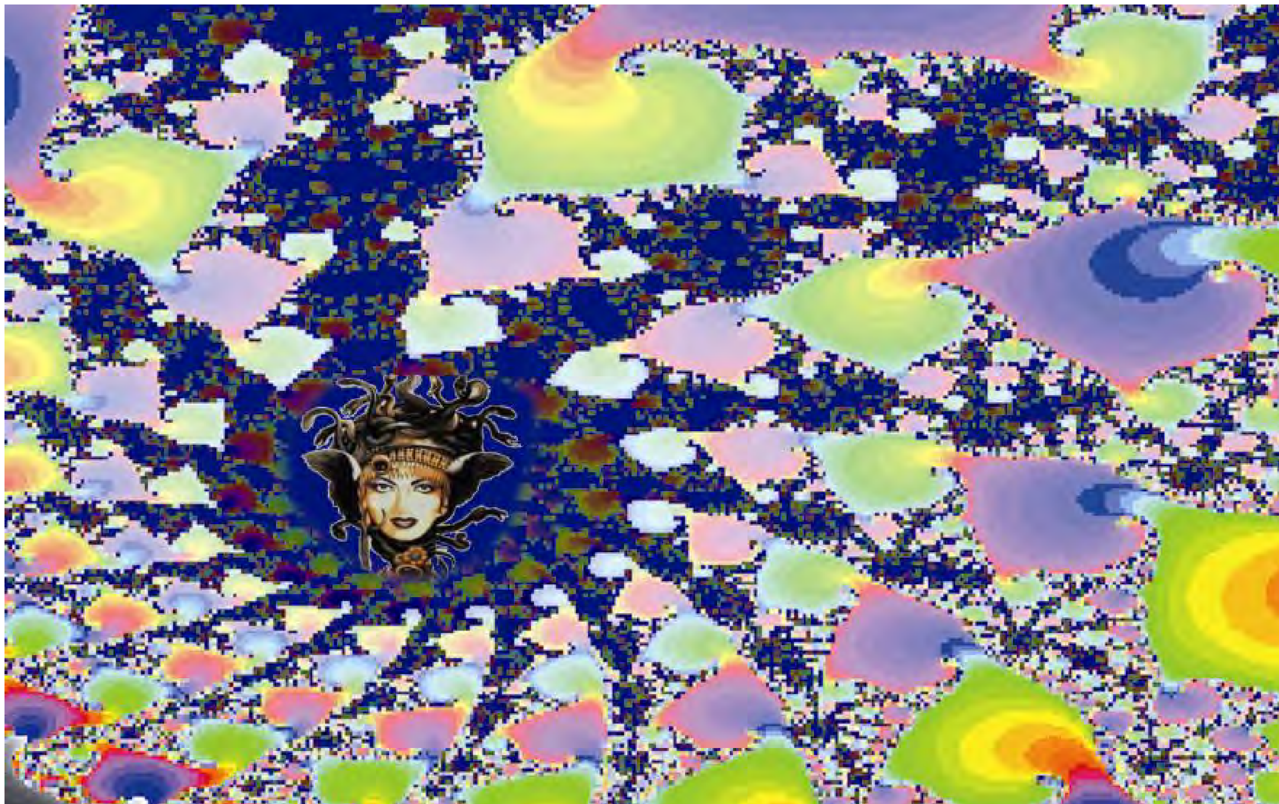
a) Sepa francés.
b) Sea mujer o hable inglés.
c) Sea hombre o hable francés.
R. a) 17/55
b) 45/55
c) 37/55

32. En la fase final del campeonato de baloncesto participan 4 equipos A, B, C y D. Cada uno de ellos tiene 7 jugadores nacionales y 3 extranjeros. Hallar la probabilidad de que al elegir al azar el nombre de un jugador:

a) Sea del equipo A o del D.
b) No sea del equipo D.
c) Sea del equipo C o extranjero.
d) Sea nacional o del equipo C.
e) Sea del equipo B, del D o extranjero.
f) No sea del equipo C o extranjero.
R. a) 20/40
b) 30/40
c) 19/40
d) 31/40
e) 26/40
f) 33/40

33. En una clase aprueban Matemáticas el 60%, Lengua el 50% y el 30% aprueban las dos. Calcular las probabilidades de que elegido un alumno al azar:

a) Apruebe alguna asignatura.
b) No apruebe ninguna.
R. a) 80/100
b) 20/100



El matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) contribuyó poderosamente estableciendo los principios y fundamentos de la moderna estadística.

CAPÍTULO III

PROBABILIDAD CONDICIONADA

La teoría de la probabilidad condicionada, fue gestándose poco a poco, apareciendo de forma implícita en el siglo XVII en unos textos de C. Huygens.

Posteriormente a principios del siglo XVIII, el matemático suizo J. Bernoulli dio a conocer su trabajo respecto a este tema, siendo este muy semejante a la obra del matemático francés De Moivre que fue publicada en 1718 bajo el nombre de *The Doctrine of Chances*, en la cual incluso trata la independencia de más de dos sucesos.

La distribución de probabilidad continua más utilizada es, sin ninguna duda, la distribución normal, también denominada distribución de Gauss.

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Analicemos un par de ejemplos previos:

1. En una encuesta que se hace a 112 personas sobre el color de los ojos se obtiene la siguiente tabla de resultados:

Ojos azules (A)		Ojos negros(N)	
Varones (V)	20	30	50
Hembras (H)	22	40	62
	42	70	112

Los sucesos V, H, A y N representan, respectivamente, los sucesos que se verifican cuando al elegir una persona, ésta resulta ser varón, hembra, tener ojos azules o tener ojos negros.

Si la elección se hace sin condiciones, la probabilidad de elegir una persona con los ojos azules es:

$$p(A)=\frac{42}{112}=\frac{3}{8}$$

La de elegir una persona con los ojos negros será:

$$p(N)=\frac{70}{112}=\frac{5}{8}$$

Sin embargo, si la elección la hacemos sólo entre los varones, las probabilidades de ojos azules y ojos negros son, respectivamente:

$$p(A)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5} \qquad p(N)=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$$

Para que quede claro que son probabilidades calculadas sobre el conjunto de los varones, se escribe $p(A/V)$, que se lee "probabilidad de A condicionada a V" o bien "probabilidad de A supuesto que es V". Las probabilidades de A y N condicionadas a V son, pues:

$$p(\mathrm{A}/\mathrm{V})=\frac{2}{5} \qquad \mathrm{p}(\mathrm{N}/\mathrm{V})=\frac{3}{5}$$

En este colectivo se dan estas otras probabilidades condicionadas:

$$p(\mathrm{A/H})=\frac{22}{62}=\frac{11}{31}; \qquad p(N/H)=\frac{40}{62}=\frac{20}{31};$$

$$p(\mathrm{V/A})=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}; \qquad p(H/N)=\frac{40}{70}=\frac{4}{7};$$

$$p(\mathrm{H/A})=\frac{22}{42}=\frac{11}{21}; \qquad p(V/N)=\frac{30}{70}=\frac{3}{7};$$

Según acabamos de ver, $p(\mathrm{A}/\mathrm{V})=\frac{2}{5}$ y además, del cuadro inicial deducimos que:

$$p(\mathrm{V})=\frac{50}{112}=\frac{25}{56}; \quad \text{y} \quad p(A\cap V)=\frac{20}{112}=\frac{5}{28}$$

La relación existente entre estas tres probabilidades es: $\frac{5}{28}=\frac{25}{56}\bullet\frac{2}{5}$ y de aquí deducimos que:

$$p(A\cap V)=p(\mathrm{V})\bullet p(A/\mathrm{V}) \ \rightarrow\ p(A/\mathrm{V})=\frac{p(\mathrm{A}\cap V)}{p(\mathrm{V})}$$

Por esta razón, adoptamos como definición la siguiente:

Sea A un suceso cuya probabilidad es distinta de cero, y sea B cualquier suceso. Se llama probabilidad de B condicionado a A al cociente:

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

(mide la proporción de veces que ocurre B de entre las que ha ocurrido A).

Veamos que, efectivamente, la probabilidad recién definida cumple los axiomas de probabilidad.

Ax I: Para cualquier suceso S, $p(\mathrm{S}/\mathrm{A})=\frac{p(\mathrm{S}\cap A)}{p(\mathrm{A})}\geq 0$

por ser cociente de números no negativos

Ax II: Sean B y C dos sucesos incompatibles ($B\cap C=\emptyset$). Entonces:

$$\frac{p(B\cup C/A)=p((B\cup C)\cap A)}{p(A)} \underset{\text{Distrib.}}{=} \frac{p((B\cap A)\cup(C\cap A))}{p(A)}$$

Del hecho de ser B y C incompatibles, se deduce que también lo son los subconjuntos de estos: $B\cap A$ y $C\cap A$. Por el segundo axioma de probabilidad, podemos seguir:

$$p(\mathrm{B}\cup C/A)= \ ... \ =\frac{p(B\cap A)+p(C\cap A)}{p(\mathrm{A})}=$$

$$\frac{p(B\cap A)}{p(A)}+\frac{p(C\cap A)}{p(A)}=p(B/A)+p(C/A)$$

tal y como queríamos demostrar.

$$\textbf{Ax III:}\ p(\Omega/\mathrm{A})=\frac{p(\Omega\cap A)}{p(\mathrm{A})}=\frac{p(\mathrm{A})}{p(\mathrm{A})}=1$$

por ser $\Omega\cap A=A$.

Ejemplo

Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea menor que seis si sabemos que dicha suma ha sido múltiplo de cuatro?

Se nos pide la probabilidad:

$$p\ (\text{suma} < 6 \ / \ \text{suma múltiplo de } 4)$$

Utilizando la ley de Laplace:

$p = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$ tenemos :

Casos posibles: No son todos los resultados posibles al lanzar dos dados, sino sólo aquellos que producen una suma múltiplo de 4; es decir:

(1,3) , (2,2) , (2,6) , (3,1) , (3,5) , (4,4) , (5,3) , (6,2) , (6,6)

Casos favorables: Son aquellos de entre los anteriores cuya suma es menor que 6; o sea:

(1,3) , (2,2) , (3,1)

por tanto : $p\left(\text{suma} < 6 \ / \ \text{suma múltiplo de } 4\right) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

Observa que no hemos utilizado la fórmula de la probabilidad condicionada, inténtalo usando dicha fórmula.

CONSECUENCIA: PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN DE DOS SUCESOS

De la fórmula de la probabilidad condicionada deducimos que:

$$p\ (A \cap B) = p\ (A) \bullet p(B \ / \ A)$$

Igualdad llamada teorema de las probabilidades compuestas y que permite el cálculo de la probabilidad del suceso $A \cap B$ conocidas las probabilidades $p\,(A)$ y $p\,(B/A)$.

Ejemplo

Se extraen dos cartas de una baraja de 40. Calcula la probabilidad de que ambas cartas sean reyes.

Solución

Llamando A al suceso: "la primera carta es un rey" y B al suceso: "la segunda carta es un rey", se nos pide la probabilidad del suceso $A \cap B$: "ambas cartas son reyes". Por tanto:

$$p\ (A \cap B) = p(A) \bullet p(B \ / \ A) = \frac{4}{40} \bullet \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

Ten en cuenta que el suceso $B \ / \ A$ es: "sacar rey en la segunda extracción supuesto que en la primera salió rey".

Hay 3 casos favorables (los tres reyes que quedan) sobre 39 posibles (las cartas restantes)

SUCESOS INDEPENDIENTES

Se dice que un suceso B es independiente de otro A cuando $p\,(B/A) = p\,(B)$ (es decir, el suceso A no incluye en B).

Si B es independiente de A, se cumple que:

$$\bullet\ p\ (A \cap B) = p(A) \bullet p\ (B)$$

Efectivamente, pues

$$p\ (A \cap B) = p(A) \bullet p\ (B \ / \ A) \underset{A \text{ i } B}{=} p\ (A) \bullet p\ (B)$$

y recíprocamente, pues si $p\ (A \cap B) = p\ (A) \bullet p(B)$, entonces:

$$p(B \ / \ A) = \frac{p\ (A \cap B)}{p\ (A)} = \frac{p\ (A) \bullet p\ (B)}{p\ (A)} = p(B)$$

• A también es independiente de B, pues:

$$p(A \ / \ B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p\ (A) \bullet p\ (B)}{p\ (B)} = p\ (A) \rightarrow A \text{ i } B$$

Así, pues, diremos simplemente que A y B son independientes cuando ocurre que:

$$p\ (A \cap B) = p(A) \bullet p(B)$$

Cuando dos sucesos no son independientes, se llaman sucesos **dependientes.**

Ejemplo

Al lanzar un dado se consideran los sucesos A: "obtener 2, 4, 5, ó 6" y B : "obtener un número menor que 5". ¿Son A y B sucesos independientes?

Solución

Hemos de comprobar si ocurre que: $p(A \cap B) = p(A) \bullet p(B)$.

El suceso $A \cap B$ es "obtener 2, 4 ó 5" cuya probabilidad es $p\left(A \cap B\right) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Por otra lado $p(A) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ *y* $p(B) = \dfrac{5}{6}$ con lo que $p(A) \bullet p(B) = \dfrac{2}{3} \bullet \dfrac{5}{6} = \dfrac{10}{18} = \dfrac{5}{9}$.

Concluimos entonces que $p(A \cap B) \neq p(A) \bullet p(B)$ y por tanto *A y B* no son independientes, es decir, son sucesos dependientes.

Ejemplo

Se extraen sucesivamente y con devolución dos bolas de una bolsa que contiene 4 bolas numeradas del 1 al 4. Sea *A* el suceso: "obtener número par en la primera extracción", y *B* el suceso: "la segunda bola extraída es impar". ¿Son *A* y *B* independientes?

Solución

Para la independencia de *A y B* hemos de verificar si $p(A \cap B) = p(A) \bullet p(B)$

Evidentemente $p(A) = \frac{1}{2}$, pues hay tantas bolas pares como impares.

Dado que al efectuar la segunda extracción, la urna mantiene la composición inicial, también es:

$$p(B) = \frac{1}{2}$$

Los casos favorables a A ∩ B: "par en la primera e impar en la segunda" son: (2,1), (2,3), (4,1), (4,3).

En total 4 casos sobre un total de $VR_{4,2} = 4^2 = 16$ casos posibles. Por tanto:

$$p(A \cap B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Dado que $p(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = p(A) \bullet p(B)$ se tiene que ambos sucesos son independientes.

EXPERIENCIAS DEPENDIENTES

Dos experimentos son dependientes cuando el resultado del primero influye en las probabilidades de los sucesos del segundo.

Las probabilidades de los sucesos compuestos se calculan así:

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \bullet p(A_2 / A_1)$$

(La probabilidad de que ocurra A_1 en el primer experimento y A_2 en el segundo es la probabilidad de que ocurra A_1 en el primero por la probabilidad de que ocurra A_2 en el segundo supuesto que ha ocurrido A_1 en el primero).

Para tres experimentos:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) \bullet p(A_2 / A_1) \bullet p(A_3 / A_1 \cap A_2)$$

Y en general, $p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = p(A_1) \bullet p(A_2 / A_1) \bullet ... \bullet p(A_n / A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$

Ejemplo

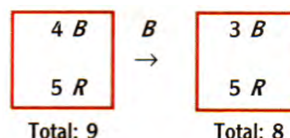
En una urna hay cuatro bolas blancas y cinco bolas rojas. Se extraen consecutivamente dos bolas sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que:

a) Se extraigan dos bolas blancas.
b) Se extraigan una bola blanca y una roja en ese orden.

Llamamos B_i al suceso "obtener bola blanca en la *i*–ésima extracción" y R_i al suceso "obtener bola roja en la *j*–ésima extracción".

El suceso "obtener dos bolas blancas" es $B_1 \cap B_2$ cuya probabilidad es:

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \bullet p(B_2 / B_1) = \frac{4}{9} \bullet \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$$



El suceso "obtener primero blanca y después roja" es $B_1 \cap R_2$ cuya probabilidad es:

$$p(B_1 \cap R_2) = p(B_1) \bullet p(R_2 / B_1) = \frac{4}{9} \bullet \frac{5}{8} = \frac{5}{18}$$

Ejemplo

Calcula la probabilidad de obtener tres ases al extraer sin reemplazamiento tres cartas de una baraja de 40 cartas.

p (3 ases) = *p* (as, as, as) = *p* (as en 1ª) • *p* (as en 2ª/as en 1ª) • *p* (as en 3ª/as en 1ª y en 2ª).



Figura 22

Del gráfico anterior deducimos que:

p (as en 1ª) = $\frac{4}{40}$; *p* (as en 2ª /as en 1ª) = $\frac{3}{39}$;

p (as en 3ª /as en 1ª y 2ª) = $\frac{2}{38}$

luego *p* (3 ases) = $\frac{4}{40} \bullet \frac{3}{39} \bullet \frac{2}{38} = \frac{1}{2470}$

EXPERIENCIAS INDEPENDIENTES

Se dice que dos o más pruebas son independientes cuando el resultado de cada una de ellas no influye en las probabilidades de los distintos resultados de las otras.

Si dos pruebas son independientes y los sucesos A_1 y A_2 corresponden a cada una de ellas respectivamente, se tiene que:

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \bullet p(A_2)$$

En general, si n pruebas son independientes y los sucesos A_1, A_2, . . . , A_n corresponden, respectivamente, a cada una de ellas, se tiene que:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = p(A_1) \bullet p(A_2) \bullet ... \bullet p(A_n)$$

Ejemplo

Halla la probabilidad de que al lanzar un dado cuatro veces se obtenga:

a) Ningún 6
b) Al menos un 6

Solución:

a) p (ningún 6) = p (no 6, no 6, no 6, no 6) $\underset{\text{indep}}{=}$ p (no 6) • p (no 6) • p (no 6) • p (no 6)

$$= \frac{5}{6} \bullet \frac{5}{6} \bullet \frac{5}{6} \bullet \frac{5}{6} = \frac{625}{1296}$$

b) p(ningún 6) = p(no 6, no 6, no 6, no 6) = $1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$

Ejemplo

De una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 rojas y 5 negras se extraen sucesivamente y con devolución tres bolas. Calcular la probabilidad de que las dos primeras bolas extraídas sean blancas y la tercera sea negra.

Solución

En este caso, la composición de la urna no cambia después de cada extracción (son experimentos independientes).

Por tanto, y de acuerdo con la notación anterior, se pide:

$$p(B_1 \cap B_2 \cap N_3) \underset{\text{indep}}{=} p(B_1) \bullet p[B_2] \bullet p(N_3) = \frac{2}{10} \bullet \frac{2}{10} \bullet \frac{5}{10} = \frac{1}{50}$$

PROBABILIDAD TOTAL. TEOREMA DE BAYES

Tenemos n sucesos A_1, A_2, . . . , A_n incompatibles dos a dos $(A_i \cap A_j = \varnothing)$ y tales que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$

Si S es un suceso cualquiera, se tiene que:

$p(S) = p(A_1) \bullet p(S/A_1) + p(A_2) \bullet p(S/A_2) + . . . + p(A_n) \bullet p(S/A_n)$

Demostración:

$$S = \Omega \cap S = (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \cap S =_{\text{Prop.Distrib.}} (A_1 \cap S) \cup (A_2 \cap S) \cup ... (A_n \cap S)$$

y como los sucesos Ai ∩ S son incompatibles dos, se tiene que:

$$p(S) = p(A_1 \cap S) + p(A_2 \cap S) + . . . + p(A_n \cap S) =$$

$$p(A_1) \bullet p(S/A_1) + p(A_2) \bullet p(S/A_2) + . . . + p(A_n) \bullet p(S/A_n)$$

APLICACIÓN AL CASO DE PRUEBAS SUCESIVAS

Tenemos un experimento compuesto de dos. Los sucesos A_1, A_2, . . . , A_n corresponden al primer experimento y cumplen la condición anterior. El suceso S pertenece al segundo experimento.

Se puede llegar a S pasando por A_1 o A_2 o . . . o A_n:

1[er] experimento: A_1 A_2 A_3 ... A_n



S

2º experimento:

La probabilidad de que ocurra S es:

$p(S) = p(A_1) \bullet p(S/A_1) + p(A_2) \bullet p(S/A_2) + . . . + p(A_n) \bullet p(S/A_n)$

Ejemplo

Supongamos dos urnas con la siguiente composición: La primera tiene dos bolas blancas y tres bolas negras; mientras que la segunda tiene cuatro bolas blancas y una negra. Se elige una urna al azar y se extrae una bola. Calcular:

a) La probabilidad de que la bola extraída sea blanca.
b) La probabilidad de haber elegido la primera urna, supuesto que la bola extraída ha sido blanca.

Solución

Llamamos U_1 al suceso "elegir la primera urna" y U_2 al suceso "elegir la segunda urna". B será el suceso "extraer bola blanca".

El apartado **a)** nos pide:

$$p(B) = p(U_1) \bullet p(B/U_1) + p(U_2) \bullet p(B/U_2) =$$
$$\frac{1}{2} \bullet \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \bullet \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

Téngase en cuenta que, como las urnas son elegidas al azar, $p(U_1) = p(U_2) = \frac{1}{2}$.

El apartado **b)** nos pide:

$$p(U_1/B) = \frac{p(U_1 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(U_1) \bullet p(B/U_1)}{p(U_1) \bullet p(B/U_1) + p(U_2) \bullet p(B/U_2)} =$$
$$\frac{\frac{1}{2} \bullet \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} \bullet \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \bullet \frac{4}{5}} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad $p(U_1/B)$ recibe el nombre de probabilidad "a posteriori" y se calcula mediante la fórmula anterior llamada **Teorema de Bayes**.

Obsérvese cómo ha cambiado la probabilidad de elegir la primera urna por el hecho de conocer el resultado de la extracción (el haber obtenido bola blanca nos induce a pensar que seguramente la urna elegida habría sido la segunda y no la primera).

Ejemplo

En una población hay epidemia. El 16 por 100 de los machos y el 9 por 100 de las hembras están enfermos. Hay triple número de machos que de hembras. Se elige al azar un individuo de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que esté enfermo? ¿Y la de que sea macho si se sabe que está enfermo?

Solución

Llamado E al suceso "estar enfermo", M al suceso: "animal macho" y H al suceso: "animal hembra", se tiene, por el teorema de las probabilidades totales que:

$$p(E) = p(M) \bullet p(E/M) + p(H) \bullet p(E/H) =$$
$$\frac{3}{4} \bullet 0{,}16 + \frac{1}{4} \bullet 0{,}9 = 0{,}1425$$

Por otra parte, el suceso: "ser macho si se sabe que está enfermo" es M/E cuya probabilidad calculamos recurriendo al teorema de Bayes:

$$p(M/E) = \frac{p(M) \bullet p(E/M)}{p(M) \bullet p(E/M) + p(H) \bullet p(E/H)} =$$
$$\frac{\frac{3}{4} \bullet 0{,}16}{\frac{3}{4} \bullet 0{,}16 + \frac{1}{4} \bullet 0{,}9} = \frac{48}{57}$$

EJERCICIOS

1. Simultáneamente se sacan dos cartas de una baraja de 40 cartas y se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que las cartas sean sotas y el número del dado sea par?
R. 1/260

2. En una baraja de 40 cartas se toman tres cartas distintas. Calcular la probabilidad de que las tres sean números distintos.
R. 192/247

3. Escogidas cinco personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido en el mismo día de la semana (es decir, en lunes, martes)?
R. 0,85

4. En un cajón de un armario, Juan guarda desordenadamente 3 pares de calcetines blancos y 4 pares de calcetines rojos; otro cajón contiene 4 corbatas blancas, 3 rojas y 2 azules. Para vestirse saca al azar del primer cajón un par de calcetines, y del segundo, una corbata. Hallar la probabilidad de que los calcetines y la corbata sean del mismo color.
R. 8/21

5. Un producto está formado de dos partes A y B. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de un defecto en A es 0,06 y la probabilidad de un defecto en B es 0,07. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no sea defectuoso?
R. 0,8742

6. Una moneda se arroja repetidamente hasta que sale dos veces consecutivas el mismo lado. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:
a) El experimento consta exactamente de 4 lanzamientos.
b) El experimento consta como máximo de 10 lanzamientos.

R. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

7. Una caja contiene 10 bolas blancas, 6 negras y 4 rojas. Si se extraen tres bolas

con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 blancas y una roja?

R. $3\bullet\frac{10}{20}\bullet\frac{10}{20}\bullet\frac{4}{20}$

8. Una caja A tiene 6 bolas blancas y 4 negras, una segunda caja B contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una caja al azar y de ella se extraen 2 bolas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?
R. 53/105

9. Las probabilidades de que cada uno de los tres aviones *A*, *B*, y *C* cumpla su horario previsto son 0,7; 0,8; y 0,9 respectivamente. El comportamiento de cada avión no depende de los otros. Calcula las probabilidades de que cumplan el horario:
a) Los tres aviones.
b) Al menos, dos de ellos.
R. a) 0,7 •0,8 •0,9
b) 0,7 • 0,8 •0,1 + 0,7 •0,2• 0,9 + 0,3 •0,8 •0,9 + 0,7 •0,8 •0,9

10. Se lanza un dado repetidas veces, y estamos interesados en el número de tiradas precisas para obtener un 6 por primera vez. Se pide:
a) ¿Cuál es el espacio muestral?
R. a) $\Omega=\{1,2,3,4,...,n,...\}$
$= N$

11. Dos jugadores arrojan a la vez dos monedas cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos obtengan el mismo número de caras (sea éste cero, una o dos)? Razonarlo detalladamente.

R. $\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2...$

12. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos tres caras al lanzar cinco veces una moneda? ¿Y la obtener tres caras y solamente tres?
R. 1/2

13. Una pieza de artillería dispone de 7 obuses para alcanzar un objetivo. En cada disparo la probabilidad de lanzarlo es 1/7. ¿Cuál es la probabilidad de alcanzar el objetivo con siete obuses? **R.** 0,66

14. De una baraja de 40 cartas se toman cuatro. Hallar la probabilidad de que sean de palos distintos.
R. 0,109

15. Tenemos dos cajas *A* y *B*. En *A* tenemos 8 bolas blancas y 9 negras, y en *B*, 6 bolas blancas y 5 negras. Tomamos una caja al azar y de ella extraeremos dos bolas. Calcular la probabilidad de que las dos sean negras.

R. $\frac{1}{2}\bullet\frac{9}{17}\bullet\frac{8}{16}+\frac{1}{2}\bullet\frac{5}{11}\bullet\frac{4}{10}$

16. Se tiene dos bolsas *A* y *B*. La bolsa *A* contiene 12 bolas blancas y 8 negras y la bolsa *B*, tiene 8 blancas y 12 negras. Se toma una bolsa y se sacan 2 bolas. Calcular la probabilidad de que:
a) Las dos bolas sean blancas.
b) Una sea blanca y la otra negra.
R. a) 0,247 **b)** 0,505

17. Se tiene dos cajas *A* y *B*. En *A* tenemos 5 bolas blancas y 8 negras. En *B*, 5 blancas y 8 negras. Tomamos una caja al azar y de ella extraemos dos bolas. Hallar la probabilidad de que:
a) Las dos negras.
b) Una de cada color.
R. a) 0,246 **b)** 0,523

18. Tenemos dos cajas *A* y *B*. En *A* tenemos 5 bolas blancas y 8 negras. En *B*, 3 blancas y 4 negras. Tomamos una caja al azar y de ella extraemos dos bolas. Hallar la probabilidad de que:
a) Las dos bolas sean blancas.
b) Sean una de cada color.
R. a) 0,200 **b)** 0,542

19. En tres máquinas *A*, *B* y *C* se fabrican piezas de la misma naturaleza. El porcentaje de piezas que resultan defectuosas en cada máquina es respectivamente 1%, 2% y 3%. Se mezclan 300 piezas, 100 de cada máquina y se elige una pieza al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina *A*?
R. 1/6

20. Una caja *A* contiene dos bolas blancas y dos rojas, y otra caja *B* contiene tres blancas y dos rojas. Se pasa una bola de *A* y *B* y después se extrae una bola de *B* que resulta blanca. Determina la probabilidad de que la bola trasladada haya sido blanca.
R. 4/6; 3/6

21. Una caja *A* contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra caja *B*, 6 bolas blancas y 4 negras. Elegimos una caja al azar y extraemos dos bolas que resultan ser negras. Hallar la probabilidad de que la caja elegida haya sido la *B*.

R. $\frac{133}{240}=0,554$

22. Una caja *A* contiene 6 bolas blancas y 3 negras. Otra caja *B* contiene 7 bolas blancas y 2 negras. Elegimos una caja al azar y extraemos de ella dos bolas que resultan ser blancas. Hallar la probabilidad de que la caja elegida haya sido la *A*.
R. 0,416

23. Una caja *A* contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Otra caja *B* tiene 5 blancas y 9 negras. Elegimos una caja al azar y extraemos dos bolas que resultan ser las dos blancas. Hallar la probabilidad de que la caja elegida haya sido la *A*.
R. 0,752

24. En cierto país, donde la enfermedad *X* es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba la ha dado positiva?
R. 0,71

25. Sean *A* y *B* dos montones de cartas. En *A* hay 8 oros y 5 espadas y en *B*, 4 oros y 7 espadas. Sacamos dos cartas del mismo montón y resulta que ambas son espadas. Hallar la probabilidad de que las hayamos sacado del montón *B*. **R.** 0,749

PÁGINA DE RESPUESTAS INTENCIONALMENTE EN BLANCO

PÁGINA DE RESPUESTAS
INTENCIONALMENTE
EN BLANCO